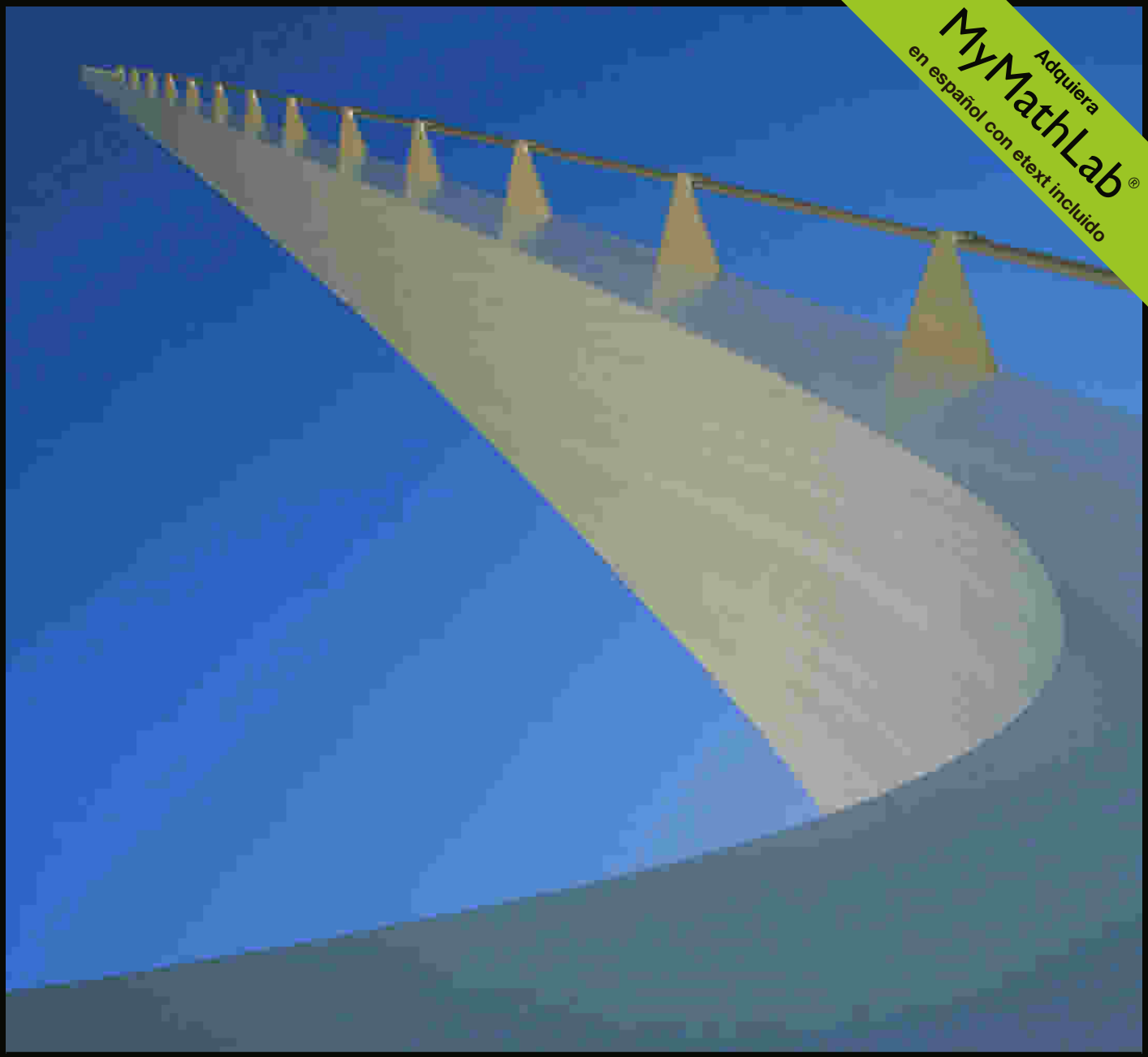
Adquiera
MyMathLab®
en español con etext incluido



THOMAS

Decimotercera edición

CÁLCULO

Una variable

ALWAYS LEARNING

PEARSON

FÓRMULAS BÁSICAS DE ÁLGEBRA

Operaciones aritméticas

$$a(b + c) = ab + ac, \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Leyes de los signos

$$-(-a) = a, \qquad \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Cero La división entre cero no está definida.

$$\text{Si } a \neq 0\text{:} \quad \frac{0}{a} = 0, \quad a^0 = 1, \quad 0^a = 0$$

$$\text{Para cualquier número } a\text{: } a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$$

Leyes de los exponentes

$$a^m a^n = a^{m+n}, \qquad (ab)^m = a^m b^m, \qquad (a^m)^n = a^{mn}, \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Si $a \neq 0$,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad a^0 = 1, \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Teorema del binomio Para cualquier entero positivo n,

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots + nab^{n-1} + b^n.$$

Por ejemplo,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Factorización de la diferencia de potencias enteras iguales, $n > 1$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Por ejemplo,

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$$

Cómo completar un cuadrado

Si $a \neq 0$,

$$ax^2 + bx + c = au^2 + C \qquad \left(u = x + (b/2a),\ C = c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

La fórmula cuadrática

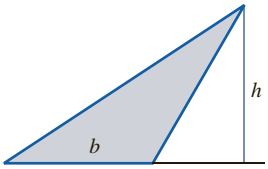
Si $a \neq 0$ y $ax^2 + bx + c = 0$, entonces,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

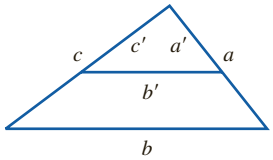
A = área, B = área de la base, C = circunferencia, S = área lateral o área de la superficie, V = volumen

Triángulo



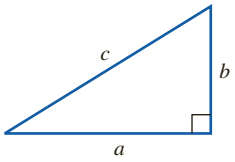
$$A = \frac{1}{2}bh$$

Triángulos semejantes



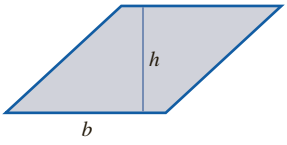
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

Teorema de Pitágoras



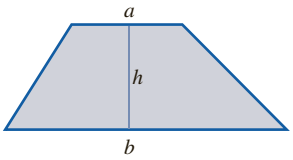
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Paralelogramo



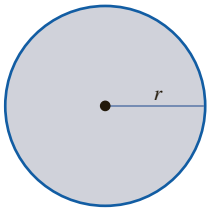
$$A = bh$$

Trapecio



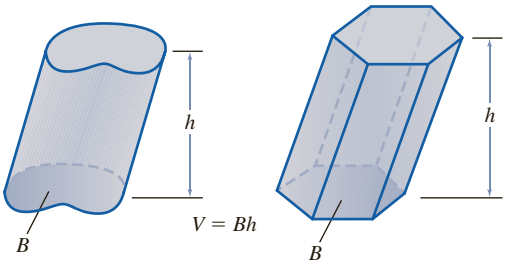
$$A = \frac{1}{2}(a + b)h$$

Círculo

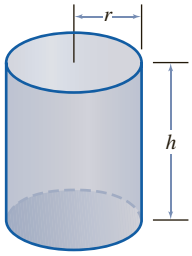


$$A = \pi r^2,\quad C = 2\pi r$$

Cualquier cilindro o prisma con bases paralelas



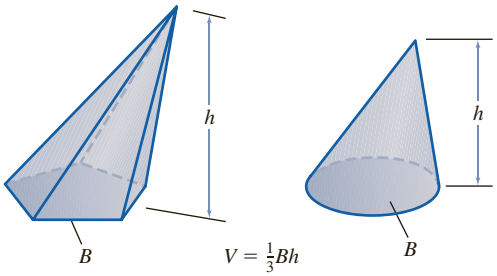
Cilindro circular recto



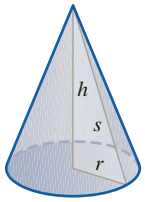
$$V = \pi r^2 h$$

$S = 2\pi rh$ = Área lateral

Cualquier cono o pirámide



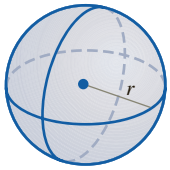
Cono circular recto



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$S = \pi rs$ = Área lateral

Esfera



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$S = 4\pi r^2$$

THOMAS

CÁLCULO

Una variable

THOMAS

CÁLCULO

Una variable

DECIMOTERCERA EDICIÓN

George B. Thomas, Jr.
Massachusetts Institute of Technology

REVISADA POR
Maurice D. Weir
Naval Postgraduate School

Joel Hass
University of California, Davis

CON LA COLABORACIÓN DE
Christopher Heil
Georgia Institute of Technology

TRADUCCIÓN
Ana Elizabeth García Hernández
Instituto Politécnico Nacional, México

REVISIÓN TÉCNICA
César Luis García García
Carlos Bosch Giral
Claudia Gómez Wulschner
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México

PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

Thomas, George; Weir, Maurice D.;
Hass, Joel y Heil, Christopher

Thomas. Cálculo. Una variable

Decimotercera edición
PEARSON EDUCACIÓN, México, 2015

ISBN: 978-607-32-3331-6
Área: Matemáticas

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 776

Authorized translation from the English language edition entitled *Thomas' Calculus. Single Variable, 13th Edition*, by *George B. Thomas, Jr., Maurice D. Weir, Joel Hass, Christopher Heil,* published by Pearson Education Inc., Copyright © 2014. All rights reserved.
ISBN 9780321884046

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés titulada *Thomas' Calculus. Single Variable, 13ª Edición*, por *George B. Thomas, Jr., Maurice D. Weir, Joel Hass, Christopher Heil*, publicada por Pearson Education Inc., Copyright © 2014. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en español

Director General:	Sergio Fonseca Garza
Director de Contenidos y Servicios Digitales:	Alan David Palau
Editora Sponsor:	Rosa Díaz Sandoval e-mail: rosa.diaz@pearson.com
Editor de Desarrollo:	Bernardino Gutiérrez Hernández
Supervisor de Producción:	Enrique Trejo Hernández
Gerente de Contenidos Educación Superior:	Marisa de Anta

DECIMOTERCERA EDICIÓN, 2015

D.R. © 2015 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Antonio Dovalí Jaime núm. 70
Torre B, Piso 6, Colonia Zedec, Ed Plaza Santa Fe
Delegación Álvaro Obregón, C.P. 01210, México, D.F.

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN: 978-607-32-3331-6
ISBN E-BOOK: 978-607-32-3329-3
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-3334-7

Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 18 17 16 15

PEARSON

www.pearsonenespañol.com

Agradecimientos

Nuestra gratitud para todos los profesores que han impartido la materia de *Cálculo* con el apoyo del presente libro. Sus valiosos comentarios han servido para enriquecer esta edición. En especial, deseamos agradecer el apoyo y la retroalimentación que nos han brindado los siguientes profesores:

ARGENTINA

Emilio Suárez
Instituto Tecnológico de Buenos Aires

Haydee Castelletti
Silvia Adriana Mamone
Universidad de Belgrano

Viviana Niselman
Universidad de Buenos Aires

Gladis Beatriz Astargo
Horacio Day
Universidad Nacional de Cuyo

Isabel Weinberg
Universidad Nacional de la Matanza

Ángela Maldonado
Augusto Melgarejo
Delicia Tisera
Diego Vallejo
José Suárez
Laura Langoni
María Inés Otegui
María Teresa Guardarucci
Mariel Lavaña
Mercedes Trípoli
Miguel Sanservino
Néstor Bucari
Universidad Nacional de la Plata

Angélica Arnulfo
Beatriz Introcaso
Emilio Sastre
José Botto
María Susana Montelar
Mónica Caserío
Universidad Nacional de Rosario

Elena Arlauskas
Gabriela Righetti
Universidad Tecnológica Nacional Regional Avellaneda

COLOMBIA

Bernardo Aldana Gómez
Néstor Raúl Pachón
Escuela Colombiana de Ingeniería-Bogotá

Elías Cardona
ICESI

Antonio Merchán
Fernando Novoa
Gerardo Tole
Héctor Linares
Irina Reyes
Ismael García
Jaime Gómez
Juan Carlos Quintero
Liliana Barreto
Moisés Aranda
Nazly Esmeralda Salas
Rafael Castro
Pontificia Universidad Javeriana

Laureano Valencia
Oswaldo Rodríguez Díaz
Universidad Autónoma de Occidente-Cali

Mario Bravo
Universidad de San Buenaventura-Cali

José Villada
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

CHILE

Juan Duarte
Universidad de Antofagasta

Clarita Balbontín
Universidad de los Andes

Julio Hugo Ramírez
Universidad de Viña del Mar

ECUADOR

Eduardo Alba
Universidad San Francisco de Quito

ESPAÑA

Nilo Carlos Bobillo Ares
Universidad de Oviedo

María Elena Vázquez Cendón
Universidad de Santiago de Compostela

Alberto García Cristóbal
Domingo Martínez García
Julio Pellicer Porres
Juan Francisco Sánchez Royo
Universitat de Valéncia

MÉXICO

María Elvira Guardiola Martínez
Centro de Enseñanza Técnica Industrial

Ernesto Tello Basurto
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Instituto Politécnico Nacional, Culhuacán

José Antonio Rodríguez Luna
Facultad de Estudios Superiores Aragón
Universidad Nacional Autónoma de México

Juan Manuel Calderón Cortés
José Luz Hernández Castillo
Iván Noé Mata Vargas
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán
Universidad Nacional Autónoma de México

María Antonieta Araceli Reyes Guerrero
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Humberto Hipólito García Díaz
María Guadalupe Lomelí Plascencia
Ma. Margarita Orozco Gómez
Instituto Tecnológico y de Estudios
Superiores de Monterrey
Campus Guadalajara

Lauro Ayala
Juan José Carracero
Dulce Hernández Méndez
Sithanntham Kanthimathinatan
Lucio López Cavazos
María Griselda Tapia Mercado
Instituto Tecnológico y de Estudios
Superiores de Monterrey
Campus Querétaro

Rogelio Morales
Lino Andrea Notarantonio
Instituto Tecnológico y de Estudios
Superiores de Monterrey
Campus Santa Fe

José Carlos Ahumada Flores
Óscar Vidal Arellano Tanori
Ricardo Betancourt Riera
José Jesús Cayetano Borquez Gamboa
Pedro Anuar Castellanos López
Lourdes Contreras Beltrán
Rosa Ahimé Corral Guerrero
Trinidad Corral Sandoval
Maximino Dorame Velázquez
Lázaro Alberto Ferrer Moreno
Benjamín Hernández Fimbres
Roxana Martínez Campusano
Gabriel Martínez Chávez
Hilario Mayboca Araujo
Alejandro Medellín Valdés
Francisco Medellín Valdés
Gloria Angélica Moreno Durazo
Dámaso Ochoa Landín
Carlos Alberto Pereyda Pierre
Julia Graciela Preciado León
Flor Ramírez Torres
Adolfo Rivera Castillo
Jesús Manuel Solís Santoscoy
Francisco Javier Zamora Aguirre
Instituto Tecnológico de Hermosillo

Ana María Aspeitia Arellano
Edgar Antonio Peña Domínguez
Jorge Armando Ramírez De la Torre
Instituto Tecnológico de La Laguna

Juan Manuel Araujo
Perfecto Barragán
Marco Antonio Cervantes Aguilar
José Escárcega Castellanos
Mirna Carolina Fuentes García
Alejandro García Blanco
Jorge Luis Gil Sevilla
Elizabeth González León
Francisca del Socorro González Peralta

Adriana Guerrero Martínez
Mireya Morales Corral
José Luis Porras Molina
Daniel Ramírez Zúñiga
Karina Reyes Lio
Enoch Robles Díaz
Raúl Gustavo Robles Montijo
Carlos Benigno Robles Verduzco
Rosalinda Ruiz Ibarra
Zindi Sánchez Hernández
Claudia Ericka Sánchez Martínez
Efrén Santini Durán
Marlene Smith
Israel Tarazón Acuña
Omar Velarde Anaya
Lourdes Villarino García
Andrea Alejandra Zabala Robles
Instituto Tecnológico de Nogales

Ángela Rebeca Garcés Rodríguez
Instituto Tecnológico de San Luis Potosí

Juan Francisco Meléndez Elizalde
Héctor Osorio Ramírez
Ciria Salinas López
Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec

Arturo Hidalgo Aguilar
Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas
Instituto Politécnico Nacional

Prisciliano Aguilar
Félix Almendra Arao
Jorge Fernando Ángeles Islas
Iliana Cristina Carrillo Ibarra
Carlos Cruz
Fernando Estrada Oliva
Juan González García
Manuel González Sarabia
Rogelio Jiménez Fragoso
Igor Lashkevych
Marco Antonio Macías Cedeño
Pablo Mendoza Iturralde
Augusto Guadalupe Miss Paredes
Jorge Pérez Hernández
José Rubén Pérez Hernández
Marco Antonio Reyes Guzmán
Israel Reyes Ramírez
Fernando Vallejo Aguirre
Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas
Instituto Politécnico Nacional

Víctor Hugo Ibarra Mercado
Gerardo Maldonado
Enrique Zamora Gallardo
Universidad Anáhuac, México Norte

José Antonio Bohon Devars
Universidad Anáhuac, México Sur

Mario Mesino González
Universidad Autónoma de Guadalajara

Eduardo Castillo Montemayor
Magda Patricia Estrada Castillo
Homero Estrada Cortina
Vitaly Kalashnikov
Claudia Sánchez Vela
Universidad Autónoma de Nuevo León

María Eugenia Andreu Ibarra
Marina Salazar Antúnez
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

Maribel Fuentes Dávila
Patricia González Miranda
Ana María González Piña
María Cristina Ramírez Palacios
Ayax Santos Guevara
Juan Carlos Tudón Martínez
Universidad de Monterrey

Samuel Espinoza Guillén
Emma Lilia Fierros Pesqueira
Universidad Estatal de Sonora

Humberto Mondragón Suárez
Universidad Iberoamericana

Carlos Álvarez Maciel
Filiberto Mata Pérez
Rosalba Rodríguez Chávez
Francisco Javier Romero Andrade
José Rosillo Martínez
Guadalupe Silva Esparza
Tonatihu Valdez Hernández
Universidad Nacional Autónoma de México

Porfirio Rafael Pérez Cisneros
Universidad Tecnológica de la Zona Metropolitana de Guadalajara

Romualdo Guadalupe de la Cruz
Universidad Tecnológica de Tamaulipas, Norte

PERÚ

Luis Díaz Bazurco
Wilber Ramos Lovón
Universidad Católica de Santa María-Arequipa

José Cuevas González
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas

VENEZUELA

Elvira Sabal
Milagros Bosquetti
Universidad Católica Andrés Bello

Jesús Hernández
José Luis Quinteros
María de Armas
María Luisa Vonna
Marienma Sánchez
Universidad Central de Venezuela

Contenido

Prefacio xiii

1 Funciones 1

1.1 Funciones y sus gráficas 1
1.2 Combinación de funciones; traslaciones y cambios de escala en gráficas 14
1.3 Funciones trigonométricas 21
1.4 Graficación con software 29
Preguntas de repaso 36
Ejercicios de práctica 36
Ejercicios adicionales y avanzados 38
Proyectos de aplicación tecnológica 40

2 Límites y continuidad 41

2.1 Razones de cambio y tangentes a las curvas 41
2.2 Límite de una función y leyes de los límites 48
2.3 Definición formal de límite 59
2.4 Límites laterales 68
2.5 Continuidad 75
2.6 Límites que involucran infinito y asíntotas de gráficas 86
Preguntas de repaso 99
Ejercicios de práctica 100
Ejercicios adicionales y avanzados 102
Proyectos de aplicación tecnológica 104

3 Derivadas 105

3.1 Tangentes y la derivada en un punto 105
3.2 La derivada como una función 110
3.3 Reglas de diferenciación 118
3.4 La derivada como razón de cambio 127
3.5 Derivadas de funciones trigonométricas 137
3.6 Regla de la cadena 144
3.7 Diferenciación implícita 151
3.8 Tasas relacionadas 156
3.9 Linealización y diferenciales 165
Preguntas de repaso 177
Ejercicios de práctica 177
Ejercicios adicionales avanzados 182
Proyectos de aplicación tecnológica 184

4 Aplicaciones de las derivadas 185

4.1 Valores extremos de las funciones 185
4.2 El teorema del valor medio 193
4.3 Funciones monótonas y el criterio de la primera derivada 199
4.4 Concavidad y trazado de curvas 204
4.5 Optimización aplicada 215
4.6 El método de Newton 227
4.7 Antiderivadas 232
Preguntas de repaso 242
Ejercicios de práctica 243
Ejercicios adicionales y avanzados 245
Proyectos de aplicación tecnológica 248

5 Integrales 249

5.1 Área y su estimación mediante sumas finitas 249
5.2 Notación sigma y límites de sumas finitas 259
5.3 La integral definida 266
5.4 El teorema fundamental del cálculo 278
5.5 Integrales indefinidas y el método de sustitución 289
5.6 Sustituciones en integrales definidas y el área entre curvas 296
Preguntas de repaso 306
Ejercicios de práctica 306
Ejercicios adicionales y avanzados 309
Proyectos de aplicación tecnológica 312

6 Aplicaciones de las integrales definidas 313

6.1 Cálculo de volúmenes mediante secciones transversales 313
6.2 Cálculo de volúmenes por medio de casquillos cilíndricos 324
6.3 Longitud de arco 331
6.4 Áreas de superficies de revolución 337
6.5 Trabajo y fuerzas de fluidos 342
6.6 Momentos y centros de masa 351
Preguntas de repaso 362
Ejercicios de práctica 362
Ejercicios adicionales y avanzados 364
Proyectos de aplicación tecnológica 365

7 Funciones trascendentes 366

7.1 Funciones inversas y sus derivadas 366
7.2 Logaritmos naturales 374
7.3 Funciones exponenciales 382
7.4 Cambios exponenciales y ecuaciones diferenciales separables 393
7.5 Formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital 403
7.6 Funciones trigonométricas inversas 411
7.7 Funciones hiperbólicas 424

7.8 Razones relativas de crecimiento 433
Preguntas de repaso 438
Ejercicios de práctica 439
Ejercicios adicionales y avanzados 442

8 Técnicas de integración 444

8.1 Uso de las fórmulas básicas de integración 444
8.2 Integración por partes 449
8.3 Integrales trigonométricas 457
8.4 Sustituciones trigonométricas 463
8.5 Integración de funciones racionales por medio de fracciones parciales 468
8.6 Tablas de integrales y sistemas de álgebra por computadora 477
8.7 Integración numérica 482
8.8 Integrales impropias 492
8.9 Probabilidad 503
Preguntas de repaso 516
Ejercicios de práctica 517
Ejercicios adicionales y avanzados 519
Proyectos de aplicación tecnológica 523

9 Ecuaciones diferenciales de primer orden 524

9.1 Soluciones, campos de dirección y el método de Euler 524
9.2 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden 532
9.3 Aplicaciones 538
9.4 Soluciones gráficas de ecuaciones diferenciales autónomas 544
9.5 Sistemas de ecuaciones y planos de fase 551
Preguntas de repaso 557
Ejercicios de práctica 557
Ejercicios adicionales y avanzados 558
Proyectos de aplicación tecnológica 559

10 Sucesiones y series infinitas 560

10.1 Sucesiones 560
10.2 Series infinitas 572
10.3 Criterio de la integral 581
10.4 Criterios de comparación 588
10.5 Convergencia absoluta; criterios de la raíz y de la razón 592
10.6 Series alternantes y convergencia condicional 598
10.7 Series de potencias 604
10.8 Series de Taylor y de Maclaurin 614
10.9 Convergencia de series de Taylor 619
10.10 La serie binomial y aplicaciones de las series de Taylor 626
Preguntas de repaso 635
Ejercicios de práctica 636
Ejercicios adicionales y avanzados 638
Proyectos de aplicación tecnológica 640

El capítulo 11 se encuentra en español en formato PDF en el sitio web del libro*

11 **Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares** 641

11.1 Parametrización de curvas planas 641
11.2 Cálculo con curvas paramétricas 649
11.3 Coordenadas polares 659
11.4 Gráficas de ecuaciones en coordenadas polares 663
11.5 Áreas y longitudes en coordenadas polares 667
11.6 Secciones cónicas 671
11.7 Secciones cónicas en coordenadas polares 680
Preguntas de repaso 687
Ejercicios de práctica 687
Ejercicios adicionales y avanzados 689
Proyectos de aplicación tecnológica 691

Apéndices AP-1

A.1 Números reales y recta de los reales AP-1
A.2 Inducción matemática AP-6
A.3 Rectas, circunferencias y parábolas AP-10
A.4 Demostración de los teoremas de límites AP-19
A.5 Límites que se presentan comúnmente AP-22
A.6 Teoría de los números reales AP-23
A.7 Números complejos AP-26
A.8 Ley distributiva para el producto cruz de vectores AP-35
A.9 El teorema de la derivada mixta y el teorema del incremento AP-36

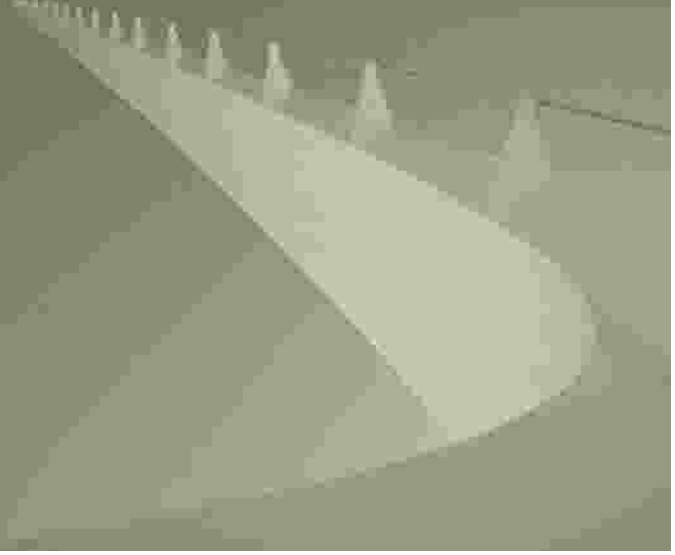
Respuestas a los ejercicios con número impar R-1

Índice I-1

Créditos C-1

Breve tabla de integrales T-1

* Este capítulo se encuentra impreso en el libro Thomas, Cálculo. Varias variables.



Prefacio

Esta nueva edición de *Cálculo* de Thomas ofrece una introducción moderna al cálculo, enfocada en la comprensión integral de los elementos fundamentales de un curso tradicional. Este material se puede utilizar tanto para un curso de cálculo de tres semestres como para uno de cuatro trimestres, que por lo general toman los estudiantes de matemáticas, ingeniería y ciencias. Explicaciones precisas, ejemplos meticulosamente seleccionados, figuras que aclaran las ideas y conjuntos de ejercicios que han demostrado ser efectivos son el fundamento del presente libro. Y queremos seguir mejorando el texto atendiendo a los cambios en la preparación y las exigencias de los estudiantes, así como las aplicaciones del cálculo en un mundo dinámico.

Muchos de nuestros alumnos tuvieron un primer contacto con la terminología y los procedimientos del cálculo durante el bachillerato; no obstante, las habilidades adquiridas sobre álgebra y trigonometría suelen ser insuficientes para alcanzar el éxito en un curso de cálculo de nivel universitario. En el presente texto buscamos equilibrar la experiencia de los estudiantes en cálculo con el desarrollo de habilidades algebraicas que podrían necesitar, sin retrasar su progreso en aquella disciplina. Hemos tenido cuidado de presentar suficiente material de repaso (tanto en el texto como en los apéndices), soluciones detalladas, y gran diversidad de ejemplos y ejercicios para lograr una comprensión plena del cálculo por parte de estudiantes de todos los niveles. Presentamos el material de una forma que estimula al alumno a pensar e ir más allá de la simple memorización de fórmulas y procedimientos de rutina. Tan pronto como exponemos los conceptos clave, mostramos cómo generalizarlos. De manera continua se hacen referencias para vincular un concepto nuevo con alguno que se estudió antes, o bien, con algo que se verá más adelante. Después de estudiar este libro, los usuarios habrán desarrollado habilidades de solución y razonamiento de problemas que les servirán considerablemente en varios aspectos importantes de su vida. El dominio de esta hermosa y creativa materia, junto con muchas aplicaciones prácticas en diferentes campos, es en sí mismo una recompensa. Pero el verdadero regalo de estudiar cálculo es adquirir la habilidad de pensar lógica y objetivamente, y aprender a generalizar conceptos. El libro que tienen en sus manos fomenta y apoya el logro de tales metas.

Novedades en la presente edición

En esta nueva edición combinamos el pensamiento conceptual con la lógica y la estructura general del cálculo de una y varias variables. Continuamos mejorando en calidad y precisión, atendiendo las sugerencias de los usuarios de ediciones anteriores. Al mismo tiempo que cuidamos la extensión de la obra, incluimos ejemplos adicionales a lo largo del texto. Se agregaron varios ejercicios nuevos de todos los niveles de dificultad, pero el principal foco de atención fueron los ejercicios de nivel medio. Se reelaboraron varias figuras y se agregaron algunas inéditas para mejorar la visualización. Escribimos una sección nueva

sobre probabilidad, la cual ofrece una aplicación importante de integración en el ámbito de las ciencias biológicas.

Se conservaron la estructura básica de la tabla de contenido y las mejoras de la edición anterior; y en el proceso agregamos algunas otras significativas, las cuales se detallan a continuación:

- **Funciones** En el tema del uso del software para el trabajo de graficación agregamos una breve sección de ajuste de curvas por mínimos cuadrados que permite a los estudiantes aprovechar esta aplicación ampliamente difundida. El material que es prerrequisito para el tema se repasa en los apéndices 1 a 3.
- **Continuidad** Se expusieron con más claridad los conceptos de continuidad asignando el término "puntos extremos" a los intervalos, en lugar de utilizarlos en dominios más generales. La sección referente a la extensión de la continuidad de una función se trasladó al final de la sección acerca de continuidad.
- **Derivadas** Incluimos una breve visión geométrica para justificar la regla de L'Hôpital. También enriquecimos y aclaramos el significado de diferenciabilidad de funciones de varias variables, al tiempo que agregamos el resultado de la regla de la cadena para funciones definidas a lo largo de una trayectoria.
- **Integrales** Escribimos una sección nueva revisando las fórmulas básicas de integración y la regla de sustitución, empleándolas en combinación con identidades trigonométricas y algebraicas, antes de presentar otras técnicas de integración.
- **Probabilidad** Creamos una nueva sección de aplicación de integrales impropias para algunas distribuciones de probabilidad que se utilizan con frecuencia, como las distribuciones exponencial y normal. Muchos ejemplos y ejercicios relacionados se aplican a las ciencias biológicas.
- **Series** Ahora presentamos la idea de convergencia absoluta, antes de introducir los criterios de la razón y la raíz, los cuales se enuncian más adelante de forma más precisa. La convergencia condicional se introduce posteriormente, junto con el criterio de la serie alternante.
- **Cálculo vectorial y de varias variables** Se presenta una visión más geométrica del concepto de integrales múltiples, y enfatizamos el significado del jacobiano en el uso de sustituciones para evaluarlas. El concepto de integrales de superficie de campos vectoriales ahora se presenta de manera paralela a la idea de integrales de línea de campos vectoriales. También mejoró el análisis de divergencia y del rotacional de un campo vectorial.
- **Ejercicios y ejemplos** Una de las características distintivas de este libro es la inclusión de conjuntos de ejercicios de alto nivel, lo cual se fortalece en cada nueva edición. Ahora actualizamos, modificamos y agregamos muchos ejercicios y ejemplos, prestando atención especial a la inclusión de más aplicaciones a las áreas de ciencias biológicas y a problemas contemporáneos. Por ejemplo, se actualizó un ejercicio sobre el producto interno bruto de Estados Unidos; se agregaron ejercicios nuevos relacionados con las dosis de medicamentos y sus concentraciones en el cuerpo humano, la estimación de la tasa a la que se fuga el petróleo de una tubería averiada, y el pronóstico referente al aumento de costos en la inscripción a la universidad.

Características que se conservan

RIGOR El contenido del texto es tan sólido y consistente como en las ediciones anteriores. Continuamos empleando análisis tanto formales como informales, pero dejando en claro sus diferencias. Creemos que iniciar con un enfoque más intuitivo y menos formal ayuda a los estudiantes a entender mejor un concepto nuevo, o difícil, y a apreciar plenamente su significado matemático junto con los resultados. Pusimos atención especial en la definición

de conceptos y en la demostración adecuada de los teoremas a los estudiantes de cálculo, al tiempo que resaltamos temas más profundos o sutiles que podrían encontrar en cursos más avanzados. La organización y las distinciones entre los análisis formales e informales dan al profesor un grado de flexibilidad considerable en cuanto a la profundidad y cobertura de los diferentes temas. Por ejemplo, los teoremas del valor intermedio y del valor extremo para funciones continuas en $a \leq x \leq b$ se demuestran tan sólo después de enunciar los teoremas de manera precisa, ilustrando sus significados con numerosos ejemplos y usándolos para demostrar otros resultados importantes. Asimismo, para los profesores que deseen mayor profundidad en la cobertura, en el apéndice 6 se analiza cómo la validez de dichos teoremas depende de la propiedad de completitud de los números reales.

EJERCICIOS Los ejercicios incluidos a lo largo del texto exigen a los estudiantes explorar y explicar una gran variedad de conceptos y aplicaciones de cálculo. Además, al final de cada capítulo se incluye una lista de preguntas para que los estudiantes repasen y resuman lo que aprendieron. Muchos de estos ejercicios se pueden utilizar como tareas.

PROYECTOS Y REPASO DE FINAL DE CAPÍTULO Además de los problemas que aparecen después de cada sección, todos los capítulos terminan con preguntas de repaso, ejercicios de práctica que cubren todo el capítulo, y una serie de ejercicios adicionales y avanzados que sirven para agregar problemas más desafiantes o de síntesis. La mayoría de los capítulos incluye también descripciones de varios **proyectos de aplicación tecnológica** que los estudiantes pueden trabajar, ya sea individualmente o en equipo, durante un periodo más prolongado. Se trata de proyectos que requieren del uso de una computadora donde corra *Mathematica* o *Maple*, y de material adicional disponible en el sitio web de este libro.

ESCRITURA Y APLICACIONES Como siempre, este texto pretende ser matemáticamente fértil y sencillo de leer; por eso utiliza un tono conversacional. Cada tema nuevo se explica con claridad, se ilustra con ejemplos de fácil comprensión y se refuerza con aplicaciones a problemas reales que resulten de interés para los estudiantes. El sello del presente libro ha sido la aplicación del cálculo a ciencias e ingeniería. Los problemas de aplicación se han actualizado, mejorado y ampliado a lo largo de las últimas ediciones.

TECNOLOGÍA En un curso que utilice este libro, se puede incorporar fácilmente la tecnología según los deseos del profesor. Para ello, cada sección incluye ejercicios que requieren el uso de tecnología, identificándolos con una T cuando sean adecuados para resolverse con la ayuda de una calculadora o una computadora, o bien, se identifican con el título **Exploraciones con computadora** si es necesario un software matemático (como *Maple* o *Mathematica*).

Recursos adicionales

MANUAL DE SOLUCIONES PARA EL PROFESOR (en inglés)

Incluye soluciones completas para todos los ejercicios de este texto, y está disponible de forma gratuita para los profesores que adopten este libro en sus cursos; póngase en contacto con su representante de Pearson o visite **www.pearsonenespañol.com/thomas**

Manuales de recursos tecnológicos (en inglés)

El *Manual de Maple* escrito por Marie Vanisko, de Carroll College, el *Manual de Mathematica* escrito por Marie Vanisko, de Carroll College y el *Manual de la Calculadora TI-Graphing* escrito por Elaine McDonald-Newman, de Sonoma State University, están a la venta en el sitio web del libro en inglés (**http://www.pearsonhighered.com/thomas**); puede consultar versiones preliminares desde nuestro sitio web. Los manuales referidos cubren los programas *Maple* 17, *Mathematica* 8 y las calculadoras TI-83 Plus/TI-84 Plus y TI-89, respectivamente. Cada uno ofrece una guía detallada para integrar un paquete específico de software o una calculadora gráfica a lo largo del curso, incluyendo sintaxis y comandos.

SITIO WEB

El sitio web de este libro contiene, entre otros recursos, biografías de personajes relacionados con la historia del cálculo, los manuales de recursos tecnológicos y los **Proyectos de aplicación tecnológica**, que pueden utilizar los estudiantes, ya sea individualmente o en equipo.

MyMathLab en español® (se requiere código de acceso)

Ofrece **resultados comprobados** al ayudar a los estudiantes a obtener éxito individual en la materia.

- Tiene un efecto positivo y consistente en la capacidad de aprendizaje de las matemáticas en el nivel de educación superior. MyMathLab en español se puede implementar con éxito en cualquier ambiente —de laboratorio, híbrido, totalmente en línea o tradicional—, y su uso muestra una diferencia cuantificable en la capacidad de retención de los estudiantes y su éxito posterior.
- La libreta de calificaciones en línea de MyMathLab en español rastrea automáticamente los resultados de los alumnos en exámenes y tareas, así como su avance en el plan de estudios. Puede usar la libreta de calificaciones para intervenir rápidamente si sus alumnos tienen problemas, o para brindarles retroalimentación en un trabajo bien hecho. Los datos de MyMathLab en español se exportan fácilmente a una variedad de programas de hojas de cálculo, como Excel de Microsoft. Usted puede determinar qué datos desea exportar y luego analizar los resultados para medir el éxito.

MyMathLab en español ofrece **atractivas experiencias** que personalizan, estimulan y miden el aprendizaje de cada estudiante.

- **Capítulo acerca de "cómo prepararse"**: Incluye cientos de ejercicios referentes a las habilidades necesarias de álgebra y trigonometría. Cada estudiante puede recibir apoyo en aquellas habilidades donde lo necesite.
- **Ejercicios**: En MyMathLab en español los ejercicios de tarea y práctica están correlacionados con los del texto, y se generan de manera algorítmica para dar oportunidad ilimitada de adquirir práctica y dominio de los temas. El software ofrece retroalimentación inmediata cuando los estudiantes introducen respuestas incorrectas.
- **Apoyo de aprendizaje multimedia**: Los ejercicios incluyen soluciones guiadas, problemas de ejemplo y acceso a eText para apoyo adicional en el momento en que se necesite.
- Utilizar un producto de Pearson significa usar contenido de calidad. Usted tiene la certeza de que nuestros eText son precisos y nuestras herramientas de evaluación funcionan. Debe saber también que estamos comprometidos en hacer MyMathLab tan accesible como sea posible.
- Si usted está iniciando con MyMathLab en español, o tiene alguna pregunta, estaremos gustosos de ayudarle a que conozca nuestra tecnología y sepa cómo incorporarla a su curso.

Para aprender más acerca de cómo MyMathLab combina aplicaciones de aprendizaje con una evaluación poderosa, visite **http://espanol.mymathlabglobal.com/** o póngase en contacto con su representante de Pearson.

Los productos de MyMathLab en español® se pueden adquirir en puntos de venta y en **www.mypearsonshop.com.mx**

TestGen®

Permite a los profesores elaborar, editar, imprimir y administrar exámenes, utilizando un banco de preguntas computarizado, desarrollado para cubrir todos los objetivos del texto. TestGen tiene como base un algoritmo que permite a los profesores crear múltiples versiones, aunque equivalentes, de una misma pregunta o de un examen, con tan sólo hacer clic en un botón. Los profesores también pueden modificar las preguntas del banco de exámenes o agregar nuevas preguntas. Testgen puede descargarse del sitio web de este libro.

Reconocimientos

Queremos expresar nuestro agradecimiento a las personas que hicieron muchas e invaluables contribuciones a esta edición conforme se desarrollaba en sus diferentes etapas:

Revisores

Lisa Collette
Patricia Nelson
Tom Wegleitner

Revisores de ediciones recientes

Meighan Dillon, *Southern Polytechnic State University*
Anne Dougherty, *University of Colorado*
Said Fariabi, *San Antonio College*
Klaus Fischer, *George Mason University*
Tim Flood, *Pittsburg State University*
Rick Ford, *California State University—Chico*
Robert Gardner, *East Tennessee State University*
Christopher Heil, *Georgia Institute of Technology*
Joshua Brandon Holden, *Rose-Hulman Institute of Technology*
Alexander Hulpke, *Colorado State University*
Jacqueline Jensen, *Sam Houston State University*
Jennifer M. Johnson, *Princeton University*
Hideaki Kaneko, *Old Dominion University*
Przemo Kranz, *University of Mississippi*
Xin Li, *University of Central Florida*
Maura Mast, *University of Massachusetts—Boston*
Val Mohanakumar, *Hillsborough Community College—Dale Mabry Campus*
Aaron Montgomery, *Central Washington University*
Christopher M. Pavone, *California State University at Chico*
Cynthia Piez, *University of Idaho*
Brooke Quinlan, *Hillsborough Community College—Dale Mabry Campus*
Rebecca A. Segal, *Virginia Commonwealth University*
Andrew V. Sills, *Georgia Southern University*
Alex Smith, *University of Wisconsin—Eau Claire*
Mark A. Smith, *Miami University*
Donald Solomon, *University of Wisconsin—Milwaukee*
John Sullivan, *Black Hawk College*
Maria Terrell, *Cornell University*
Blake Thornton, *Washington University in St. Louis*
David Walnut, *George Mason University*
Adrian Wilson, *University of Montevallo*
Bobby Winters, *Pittsburg State University*
Dennis Wortman, *University of Massachusetts—Boston*

1 Funciones

INTRODUCCIÓN Las funciones desempeñan un papel fundamental en el estudio del cálculo. En este capítulo repasaremos qué son las funciones y cómo se representan con gráficas, cómo se combinan y transforman, y los modos en que se clasifican. Estudiaremos las funciones trigonométricas, y analizaremos las distorsiones que ocurren cuando se usan calculadoras y computadoras para obtener la gráfica de una función. El sistema de números reales, las coordenadas cartesianas, las líneas rectas, los círculos, las parábolas y las elipses se repasarán en los apéndices.

1.1 Funciones y sus gráficas

Las funciones son una herramienta para describir el mundo real en términos matemáticos. Una función se puede representar con una ecuación, una gráfica, una tabla numérica o una descripción verbal; a lo largo de este libro, usaremos esos cuatro tipos de representaciones. En la presente sección se repasarán los principales conceptos relacionados con las funciones.

Funciones; dominio y rango

La temperatura a la que hierve el agua depende de la altura sobre el nivel del mar (el punto de ebullición disminuye conforme se asciende). La tasa de interés que se paga por una inversión monetaria depende de cuánto tiempo dure invertido el dinero. El área de un círculo depende de su radio. La distancia que viaja un objeto a lo largo de una trayectoria recta, a velocidad constante, depende del tiempo transcurrido.

En cada uno de estos casos, el valor de una cantidad variable, que podemos llamar y, depende de otra variable, que llamaremos x. Se dice entonces que "y es una función de x" y, simbólicamente, esto se representa como

$$y = f(x) \qquad (\text{"}y \text{ es igual a } f \text{ de } x\text{"}).$$

En esta notación, el símbolo f representa la función. La letra x es la **variable independiente** que representa el valor de entrada de f, en tanto que y es la **variable dependiente** o valor de salida de f en x.

DEFINICIÓN Una **función** f de un conjunto D a un conjunto Y es una regla que asigna un elemento *único* $f(x) \in Y$ para cada elemento $x \in D$.

El conjunto D de todos los valores de entrada posibles se llama **dominio** de la función. El conjunto de todos los valores de salida de $f(x)$, a medida que x varía en D, se denomina **rango** de la función. Es posible que el rango no incluya todos los elementos del conjunto Y. El dominio y el rango de una función pueden ser conjuntos cualesquiera de objetos, pero en cálculo suelen ser conjuntos de números reales que se interpretan como puntos de una recta coordenada. (En los capítulos 13 a 16, veremos funciones en las que los elementos de los conjuntos son puntos en el plano de coordenadas o en el espacio).

A menudo, una función está dada por una fórmula que describe cómo calcular el valor de salida a partir de una variable de entrada. Por ejemplo, $A = \pi r^2$ es una regla que calcula el área A de un círculo a partir de su radio r (de modo que r, interpretado como una longitud, sólo puede ser positivo en esta fórmula). Cuando definimos una función $y = f(x)$ con una fórmula, y el dominio no se enuncia de manera explícita o está restringido por el contexto, se supone que el dominio es el conjunto más grande de valores reales de x para los que la fórmula da valores reales de y; éste es el **dominio natural**. Si queremos restringir el dominio de alguna manera, debemos especificarlo. El dominio de $y = x^2$ es el conjunto completo de números reales. Para restringir el dominio de una función, por ejemplo, a los valores positivos de x, debemos escribir "$y = x^2$, $x > 0$".

Si cambiamos el dominio al que aplicamos una fórmula, por lo general también cambia el rango. El rango de $y = x^2$ es $[0, \infty)$. El rango de $y = x^2$, $x \geq 2$, es el conjunto de todos los números obtenidos al elevar al cuadrado los números mayores que o iguales a 2. En notación de conjuntos (veáse Apéndice 1), el rango es $\{x^2 | x \geq 2\}$ o $\{y | y \geq 4\}$ o $[4, \infty)$.

Cuando el rango de una función es un conjunto de números reales, se dice que la función es de **valor real**. Los dominios y rangos de la mayoría de las funciones con valores reales de una variable real que consideraremos serán intervalos o combinaciones de intervalos. Los intervalos pueden ser abiertos, cerrados o semiabiertos, y acotados o no acotados. En ocasiones, no es fácil de determinar el rango de una función.

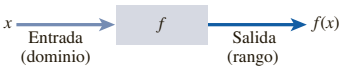


FIGURA 1.1 Diagrama que representa una función como si se tratara de un tipo de máquina.

Una función f es como una máquina que produce un valor de salida $f(x)$ en su rango siempre que la "alimentemos" con un valor de entrada x de su dominio (figura 1.1). Las teclas de funciones de una calculadora constituyen un ejemplo del uso de funciones en una máquina. Por ejemplo, la tecla $\sqrt{x}$ produce un valor de salida (la raíz cuadrada) cuando se introduce un número no negativo x y se presiona la tecla $\sqrt{x}$.

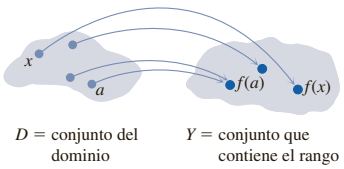


FIGURA 1.2 Una función del conjunto D al conjunto Y asigna un elemento único de Y a cada elemento de D.

Una función también puede representarse con un **diagrama de flechas** (figura 1.2). Cada flecha asocia un elemento del dominio D con un único elemento del conjunto Y. En la figura 1.2 las flechas indican que $f(a)$ está asociada con a, $f(x)$ está asociada con x, y así sucesivamente. Observe que una función puede tener el mismo *valor* para dos entradas diferentes del dominio [como ocurre con $f(a)$ en la figura 1.2], pero cada elemento de entrada x está asignado a un valor único de salida $f(x)$.

EJEMPLO 1 Verifiquemos los dominios naturales y los rangos asociados de algunas funciones sencillas. En cada caso, los dominios son los valores de x para los cuales la fórmula tiene sentido.

Función	Dominio (x)	Rango (y)
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = 1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

Solución La fórmula $y = x^2$ proporciona un valor real y para cualquier número real x, por lo que el dominio es $(-\infty, \infty)$. El rango de $y = x^2$ es $[0, \infty)$ porque el cuadrado de cualquier número real es no negativo, y cada número y no negativo es el cuadrado de su propia raíz cuadrada, $y = (\sqrt{y})^2$ para $y \geq 0$.

La función $y = 1/x$ da valores reales y para toda x, excepto para $x = 0$. Por consistencia con las reglas de aritmética, *no se puede dividir un número entre cero*. El rango de $y = 1/x$, el conjunto de recíprocos de todo número real distinto de cero, es el conjunto de todos los números reales distintos de cero, ya que $y = 1/(1/y)$. Es decir, para $y \neq 0$, el número $x = 1/y$ es la entrada asignada al valor de salida y.

La función $y = \sqrt{x}$ da valores reales de y sólo si $x \geq 0$. El rango de $y = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$, ya que todo número no negativo es la raíz cuadrada de algún número (es decir, es la raíz cuadrada de su propio cuadrado).

En $y = \sqrt{4 - x}$, el término $4 - x$ no puede ser negativo. Es decir, $4 - x \geq 0$, o bien, $x \leq 4$. La función da valores reales de y para toda $x \leq 4$. El rango de $\sqrt{4 - x}$ es $[0, \infty)$, es decir, el conjunto de todos los números no negativos.

La función $y = \sqrt{1 - x^2}$ da valores reales de y para toda x en el intervalo cerrado de -1 a 1. Fuera de este dominio, los valores de $1 - x^2$ son negativos y, por lo tanto, su raíz cuadrada no es un número real. Los valores de $1 - x^2$ varían de 0 a 1 en el dominio dado, al igual que las raíces cuadradas de estos valores. El rango de $\sqrt{1 - x^2}$ es $[0, 1]$. ■

Gráficas de funciones

Si f es una función con dominio D, su **gráfica** es el conjunto de los puntos en el plano cartesiano cuyas coordenadas son los pares de entrada-salida de f. En notación de conjuntos, la gráfica es

$$\{(x, f(x)) | x \in D\}.$$

La gráfica de la función $f(x) = x + 2$ es el conjunto de los puntos en el plano cartesiano con coordenadas (x, y) para los que $y = x + 2$. La gráfica es la línea recta trazada en la figura 1.3.

La gráfica de una función f es una representación visual útil de su comportamiento. Si (x, y) es un punto de la gráfica, entonces, $y = f(x)$ es la altura de la gráfica justo arriba (o debajo) del punto x. La altura puede ser positiva o negativa, dependiendo del signo de $f(x)$ (figura 1.4).

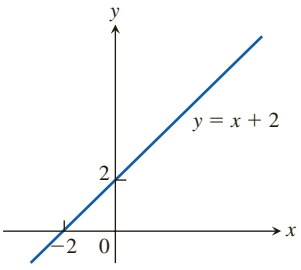


FIGURA 1.3 La gráfica de $f(x) = x + 2$ es el conjunto de puntos (x, y) para los que y tiene el valor $x + 2$.

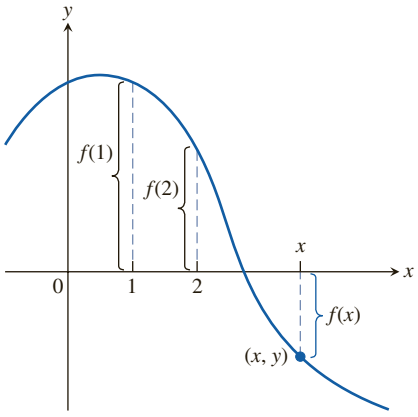


FIGURA 1.4 Si (x, y) se localiza en la gráfica de f, el valor de $y = f(x)$ es la altura de la gráfica arriba del punto x [o debajo de x si $f(x)$ es negativa].

EJEMPLO 2 Grafique la función $y = x^2$ en el intervalo $[-2, 2]$.

Solución Elabore una tabla de los pares de números (x, y) que satisfacen la ecuación $y = x^2$. Grafique los puntos (x, y) cuyas coordenadas aparecen en la tabla y trace una curva *suave* (identificada con su ecuación) que una los puntos representados (vea la figura 1.5). ■

x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

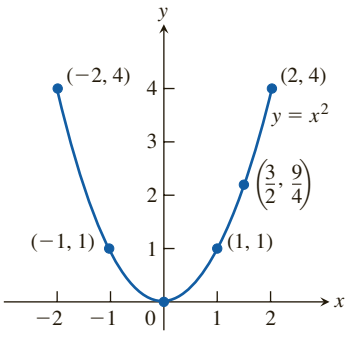
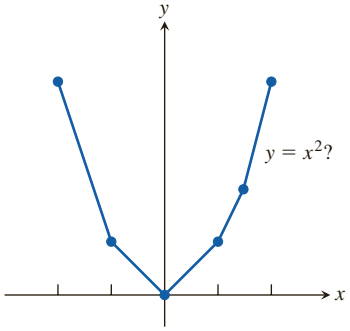
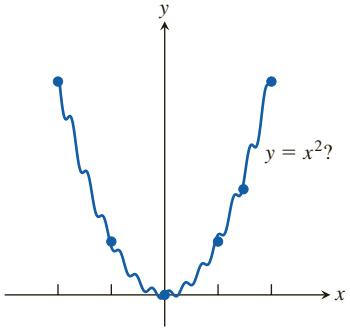


FIGURA 1.5 Gráfica de la función del ejemplo 2.

¿Cómo sabemos que la gráfica de $y = x^2$ no se parece a una de estas curvas?





Para averiguarlo, podemos graficar más puntos. Pero, ¿cómo debemos conectarlos? La pregunta básica no se ha respondido aún: ¿De qué manera se puede conocer con seguridad la apariencia que tendrá la gráfica al unir los puntos que marcamos? Como veremos en el capítulo 4, el cálculo brinda la respuesta. Mientras tanto, nos conformaremos con localizar tales puntos y unirlos de la mejor manera posible.

Representación numérica de una función

Hemos visto que una función se representa algebraicamente mediante una fórmula (por ejemplo, la función de área), o visualmente mediante una gráfica (ejemplo 2). Otra manera de representar una función es **numéricamente**, mediante una tabla de valores. Los ingenieros y científicos experimentales suelen utilizar este tipo de representaciones numéricas. A partir de una tabla de valores adecuada, es posible obtener la gráfica de la función correspondiente utilizando el método ilustrado en el ejemplo 2, tal vez con la ayuda de una computadora. La gráfica que incluye únicamente los puntos de la tabla se conoce como **diagrama de dispersión**.

EJEMPLO 3 Las notas musicales son ondas de presión en el aire. Los datos asociados con la figura 1.6 corresponden a los registros del desplazamiento de presión contra el tiempo, medido en segundos, de una nota musical emitida por un diapasón. La tabla constituye una representación de la función presión en el tiempo. Si primero elaboramos un diagrama de dispersión y después conectamos los puntos (t, p) de la tabla, obtenemos la gráfica mostrada en la figura.

Tiempo	Presión	Tiempo	Presión
0.00091	−0.080	0.00362	0.217
0.00108	0.200	0.00379	0.480
0.00125	0.480	0.00398	0.681
0.00144	0.693	0.00416	0.810
0.00162	0.816	0.00435	0.827
0.00180	0.844	0.00453	0.749
0.00198	0.771	0.00471	0.581
0.00216	0.603	0.00489	0.346
0.00234	0.368	0.00507	0.077
0.00253	0.099	0.00525	−0.164
0.00271	−0.141	0.00543	−0.320
0.00289	−0.309	0.00562	−0.354
0.00307	−0.348	0.00579	−0.248
0.00325	−0.248	0.00598	−0.035
0.00344	−0.041		

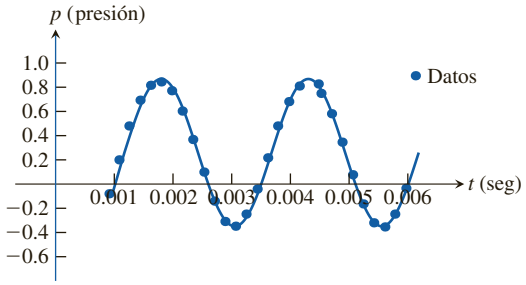


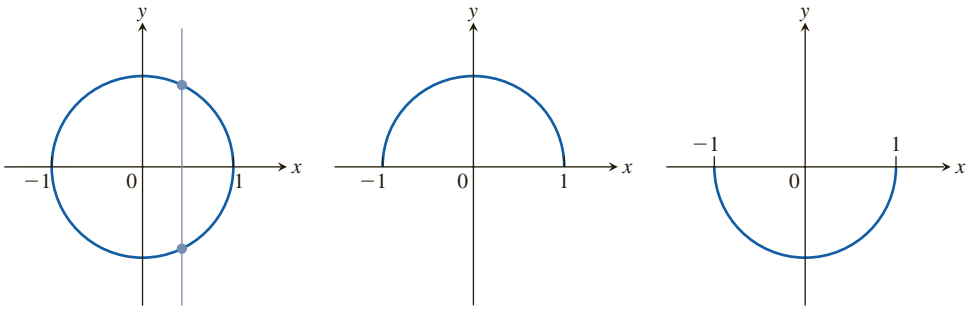
FIGURA 1.6 La curva suave que pasa por los puntos trazados muestra la gráfica de la función presión representada por la tabla de datos que la acompaña (ejemplo 3).

■

La prueba de la recta vertical para una función

No todas las curvas en el plano de coordenadas son gráficas de funciones. Una función f sólo puede tener un valor $f(x)$ para cada x en su dominio, de modo que *ninguna recta vertical* puede intersecar más de una vez la gráfica de una función. Si a está en el dominio de la función f, entonces, la recta vertical $x = a$ intersecará la gráfica de la función f en un solo punto $(a, f(a))$.

Un círculo no puede ser la gráfica de una función, porque algunas rectas verticales intersecarán al círculo dos veces. Sin embargo, el círculo de la figura 1.7*a*) contiene la grá-



a) $x^2 + y^2 = 1$ *b*) $y = \sqrt{1 - x^2}$ *c*) $y = -\sqrt{1 - x^2}$

FIGURA 1.7 *a*) El círculo no es la gráfica de una función, ya que no pasa la prueba de la recta vertical. *b*) El semicírculo superior es la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. *c*) El semicírculo inferior es la gráfica de la función $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

fica de funciones de x: el semicírculo superior, definido por la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, y el semicírculo inferior, definido por la función $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ (figuras 1.7*b* y 1.7*c*).

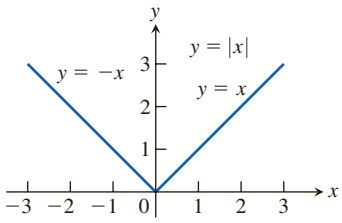


FIGURA 1.8 La función valor absoluto tiene dominio $(-\infty, \infty)$ y rango $[0, \infty)$.

Funciones definidas por partes

En ocasiones, una función se describe por partes utilizando distintas fórmulas en diferentes partes de su dominio. Un ejemplo de esto es la **función valor absoluto**

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0, \end{cases} \qquad \begin{matrix} \text{Primera fórmula} \\ \text{Segunda fórmula} \end{matrix}$$

cuya gráfica se presenta en la figura 1.8. El lado derecho de la ecuación significa que la función es igual a x si $x \geq 0$, e igual a $-x$ si $x < 0$. Las funciones definidas por partes a menudo se presentan cuando se modelan datos del mundo real. He aquí algunos ejemplos.

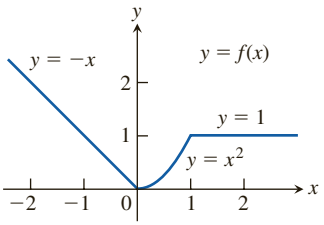


FIGURA 1.9 Para graficar la función $y = f(x)$ mostrada aquí, aplicamos diferentes fórmulas para distintas partes de su dominio (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 La función

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \text{Primera fórmula} \\ \text{Segunda fórmula} \\ \text{Tercera fórmula} \end{matrix}$$

está definida en toda la recta de los números reales, pero tiene valores dados por diferentes fórmulas, dependiendo de la posición de x. Los valores de f están dados por: $y = -x$ cuando $x < 0$, $y = x^2$ cuando $0 \leq x \leq 1$, y $y = 1$ cuando $x > 1$. Sin embargo, se trata de *una sola función* cuyo dominio es el conjunto de los números reales (figura 1.9). ■

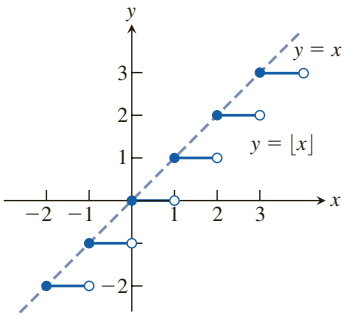


FIGURA 1.10 La gráfica de la función mayor entero $y = \lfloor x \rfloor$ está sobre la recta $y = x$ o por debajo de ésta, de manera que ofrece un piso entero para x (ejemplo 5).

EJEMPLO 5 La función cuyo valor en cualquier número x es el *mayor entero menor o igual que* x se llama **función mayor entero** o **función piso entero**. Esta función se denota con $\lfloor x \rfloor$. En la figura 1.10 se presenta la gráfica correspondiente. Observe que

$$\lfloor 2.4 \rfloor = 2, \quad \lfloor 1.9 \rfloor = 1, \quad \lfloor 0 \rfloor = 0, \quad \lfloor -1.2 \rfloor = -2,$$
$$\lfloor 2 \rfloor = 2, \quad \lfloor 0.2 \rfloor = 0, \quad \lfloor -0.3 \rfloor = -1, \quad \lfloor -2 \rfloor = -2.$$

■

EJEMPLO 6 La función cuyo valor en cualquier número x es el *menor entero mayor o igual que* x se llama **función menor entero** o **función techo entero**. Esta función se denota mediante $\lceil x \rceil$. La figura 1.11 muestra su gráfica. Para valores positivos de x, esta función podría representar, por ejemplo, el costo de dejar un vehículo x horas en un estacionamiento que cobra \$1 por cada hora o fracción. ■

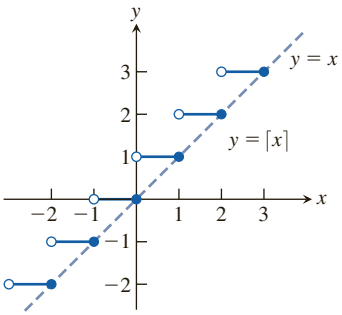


FIGURA 1.11 La gráfica de la función menor entero $y = \lceil x \rceil$ está sobre la recta $y = x$ o por encima de ésta, de manera que constituye un techo entero para x (ejemplo 6).

Funciones crecientes y decrecientes

Si la gráfica de una función *se eleva* o *asciende* conforme nos movemos de izquierda a derecha, decimos que la función es *creciente*. Si la gráfica *decae* o *desciende* cuando nos movemos de izquierda a derecha, decimos que la función es *decreciente*.

DEFINICIONES Sea f una función definida en un intervalo I, y sean x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera en I.

1. Si $f(x_2) > f(x_1)$ siempre que $x_1 < x_2$, entonces, se dice que f es **creciente** en I.
2. Si $f(x_2) < f(x_1)$ siempre que $x_1 < x_2$, entonces, se dice que f es **decreciente** en I.

Es importante notar que las definiciones de funciones crecientes y decrecientes deben satisfacerse por *todos* los pares de puntos x_1 y x_2 en I con $x_1 < x_2$. Como usamos la desigualdad $<$, en lugar de $\leq$, para comparar los valores de la función, algunas veces se dice que f es *estrictamente* creciente o decreciente en I. El intervalo I puede ser finito (o acotado), o bien, infinito (no acotado) y, por definición, nunca consta de un solo punto (apéndice 1).

EJEMPLO 7 La función de la figura 1.9 es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, 1]$. La función no es creciente ni decreciente en el intervalo $[1, \infty)$ debido a las desigualdades estrictas utilizadas para comparar los valores de la función en las definiciones. ■

Funciones pares y funciones impares: simetría

Las gráficas de las funciones *pares* e *impares* se caracterizan por sus propiedades de simetría.

DEFINICIONES Una función $y = f(x)$ es una

función par de x si $f(-x) = f(x)$,
función impar de x si $f(-x) = -f(x)$,

para toda x en el dominio de la función.

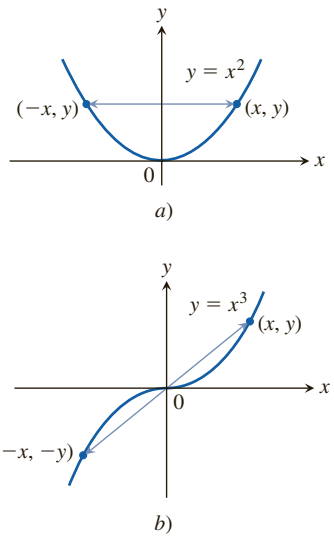


FIGURA 1.12 *a*) La gráfica de $y = x^2$ (una función par) es simétrica con respecto al eje y. *b*) La gráfica de $y = x^3$ (una función impar) es simétrica con respecto al origen.

Los nombres *par* e *impar* de las funciones se deben a las potencias de x. Si y es una potencia par de x, como en $y = x^2$ o $y = x^4$, se trata de una función par de x porque $(-x)^2 = x^2$ y $(-x)^4 = x^4$. Si y es una potencia impar de x como en $y = x$ o $y = x^3$, se trata de una función impar de x porque $(-x)^1 = -x$ y $(-x)^3 = -x^3$.

La gráfica de una función par es **simétrica respecto al eje y**. Como $f(-x) = f(x)$, un punto (x, y) está sobre la gráfica si y sólo si el punto $(-x, y)$ está sobre la gráfica (figura 1.12*a*). Una reflexión con respecto al eje y deja la gráfica igual.

La gráfica de una función impar es **simétrica respecto al origen**. Como $f(-x) = -f(x)$, un punto (x, y) está sobre la gráfica si y sólo si el punto $(-x, -y)$ está sobre la gráfica (figura 1.12*b*). De manera equivalente, una gráfica es simétrica con respecto al origen si una rotación de 180° alrededor de éste deja la gráfica igual. Observe que las definiciones implican que tanto x como $-x$ deben estar en el dominio de f.

EJEMPLO 8 A continuación, se presentan algunas funciones que ilustran la definición.

$f(x) = x^2$	Función $(-x)^2 = x^2$ para toda x; simetría con respecto al eje y.
$f(x) = x^2 + 1$	Función par: $(-x)^2 + 1 = x^2 + 1$ para toda x; simetría con respecto al eje y (figura 1.13*a*).
$f(x) = x$	Función impar: $(-x) = -x$ para toda x; simetría con respecto al origen.
$f(x) = x + 1$	No es impar: $f(-x) = -x + 1$, pero $-f(x) = -x - 1$. Las dos son diferentes. No es par: $(-x) + 1 \neq x + 1$ para toda $x \neq 0$ (figura 1.13*b*). ■

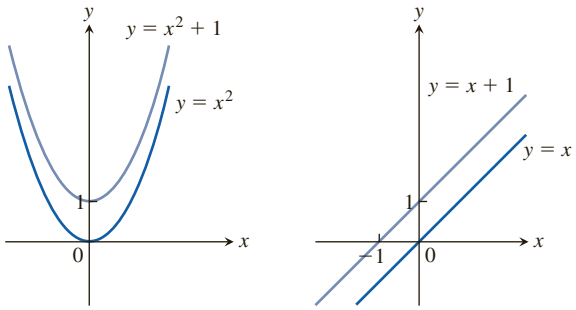


FIGURA 1.13 *a*) Cuando sumamos el término constante 1 a la función $y = x^2$, la función resultante $y = x^2 + 1$ sigue siendo par, y su gráfica sigue siendo simétrica con respecto al eje y. *b*) Cuando sumamos el término constante 1 a la función $y = x$, la función resultante $y = x + 1$ ya no es impar, puesto que la simetría con respecto al origen se pierde. La función $y = x + 1$ tampoco es par (ejemplo 8).

Funciones comunes

Una variedad de tipos importantes de funciones aparecen con frecuencia en cálculo. Aquí las identificamos y describimos brevemente.

Funciones lineales Las funciones de la forma $f(x) = mx + b$, donde m y b son constantes, reciben el nombre de **funciones lineales**. En la figura 1.14*a*) se muestra un conjunto de rectas $f(x) = mx$, donde $b = 0$, de manera que estas rectas pasan por el origen. La función $f(x) = x$, donde $m = 1$ y $b = 0$, se llama **función identidad**. Las funciones constantes son aquellas funciones lineales cuya pendiente $m = 0$ (figura 1.14*b*). Una función lineal con pendiente positiva y cuya gráfica pasa por el origen se conoce como relación de *proporcionalidad*.

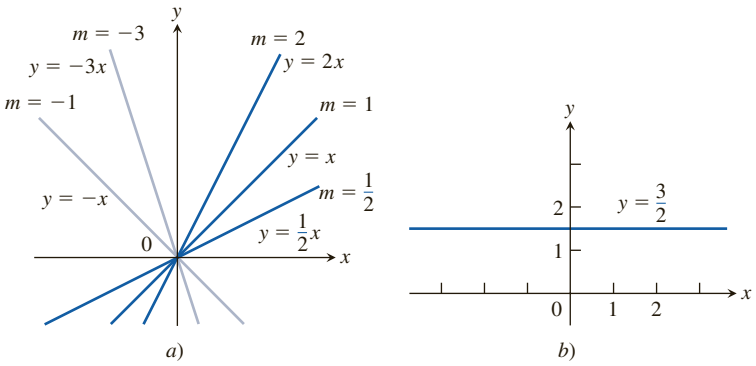


FIGURA 1.14 *a*) Rectas a través del origen con pendiente m. *b*) Una función constante tiene pendiente $m = 0$.

DEFINICIÓN Dos variables y y x son **proporcionales** (una con respecto a la otra) si una de ellas siempre es un múltiplo constante de la otra; es decir, si $y = kx$ para una constante k diferente de cero.

Si la variable y es proporcional al recíproco $1/x$, entonces, se dice que y es **inversamente proporcional** a x (porque $1/x$ es el inverso multiplicativo de x).

Funciones potencia Las funciones $f(x) = x^a$, donde a es una constante, se llaman **funciones potencia**. Dentro de esta categoría, hay varios casos importantes a considerar.

a) $a = n$, un entero positivo.

En la figura 1.15 se presentan las gráficas de $f(x) = x^n$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Estas funciones están definidas para todos los valores reales de x. Observe que, a medida que aumenta la potencia n, las curvas tienden a aplanarse hacia el eje x en el intervalo $(-1, 1)$, y también que se elevan con una inclinación mayor para $|x| > 1$. Todas las curvas pasan por el punto $(1, 1)$ y por el origen. Las gráficas de funciones con potencias pares son simétricas con respecto al eje y; las que tienen potencias impares son simétricas con respecto al origen. Las funciones elevadas a una potencia par son decrecientes en el intervalo $(-\infty, 0]$ y crecientes en $[0, \infty)$; las funciones elevadas a una potencia impar son crecientes en toda la recta de los números reales $(-\infty, \infty)$.

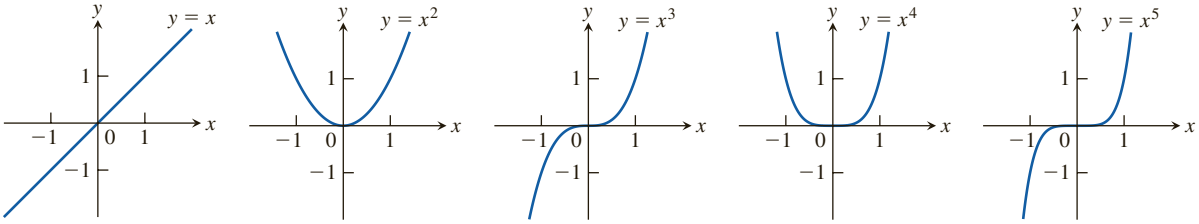


FIGURA 1.15 Gráficas de $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$, definidas para $-\infty < x < \infty$.

b) $a = -1$ o $a = -2$.

En la figura 1.16, se muestran las gráficas de las funciones $f(x) = x^{-1} = 1/x$ y $g(x) = x^{-2} = 1/x^2$. Ambas funciones están definidas para toda $x \neq 0$ (no es posible dividir entre cero). La gráfica de $y = 1/x$ es la hipérbola $xy = 1$, que se aproxima a los ejes de coordenadas lejos del origen. La gráfica de $y = 1/x^2$ también se aproxima a los ejes de coordenadas. La gráfica de la función f es simétrica con respecto al origen; f es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. La gráfica de la función g es simétrica con respecto al eje y; g es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, \infty)$.

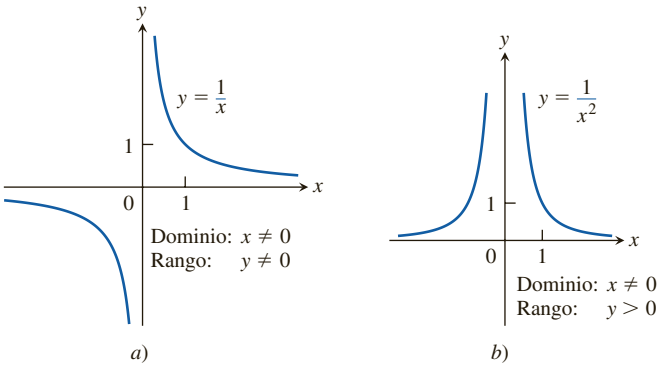


FIGURA 1.16 Gráficas de las funciones potencia $f(x) = x^a$ para el inciso *a)* $a = -1$ y para el inciso *b)* $a = -2$.

c) $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$.

Las funciones $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ son las funciones **raíz cuadrada** y **raíz cúbica**, respectivamente. El dominio de la función raíz cuadrada es $[0, \infty)$, pero la función raíz cúbica está definida para toda x real. En la figura 1.17 se muestran sus gráficas, junto con las de $y = x^{3/2}$ y $y = x^{2/3}$. [Recuerde que $x^{3/2} = (x^{1/2})^3$ y $x^{2/3} = (x^{1/3})^2$].

Polinomios Una función p es un **polinomio** si

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde n es un entero no negativo y los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes reales (llamadas **coeficientes** del polinomio). Todas las funciones polinomiales tienen como dominio

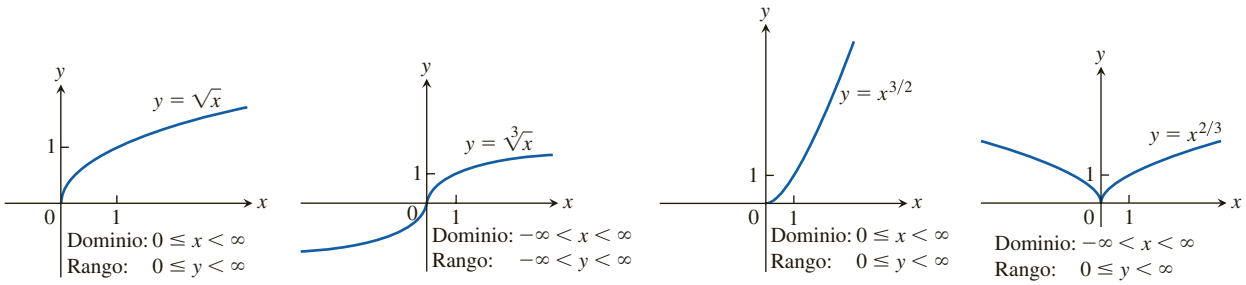


FIGURA 1.17 Gráficas de las funciones potencia $f(x) = x^a$ para $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$.

$(-\infty, \infty)$. Si el coeficiente del término dominante es $a_n \neq 0$ y $n > 0$, entonces, n se llama el **grado** del polinomio. Las funciones lineales con $m \neq 0$ son polinomios de grado 1. Por lo regular, los polinomios de grado 2 se escriben como $p(x) = ax^2 + bx + c$, y se llaman **funciones cuadráticas**. De manera similar, las **funciones cúbicas** son polinomios $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ de grado 3. En la figura 1.18 se presentan las gráficas de tres funciones polinomiales. En el capítulo 4 aprenderemos técnicas para graficar funciones polinomiales.

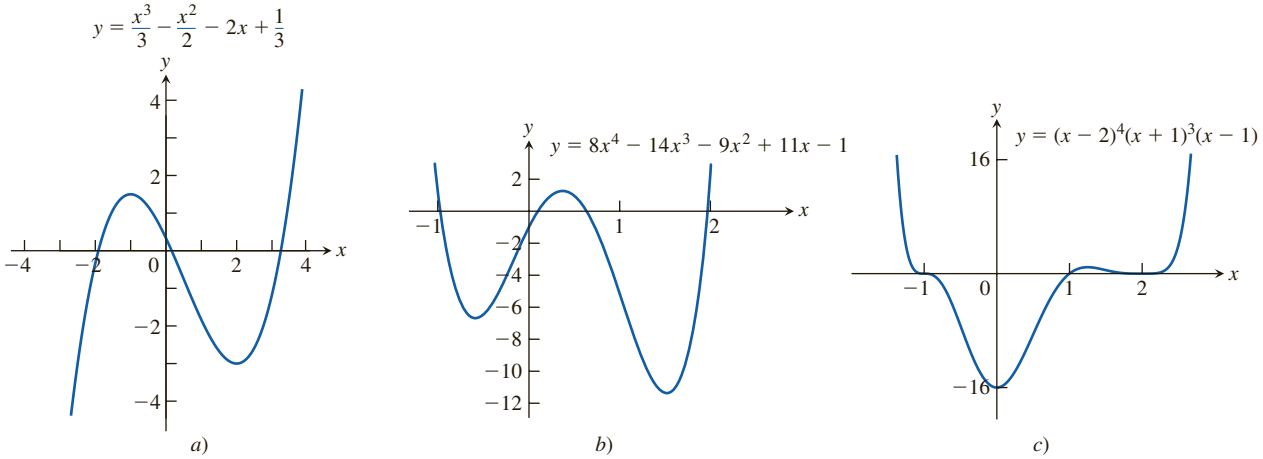


FIGURA 1.18 Gráficas de tres funciones polinomiales.

Funciones racionales Una **función racional** es un cociente o una razón $f(x) = p(x)/q(x)$, donde p y q son polinomios. El dominio de una función racional es el conjunto de todos los números reales x para los que $q(x) \neq 0$. En la figura 1.19 se presentan las gráficas de algunas funciones racionales.

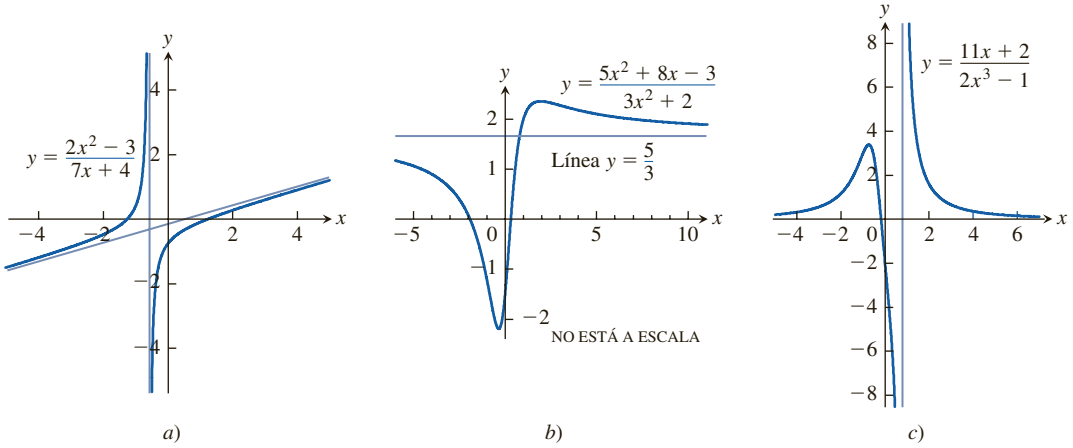


FIGURA 1.19 Gráficas de tres funciones racionales. Las líneas rectas a las que se acercan las gráficas se llaman *asíntotas* y no forman parte de las gráficas. Estudiaremos las asíntotas en la sección 2.6.

Funciones algebraicas Una función construida a partir de polinomios usando operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división y raíces) pertenece a la clase de **funciones algebraicas**. Todas las funciones racionales son algebraicas, pero también existen funciones más complicadas (como las que satisfacen una ecuación de la forma $y^3 - 9xy + x^3 = 0$, que estudiaremos en la sección 3.7). En la figura 1.20 se muestran las gráficas de tres funciones algebraicas.

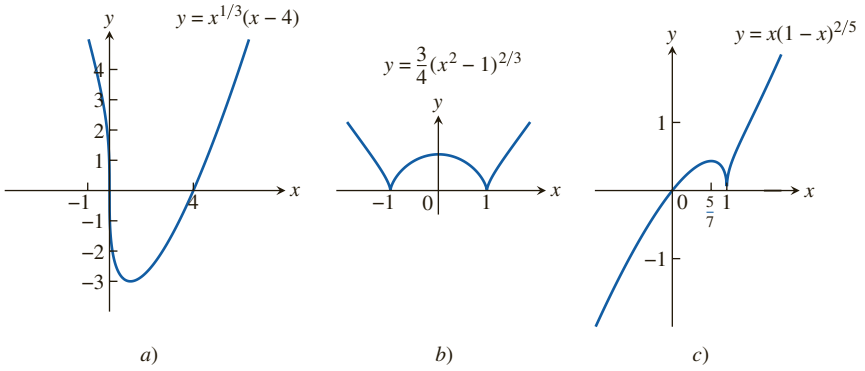


FIGURA 1.20 Gráficas de tres funciones algebraicas.

Funciones trigonométricas En la sección 1.3 se repasan las seis funciones trigonométricas básicas. En la figura 1.21 se presentan las gráficas de las funciones seno y coseno.

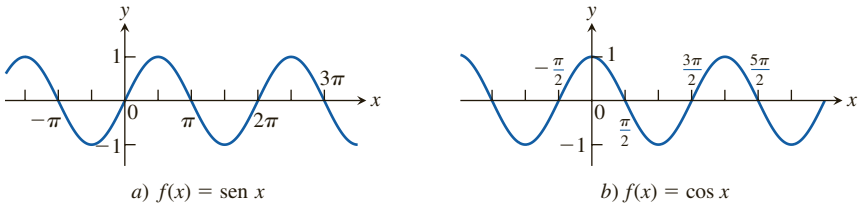


FIGURA 1.21 Gráficas de las funciones seno y coseno.

Funciones exponenciales Las funciones de la forma $f(x) = a^x$, donde la base $a > 0$ es una constante positiva y $a \neq 1$, se llaman **funciones exponenciales**. Todas las funciones exponenciales tienen dominio $(-\infty, \infty)$ y rango $(0, \infty)$, de modo que una función exponencial nunca tiene el valor cero en su rango. Analizaremos las funciones exponenciales en la sección 7.3. En la figura 1.22 se muestran las gráficas de algunas funciones exponenciales.

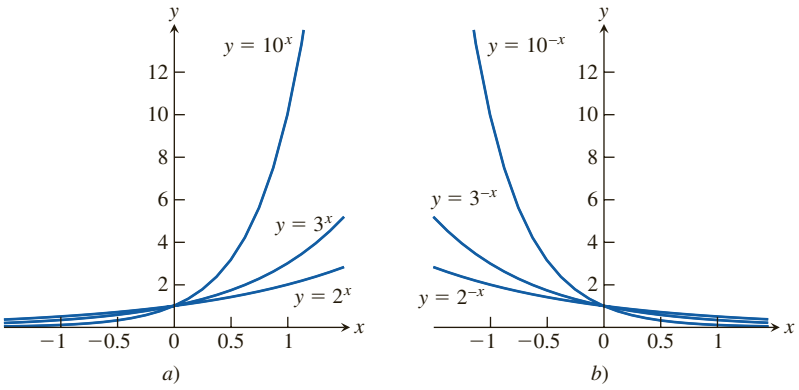


FIGURA 1.22 Gráficas de funciones exponenciales.

Funciones logarítmicas Son las funciones $f(x) = \log_a x$, donde la base $a \neq 1$ es una constante positiva. Se trata de las *funciones inversas* de las funciones exponenciales, y las estudiaremos en la sección 7.2. La figura 1.23 muestra las gráficas de cuatro funciones logarítmicas con distintas bases. En todos los casos, el dominio es $(0, \infty)$ y el rango es $(-\infty, \infty)$.

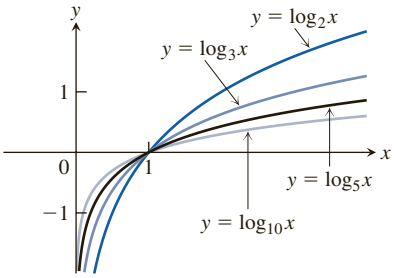


FIGURA 1.23 Gráficas de cuatro funciones logarítmicas.

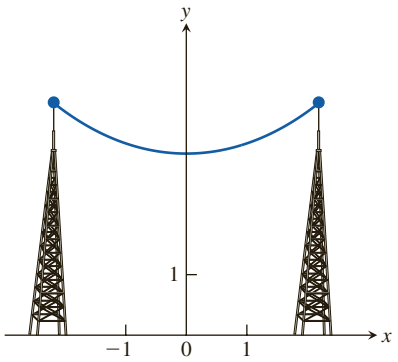


FIGURA 1.24 Gráfica de una catenaria o cable colgante. (El término *catenario* proviene del latín *catena*, que quiere decir cadena).

Funciones trascendentes Son funciones no algebraicas. Entre ellas están las funciones trigonométricas, las inversas trigonométricas, las exponenciales, las logarítmicas y muchas otras. Un ejemplo particular de función trascendente es una **catenaria**. Su gráfica tiene la forma de un cable, como el de una línea telefónica o eléctrica, cuyos extremos están sujetos por dos soportes, y que cuelga libremente por su propio peso (figura 1.24). La función que define la gráfica se estudiará en la sección 7.7.

Ejercicios 1.1

Funciones

En los ejercicios 1 a 6, determine el dominio y el rango de cada función.

1. $f(x) = 1 + x^2$

2. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

3. $F(x) = \sqrt{5x + 10}$

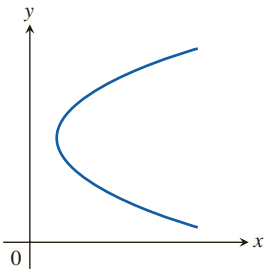
4. $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

5. $f(t) = \dfrac{4}{3 - t}$

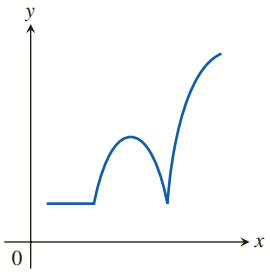
6. $G(t) = \dfrac{2}{t^2 - 16}$

De las gráficas que se muestran en los ejercicios 7 y 8, determine cuáles corresponden a funciones de x y cuáles no. Justifique sus respuestas.

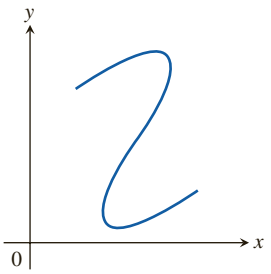
7. ***a)***



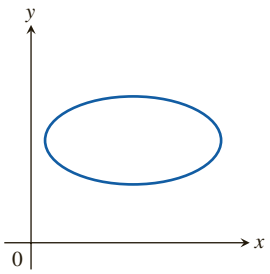
b)



8. ***a)***



b)



Determinación de fórmulas para funciones

9. Exprese el área y el perímetro de un triángulo equilátero como una función de la longitud x del lado del triángulo.

10. Exprese la longitud del lado de un cuadrado como una función de la longitud d de su diagonal. Después, exprese el área del cuadrado como una función de la longitud de su diagonal.

11. Exprese la longitud de la arista de un cubo como una función de la longitud d de su diagonal. Después, exprese el área y el volumen del cubo como una función de la longitud de su diagonal.

12. Un punto P en el primer cuadrante se ubica en la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$. Exprese las coordenadas de P como funciones de la pendiente de la recta que une a P con el origen.

13. Considere el punto (x, y) que se encuentra en la gráfica de la recta $2x + 4y = 5$. Sea L la distancia del punto (x, y) al origen $(0, 0)$. Escriba L como una función de x.

14. Considere el punto (x, y) que se encuentra en la gráfica de $y = \sqrt{x - 3}$. Sea L la distancia entre los puntos (x, y) y $(4, 0)$. Escriba L como una función de y.

Funciones y gráficas

Encuentre el dominio natural y grafique las funciones de los ejercicios 15 a 20.

15. $f(x) = 5 - 2x$ **16.** $f(x) = 1 - 2x - x^2$

17. $g(x) = \sqrt{|x|}$ **18.** $g(x) = \sqrt{-x}$

19. $F(t) = t/|t|$ **20.** $G(t) = 1/|t|$

21. Encuentre el dominio de $y = \dfrac{x + 3}{4 - \sqrt{x^2 - 9}}$.

22. Encuentre el rango de $y = 2 + \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$.

23. Trace la gráfica de las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de x.

a) $|y| = x$ ***b)*** $y^2 = x^2$

24. Trace la gráfica de las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de x.

a) $|x| + |y| = 1$ ***b)*** $|x + y| = 1$

Funciones definidas por partes

Trace las gráficas de las funciones de los ejercicios 25 a 28.

25. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

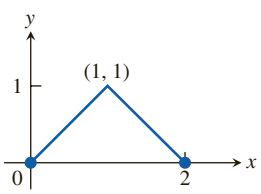
26. $g(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

27. $F(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \le 1 \\ x^2 + 2x, & x > 1 \end{cases}$

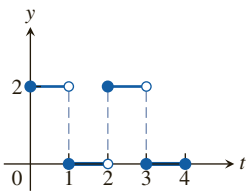
28. $G(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \end{cases}$

Obtenga la fórmula de cada función graficada en los ejercicios 29 a 32.

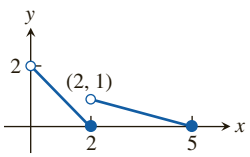
29. ***a)***



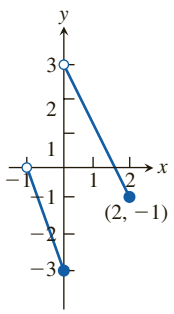
b)



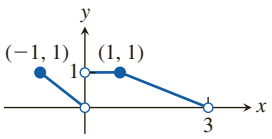
30. ***a)***



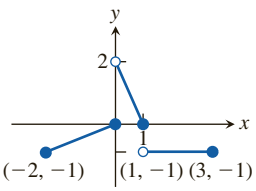
b)



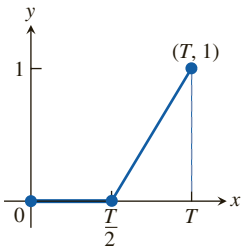
31. ***a)***



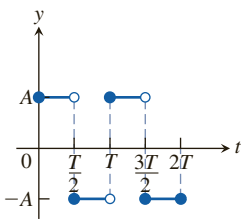
b)



32. ***a)***



b)



Las funciones mayor y menor entero

33. ¿Para qué valores de x,

a) $\lfloor x \rfloor = 0$? ***b)*** $\lceil x \rceil = 0$?

34. ¿Qué números reales x satisfacen la ecuación $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$?

35. ¿Es $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$ para toda x real? Justifique su respuesta.

36. Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \ge 0 \\ \lceil x \rceil, & x < 0. \end{cases}$$

¿Por qué $f(x)$ se llama *parte entera* de x?

Funciones crecientes y decrecientes

Trace las gráficas de las funciones de los ejercicios 37 a 46. ¿Qué simetrías, si las hay, tienen las gráficas? Especifique los intervalos donde la función es creciente y aquellos donde es decreciente.

37. $y = -x^3$ **38.** $y = -\dfrac{1}{x^2}$

39. $y = -\dfrac{1}{x}$ **40.** $y = \dfrac{1}{|x|}$

41. $y = \sqrt{|x|}$ **42.** $y = \sqrt{-x}$

43. $y = x^3/8$ **44.** $y = -4\sqrt{x}$

45. $y = -x^{3/2}$ **46.** $y = (-x)^{2/3}$

Funciones pares e impares

En los ejercicios 47 a 58, determine si la función es par, impar o ninguna de las dos. Justifique sus respuestas.

47. $f(x) = 3$ **48.** $f(x) = x^{-5}$

49. $f(x) = x^2 + 1$ **50.** $f(x) = x^2 + x$

51. $g(x) = x^3 + x$ **52.** $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

53. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **54.** $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

55. $h(t) = \dfrac{1}{t - 1}$ **56.** $h(t) = |t^3|$

57. $h(t) = 2t + 1$ **58.** $h(t) = 2|t| + 1$

Teoría y ejemplos

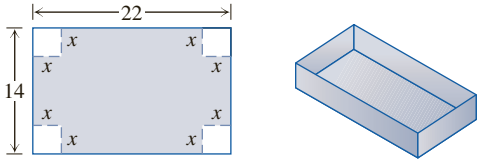
59. La variable s es proporcional a t, y $s = 25$ cuando $t = 75$. Determine t cuando $s = 60$.

60. Energía cinética La energía cinética K de una masa es proporcional al cuadrado de su velocidad v. Si $K = 12{,}960$ joules cuando $v = 18$ m/seg, ¿cuánto vale K cuando $v = 10$ m/seg?

61. Las variables r y s son inversamente proporcionales, y $r = 6$ cuando $s = 4$. Determine s cuando $r = 10$.

62. Ley de Boyle La ley de Boyle afirma que el volumen V de un gas a temperatura constante aumenta siempre que la presión P disminuye, de manera que V y P son inversamente proporcionales. Si $P = 14.7$ lb/in^2 cuando $V = 1000$ in^3, entonces, ¿cuál es el valor de V cuando $P = 23.4$ lb/in^2?

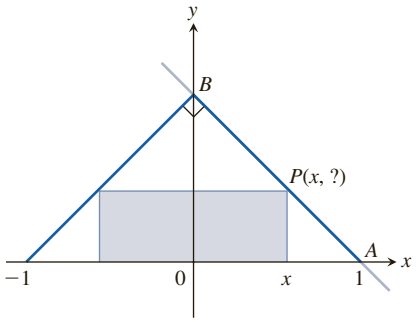
63. Se construye una caja sin tapa con una pieza rectangular de cartón, que mide 14 por 22 pulgadas, cortando en cada esquina cuadrados del mismo tamaño de lado x, y doblando después los cuatro lados hacia arriba, como se ilustra en la figura. Exprese el volumen V de la caja, como una función de x.



64. En la siguiente figura se muestra un rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 2 unidades de largo.

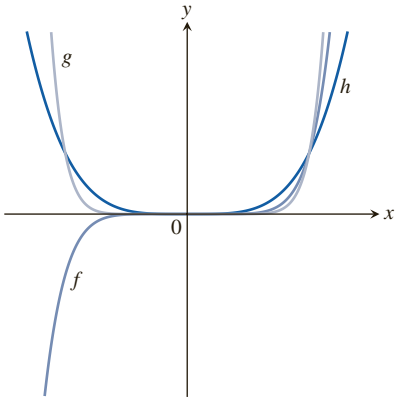
a) Exprese la coordenada y del punto P en términos de x. (Podría comenzar por escribir una ecuación para la recta AB).

b) Exprese el área del rectángulo en términos de x.

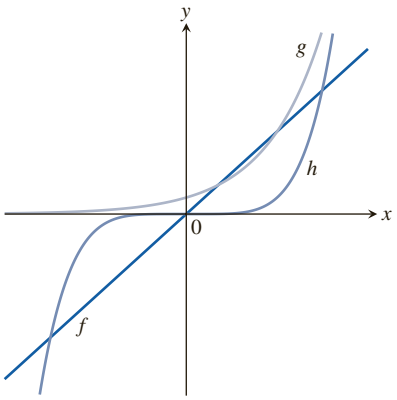


En los ejercicios 65 y 66, relacione cada ecuación con su gráfica. No use ningún dispositivo graficador; justifique su respuesta.

65. ***a***) $y = x^4$ ***b***) $y = x^7$ ***c***) $y = x^{10}$



66. ***a***) $y = 5x$ ***b***) $y = 5^x$ ***c***) $y = x^5$



T **67.** ***a***) Grafique juntas las funciones $f(x) = x/2$ y $g(x) = 1 + (4/x)$, e identifique los valores de x para los cuales

$$\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}.$$

b) Confirme algebraicamente los resultados del inciso *a*).

T **68.** ***a***) Grafique juntas las funciones $f(x) = 3/(x - 1)$ y $g(x) = 2/(x + 1)$, e identifique los valores de x para los cuales

$$\frac{3}{x - 1} < \frac{2}{x + 1}.$$

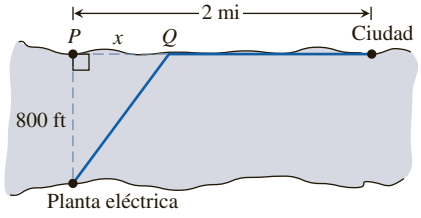
b) Confirme algebraicamente los resultados del inciso *a*).

69. Para que una curva sea *simétrica con respecto al eje x*, el punto (x, y) debe estar sobre la curva si y sólo si el punto $(x, -y)$ también se encuentra sobre la curva. Explique por qué una curva que es simétrica con respecto al eje x no es la gráfica de una función, a menos que ésta sea $y = 0$.

70. Se venden 300 libros a \$40 cada uno, lo que representa un ingreso de (300)(\$40) = \$12,000. Por cada \$5 de incremento en el precio, se venden 25 libros menos. Exprese el ingreso R como una función del número x de incrementos de \$5.

71. Se construye un gallinero en forma de un triángulo rectángulo isósceles con catetos de x ft de longitud e hipotenusa de h ft de longitud. Si los costos del material son de \$5/ft para los catetos y de \$10/ft para la hipotenusa, exprese el costo total C de construcción como una función de h.

72. Costos industriales Una planta eléctrica se encuentra en la orilla de un río cuyo ancho mide 800 ft. Tender un nuevo cable desde la planta hasta un lugar de la ciudad que se encuentra a dos millas río abajo, en el lado opuesto del río, cuesta \$180 por pie a través del río y \$100 por pie en tierra.



NO ESTÁ A ESCALA

a) Supongamos que el cable va de la planta a un punto Q en el lado opuesto del río, que se ubica a x pies del punto P directamente opuesto a la planta. Escriba una función $C(x)$ para determinar el costo de tendido del cable en términos de la distancia x.

b) Elabore una tabla de valores para determinar si la posición del punto Q menos costosa está a menos de 2000 ft o a más de 2000 ft del punto P.

1.2 Combinación de funciones; traslaciones y cambios de escala en gráficas

En esta sección se analizarán los principales métodos para combinar funciones o transformarlas para formar nuevas funciones.

Sumas, restas, productos y cocientes

Al igual que los números, las funciones pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse (excepto cuando el denominador es cero) para generar nuevas funciones. Si f y g son funciones, entonces, para toda x que pertenezca al dominio tanto de f como de g (esto es, para $x \in D(f) \cap D(g)$), definimos las funciones $f + g$, $f - g$, y fg mediante las fórmulas

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x)\\ (f - g)(x) &= f(x) - g(x)\\ (fg)(x) &= f(x)g(x).\end{aligned}$$

Observe que el signo + en el lado izquierdo de la primera ecuación representa la operación de suma de *funciones*, mientras que el signo + en el lado derecho de la misma significa la suma de los números reales $f(x)$ y $g(x)$.

Para cualquier punto de $D(f) \cap D(g)$ en el que $g(x) \neq 0$, también podemos definir la función f/g mediante la fórmula

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{donde } g(x) \neq 0.$$

Las funciones también pueden multiplicarse por constantes: si c es un número real, la función cf está definida para toda x en el dominio de f mediante

$$(cf)(x) = c\,f(x).$$

EJEMPLO 1 Las funciones definidas por las fórmulas

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{1 - x}$$

tienen dominios $D(f) = [0, \infty)$ y $D(g) = (-\infty, 1]$. Los puntos comunes de estos dominios son

$$[\,0, \infty) \cap (-\infty, 1\,] = [\,0, 1\,].$$

La siguiente tabla resume las fórmulas y los dominios para diversas combinaciones algebraicas de las dos funciones. También escribimos $f \cdot g$ para la función producto fg.

Función	Fórmula	Dominio
$f + g$	$(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$	$[\,0, 1\,] = D(f) \cap D(g)$
$f - g$	$(f - g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1 - x}$	$[\,0, 1\,]$
$g - f$	$(g - f)(x) = \sqrt{1 - x} - \sqrt{x}$	$[\,0, 1\,]$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x(1 - x)}$	$[\,0, 1\,]$
f/g	$\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\dfrac{x}{1 - x}}$	$[\,0, 1)$ ($x = 1$ excluido)
g/f	$\dfrac{g}{f}(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\dfrac{1 - x}{x}}$	$(0, 1\,]$ ($x = 0$ excluido)

■

La gráfica de la función $f + g$ se obtiene a partir de las gráficas de f y g, sumando las coordenadas y correspondientes de $f(x)$ y $g(x)$ para cada punto $x \in D(f) \cap D(g)$, como en la figura 1.25. Las gráficas de $f + g$ y $f \cdot g$ del ejemplo 1 se presentan en la figura 1.26.

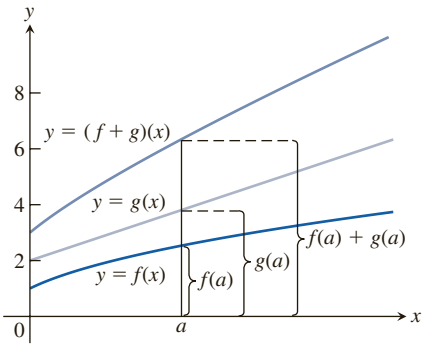


FIGURA 1.25 Suma en gráfica de dos funciones.

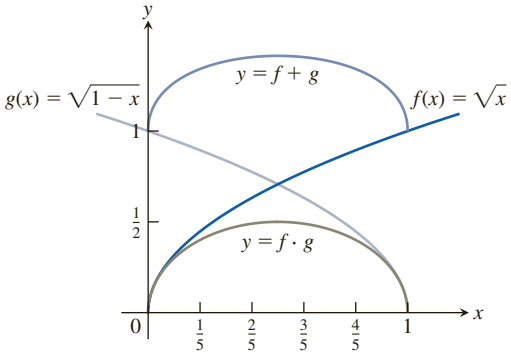


FIGURA 1.26 El dominio de la función $f + g$ es la intersección de los dominios de f y g, el intervalo $[0, 1]$ en el eje x donde estos dominios se traslapan. El intervalo también es el dominio de la función $f \cdot g$ (ejemplo 1).

Composición de funciones

La composición es otro método para combinar funciones.

DEFINICIÓN Si f y g son funciones, la función **composición** $f \circ g$ ("f compuesta con g") está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ consiste en los números x del dominio de g para los cuales $g(x)$ se encuentra en el dominio de f.

La definición implica que $f \circ g$ puede formarse cuando el rango de g está incluido en el dominio de f. Para encontrar $(f \circ g)(x)$, *primero* determinamos $g(x)$ y, *luego*, encontramos $f(g(x))$. En la figura 1.27 se ilustra $f \circ g$ como un diagrama de máquina, y en la figura 1.28 se muestra la composición como un diagrama de flechas.

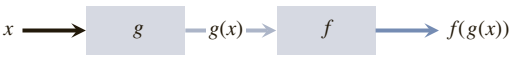


FIGURA 1.27 La función composición $f \circ g$ usa la salida $g(x)$ de la primera función g como la entrada para la segunda función f.

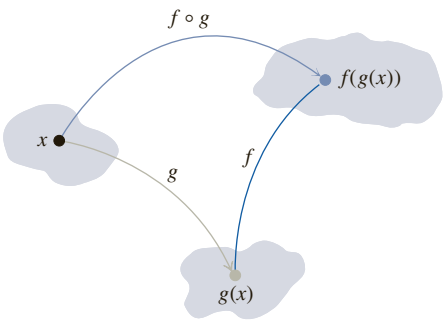


FIGURA 1.28 Diagrama de flechas para $f \circ g$. Si x se encuentra en el dominio de g y $g(x)$ se encuentra en el dominio de f, entonces, las funciones f y g se pueden componer para formar $(f \circ g)(x)$.

Para evaluar la composición $g \circ f$ (cuando está definida), invertimos el orden, obteniendo primero $f(x)$ y después $g(f(x))$. El dominio de $g \circ f$ es el conjunto de números x en el dominio de f, tales que $f(x)$ se encuentra en el dominio de g.

Las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$, por lo regular, son muy diferentes.

EJEMPLO 2 Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 1$, obtenga

a) $(f \circ g)(x)$ ***b)*** $(g \circ f)(x)$ ***c)*** $(f \circ f)(x)$ ***d)*** $(g \circ g)(x)$.

Solución

	Composición	**Dominio**
a)	$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x + 1}$	$[-1, \infty)$
b)	$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$
c)	$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$	$[0, \infty)$
d)	$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x) + 1 = (x + 1) + 1 = x + 2$	$(-\infty, \infty)$

Para comprender por qué el dominio de $f \circ g$ es $[-1, \infty)$, observe que $g(x) = x + 1$ está definida para todo número real x, pero $g(x)$ pertenece al dominio de f solamente si $x + 1 \geq 0$, es decir, cuando $x \geq -1$. ■

Observe que si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, entonces, $(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$. Sin embargo, el dominio de $f \circ g$ es $[0, \infty)$, y no $(-\infty, \infty)$, ya que $\sqrt{x}$ requiere que $x \geq 0$.

Traslación de la gráfica de una función

Una manera de obtener una nueva función a partir de una que ya existe es sumando una constante a cada salida de la función existente, o bien, a su variable de entrada. La gráfica de la nueva función es la gráfica de la función original trasladada vertical u horizontalmente, como sigue.

Reglas de traslación

Traslaciones verticales

$y = f(x) + k$	Desplaza la gráfica de f *hacia arriba*, k unidades si $k > 0$.
	Desplaza la gráfica de f *hacia abajo*, $\lvert k \rvert$ unidades si $k < 0$.

Traslaciones horizontales

$y = f(x + h)$	Desplaza la gráfica de f *a la izquierda*, h unidades si $h > 0$.
	Desplaza la gráfica de f *a la derecha*, $\lvert h \rvert$ unidades si $h < 0$.

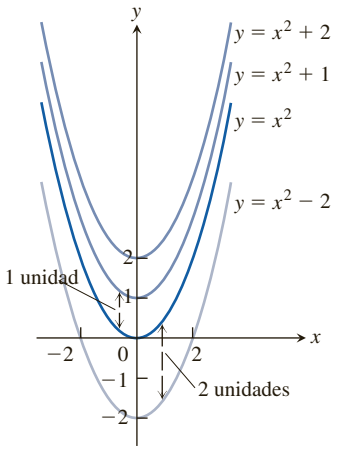


FIGURA 1.29 Para desplazar la gráfica de $f(x) = x^2$ hacia arriba (o hacia abajo), sumamos constantes positivas (o negativas) a la fórmula de f (ejemplos 3*a* y *b*).

EJEMPLO 3

a) Si sumamos 1 al lado derecho de la fórmula $y = x^2$ para obtener $y = x^2 + 1$, la gráfica se traslada una unidad hacia arriba (figura 1.29).

b) Si sumamos -2 en el lado derecho de la fórmula $y = x^2$ para obtener $y = x^2 - 2$, la gráfica se traslada 2 unidades hacia abajo (figura 1.29).

c) Si sumamos 3 a x en $y = x^2$ para obtener $y = (x + 3)^2$, la gráfica se traslada 3 unidades hacia la izquierda, mientras que si sumamos -2, la gráfica se traslada 2 unidades a la derecha (figura 1.30).

d) Si sumamos -2 a x en $y = |x|$, y después sumamos -1 al resultado, obtenemos $y = |x - 2| - 1$, y la gráfica se desplaza 2 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia abajo (figura 1.31). ■

Cambio de escala y reflexión de la gráfica de una función

Modificar la escala de la gráfica de una función $y = f(x)$ significa estirar la gráfica o comprimirla, ya sea vertical u horizontalmente. Esto se logra multiplicando la función f, o la variable independiente x, por una constante adecuada c. Las reflexiones con respecto a los ejes de coordenadas son los casos especiales cuando $c = -1$.

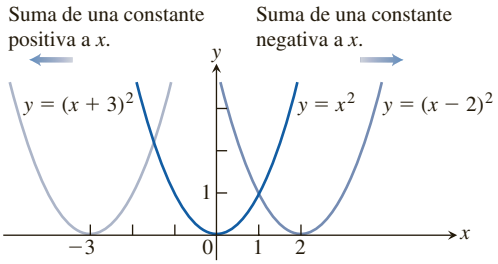


FIGURA 1.30 Para desplazar la gráfica de $y = x^2$ hacia la izquierda, sumamos una constante positiva a x (ejemplo 3*c*). Para desplazar la gráfica hacia la derecha, sumamos una constante negativa a x.

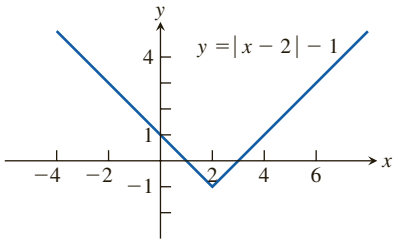


FIGURA 1.31 Gráfica de $y = |x|$ desplazada 2 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia abajo (ejemplo 3*d*).

Fórmulas para cambio de escala vertical u horizontal, y para reflexión

Para $c > 1$, se modifica la escala de la gráfica:

$y = cf(x)$	Estira verticalmente la gráfica de f por un factor de c.
$y = \frac{1}{c}f(x)$	Comprime verticalmente la gráfica de f por un factor de c.
$y = f(cx)$	Comprime horizontalmente la gráfica de f por un factor de c.
$y = f(x/c)$	Estira horizontalmente la gráfica de f por un factor de c.

Para $c = -1$, la gráfica se refleja:

$y = -f(x)$	Refleja la gráfica de f con respecto al eje x.
$y = f(-x)$	Refleja la gráfica de f con respecto al eje y.

EJEMPLO 4 A continuación modificamos la escala y reflejamos la gráfica de $y = \sqrt{x}$.

***a*) Cambio vertical:** Al multiplicar el lado derecho de $y = \sqrt{x}$ por 3, para obtener $y = 3\sqrt{x}$, la gráfica se estira verticalmente por un factor de 3, mientras que al multiplicar por $1/3$, la gráfica se comprime por un factor de 3 (figura 1.32).

***b*) Cambio horizontal:** La gráfica de $y = \sqrt{3x}$ es una compresión horizontal de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ por un factor de 3, y la gráfica de $y = \sqrt{x/3}$ es un estiramiento horizontal por un factor de 3 (figura 1.33). Observe que $y = \sqrt{3x} = \sqrt{3}\sqrt{x}$, de modo que una compresión horizontal *podría* corresponder a un estiramiento vertical por un factor de escala diferente. Asimismo, un estiramiento horizontal podría corresponder a una compresión vertical por un factor de escala diferente.

***c*) Reflexión:** La gráfica de $y = -\sqrt{x}$ es una reflexión de $y = \sqrt{x}$ con respecto al eje x, y $y = \sqrt{-x}$ es una reflexión con respecto al eje y (figura 1.34). ■

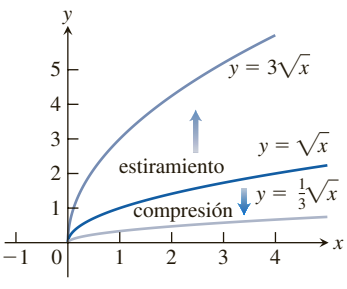


FIGURA 1.32 Estiramiento y compresión verticales de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ por un factor de 3 (ejemplo 4*a*).

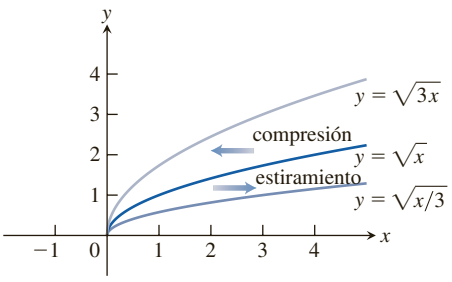


FIGURA 1.33 Estiramiento y compresión horizontales de la gráfica $y = \sqrt{x}$ por un factor de 3 (ejemplo 4*b*).

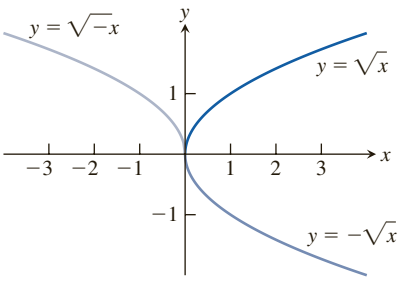


FIGURA 1.34 Reflexiones de la gráfica $y = \sqrt{x}$ con respecto a los ejes de coordenadas (ejemplo 4*c*).

EJEMPLO 5 Dada la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ (figura 1.35*a*), obtenga las fórmulas para

a) comprimir la gráfica horizontalmente por un factor de 2 y, después, reflejarla con respecto al eje y (figura 1.35*b*).

b) comprimir la gráfica verticalmente por un factor de 2 y, después, reflejarla con respecto al eje x (figura 1.35*c*).

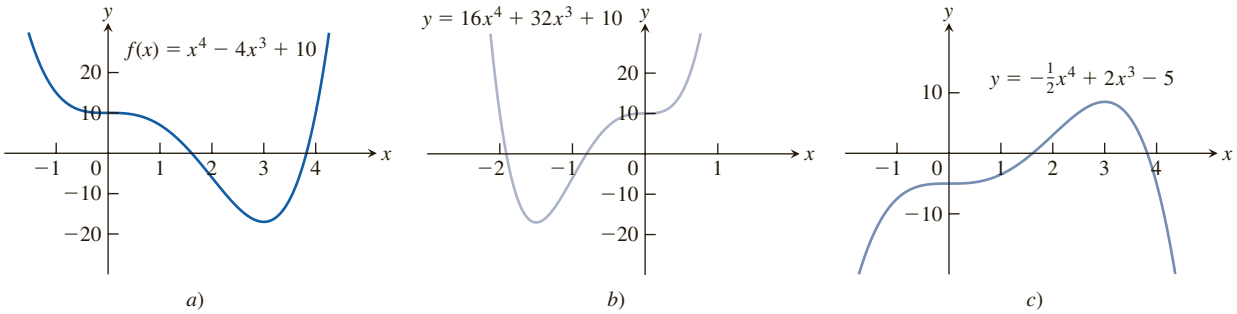


FIGURA 1.35 *a*) La gráfica original de f. *b*) Compresión horizontal de $y = f(x)$ del inciso *a*) por un factor de 2, seguida por una reflexión con respecto al eje y. *c*) Compresión vertical de $y = f(x)$ del inciso *a*) por un factor de 2, seguida por una reflexión con respecto al eje x (ejemplo 5).

Solución

a) Se multiplica x por 2 para obtener la compresión horizontal, y por -1 para obtener la reflexión con respecto al eje y. La fórmula se obtiene al sustituir x por $-2x$ en el lado derecho de la ecuación de f:

$$\begin{aligned} y = f(-2x) &= (-2x)^4 - 4(-2x)^3 + 10 \\ &= 16x^4 + 32x^3 + 10. \end{aligned}$$

b) La fórmula es

$$y = -\frac{1}{2}f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 5.$$ ■

Ejercicios 1.2

Combinaciones algebraicas

En los ejercicios 1 y 2, determine los dominios y rangos de f, g, $f + g$, y $f \cdot g$.

1. $f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$

2. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$

En los ejercicios 3 y 4, determine los dominios y rangos de f, g, f/g y g/f.

3. $f(x) = 2, \quad g(x) = x^2 + 1$

4. $f(x) = 1, \quad g(x) = 1 + \sqrt{x}$

Composición de funciones

5. Si $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^2 - 3$, determine lo siguiente.

a) $f(g(0))$ ***b)*** $g(f(0))$

c) $f(g(x))$ ***d)*** $g(f(x))$

e) $f(f(-5))$ ***f)*** $g(g(2))$

g) $f(f(x))$ ***h)*** $g(g(x))$

6. Si $f(x) = x - 1$ y $g(x) = 1/(x + 1)$, determine lo siguiente.

a) $f(g(1/2))$ ***b)*** $g(f(1/2))$

c) $f(g(x))$ ***d)*** $g(f(x))$

e) $f(f(2))$ ***f)*** $g(g(2))$

g) $f(f(x))$ ***h)*** $g(g(x))$

En los ejercicios 7 a 10, escriba una fórmula para $f \circ g \circ h$.

7. $f(x) = x + 1, \quad g(x) = 3x, \quad h(x) = 4 - x$

8. $f(x) = 3x + 4, \quad g(x) = 2x - 1, \quad h(x) = x^2$

9. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x + 4}, \quad h(x) = \dfrac{1}{x}$

10. $f(x) = \dfrac{x + 2}{3 - x}, \quad g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}, \quad h(x) = \sqrt{2 - x}$

Sean $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^3$, y $j(x) = 2x$. Exprese cada una de las funciones de los ejercicios 11 y 12 como una composición donde se usen una o más de las funciones f, g, h y j.

11. ***a)*** $y = \sqrt{x} - 3$ ***b)*** $y = 2\sqrt{x}$
c) $y = x^{1/4}$ ***d)*** $y = 4x$
e) $y = \sqrt{(x-3)^3}$ ***f)*** $y = (2x - 6)^3$

12. ***a)*** $y = 2x - 3$ ***b)*** $y = x^{3/2}$
c) $y = x^9$ ***d)*** $y = x - 6$
e) $y = 2\sqrt{x - 3}$ ***f)*** $y = \sqrt{x^3 - 3}$

13. Copie y complete la siguiente tabla.

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
a)	$x - 7$	$\sqrt{x}$	?
b)	$x + 2$	$3x$	?
c)	?	$\sqrt{x - 5}$	$\sqrt{x^2 - 5}$
d)	$\dfrac{x}{x-1}$	$\dfrac{x}{x-1}$	?
e)	?	$1 + \dfrac{1}{x}$	x
f)	$\dfrac{1}{x}$	?	x

14. Copie y complete la siguiente tabla.

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
a)	$\dfrac{1}{x-1}$	$\lvert x \rvert$	?
b)	?	$\dfrac{x-1}{x}$	$\dfrac{x}{x+1}$
c)	?	$\sqrt{x}$	$\lvert x \rvert$
d)	$\sqrt{x}$	?	$\lvert x \rvert$

15. Evalúe cada expresión utilizando los valores de la tabla:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	-2	1	2
$g(x)$	2	1	0	-1	0

a) $f(g(-1))$ ***b)*** $g(f(0))$ ***c)*** $f(f(-1))$
d) $g(g(2))$ ***e)*** $g(f(-2))$ ***f)*** $f(g(1))$

16. Evalúe cada expresión utilizando las funciones

$$f(x) = 2 - x, \quad g(x) = \begin{cases} -x, & -2 \le x < 0 \\ x - 1, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

a) $f(g(0))$ ***b)*** $g(f(3))$ ***c)*** $g(g(-1))$
d) $f(f(2))$ ***e)*** $g(f(0))$ ***f)*** $f(g(1/2))$

En los ejercicios 17 y 18, ***a)*** escriba fórmulas para $f \circ g$ y $g \circ f$, y determine ***b)*** el dominio y ***c)*** el rango de cada una.

17. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

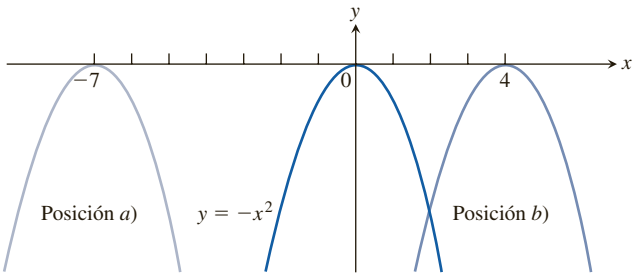
18. $f(x) = x^2$, $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

19. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$. Determine una función $y = g(x)$ de modo que $(f \circ g)(x) = x$.

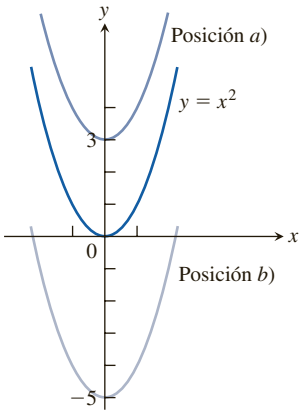
20. Sea $f(x) = 2x^3 - 4$. Determine una función $y = g(x)$ de modo que $(f \circ g)(x) = x + 2$.

Traslación de gráficas

21. La siguiente figura muestra la gráfica de $y = -x^2$ desplazada a dos posiciones nuevas. Escriba las ecuaciones de las gráficas nuevas.

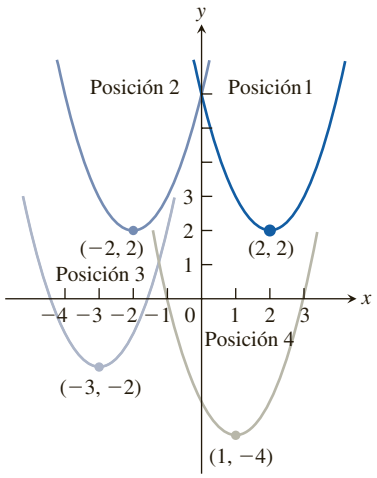


22. La siguiente figura muestra la gráfica de $y = x^2$ desplazada a dos posiciones nuevas. Escriba las ecuaciones de las gráficas nuevas.

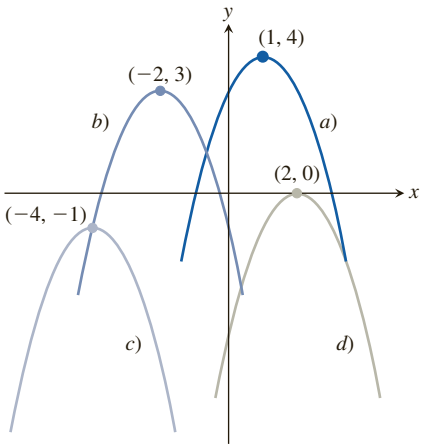


23. Relacione las ecuaciones listadas en los incisos *a)* a *d)* con las gráficas de la figura.

a) $y = (x-1)^2 - 4$ ***b)*** $y = (x-2)^2 + 2$
c) $y = (x+2)^2 + 2$ ***d)*** $y = (x+3)^2 - 2$



24. La siguiente figura muestra la gráfica de $y = -x^2$ desplazada a cuatro posiciones nuevas. Escriba una ecuación para cada nueva gráfica.



En los ejercicios 25 a 34 se establece cuántas unidades y en qué direcciones se trasladarán las gráficas de las ecuaciones dadas. Proporcione una ecuación para la gráfica desplazada; después, en el mismo plano cartesiano, trace la gráfica de la función original y la gráfica de la ecuación desplazada, anotando junto a cada gráfica la ecuación que le corresponda.

25. $x^2 + y^2 = 49$ Abajo 3, izquierda 2

26. $x^2 + y^2 = 25$ Arriba 3, izquierda 4

27. $y = x^3$ Izquierda 1, abajo 1

28. $y = x^{2/3}$ Derecha 1, abajo 1

29. $y = \sqrt{x}$ Izquierda 0.81

30. $y = -\sqrt{x}$ Derecha 3

31. $y = 2x - 7$ Arriba 7

32. $y = \frac{1}{2}(x + 1) + 5$ Abajo 5, derecha 1

33. $y = 1/x$ Arriba 1, derecha 1

34. $y = 1/x^2$ Izquierda 2, abajo 1

Grafique las funciones de los ejercicios 35 a 54.

35. $y = \sqrt{x + 4}$

36. $y = \sqrt{9 - x}$

37. $y = |x - 2|$

38. $y = |1 - x| - 1$

39. $y = 1 + \sqrt{x - 1}$

40. $y = 1 - \sqrt{x}$

41. $y = (x + 1)^{2/3}$

42. $y = (x - 8)^{2/3}$

43. $y = 1 - x^{2/3}$

44. $y + 4 = x^{2/3}$

45. $y = \sqrt[3]{x - 1} - 1$

46. $y = (x + 2)^{3/2} + 1$

47. $y = \dfrac{1}{x - 2}$

48. $y = \dfrac{1}{x} - 2$

49. $y = \dfrac{1}{x} + 2$

50. $y = \dfrac{1}{x + 2}$

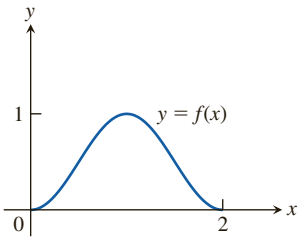
51. $y = \dfrac{1}{(x - 1)^2}$

52. $y = \dfrac{1}{x^2} - 1$

53. $y = \dfrac{1}{x^2} + 1$

54. $y = \dfrac{1}{(x + 1)^2}$

55. La siguiente figura muestra la gráfica de una función $f(x)$ con dominio $[0, 2]$ y rango $[0, 1]$. Determine los dominios y los rangos de las siguientes funciones, y trace sus gráficas.



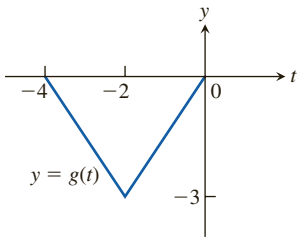
a) $f(x) + 2$ ***b)*** $f(x) - 1$

c) $2f(x)$ ***d)*** $-f(x)$

e) $f(x + 2)$ ***f)*** $f(x - 1)$

g) $f(-x)$ ***h)*** $-f(x + 1) + 1$

56. La siguiente figura muestra la gráfica de una función $g(t)$ con dominio $[-4, 0]$ y rango $[-3, 0]$. Determine los dominios y los rangos de las siguientes funciones, y trace sus gráficas.



a) $g(-t)$ ***b)*** $-g(t)$

c) $g(t) + 3$ ***d)*** $1 - g(t)$

e) $g(-t + 2)$ ***f)*** $g(t - 2)$

g) $g(1 - t)$ ***h)*** $-g(t - 4)$

Cambio de escala vertical y horizontal

En los ejercicios 57 a 66 se indica por qué factor y en qué dirección se estirarán o comprimirán las gráficas de las funciones dadas. Proporcione una ecuación para cada gráfica estirada o comprimida.

57. $y = x^2 - 1$, estirada verticalmente por un factor de 3

58. $y = x^2 - 1$, comprimida horizontalmente por un factor de 2

59. $y = 1 + \dfrac{1}{x^2}$, comprimida verticalmente por un factor de 2

60. $y = 1 + \dfrac{1}{x^2}$, estirada horizontalmente por un factor de 3

61. $y = \sqrt{x + 1}$, comprimida horizontalmente por un factor de 4

62. $y = \sqrt{x + 1}$, estirada verticalmente por un factor de 3

63. $y = \sqrt{4 - x^2}$, estirada horizontalmente por un factor de 2

64. $y = \sqrt{4 - x^2}$, comprimida verticalmente por un factor de 3

65. $y = 1 - x^3$, comprimida horizontalmente por un factor de 3

66. $y = 1 - x^3$, estirada horizontalmente por un factor de 2

Graficación

En los ejercicios 67 a 74, trace la gráfica de cada función, pero sin localizar puntos; esto es, utilice la gráfica de una de las funciones estándar presentadas en las figuras 1.14 a 1.17, y aplique la transformación adecuada.

67. $y = -\sqrt{2x+1}$ **68.** $y = \sqrt{1-\frac{x}{2}}$

69. $y = (x-1)^3 + 2$ **70.** $y = (1-x)^3 + 2$

71. $y = \frac{1}{2x} - 1$ **72.** $y = \frac{2}{x^2} + 1$

73. $y = -\sqrt[3]{x}$ **74.** $y = (-2x)^{2/3}$

75. Trace la gráfica de la función $y = |x^2 - 1|$.

76. Trace la gráfica de la función $y = \sqrt{|x|}$.

Combinación de funciones

77. Suponga que f es una función par, g es una función impar y ambas, f y g, están definidas en toda la recta real $(-\infty, \infty)$. ¿Cuáles de las siguientes funciones (donde están definidas) son pares? ¿Cuáles son impares?

a) fg ***b)*** f/g ***c)*** g/f

d) $f^2 = ff$ ***e)*** $g^2 = gg$ ***f)*** $f \circ g$

g) $g \circ f$ ***h)*** $f \circ f$ ***i)*** $g \circ g$

78. ¿Una función puede ser par e impar al mismo tiempo? Justifique su respuesta.

T 79. (*Continuación del ejemplo 1*). Trace las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$ junto con *a)* su suma, *b)* su producto, *c)* sus dos restas, *d)* sus dos cocientes.

T 80. Sean $f(x) = x - 7$ y $g(x) = x^2$. Trace las gráficas de f y g junto con $f \circ g$ y $g \circ f$.

1.3 Funciones trigonométricas

En esta sección se revisan la medida en radianes y las funciones trigonométricas básicas.

Ángulos

Los ángulos se miden en grados o radianes. El número de **radianes** en el ángulo central $A'CB'$, dentro de una circunferencia de radio r, se define como el número de "unidades de radio" contenidas en el arco s subtendido por el ángulo central. Si denotamos este ángulo central por θ cuando se mide en radianes, esto significa que $\theta = s/r$ (figura 1.36), o

$$s = r\theta \qquad (\theta \text{ en radianes}). \tag{1}$$

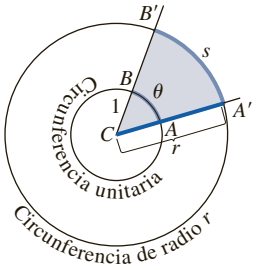


FIGURA 1.36 La medida en radianes del ángulo central $A'CB'$ es el número $\theta = s/r$. En una circunferencia unitaria de radio $r = 1$, θ es la longitud del arco AB, de la circunferencia unitaria, que es cortado por el ángulo central ACB.

Si la circunferencia es unitaria de radio igual a 1, entonces, a partir de la figura 1.36 y la ecuación (1), vemos que el ángulo central θ medido en radianes es exactamente la longitud del arco que es cortado de la circunferencia unitaria por el ángulo. Como una vuelta completa de la circunferencia unitaria equivale a 360° o 2π radianes, tenemos

$$\pi \text{ radianes} = 180° \tag{2}$$

y

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi}(\approx 57.3) \text{ grados} \qquad \text{o} \qquad 1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180}(\approx 0.017) \text{ radianes.}$$

La tabla 1.1 muestra la equivalencia entre grados y radianes para algunos ángulos básicos.

TABLA 1.1 Ángulos medidos en grados y radianes

Grados	-180	-135	-90	-45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ (radianes)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Se dice que un ángulo en el plano xy está en **posición estándar** si su vértice se ubica en el origen, y su rayo inicial se encuentra a lo largo del eje x positivo (figura 1.37). A los ángulos medidos en sentido contrario a las manecillas del reloj a partir del eje x positivo, se les asignan medidas positivas; a los ángulos medidos en el sentido de las manecillas del reloj, se les asignan medidas negativas.

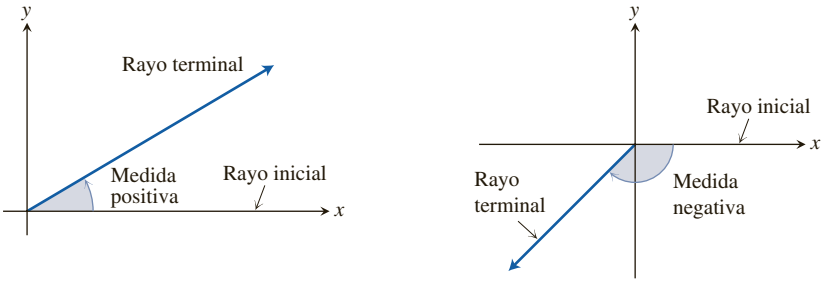


FIGURA 1.37 Ángulos en posición estándar en el plano xy.

Cuando se usan ángulos para describir rotaciones en sentido contrario a las manecillas del reloj, nuestras medidas pueden ser mucho mayores que 2π radianes o 360°. De manera similar, los ángulos que describen rotaciones en el sentido de las manecillas del reloj pueden tener medidas negativas de cualquier tamaño (figura 1.38).

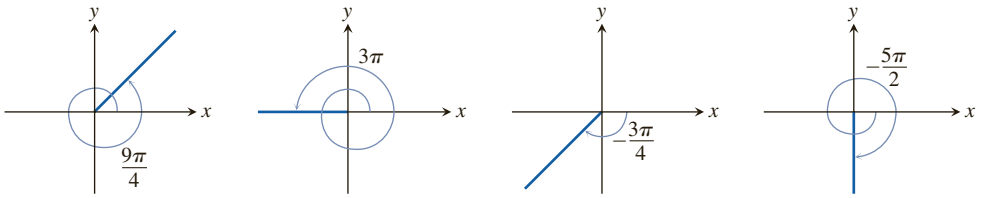
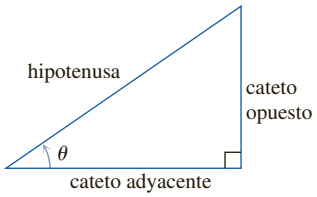


FIGURA 1.38 Las medidas en radianes distintas de cero pueden ser positivas o negativas, y ser mayores que 2π.

Convención para ángulos: uso de radianes De aquí en adelante, en este libro, se dará por sentado que todos los ángulos están medidos en radianes, a menos que se indique explícitamente que se trata de grados o de alguna otra unidad. Cuando hablemos del ángulo $\pi/3$, nos estaremos refiriendo a $\pi/3$ radianes (que equivalen a 60°), y no a $\pi/3$ grados. Utilizamos radianes porque esto simplifica mucho las operaciones en el cálculo, y algunos resultados que se obtienen con las funciones trigonométricas son falsos cuando los ángulos se miden en grados.



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

FIGURA 1.39 Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

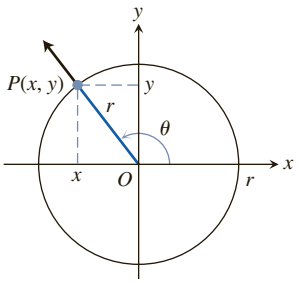


FIGURA 1.40 Las funciones trigonométricas de un ángulo general θ se definen en términos de x, y y r.

Las seis funciones trigonométricas básicas

Probablemente usted conoce las definiciones de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo en términos de los lados de un triángulo rectángulo (figura 1.39). A continuación ampliaremos esta definición para ángulos obtusos y negativos, colocando primero el ángulo en posición estándar en una circunferencia de radio r; después, definiremos las funciones trigonométricas en términos de las coordenadas del punto $P(x, y)$, donde el lado terminal del ángulo interseca a la circunferencia (figura 1.40).

$$\textbf{seno:}\quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \textbf{cosecante:}\quad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

$$\textbf{coseno:}\quad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \textbf{secante:}\quad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\textbf{tangente:}\quad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \textbf{cotangente:}\quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

Estas definiciones ampliadas coinciden con las definiciones en el caso del triángulo rectángulo cuando el ángulo es agudo.

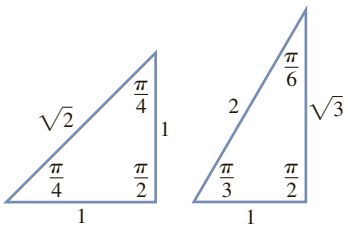


FIGURA 1.41 Ángulos en radianes y longitudes de los lados de dos triángulos usuales.

Considere también las siguientes definiciones, siempre que los cocientes estén definidos.

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

Como se observa, $\tan\theta$ y $\sec\theta$ no están definidas si $x = \cos\theta = 0$. Esto significa que no están definidas si θ es $\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$ De forma análoga, $\cot\theta$ y $\csc\theta$ no están definidas para valores de θ para los cuales $y = 0$, es decir, $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

Los valores exactos de estas razones trigonométricas para algunos ángulos pueden leerse en los triángulos de la figura 1.41. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$
$$\tan\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

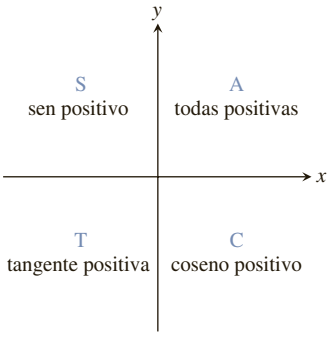


FIGURA 1.42 La regla TOSE TACO nos permite recordar qué funciones trigonométricas son positivas en cada cuadrante.

La regla TOSE TACO (figura 1.42) es útil para recordar cuáles de las funciones trigonométricas son positivas o negativas. Por ejemplo, en el triángulo de la figura 1.43, vemos que

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \qquad \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

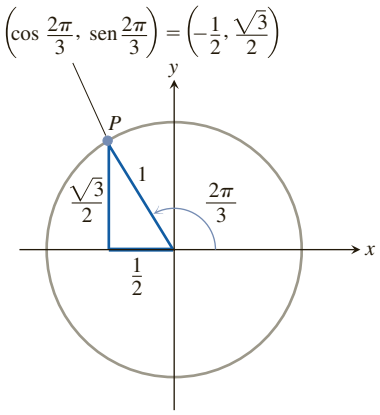


FIGURA 1.43 Triángulo para calcular el seno y el coseno de $2\pi/3$ radianes. La longitud de los lados se obtiene de la geometría de triángulos rectángulos.

Usando un método similar, determinamos los valores de sen θ, cos θ y tan θ que se muestran en la tabla 1.2.

TABLA 1.2 Valores de sen θ, cos θ, y tan θ para valores seleccionados de θ

Grados	-180	-135	-90	-45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ (radianes)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen θ	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos θ	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan θ	0	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0		0

Periodicidad y gráficas de las funciones trigonométricas

Cuando un ángulo de medida θ y otro que mide $\theta + 2\pi$ están en posición estándar, sus lados terminales coinciden. Por lo tanto, las funciones trigonométricas de los dos ángulos tienen los mismos valores: $\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta$, $\tan(\theta + 2\pi) = \tan\theta$, y así sucesivamente. De forma análoga, $\cos(\theta - 2\pi) = \cos\theta$, $\operatorname{sen}(\theta - 2\pi) = \operatorname{sen}\theta$, y así sucesivamente. Para describir este comportamiento repetitivo, decimos que las seis funciones trigonométricas básicas son *periódicas*.

Periodos de las funciones trigonométricas

Periodo π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x$$
$$\cot(x + \pi) = \cot x$$

Periodo 2π:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$
$$\sec(x + 2\pi) = \sec x$$
$$\csc(x + 2\pi) = \csc x$$

DEFINICIÓN Una función $f(x)$ es **periódica** si existe un número positivo p tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo valor de x. El menor de los valores posibles de p es el **periodo** de f.

Cuando graficamos funciones trigonométricas en el plano cartesiano, por lo general denotamos la variable independiente mediante x en lugar de hacerlo con θ. La figura 1.44 muestra que las funciones tangente y cotangente tienen periodo $p = \pi$, en tanto que las otras cuatro funciones tienen periodo 2π. Asimismo, las simetrías de las gráficas revelan que las funciones coseno y secante son pares, y las otras cuatro funciones son impares (aunque esto no prueba dichos resultados).

Pares

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\sec(-x) = \sec x$$

Impares

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$
$$\tan(-x) = -\tan x$$
$$\csc(-x) = -\csc x$$
$$\cot(-x) = -\cot x$$

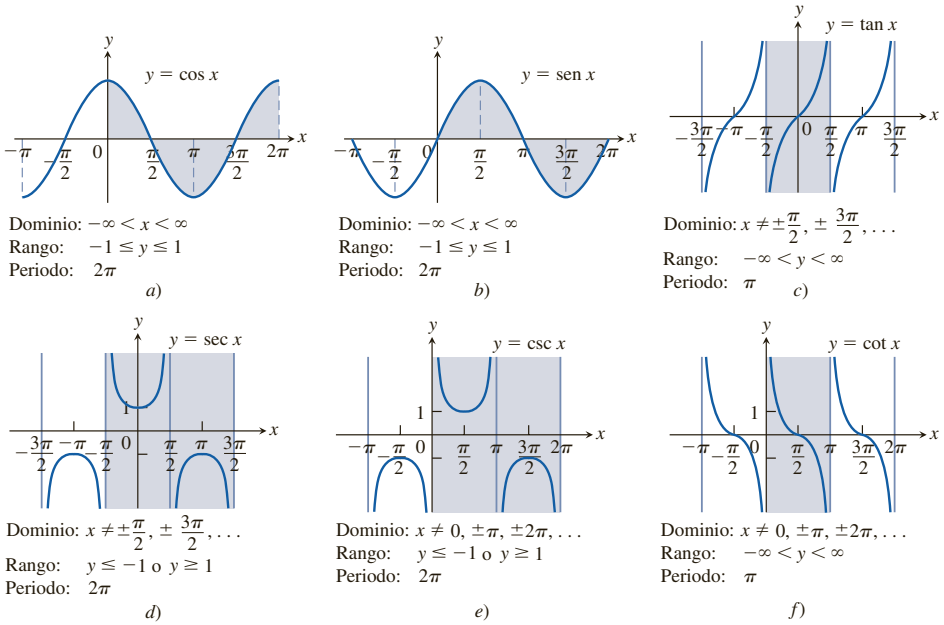


FIGURA 1.44 Gráficas de las seis funciones trigonométricas básicas, usando medidas en radianes. La zona sombreada en cada función trigonométrica indica su periodicidad.

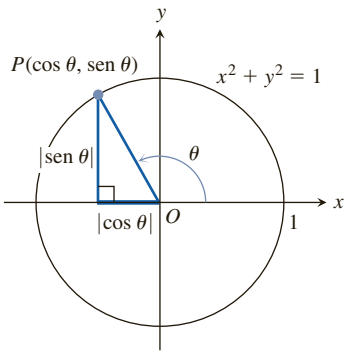


FIGURA 1.45 Triángulo de referencia para un ángulo general θ.

Identidades trigonométricas

Las coordenadas de cualquier punto $P(x, y)$ en el plano pueden expresarse en términos de la distancia r entre el punto y el origen, y el ángulo θ que forma el rayo OP con el eje x positivo (figura 1.40). Como $x/r = \cos\theta$ y $y/r = \operatorname{sen}\theta$, tenemos

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

Cuando $r = 1$, podemos aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de referencia en la figura 1.45, para obtener la ecuación

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1. \tag{3}$$

Esta ecuación, la identidad más empleada en trigonometría, es válida para todos los valores de θ. Al dividir esta identidad entre $\cos^2\theta$ y $\text{sen}^2\theta$, se obtienen las identidades

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Las siguientes fórmulas funcionan para todos los ángulos A y B (ejercicio 58).

Fórmulas para la suma de ángulos

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \text{sen}\,A\,\text{sen}\,B$$
$$\text{sen}(A+B) = \text{sen}\,A\cos B + \cos A\,\text{sen}\,B \tag{4}$$

Existen fórmulas similares para $\cos(A-B)$ y $\text{sen}(A-B)$ (ejercicios 35 y 36). Todas las identidades trigonométricas que se necesitan en este libro se deducen de las ecuaciones (3) y (4). Por ejemplo, al sustituir A y B por θ en las fórmulas de suma, se obtiene como resultado:

Fórmulas para el doble de un ángulo

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$$
$$\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \tag{5}$$

Se obtienen fórmulas adicionales al combinar las ecuaciones

$$\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1, \qquad \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \cos 2\theta.$$

Sumamos las dos ecuaciones para obtener $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$ y restamos la segunda de la primera para obtener $2\,\text{sen}^2\theta = 1 - \cos 2\theta$. Esto da como resultado las siguientes identidades, las cuales son muy útiles en cálculo integral.

Fórmulas para la mitad de un ángulo

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \tag{6}$$
$$\text{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \tag{7}$$

Ley de los cosenos

Si a, b y c son los lados de un triángulo ABC, y si θ es el ángulo opuesto a c, entonces,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta. \tag{8}$$

Esta ecuación se conoce como **ley de los cosenos**.

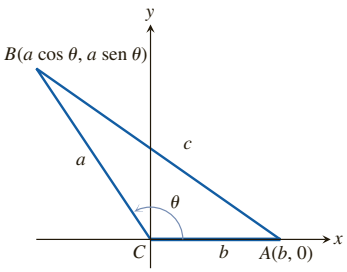


FIGURA 1.46 El cuadrado de la distancia entre A y B da la ley de los cosenos.

Podemos ver por qué la ley funciona si introducimos ejes de coordenadas con el origen en C y el eje x positivo a lo largo de un lado del triángulo, como en la figura 1.46. Las coordenadas de A son $(b, 0)$; las coordenadas de B son $(a \cos \theta, a \operatorname{sen} \theta)$. Por lo tanto, el cuadrado de la distancia entre A y B es

$$\begin{aligned} c^2 &= (a\cos\theta - b)^2 + (a\operatorname{sen}\theta)^2 \\ &= a^2 \underbrace{(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}_{1} + b^2 - 2ab\cos\theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta. \end{aligned}$$

La ley de los cosenos generaliza el teorema de Pitágoras. Si $\theta = \pi/2$, entonces, $\cos\theta = 0$ y $c^2 = a^2 + b^2$.

Dos desigualdades especiales

Para cualquier ángulo θ medido en radianes, las funciones seno y coseno satisfacen

$$-|\theta| \le \operatorname{sen}\theta \le |\theta| \qquad \text{y} \qquad -|\theta| \le 1 - \cos\theta \le |\theta|.$$

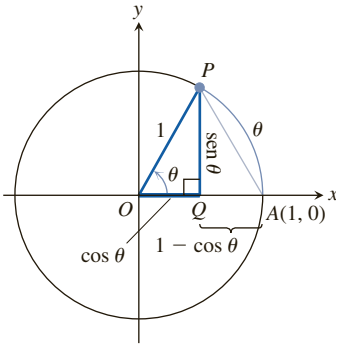


FIGURA 1.47 A partir de la geometría de esta figura, dibujada para $\theta > 0$, obtenemos la desigualdad $\operatorname{sen}^2\theta + (1 - \cos\theta)^2 \le \theta^2$.

Para establecer estas desigualdades, representamos θ como un ángulo diferente de cero en posición estándar (figura 1.47). La circunferencia de la figura es unitaria, de modo que $|\theta|$ es igual a la longitud del arco circular AP. Por lo tanto, la longitud del segmento de recta AP es menor que $|\theta|$.

El triángulo APQ es un triángulo rectángulo con lados de longitud

$$QP = |\operatorname{sen}\theta|, \qquad AQ = 1 - \cos\theta.$$

Del teorema de Pitágoras y considerando el hecho de que $AP < |\theta|$, tenemos

$$\operatorname{sen}^2\theta + (1 - \cos\theta)^2 = (AP)^2 \le \theta^2. \tag{9}$$

Los términos del lado izquierdo de la ecuación (9) son positivos, de manera que cada uno es menor que su suma y, por consiguiente, menor o igual que θ^2:

$$\operatorname{sen}^2\theta \le \theta^2 \qquad \text{y} \qquad (1 - \cos\theta)^2 \le \theta^2.$$

Si se toman las raíces cuadradas, esto es equivalente a decir que

$$|\operatorname{sen}\theta| \le |\theta| \qquad \text{y} \qquad |1 - \cos\theta| \le |\theta|,$$

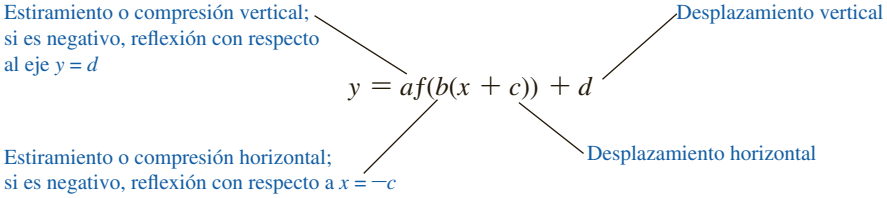
de manera que

$$-|\theta| \le \operatorname{sen}\theta \le |\theta| \qquad \text{y} \qquad -|\theta| \le 1 - \cos\theta \le |\theta|.$$

Estas desigualdades serán útiles en el siguiente capítulo.

Transformaciones de las gráficas trigonométricas

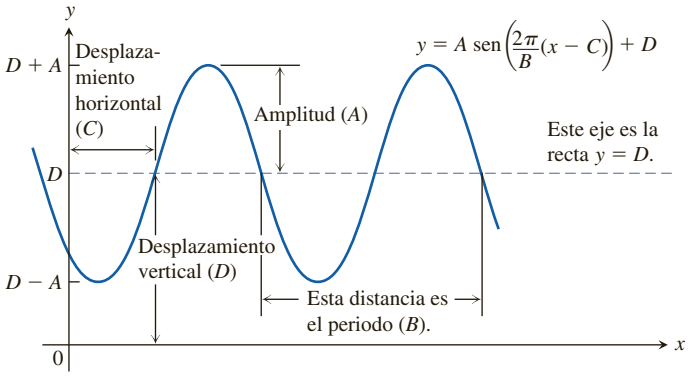
Las reglas de desplazamiento, estiramiento, compresión y reflexión de la gráfica de una función, que se resumen en el siguiente diagrama, se aplican también a las funciones trigonométricas que hemos visto en esta sección.



Cuando se aplican las reglas de transformación a la función seno, se obtiene la **función senoidal** o **sinusoide** de la forma

$$f(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D,$$

donde $|A|$ es la *amplitud*, $|B|$ es el *periodo*, C es el *desplazamiento horizontal*, y D es el *desplazamiento vertical*. La interpretación gráfica de los diferentes términos se muestra en la siguiente figura.



Ejercicios 1.3

Radianes y grados

1. En una circunferencia con radio de 10 m, ¿cuál es la longitud de un arco que subtiende un ángulo central de ***a)*** $4\pi/5$ radianes y ***b)*** 110°?
2. Un ángulo central en una circunferencia de radio 8 está subtendido por un arco cuya longitud es de 10π. Determine la medida del ángulo en radianes y en grados.
3. Se desea construir un ángulo de 80° formando un arco en el perímetro de un disco de 12 pulgadas de diámetro, y dibujando rectas de los extremos del arco al centro del disco. ¿De qué longitud debe ser el arco, redondeando a décimos de pulgada?
4. Si una rueda de 1 m de diámetro se hace rodar hacia adelante 30 cm sobre el suelo, ¿qué ángulo girará? Dé su respuesta en radianes (redondeando al décimo más cercano) y en grados (redondeando al grado más cercano).

Evaluación de funciones trigonométricas

5. Complete la siguiente tabla con los valores de la función. Si la función no está definida en el ángulo dado, indíquelo con la leyenda "IND". No use calculadora ni tablas.

θ	$-\pi$	$-2\pi/3$	0	$\pi/2$	$3\pi/4$
sen θ					
cos θ					
tan θ					
cot θ					
sec θ					
csc θ					

6. Complete la siguiente tabla con los valores de la función. Si la función no está definida en el ángulo dado, indíquelo con la leyenda "IND". No use calculadora ni tablas.

θ	$-3\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/6$	$\pi/4$	$5\pi/6$
sen θ					
cos θ					
tan θ					
cot θ					
sec θ					
csc θ					

En los ejercicios 7 a 12, uno de los valores sen x, cos x y tan x está dado. Determine los otros dos si x se encuentra en el intervalo indicado.

7. $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
8. $\tan x = 2, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
9. $\cos x = \frac{1}{3}, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$
10. $\cos x = -\frac{5}{13}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
11. $\tan x = \frac{1}{2}, \quad x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$
12. $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}, \quad x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

Gráficas de funciones trigonométricas

Grafique las funciones de los ejercicios 13 a 22. ¿Cuál es el periodo de cada función?

13. $\operatorname{sen} 2x$
14. $\operatorname{sen}(x/2)$
15. $\cos \pi x$
16. $\cos \frac{\pi x}{2}$
17. $-\operatorname{sen} \frac{\pi x}{3}$
18. $-\cos 2\pi x$
19. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
20. $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

21. $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ **22.** $\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - 2$

Grafique las funciones de los ejercicios 23 a 26 en el plano ts (t es el eje horizontal, y s, el eje vertical). ¿Cuál es el periodo de cada función? ¿Qué tipo de simetría tienen las gráficas?

23. $s = \cot 2t$ **24.** $s = -\tan \pi t$

25. $s = \sec\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ **26.** $s = \csc\left(\frac{t}{2}\right)$

T **27.** ***a)*** Grafique $y = \cos x$ y $y = \sec x$ en el mismo plano cartesiano para $-3\pi/2 \le x \le 3\pi/2$. Comente el comportamiento de $\sec x$ en relación con los signos y valores de $\cos x$.

b) Grafique $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \csc x$ en el mismo plano cartesiano para $-\pi \le x \le 2\pi$. Comente el comportamiento de $\csc x$ en relación con los signos y valores de $\operatorname{sen} x$.

T **28.** Grafique $y = \tan x$ y $y = \cot x$ en el mismo plano cartesiano para $-7 \le x \le 7$. Comente el comportamiento de $\cot x$ en relación con los signos y valores de $\tan x$.

29. Grafique $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \lfloor \operatorname{sen} x \rfloor$ en el mismo plano cartesiano. ¿Cuáles son el dominio y el rango de $\lfloor \operatorname{sen} x \rfloor$?

30. Grafique $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \lceil \operatorname{sen} x \rceil$ en el mismo plano cartesiano. ¿Cuáles son el dominio y el rango de $\lceil \operatorname{sen} x \rceil$?

Uso de las fórmulas de suma

Use las fórmulas de la suma de ángulos para deducir las identidades de los ejercicios 31 a 36.

31. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$ **32.** $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$

33. $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ **34.** $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

35. $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$ (en el ejercicio 57 se presenta una deducción diferente).

36. $\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B$

37. ¿Qué sucede si tomamos $B = A$ en la identidad $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$? ¿El resultado concuerda con algo que ya conoce?

38. ¿Qué pasa si tomamos $B = 2\pi$ en las fórmulas de suma? ¿El resultado concuerda con algo que ya conoce?

En los ejercicios 39 a 42, exprese la cantidad dada en términos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

39. $\cos(\pi + x)$ **40.** $\operatorname{sen}(2\pi - x)$

41. $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ **42.** $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

43. Evalúe $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}$ como $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$.

44. Evalúe $\cos\frac{11\pi}{12}$ como $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)$.

45. Evalúe $\cos\frac{\pi}{12}$. **46.** Evalúe $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}$.

Uso de las fórmulas para medio ángulo

Determine los valores de la función en los ejercicios 47 a 50.

47. $\cos^2\frac{\pi}{8}$ **48.** $\cos^2\frac{5\pi}{12}$

49. $\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{12}$ **50.** $\operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{8}$

Solución de ecuaciones trigonométricas

Resuelva los ejercicios 51 a 54 para el ángulo θ, donde $0 \le \theta \le 2\pi$.

51. $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{3}{4}$ **52.** $\operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$

53. $\operatorname{sen} 2\theta - \cos\theta = 0$ **54.** $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$

Teoría y ejemplos

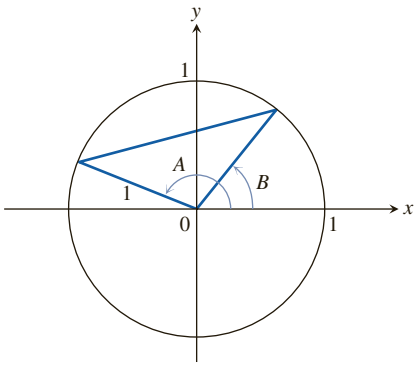
55. Fórmula de la tangente de una suma La fórmula estándar para la tangente de la suma de dos ángulos es

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

Deduzca la fórmula.

56. (*Continuación del ejercicio 55*). Deduzca la fórmula para $\tan(A - B)$.

57. Aplique la ley de los cosenos en el triángulo de la siguiente figura para deducir la fórmula de $\cos(A - B)$.



58. ***a)*** Aplique la fórmula de $\cos(A - B)$ a la identidad $\operatorname{sen}\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, para obtener la fórmula de suma de $\operatorname{sen}(A + B)$.

b) Deduzca la fórmula de $\cos(A + B)$ sustituyendo B por $-B$ en la fórmula de $\cos(A - B)$ del ejercicio 35.

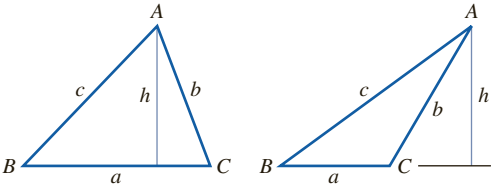
59. Un triángulo tiene lados $a = 2$ y $b = 3$, y el ángulo $C = 60°$. Determine la longitud del lado c.

60. Un triángulo tiene lados $a = 2$ y $b = 3$, y el ángulo $C = 40°$. Determine la longitud del lado c.

61. Ley de los senos *La ley de los senos* afirma que si a, b y c son los lados opuestos a los ángulos A, B y C en un triángulo, entonces,

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}.$$

Use las siguientes figuras y, si lo requiere, la identidad $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$, para deducir la ley.



62. Un triángulo tiene lados $a = 2$ y $b = 3$, y el ángulo $C = 60°$ (como en el ejercicio 59). Obtenga el seno del ángulo B utilizando la ley de los senos.

63. Un triángulo tiene un lado $c = 2$ y ángulos $A = \pi/4$ y $B = \pi/3$. Determine la longitud a del lado opuesto a A.

T **64. La aproximación sen $x \approx x$** Siempre es útil saber que cuando x se mide en radianes, sen $x \approx x$ para valores numéricamente pequeños de x. En la sección 3.11 veremos por qué es válida esta aproximación. El error de aproximación es menor que 1 en 5000 si $|x| < 0.1$.

a) Con su calculadora graficadora en modo de radianes, trace las gráficas de $y = \text{sen } x$ y $y = x$, juntas en una ventana, alrededor del origen. ¿Qué observa conforme x se aproxima al origen?

b) Con su calculadora graficadora en modo de grados, trace las gráficas de $y = \text{sen } x$ y $y = x$, juntas en una ventana, alrededor del origen. ¿Qué tan diferente es la figura obtenida en modo de radianes?

Curvas senoidales generales

Para

$$f(x) = A \,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D,$$

Identifique A, B, C y D para las funciones seno de los ejercicios 65 a 68 y trace sus gráficas.

65. $y = 2\,\text{sen}\,(x + \pi) - 1$ **66.** $y = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(\pi x - \pi) + \frac{1}{2}$

67. $y = -\frac{2}{\pi}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{1}{\pi}$ **68.** $y = \frac{L}{2\pi}\,\text{sen}\,\frac{2\pi t}{L}, \quad L > 0$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 69 a 72, investigará qué ocurre gráficamente con la función general seno

$$f(x) = A \,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D$$

a medida que se modifican los valores de las constantes A, B, C y D. Use un software matemático para ejecutar los pasos de los siguientes ejercicios.

69. El periodo *B* Considere las constantes $A = 3$, $C = D = 0$.

a) Grafique $f(x)$ para los valores $B = 1, 3, 2\pi, 5\pi$ en el intervalo $-4\pi \le x \le 4\pi$. Describa qué le sucede a la gráfica de la función general seno conforme aumenta el periodo.

b) ¿Qué le ocurre a la gráfica para valores negativos de B? Inténtelo con $B = -3$ y $B = -2\pi$.

70. El desplazamiento horizontal *C* Considere las constantes $A = 3$, $B = 6$ y $D = 0$.

a) Grafique $f(x)$ para los valores $C = 0$, 1 y 2 sobre el intervalo $-4\pi \le x \le 4\pi$. Describa qué le sucede a la gráfica de la función general seno, conforme C aumenta otorgándole valores positivos.

b) ¿Qué le sucede a la gráfica para valores negativos de C?

c) ¿Cuál es el menor valor positivo que debemos asignar a C, de manera que la gráfica no se desplace horizontalmente? Confirme su respuesta trazando una gráfica.

71. El desplazamiento vertical *D* Considere las constantes $A = 3$, $B = 6$, $C = 0$.

a) Grafique $f(x)$ para los valores $D = 0$, 1 y 3 sobre el intervalo $-4\pi \le x \le 4\pi$. Describa qué le sucede a la gráfica de la función general seno, conforme D aumenta otorgándole valores positivos.

b) ¿Qué le ocurre a la gráfica para valores negativos de D?

72. La amplitud *A* Considere las constantes $B = 6$, $C = D = 0$.

a) Describa qué le sucede a la gráfica de la función general seno, conforme A aumenta otorgándole valores positivos. Confirme su respuesta graficando $f(x)$ para los valores $A = 1$, 5 y 9.

b) ¿Qué le ocurre a la gráfica para valores negativos de A?

1.4 Graficación con software

Actualmente, una variedad de dispositivos, como computadoras, calculadoras y teléfonos inteligentes, tienen aplicaciones gráficas que nos ayudan a graficar funciones muy complicadas con gran precisión. Muchas de estas funciones no se podrían graficar fácilmente de otra manera. Sin embargo, hay que tener cuidado cuando usamos tales dispositivos de graficación, debido a los problemas que analizaremos en esta sección. En el capítulo 4 veremos de qué manera el cálculo nos ayuda a tener la certeza de que estamos tomando en consideración todas las características importantes de la gráfica de una función.

Ventanas de graficación

Cuando se utiliza una herramienta de graficación, una parte de la gráfica se despliega en una **pantalla** o **ventana** de estos dispositivos. Dependiendo del software, la ventana predeterminada puede dar una imagen incompleta o distorsionada de la gráfica. Se usa el término *ventana cuadrada* cuando las unidades o escalas en ambos ejes son iguales. Este término no implica que la ventana, en realidad, tenga forma cuadrada (por lo general, las pantallas de visualización son rectangulares), sino que la unidad en x tiene la misma longitud que la unidad en y.

Cuando una gráfica se despliega en modo predeterminado, es posible que la escala de las unidades x sea diferente a la de las unidades y, para que la gráfica se ajuste al tamaño de la pantalla. Esta diferencia de escalas puede ocasionar distorsiones visuales que conducen a interpretaciones erróneas del comportamiento de la función. Algunas aplicaciones nos

permiten establecer la ventana de visualización especificando uno o ambos de los intervalos, $a \le x \le b$ y $c \le y \le d$, y también es posible igualar las escalas utilizadas para los ejes. La aplicación elige cierto número de valores de x equidistantes en $[a, b]$, y luego traza los puntos $(x, f(x))$. Se grafica un punto si y sólo si x se encuentra en el dominio de la función y $f(x)$ se encuentra dentro del intervalo $[c, d]$. Después, se dibuja un pequeño segmento de recta entre cada punto graficado y el siguiente. A continuación, ilustraremos con ejemplos algunos problemas que suelen ocurrir en este procedimiento.

EJEMPLO 1 Grafique la función $f(x) = x^3 - 7x^2 + 28$ en cada una de las siguientes pantallas o ventanas de visualización.

a) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$ ***b)*** $[-4, 4]$ por $[-50, 10]$ ***c)*** $[-4, 10]$ por $[-60, 60]$

Solución

a) Seleccionamos $a = -10$, $b = 10$, $c = -10$, y $d = 10$ para especificar el intervalo de los valores de x y el rango de los valores de y para la ventana. La gráfica resultante se muestra en la figura 1.48*a*). Parece que la ventana corta la parte inferior de la gráfica y que el intervalo de valores de x es demasiado grande. Intentemos con otra ventana.

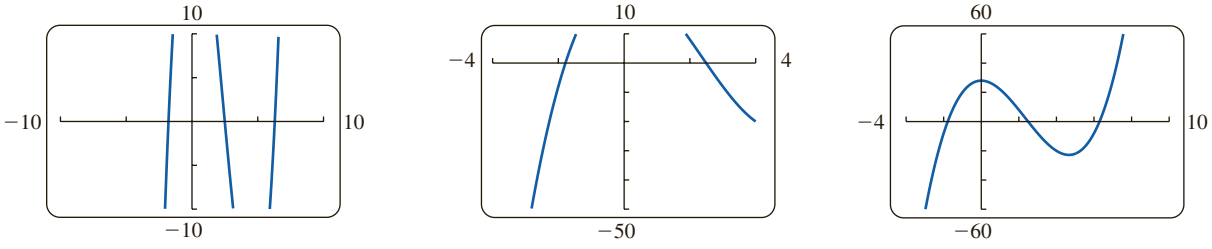


FIGURA 1.48 La gráfica de $f(x) = x^3 - 7x^2 + 28$ en diferentes ventanas de visualización. Elegir una ventana que permita tener una visión clara de la gráfica a menudo es un proceso de ensayo y error (ejemplo 1). La ventana predeterminada usada por el software despliega automáticamente la gráfica en *c*).

b) Ahora vemos algunas características nuevas de la gráfica (figura 1.48*b*), pero falta la parte superior; también necesitamos ver más a la derecha de $x = 4$. Tal vez ayude la siguiente ventana.

c) La figura 1.48*c*) muestra la gráfica en esta nueva ventana de visualización. Observe que obtenemos una visión más completa de la gráfica en esta ventana, y es una gráfica razonable de un polinomio de tercer grado. ■

EJEMPLO 2 Cuando se despliega una gráfica, la escala de las unidades x puede diferir de la escala de las unidades y, como en las gráficas de las figuras 1.48*b*) y 1.48*c*). La imagen resultante está distorsionada y puede ser engañosa. Para evitarlo, es posible hacer que la ventana tome una forma cuadrada comprimiendo o estirando las unidades en un eje para igualar la escala con la del otro; de esta forma, se obtendrá la gráfica correcta. Muchos sistemas tienen funciones integradas que permiten hacer la ventana "cuadrada". Si el sistema que usted utiliza no las incluye, tendrá que efectuar algunos cálculos y pronosticar de alguna forma cómo se vería la imagen real.

La figura 1.49*a*) muestra las gráficas de dos rectas perpendiculares $y = x$ y $y = -x + 3\sqrt{2}$, junto con el semicírculo $y = \sqrt{9 - x^2}$, en una ventana no cuadrada que mide $[-4, 4]$ por $[-6, 8]$. Observe la distorsión. Las rectas no se ven perpendiculares y el semicírculo tiene forma elíptica.

En la figura 1.49*b*) se presentan las gráficas de las mismas funciones en una ventana cuadrada, donde la escala de las unidades x es igual a la escala de las unidades y. Observe que la escala del eje x de la figura 1.49*a*) se comprimió en la figura 1.49*b*) para hacer la ventana cuadrada. La figura 1.49*c*) ofrece una vista más amplia que la figura 1.49*b*), gracias a una ventana cuadrada de $[-3, 3]$ por $[0, 4]$. ■

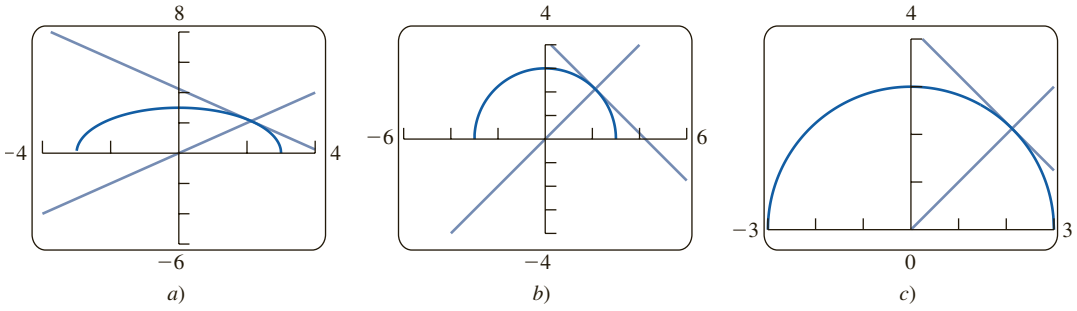


FIGURA 1.49 Las gráficas de las rectas perpendiculares $y = x$ y $y = -x + 3\sqrt{2}$, y el semicírculo $y = \sqrt{9 - x^2}$ aparecen distorsionadas en *a*) una ventana que no es cuadrada, pero claras en *b*) y *c*) que incluyen ventanas cuadradas (ejemplo 2). Algunos sistemas no brindan opciones para las vistas en *b*) o *c*).

Si el denominador de una función racional es cero en algún valor de x dentro de la ventana, un software graficador es capaz de generar un segmento de recta con inclinación casi vertical de arriba hacia abajo de la pantalla. El ejemplo 3 ilustra segmentos de recta inclinados.

En ocasiones, la gráfica de una función trigonométrica oscila muy rápidamente, de manera que cuando el software traza los puntos de la gráfica y los une, se pierden muchos de los puntos máximos y mínimos. Entonces, la gráfica resultante es muy engañosa.

EJEMPLO 3 Grafique la función $f(x) = \text{sen } 100x$.

Solución En la figura 1.50*a*) se muestra la gráfica de f en una ventana de $[-12, 12]$ por $[-1, 1]$. Como vemos, la gráfica se ve muy extraña, porque la curva del seno debe oscilar periódicamente entre -1 y 1. Este comportamiento no se observa en la figura 1.50*a*). Para solucionar este problema, podríamos probar con una ventana más pequeña, por ejemplo, de $[-6, 6]$ por $[-1, 1]$, pero la gráfica no mejora mucho (figura 1.50*b*). El problema es que el periodo de la función trigonométrica $y = \text{sen } 100x$ es muy pequeño ($2\pi/100 \approx 0.063$). Si elegimos una ventana mucho más pequeña, $[-0.1, 0.1]$ por $[-1, 1]$, se obtiene la gráfica de la figura 1.50*c*). Esta gráfica revela las oscilaciones esperadas de una curva del seno. ■

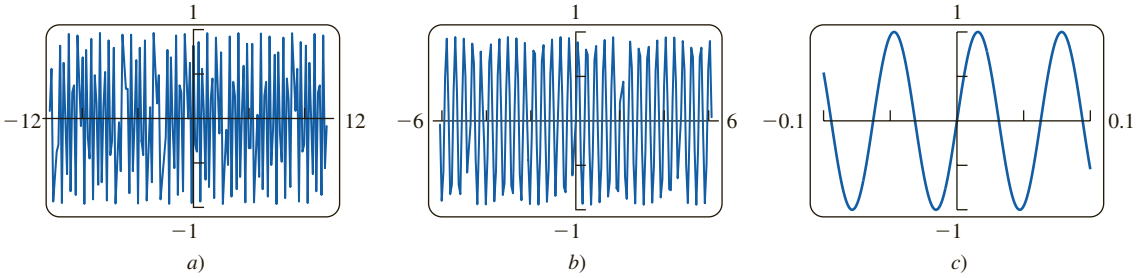
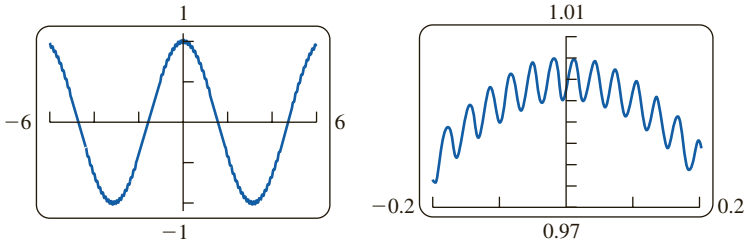


FIGURA 1.50 Gráficas de la función $y = \text{sen } 100x$ en tres ventanas de visualización. Como el periodo es $2\pi/100 \approx 0.063$, la ventana más pequeña en *c*) muestra mejor el verdadero aspecto de esta función que oscila rápidamente (ejemplo 3).

EJEMPLO 4 Grafique la función $y = \cos x + \dfrac{1}{200} \text{ sen } 200x$.

Solución En una ventana de $[-6, 6]$ por $[-1, 1]$, la gráfica se parece mucho a la función coseno, con algunas ondulaciones de picos pequeños en ella (figura 1.51*a*). Se obtiene una mejor imagen cuando el tamaño de la ventana se reduce significativamente a $[-0.2, 0.2]$ por $[0.97, 1.01]$, para obtener la gráfica de la figura 1.51*b*). Ahora vemos las pequeñas pero rápidas oscilaciones del segundo término, $(1/200)$ sen $200x$, sumadas a los valores comparativamente más grandes de la curva coseno. ■



a) *b)*

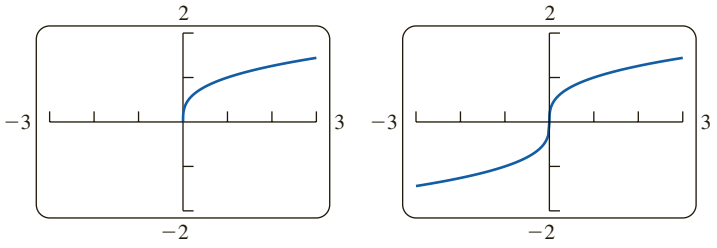
FIGURA 1.51 En *b)* vemos un acercamiento de la función $y = \cos x + \frac{1}{200}\,\text{sen}\,200x$ graficada en *a)*. El término cos x domina claramente al segundo término $\frac{1}{200}\,\text{sen}\,200x$, que produce las rápidas oscilaciones a lo largo de la curva coseno. Ambas vistas son necesarias para tener una idea clara de la gráfica (ejemplo 4).

Obtención de una gráfica completa

Algunas aplicaciones de software no despliegan la porción de la gráfica de $f(x)$ cuando $x < 0$. Por lo regular, esto sucede debido al algoritmo que usa el software para calcular los valores de la función. Algunas veces se obtiene la gráfica completa definiendo la fórmula de la función de manera diferente, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Grafique la función $y = x^{1/3}$.

Solución Muchos dispositivos de graficación muestran la gráfica que se ilustra en la figura 1.52*a*). Cuando la comparamos con la gráfica de $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ de la figura 1.17, vemos que falta la rama izquierda correspondiente a $x < 0$. La razón de la diferencia entre las gráficas es que el algoritmo del software calcula $x^{1/3}$ como $e^{(1/3)\ln x}$. Como la función logarítmica no está definida para valores negativos de x, el software sólo puede generar la parte derecha, donde $x > 0$. (Estudiaremos las funciones logarítmicas y exponenciales en el capítulo 7).



a) *b)*

FIGURA 1.52 En *a)* se pierde la rama izquierda de la gráfica de $y = x^{1/3}$. En *b)* trazamos la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}$, para obtener ambas ramas. (Vea el ejemplo 5).

Para obtener la imagen completa, que muestre las dos partes, podemos graficar la función

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}.$$

Esta función es igual a $x^{1/3}$, excepto en $x = 0$ (donde f no está definida, aunque $0^{1/3} = 0$). En la figura 1.52*b*) se muestra la gráfica de f. ■

Cómo reflejar la tendencia de datos recopilados

Hemos señalado que científicos y analistas a menudo recopilan datos para estudiar un tema particular o algún fenómeno de interés. Si no existe un principio o una ley física conocida que relacione la variable independiente con las variables dependientes, podemos graficar los

datos en un diagrama de dispersión que ayude a encontrar una curva que refleje la tendencia de los puntos de datos. Este proceso se conoce como **análisis de regresión**, y la curva resultante se denomina **curva de regresión**.

Muchas herramientas de graficación incluyen un software que obtiene la curva de regresión de un tipo particular de curva (como una recta, una función cuadrática o de otros polinomios, o bien, una curva de alguna potencia) y, después, superpone la gráfica de la curva obtenida en el diagrama de dispersión. Este procedimiento da como resultado una visualización gráfica útil, y la fórmula producida por la curva de regresión a menudo permite realizar estimaciones razonables que ayuden a explicar el tema de interés.

Un método común, conocido como **mínimos cuadrados**, determina la curva de regresión deseada minimizando la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre los puntos y la curva. El método de mínimos cuadrados es un problema de *optimización*. (En los ejercicios de la sección 14.7, se analiza cómo se calcula la curva de regresión cuando una recta se ajusta a los datos). Aquí presentamos unos cuantos ejemplos que ilustran la técnica usando el software disponible para obtener la curva. Tenga presente que diferentes paquetes de software tal vez impliquen diversas maneras de ingresar los datos, y también distintas características de salida.

EJEMPLO 6 La tabla 1.3 muestra el costo anual de cuotas de inscripción y colegiatura para un estudiante de tiempo completo en la Universidad de California, durante los años 1990 a 2011. Los datos de la lista corresponden al inicio del año académico, cuando los costos indicados estaban vigentes. Emplee la tabla para obtener una recta de regresión que muestre la tendencia de los datos, y utilice dicha recta para estimar el costo del año académico 2018–2019.

TABLA 1.3 Costo de cuotas de inscripción y colegiatura en la Universidad de California

Año, x	Costo, y
1990	1,820
1995	4,166
2000	3,964
2005	6,802
2010	11,287
2011	13,218

Solución Se usa un software de regresión que permita el ajuste de una línea recta, e ingresamos los datos de la tabla para obtener la fórmula

$$y = 506.25x - 1.0066 \cdot 10^6,$$

donde x representa el año y y el costo que tuvo efecto ese año. La figura 1.53 despliega el diagrama de dispersión de los datos junto con la gráfica de la recta de regresión. A partir de la ecuación de la recta, obtenemos que para $x = 2018$,

$$y = 506.25(2018) - 1.0066 \cdot 10^6 = 15{,}013$$

es el costo estimado (redondeado al dólar más cercano) para el año académico 2018-2019. Los últimos dos puntos de datos se elevan por encima de la recta de tendencia en la figura, de modo que este resultado tal vez sea muy bajo. ■

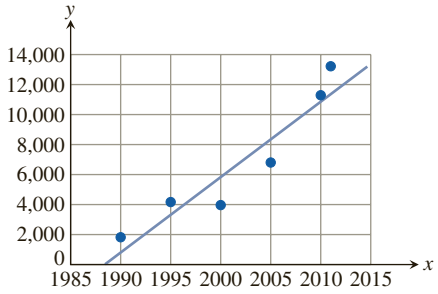


FIGURA 1.53 Diagrama de dispersión y recta de regresión para las cuotas de inscripción y colegiatura de la Universidad de California, de acuerdo con la tabla 1.3 (ejemplo 6).

EJEMPLO 7 Los Centros de Prevención y Control de Enfermedades registraron las muertes por tuberculosis en Estados Unidos, durante el periodo de 1970 a 2006. Los datos se listan en la tabla 1.4 considerando intervalos de cinco años. Determine las curvas de regresión lineal y cuadrática que reflejen la tendencia de los datos. ¿Cuál curva permitiría efectuar un mejor pronóstico?

TABLA 1.4 Muertes por tuberculosis en Estados Unidos

Año, x	Costo, y
1970	5,217
1975	3,333
1980	1,978
1985	1,752
1990	1,810
1995	1,336
2000	776
2005	648

Solución Usando un software de regresión que nos permita ajustar una línea recta así como una curva cuadrática, ingresamos los datos para obtener las fórmulas

$$y = 2.2279 \cdot 10^5 - 111.04x, \qquad \text{ajuste lineal}$$

y

$$y = \frac{1451}{350}x^2 - \frac{3{,}483{,}953}{210}x + \frac{464{,}757{,}147}{28}, \qquad \text{ajuste cuadrático,}$$

donde x representa el año y y representa el número de muertes que ocurrieron. En la figura 1.54 se despliega un diagrama de dispersión junto con las dos curvas de tendencia. Al observar la figura, parecería que la curva cuadrática refleja mejor la tendencia de los datos, excepto para los años 1990 y 1995, y permitiría efectuar mejores pronósticos. Sin embargo, la curva cuadrática parece tener un valor mínimo cerca del año 2000, elevándose de ahí en adelante, de modo que probablemente no sería una herramienta útil para realizar buenas estimaciones para los años posteriores a 2010. Este ejemplo muestra el inconveniente de usar una curva de regresión para predecir valores más allá del rango de los datos utilizados para construir la curva. ■

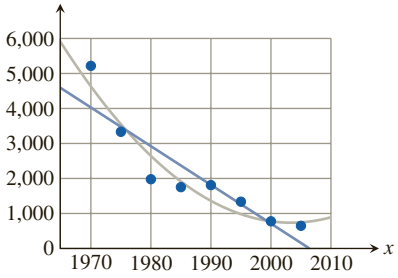


FIGURA 1.54 Diagrama de dispersión con curvas de regresión lineal y cuadrática para muertes por tuberculosis en Estados Unidos, basado en la tabla 1.4 (ejemplo 7).

Ejercicios 1.4

Elección del tamaño de la ventana de visualización

T En los ejercicios 1 a 4, utilice un software para determinar cuál de las ventanas de visualización despliega más adecuadamente la gráfica de la función especificada.

1. $f(x) = x^4 - 7x^2 + 6x$

a) $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$ *b)* $[-2, 2]$ por $[-5, 5]$

c) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$ *d)* $[-5, 5]$ por $[-25, 15]$

2. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

a) $[-1, 1]$ por $[-5, 5]$ *b)* $[-3, 3]$ por $[-10, 10]$

c) $[-5, 5]$ por $[-10, 20]$ *d)* $[-20, 20]$ por $[-100, 100]$

3. $f(x) = 5 + 12x - x^3$

a) $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$ *b)* $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

c) $[-4, 4]$ por $[-20, 20]$ *d)* $[-4, 5]$ por $[-15, 25]$

4. $f(x) = \sqrt{5 + 4x - x^2}$

a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ *b)* $[-2, 6]$ por $[-1, 4]$

c) $[-3, 7]$ por $[0, 10]$ *d)* $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

Obtención de una ventana de visualización

T En los ejercicios 5 a 30, elija un software adecuado para la ventana de visualización de la función dada y utilícelo para desplegar su gráfica. La ventana debe mostrar una imagen del comportamiento completo de la función. Hay más de una opción, pero las opciones incorrectas podrían eliminar aspectos importantes de la función.

5. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 15$

6. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1$

7. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10$

8. $f(x) = 4x^3 - x^4$

9. $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$

10. $f(x) = x^2(6 - x^3)$

11. $y = 2x - 3x^{2/3}$

12. $y = x^{1/3}(x^2 - 8)$

13. $y = 5x^{2/5} - 2x$

14. $y = x^{2/3}(5 - x)$

15. $y = |x^2 - 1|$

16. $y = |x^2 - x|$

17. $y = \frac{x + 3}{x + 2}$

18. $y = 1 - \frac{1}{x + 3}$

19. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$

20. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

21. $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - x - 6}$

22. $f(x) = \frac{8}{x^2 - 9}$

23. $f(x) = \frac{6x^2 - 15x + 6}{4x^2 - 10x}$

24. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$

25. $y = \text{sen } 250x$

26. $y = 3 \cos 60x$

27. $y = \cos\left(\frac{x}{50}\right)$ **28.** $y = \frac{1}{10}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{10}\right)$

29. $y = x + \frac{1}{10}\operatorname{sen} 30x$ **30.** $y = x^2 + \frac{1}{50}\cos 100x$

Use software de graficación para trazar las funciones especificadas en los ejercicios 31 a 36. Elija una ventana de visualización que revele las características clave de la función.

31. Grafique la mitad inferior del círculo definido por la ecuación $x^2 + 2x = 4 + 4y - y^2$.

32. Grafique la rama superior de la hipérbola $y^2 - 16x^2 = 1$.

33. Grafique cuatro periodos de la función $f(x) = -\tan 2x$.

34. Grafique dos periodos de la función $f(x) = 3\cot\frac{x}{2} + 1$.

35. Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 3x$.

36. Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$.

Rectas de regresión o ajuste por curvas cuadráticas

T Use una herramienta de graficación para obtener las curvas de regresión especificadas en los ejercicios 37 a 42.

37. Peso de hombres La tabla muestra el peso promedio de hombres de complexión media con base en la estatura, de acuerdo con la Metropolitan Life Insurance Company (1983).

Altura (in)	Peso (lb)	Altura (in)	Peso (lb)
62	136	70	157
63	138	71	160
64	141	72	163.5
65	141.5	73	167
66	145	74	171
67	148	75	174.5
68	151	76	179
69	154		

a) Elabore un diagrama de dispersión de los datos.

b) Obtenga y grafique una recta de regresión, y superpóngala en el diagrama de dispersión.

c) ¿La línea de regresión refleja de manera razonable la tendencia de los datos? ¿Qué peso pronosticaría para un hombre de 6′7″ de estatura?

38. Salario mínimo federal En Estados Unidos, el salario mínimo federal por hora ha aumentado con los años. La siguiente tabla muestra las tarifas salariales en los años en que entraron en vigor, de acuerdo con información del Departamento del Trabajo de Estados Unidos.

Año	Salario ($)	Año	Salario ($)
1978	2.65	1996	4.75
1979	2.90	1997	5.15
1980	3.10	2007	5.85
1981	3.35	2008	6.55
1990	3.80	2009	7.25
1991	4.25		

a) Elabore un diagrama de dispersión de los datos.

b) Obtenga y grafique una recta de regresión, y superpóngala en el diagrama de dispersión.

c) ¿Cuál sería su estimación del salario mínimo para el año 2018?

39. Mediana del precio de una casa La mediana del precio de una casa unifamiliar en Estados Unidos se incrementó de manera consistente durante los años 1976 a 2000. Luego, se presentó un "burbuja" en el mercado de la vivienda durante los años 2001 a 2010, en la cual los precios, primero, aumentaron drásticamente durante 6 años y, luego, sufrieron una caída estrepitosa durante los 4 años siguientes, causando considerable confusión en la economía de Estados Unidos. La tabla muestra algunos de los datos reportados por la Asociación Nacional de Agentes Inmobiliarios.

Año	Precio ($)	Año	Precio ($)
1976	37,400	2000	122,600
1980	56,250	2002	150,000
1984	66,500	2004	187,500
1988	87,500	2006	247,500
1992	95,800	2008	183,300
1996	104,200	2010	162,500

a) Elabore un diagrama de dispersión de los datos.

b) Determine y grafique la recta de regresión de los años 1976 a 2002, y superpóngala en el diagrama de dispersión del inciso *a*).

c) ¿Cómo interpretaría el significado de los datos en la "burbuja" del mercado de vivienda?

40. Precios promedio de energía La tabla muestra los precios promedio de energía para consumo residencial y para los sistemas de transporte en Estados Unidos durante los años 2000 a 2008, de acuerdo con el Departamento de Energía de ese país. Los precios están expresados en dólares pagados por el consumo de un millón de unidades térmicas británicas (*British thermal units*, BTU).

Año	Residencial ($)	Transportación ($)
2000	15	10
2001	16	10
2002	15	9
2003	16	11
2004	18	13
2005	19	16
2006	21	19
2007	21	20
2008	23	25

a) Elabore un diagrama de dispersión de los datos.

b) Determine y grafique la recta de regresión de cada conjunto de datos, y superponga las rectas en sus diagramas de dispersión.

c) ¿Cuál es su estimación del precio promedio de energía para uso residencial y para transportación de un millón de BTU en el año 2017?

d) Al observar las líneas de tendencia, ¿qué concluye acerca de la elevación del costo de uso de energía en los dos sectores?

41. Temperatura media global anual del aire en la superficie El informe del Goddard Institute for Space Studies de la NASA proporciona el índice de temperatura media tierra-océano global anual, desde 1880 hasta el presente. El valor del índice es la diferencia entre la temperatura media durante los años base 1951 a 1980 y la temperatura real para el año en cuestión. Para

el año registrado, un índice positivo significa el número de grados Celsius por encima de la base; un índice negativo significa el número de grados por debajo de la base. La tabla lista el índice para los años 1940 a 2010 en intervalos de 5 años, de acuerdo con el conjunto de datos de la NASA.

Año	Índice (°C)	Año	Índice (°C)
1940	0.04	1980	0.20
1945	0.06	1985	0.05
1950	−0.16	1990	0.36
1955	−0.11	1995	0.39
1960	−0.01	2000	0.35
1965	−0.12	2005	0.62
1970	0.03	2010	0.63
1975	−0.04		

a) Elabore un diagrama de dispersión de los datos.

b) Determine y grafique la recta de regresión, y superpóngala en el diagrama de dispersión.

c) Determine y grafique una curva cuadrática que refleje la tendencia de los datos, y superpóngala en el diagrama de dispersión.

42. Crecimiento de las células de levadura La siguiente tabla muestra la cantidad de células de levadura (medida como *biomasa*) que crecen durante un periodo de 7 horas en un nutriente, según los datos de R. Pearl (1972) obtenidos en un experimento biológico muy conocido.

Hora	0	1	2	3	4	5	6	7
Biomasa	9.6	18.3	29.0	47.2	71.1	119.1	174.6	257.3

a) Elabore un diagrama de dispersión de los datos.

b) Obtenga y grafique una curva cuadrática de regresión, y superpóngala en el diagrama de dispersión.

c) ¿Cuál es su estimación de la biomasa de levadura en el nutriente después de 11 horas?

d) ¿Cree que la curva cuadrática ofrece una buena estimación de biomasa después de 18 horas? Justifique su respuesta.

Capítulo 1 Preguntas de repaso

1. ¿Qué es una función? ¿Qué es el dominio de una función? ¿Qué es el rango? ¿Qué es un diagrama de flechas de una función? Dé ejemplos.

2. ¿Qué es una función de valor real de variable real? ¿En qué consiste la prueba de la recta vertical?

3. ¿Qué es una función definida por partes? Dé ejemplos.

4. ¿Cuáles son los tipos de funciones más importantes que suelen encontrarse en cálculo? Dé un ejemplo de cada tipo.

5. ¿Qué se entiende por función creciente? ¿Y por función decreciente? Dé un ejemplo de cada una.

6. ¿Qué es una función par? ¿Qué es una función impar? ¿Qué propiedades de simetría tienen las gráficas de dichas funciones? ¿Qué ventaja podemos sacar de esto? Dé un ejemplo de una función que no sea par ni impar.

7. Si f y g son funciones con valores reales, ¿cómo se relacionan los dominios de $f + g$, $f - g$, fg y f/g con los dominios de f y g? Dé ejemplos.

8. ¿Cuándo es posible realizar la composición de una función con otra? Dé ejemplos de composiciones y sus valores en varios puntos. ¿Tiene importancia el orden en que se componen las funciones?

9. ¿Cómo cambiaría la ecuación $y = f(x)$ para desplazar su gráfica verticalmente hacia arriba o hacia abajo por un factor de $|k|$ unidades? ¿Cómo lo haría para desplazar su gráfica horizontalmente hacia la izquierda o hacia la derecha? Dé ejemplos.

10. ¿Cómo cambiaría la ecuación $y = f(x)$ para comprimir o estirar su gráfica por un factor $c > 1$? ¿Qué haría para reflejar la gráfica con respecto a los ejes de coordenadas? Dé ejemplos.

11. ¿Qué es la medida en radianes? ¿Cómo se convierten radianes a grados? ¿Y grados a radianes?

12. Grafique las seis funciones trigonométricas básicas. ¿Qué simetrías tienen las gráficas?

13. ¿Qué es una función periódica? Dé ejemplos. ¿Cuáles son los periodos de las seis funciones trigonométricas básicas?

14. Comenzando con la identidad $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$ y las fórmulas de $\cos(A + B)$ y $\text{sen}\,(A + B)$, muestre cómo se pueden obtener otras identidades trigonométricas.

15. ¿Cómo se relaciona la fórmula de la función general seno $f(x) = A\ \text{sen}\ ((2\pi/B)(x - C)) + D$ con el desplazamiento, el estiramiento, la compresión y la reflexión de su gráfica? Dé ejemplos. Trace la gráfica de la función general seno e identifique las constantes A, B, C y D.

16. Mencione tres problemas que podrían surgir al graficar funciones con una calculadora graficadora o un software de computadora. Dé ejemplos.

Capítulo 1 Ejercicios de práctica

Funciones y gráficas

1. Exprese el área y el perímetro de un círculo como funciones de su radio. Luego, exprese el área del círculo como una función de su perímetro.

2. Exprese el radio de una esfera como una función de su área superficial. Luego, exprese el área superficial de la esfera como una función de su volumen.

3. Un punto P en el primer cuadrante está sobre la parábola $y = x^2$. Exprese las coordenadas de P como funciones del ángulo de inclinación de la recta que une P con el origen.

4. Un globo de aire caliente se eleva en línea recta desde el nivel del suelo, y es rastreado desde una estación que está localizada a 500 ft del lugar de lanzamiento. Exprese la altura del globo como función del ángulo que forma la recta que va desde la estación hasta el globo en relación con el suelo.

En los ejercicios 5 a 8, determine si la gráfica de la función es simétrica con respecto al eje y, al origen o a ninguno de los dos.

5. $y = x^{1/5}$ **6.** $y = x^{2/5}$

7. $y = x^2 - 2x - 1$ **8.** $y = e^{-x^2}$

En los ejercicios 9 a 16, determine si la función es par, impar o ninguna de las dos.

9. $y = x^2 + 1$ **10.** $y = x^5 - x^3 - x$

11. $y = 1 - \cos x$ **12.** $y = \sec x \tan x$

13. $y = \dfrac{x^4 + 1}{x^3 - 2x}$ **14.** $y = x - \operatorname{sen} x$

15. $y = x + \cos x$ **16.** $y = x \cos x$

17. Suponga que f y g son funciones impares definidas para toda la recta de los números reales. ¿Cuáles de las siguientes (donde estén definidas) son impares? ¿Y pares?

a) fg ***b)*** f^3 ***c)*** $f(\operatorname{sen} x)$ ***d)*** $g(\sec x)$ ***e)*** $|g|$

18. Si $f(a - x) = f(a + x)$, demuestre que $g(x) = f(x + a)$ es una función par.

En los ejercicios 19 a 28, determine ***a)*** el dominio y ***b)*** el rango.

19. $y = |x| - 2$ **20.** $y = -2 + \sqrt{1 - x}$

21. $y = \sqrt{16 - x^2}$ **22.** $y = 3^{2-x} + 1$

23. $y = 2e^{-x} - 3$ **24.** $y = \tan(2x - \pi)$

25. $y = 2\operatorname{sen}(3x + \pi) - 1$ **26.** $y = x^{2/5}$

27. $y = \ln(x - 3) + 1$ **28.** $y = -1 + \sqrt[3]{2 - x}$

29. Determine si cada función es creciente, decreciente o ninguna de las dos.

a) El volumen de una esfera como función de su radio.

b) La función mayor entero.

c) La altura por arriba del nivel del mar como una función de la presión atmosférica (diferente de cero).

d) La energía cinética, como una función de la velocidad de una partícula.

30. Determine el intervalo más grande sobre el cual la función dada es creciente.

a) $f(x) = |x - 2| + 1$ ***b)*** $f(x) = (x + 1)^4$

c) $g(x) = (3x - 1)^{1/3}$ ***d)*** $R(x) = \sqrt{2x - 1}$

Funciones definidas por partes

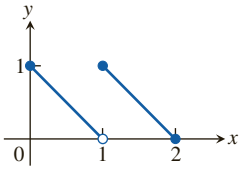
En los ejercicios 31 y 32, determine ***a)*** el dominio y ***b)*** el rango.

31. $y = \begin{cases} \sqrt{-x}, & -4 \le x \le 0 \\ \sqrt{x}, & 0 < x \le 4 \end{cases}$

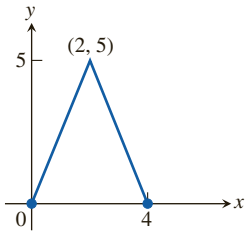
32. $y = \begin{cases} -x - 2, & -2 \le x \le -1 \\ x, & -1 < x \le 1 \\ -x + 2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

En los ejercicios 33 y 34, escriba una fórmula por partes para la función.

33.



34.



Composición de funciones

En los ejercicios 35 y 36, determine

a) $(f \circ g)(-1)$. ***b)*** $(g \circ f)(2)$.

c) $(f \circ f)(x)$. ***d)*** $(g \circ g)(x)$.

35. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$

36. $f(x) = 2 - x, \quad g(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

En los ejercicios 37 y 38, ***a)*** escriba fórmulas para $f \circ g$ y $g \circ f$, y determine ***b)*** el dominio y ***c)*** el rango de cada una.

37. $f(x) = 2 - x^2, \quad g(x) = \sqrt{x + 2}$

38. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{1 - x}$

En los ejercicios 39 y 40, trace las gráficas de f y $f \circ f$.

39. $f(x) = \begin{cases} -x - 2, & -4 \le x \le -1 \\ -1, & -1 < x \le 1 \\ x - 2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -2 \le x < 0 \\ x - 1, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$

Composición con valores absolutos En los ejercicios 41 a 48, grafique juntas f_1 y f_2. Luego, explique cómo la aplicación de la función valor absoluto en f_2 afectó la gráfica de f_1.

	$f_1(x)$	$f_2(x)$
41.	x	$\lvert x \rvert$
42.	x^2	$\lvert x \rvert^2$
43.	x^3	$\lvert x^3 \rvert$
44.	$x^2 + x$	$\lvert x^2 + x \rvert$
45.	$4 - x^2$	$\lvert 4 - x^2 \rvert$
46.	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\lvert x \rvert}$
47.	$\sqrt{x}$	$\sqrt{\lvert x \rvert}$
48.	$\operatorname{sen} x$	$\operatorname{sen} \lvert x \rvert$

Gráficas de desplazamiento y cambio de escala

49. Suponga que se conoce la gráfica de g. Escriba las ecuaciones de las gráficas que se obtuvieron a partir de la gráfica de g por desplazamiento, cambio de escala o reflexión, como se indica.

a) Hacia arriba $\frac{1}{2}$ unidad, a la derecha 3 unidades

b) Hacia abajo 2 unidades, a la izquierda $\frac{2}{3}$ de unidad

c) Reflejada con respecto al eje y

***d*)** Reflejada con respecto al eje x

***e*)** Estiramiento vertical por un factor de 5

***f*)** Compresión horizontal por un factor de 5

50. Describa cómo se obtiene cada gráfica a partir de la gráfica de $y = f(x)$.

***a*)** $y = f(x - 5)$ ***b*)** $y = f(4x)$

***c*)** $y = f(-3x)$ ***d*)** $y = f(2x + 1)$

***e*)** $y = f\left(\frac{x}{3}\right) - 4$ ***f*)** $y = -3f(x) + \frac{1}{4}$

En los ejercicios 51 a 54, grafique cada función, pero sin trazar puntos; esto es, inicie con la gráfica de una de las funciones estándar presentadas en las figuras 1.15 a 1.17, y aplique la transformación adecuada.

51. $y = -\sqrt{1 + \frac{x}{2}}$ **52.** $y = 1 - \frac{x}{3}$

53. $y = \frac{1}{2x^2} + 1$ **54.** $y = (-5x)^{1/3}$

Trigonometría

En los ejercicios 55 a 58, grafique la función dada. ¿Cuál es el periodo de la función?

55. $y = \cos 2x$ **56.** $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

57. $y = \operatorname{sen} \pi x$ **58.** $y = \cos \frac{\pi x}{2}$

59. Grafique $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

60. Grafique $y = 1 + \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

En los ejercicios 61 a 64, ABC es un triángulo rectángulo con el ángulo recto en C. Los ángulos A, B y C son opuestos a los lados a, b y c, respectivamente.

61. ***a*)** Determine a y b si $c = 2$, $B = \pi/3$.

***b*)** Determine a y c si $b = 2$, $B = \pi/3$.

62. ***a*)** Exprese a en términos de A y c.

***b*)** Exprese a en términos de A y b.

63. ***a*)** Exprese a en términos de B y b.

***b*)** Exprese c en términos de A y a.

64. ***a*)** Exprese sen A en términos de a y c.

***b*)** Exprese sen A en términos de b y c.

65. Altura de un poste Dos cables van de la parte superior (T) de un poste vertical, a dos puntos B y C, colocados en el suelo, donde C está 10 m más cerca de la base del poste que B. Si el cable BT forma un ángulo de 35° con la horizontal, y el cable CT forma un ángulo de 50° con la horizontal, ¿cuál es la altura del poste?

66. Altura de un globo meteorológico Dos observadores colocados en las posiciones A y B, y separados entre sí 2 km, miden simultáneamente el ángulo de elevación de un globo meteorológico; las medidas que registran son 40° y 70°, respectivamente. Determine la altura del globo, si éste se ubica justo sobre un punto del segmento de recta entre A y B.

T **67.** ***a*)** Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos(x/2)$.

***b*)** ¿Cuál parece ser el periodo de la función?

***c*)** Confirme algebraicamente la respuesta que dio en el inciso *b*).

T **68.** ***a*)** Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$.

***b*)** ¿Cuáles son el dominio y el rango de f?

***c*)** ¿Esta función es periódica? Justifique su respuesta.

Capítulo 1 Ejercicios adicionales y avanzados

Funciones y gráficas

1. ¿Existen dos funciones f y g tales que $f \circ g = g \circ f$? Justifique su respuesta.

2. ¿Existen dos funciones f y g con la siguiente propiedad? Las gráficas de f y g no son rectas, pero la gráfica de $f \circ g$ sí lo es. Justifique su respuesta.

3. Si $f(x)$ es impar, ¿se puede decir algo de $g(x) = f(x) - 2$? ¿Qué ocurriría si f fuera par? Justifique su respuesta.

4. Si $g(x)$ es una función impar definida para todos los valores de x, ¿se puede decir algo acerca de $g(0)$? Justifique su respuesta.

5. Grafique la ecuación $|x| + |y| = 1 + x$.

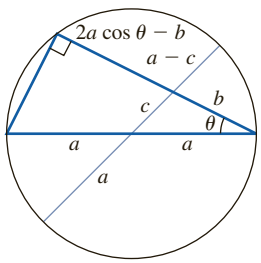
6. Grafique la ecuación $y + |y| = x + |x|$.

Deducciones y pruebas

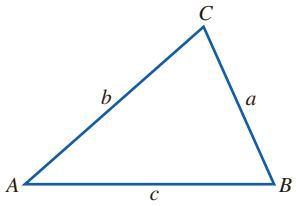
7. Demuestre las siguientes identidades trigonométricas.

***a*)** $\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$ ***b*)** $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \tan^2 \frac{x}{2}$

8. Explique la siguiente "prueba sin palabras" de la ley de los cosenos. (*Fuente:* Kung, Sidney H. "Proof Without Words: The Law of Cosines", *Mathematics Magazine*, vol. 63, núm. 5, diciembre de 1990, p. 342).



9. Demuestre que el área del triángulo ABC está dada por $(1/2)ab$ sen $C = (1/2)bc$ sen $A = (1/2)ca$ sen B.



10. Demuestre que el área del triángulo ABC está dada por $\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$, donde $s = (a + b + c)/2$ es el semiperímetro del triángulo.

11. Demuestre que si f es tanto par como impar, entonces, $f(x) = 0$ para toda x en el dominio de f.

12. ***a*) Descomposiciones par-impar** Sea f una función cuyo dominio es simétrico con respecto al origen, es decir, $-x$ pertenece al dominio siempre que x también pertenezca a éste. Demuestre que f es la suma de una función par y una función impar:

$$f(x) = E(x) + O(x),$$

donde E es una función par y O es una función impar. [*Sugerencia*: Sea $E(x) = (f(x) + f(-x))/2$. Demuestre que $E(-x) = E(x)$, de modo que E es par. Luego, demuestre que $O(x) = f(x) - E(x)$ es impar].

***b*) Unicidad** Demuestre que existe sólo una manera de escribir f como la suma de una función par y una impar. [*Sugerencia:* Una manera se mencionó en el inciso *a*). Si también $f(x) = E_1(x) + O_1(x)$, donde E_1 es par y O_1 es impar, demuestre que $E - E_1 = O_1 - O$. Luego, con base en el ejercicio 11, demuestre que $E = E_1$ y $O = O_1$].

Efectos de parámetros sobre las gráficas

T **13.** ¿Qué ocurre con la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ cuando

***a*)** a cambia mientras que b y c permanecen fijas?

***b*)** b cambia? (a y c están fijas, $a \neq 0$).

***c*)** c cambia? (a y b están fijas, $a \neq 0$).

T **14.** ¿Qué sucede con la gráfica de $y = a(x + b)^3 + c$ cuando

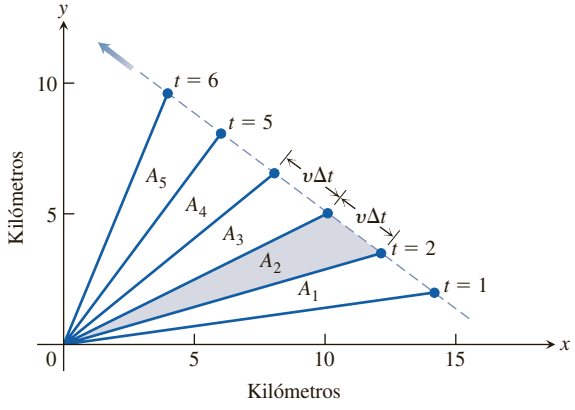
***a*)** a cambia mientras que b y c permanecen fijas?

***b*)** b cambia? (a y c están fijas, $a \neq 0$).

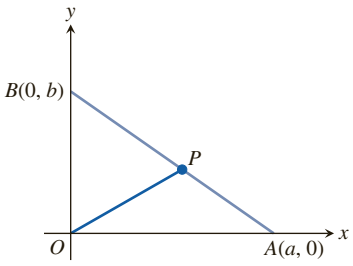
***c*)** c cambia? (a y b están fijas, $a \neq 0$).

Geometría

15. El centro de masa de un objeto se mueve a una velocidad constante v, a lo largo de una recta que pasa por el origen. La siguiente figura muestra el sistema de coordenadas y la recta del movimiento. Los puntos indican las posiciones del objeto en cada segundo. ¿Por qué todas las áreas $A_1, A_2, \ldots, A_5$ de la figura son iguales? Al igual que en la ley de áreas iguales de Kepler (vea la sección 13.6), la recta que une el centro de masa del objeto recorre áreas iguales en tiempos iguales.



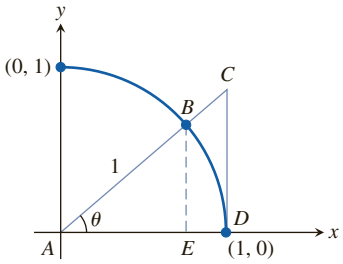
16. ***a*)** Determine la pendiente de la recta del origen al punto medio P del lado AB del triángulo representado en la siguiente figura ($a, b > 0$).



***b*)** ¿Cuándo es OP perpendicular a AB?

17. Considere el cuarto de círculo de radio 1 y los triángulos rectángulos ABE y ACD representados en la siguiente figura. Use las fórmulas usuales del área para concluir que

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta < \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}.$$



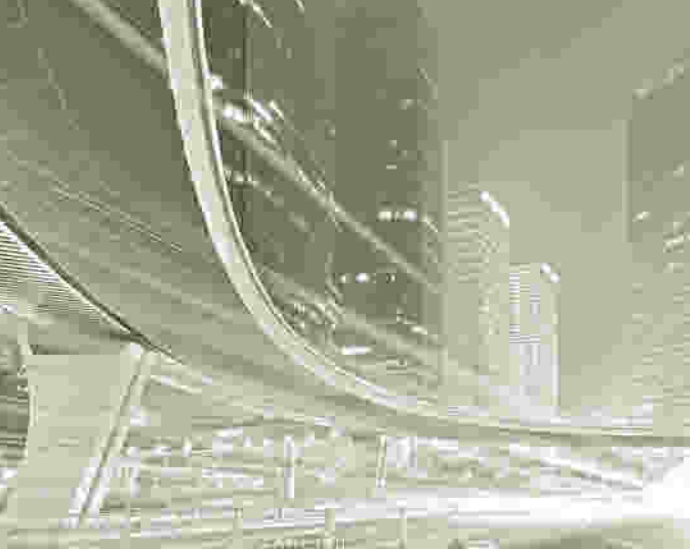
18. Sea $f(x) = ax + b$ y $g(x) = cx + d$. ¿Qué condiciones deben satisfacer las constantes a, b, c y d para que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ para todos los valores de x?

Capítulo 1 Proyectos de aplicación tecnológica

Revisión de Mathematica
Una revisión de *Mathematica* es suficiente para completar los módulos de *Mathematica* que aparecen en el sitio web.

Módulo Mathematica/Maple

Trabajo con modelos matemáticos: Resortes, conducción automovilística segura, radiactividad, árboles, peces y mamíferos.
Construya e interprete modelos matemáticos; analícelos, mejórelos y realice pronósticos a partir de ellos.



2

Límites y continuidad

INTRODUCCIÓN Los matemáticos del siglo XVII estaban profundamente interesados en el estudio del movimiento de objetos sobre la Tierra o cerca de ésta, y en el movimiento de los planetas y las estrellas. El estudio involucraba tanto a la velocidad del objeto como a su dirección de movimiento en cualquier instante. Sabían que la dirección en un momento determinado coincidía con una recta tangente a la trayectoria del movimiento. El concepto de límite es fundamental para determinar la velocidad de un objeto en movimiento y la tangente a una curva. En este capítulo se desarrolla el concepto de límite, primero de manera intuitiva y, luego, formalmente. Usaremos límites para describir la manera en que varía una función. Algunas funciones varían *continuamente*; cambios pequeños en x producen cambios pequeños en $f(x)$. Otras funciones pueden tener valores que saltan, varían erráticamente, o tienden a aumentar o disminuir sin cota. La noción de límite ofrece un método preciso para distinguir entre estos comportamientos.

2.1 Razones de cambio y tangentes a las curvas

El cálculo es una herramienta que ayuda a comprender cómo el cambio en una cantidad está relacionado con el cambio en otra. ¿Cómo cambia en función del tiempo la velocidad de un objeto en caída? ¿Cómo cambia el nivel de agua en un barril en función de la cantidad de líquido vertida en él? Vemos cambios en casi todo lo que observamos en el mundo y en el universo, y poderosos instrumentos modernos nos ayudan a ver cada vez más. En esta sección presentaremos las ideas de las razones promedio e instantáneas de cambio, y demostraremos que están estrechamente relacionadas con la pendiente de una curva en un punto P de la misma. Desarrollaremos con precisión estos importantes conceptos en el siguiente capítulo, pero por ahora usaremos un enfoque informal que nos llevará de manera natural al tema central de este capítulo: el *límite*. La idea de límite desempeña un papel fundamental en todos los temas del cálculo.

Velocidad promedio y velocidad instantánea

A finales del siglo XVI, Galileo descubrió que un objeto sólido que cae libremente, partiendo del reposo, cerca de la superficie de la Tierra, recorrerá una distancia proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado cayendo. Este tipo de movimiento se conoce como **caída libre**. Se supone que la velocidad del objeto no disminuye por la resistencia del aire, la cual se considera despreciable, y que la gravedad es la única fuerza que actúa sobre el objeto que cae. Si y representa la distancia recorrida en pies después de t segundos, entonces, la ley de Galileo se expresa como

$$y = 16t^2,$$

donde 16 es la constante (aproximada) de proporcionalidad. (Si y se mide en metros, la constante es 4.9).

La **velocidad promedio** de un cuerpo en movimiento durante un intervalo de tiempo, se obtiene dividiendo la distancia recorrida entre el tiempo transcurrido. La unidad de medida es longitud por unidad de tiempo: kilómetros por hora, pies (o metros) por segundo, o cualquier otra que sea adecuada para el problema en cuestión.

EJEMPLO 1 Se deja caer una piedra desde la parte superior de un acantilado. ¿Cuál es su velocidad promedio

a) durante los primeros 2 segundos de caída?
b) durante el intervalo de 1 segundo entre el segundo 1 y el segundo 2?

Solución La velocidad promedio de la piedra durante un intervalo de tiempo determinado es igual al cambio en la distancia, Δy, dividido entre el intervalo de tiempo, Δt. (Los incrementos como Δy y Δt se revisan en el apéndice 3, y se leen "delta y" y "delta t"). Si medimos la distancia en pies y el tiempo en segundos, efectuamos los siguientes cálculos:

a) Para los primeros 2 segundos: $$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2)^2 - 16(0)^2}{2 - 0} = 32\frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

b) Del segundo 1 al segundo 2: $$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2)^2 - 16(1)^2}{2 - 1} = 48\frac{\text{ft}}{\text{s}}$$ ■

Ahora se desea determinar la velocidad de un objeto que cae, en un instante determinado t_0, y no la velocidad promedio durante un intervalo de tiempo. Para ello, se examina lo que sucede cuando se calcula la velocidad promedio en intervalos de tiempo cada vez más cortos, comenzando en t_0. El siguiente ejemplo ilustra este proceso. Nuestro planteamiento es informal aquí, pero se precisará en el capítulo 3.

EJEMPLO 2 Determine la velocidad de la piedra en caída libre del ejemplo 1 en $t = 1$ y $t = 2$ s.

Solución Se puede calcular la velocidad promedio de la piedra durante el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$, con longitud $\Delta t = h$, como

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(t_0 + h)^2 - 16t_0^2}{h}. \tag{1}$$

No es posible utilizar esta fórmula para calcular la velocidad "instantánea" en el momento exacto t_0 sustituyendo simplemente $h = 0$, porque no se puede dividir entre cero. Sin embargo, sí *podemos* usarla para calcular la velocidad promedio en lapsos cada vez más cortos, comenzando en $t_0 = 1$ y $t_0 = 2$. Cuando lo hacemos así, tomando valores de h cada vez más pequeños, descubrimos un patrón (tabla 2.1).

TABLA 2.1 Velocidades promedio en intervalos de tiempo cortos $[t_0, t_0 + h]$

Velocidad promedio: $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{16(t_0 + h)^2 - 16t_0^2}{h}$

Longitud del intervalo de tiempo h	**Velocidad promedio en el intervalo de longitud h comenzando en $t_0 = 1$**	**Velocidad promedio en el intervalo de longitud h comenzando en $t_0 = 2$**
1	48	80
0.1	33.6	65.6
0.01	32.16	64.16
0.001	32.016	64.016
0.0001	32.0016	64.0016

La velocidad promedio en los intervalos iniciando en $t_0 = 1$ parece aproximarse al valor límite de 32 conforme la longitud del intervalo decrece. Esto sugiere que la piedra está cayendo a una velocidad de 32 ft/s en $t_0 = 1$ s. Confirmaremos esto algebraicamente.

Si consideramos que $t_0 = 1$ y, luego, desarrollamos el numerador de la ecuación (1) y simplificamos, encontramos que

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(1 + h)^2 - 16(1)^2}{h} = \frac{16(1 + 2h + h^2) - 16}{h}$$
$$= \frac{32h + 16h^2}{h} = 32 + 16h.$$

Para valores de h distintos de 0, las expresiones de la derecha y de la izquierda son equivalentes, y la velocidad promedio es $32 + 16h$ ft/s. Ahora podemos ver por qué la velocidad promedio tiene el valor límite de $32 + 16(0) = 32$ ft/s cuando h se aproxima a 0.

De forma análoga, al considerar $t_0 = 2$ en la ecuación (1), el proceso da como resultado

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = 64 + 16h$$

para valores de h diferentes de 0. Conforme h se acerca cada vez más a cero, la velocidad promedio en $t_0 = 2$ tiene el valor límite de 64 ft/s, como sugiere la tabla 2.1. ■

La velocidad promedio de un objeto que cae es un ejemplo de una idea más general que veremos a continuación.

Razones promedio de cambio y rectas secantes

Dada una función $y = f(x)$, calculamos la razón promedio de cambio de y con respecto a x en el intervalo $[x_1, x_2]$ dividiendo el cambio en el valor de y, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$, entre la longitud $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ del intervalo donde ocurre el cambio. (De aquí en adelante, se usará el símbolo h en lugar de Δx con la finalidad de simplificar la notación).

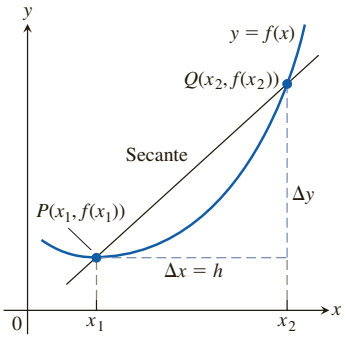


FIGURA 2.1 Una secante de la gráfica $y = f(x)$. Su pendiente es $\Delta y/\Delta x$, la razón promedio de cambio de f en el intervalo $[x_1, x_2]$.

DEFINICIÓN La **razón promedio de cambio** de $y = f(x)$ con respecto a x en el intervalo $[x_1, x_2]$ es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \qquad h \neq 0.$$

Geométricamente, la razón de cambio de f en $[x_1, x_2]$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(x_1, f(x_1))$ y $Q(x_2, f(x_2))$ (figura 2.1). En geometría, la recta que une dos puntos de una curva es una **secante** de la curva. En consecuencia, la razón promedio de cambio de f desde x_1 hasta x_2 es idéntica a la pendiente de la secante PQ. Ahora consideremos qué sucede conforme el punto Q se aproxima al punto P a lo largo de la curva, de modo que la longitud h del intervalo en el cual ocurre el cambio se aproxima a cero. Veremos que este procedimiento nos lleva a la definición de la pendiente de una curva en un punto.

Definición de la pendiente de una curva

Sabemos lo que significa la pendiente de una recta, la cual nos dice la razón a la que asciende o desciende, es decir, su razón de cambio como una función lineal. Pero ¿qué se entiende por la *pendiente de una curva* en un punto P sobre la curva? Si existe una recta *tangente* a la curva en P (una recta que sólo toca a la curva exactamente como la tangente a una circunferencia), sería razonable identificar la *pendiente de la tangente* como la pendiente de la curva en P. Así pues, necesitamos una definición precisa para la tangente en un punto de la curva.

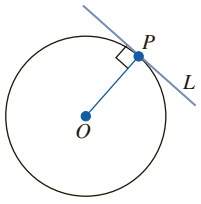


FIGURA 2.2 L es tangente a la circunferencia en P si pasa por P y es perpendicular al radio OP.

Para circunferencias, la tangencia es sencilla. Una recta L es tangente a una circunferencia en un punto P si L pasa por P y es perpendicular al radio en P (figura 2.2). Esta recta sólo *toca* a la circunferencia. Pero, ¿qué quiere decir que la línea L sea tangente a alguna otra curva C en el punto P?

Para definir tangencia para curvas en general, necesitamos un enfoque que tome en cuenta el comportamiento de las secantes que pasan por P y por puntos cercanos Q, conforme Q se mueve hacia P a lo largo de la curva (figura 2.3). He aquí la idea:

1. Se inicia con lo que *podemos* calcular, es decir, la pendiente de la secante PQ.
2. Se investiga el valor límite de la pendiente de la secante conforme Q se aproxima a P a lo largo de la curva. (Aclararemos la idea de *límite* en la siguiente sección).
3. Si el *límite* existe, el valor de éste se toma como la pendiente de la curva en P y se *define* la tangente a la curva en P como la recta que pasa por P con esta pendiente.

Este procedimiento es el que aplicamos en el problema de la piedra en caída libre analizado en el ejemplo 2. El siguiente ejemplo ilustra la idea geométrica de la tangente a una curva.

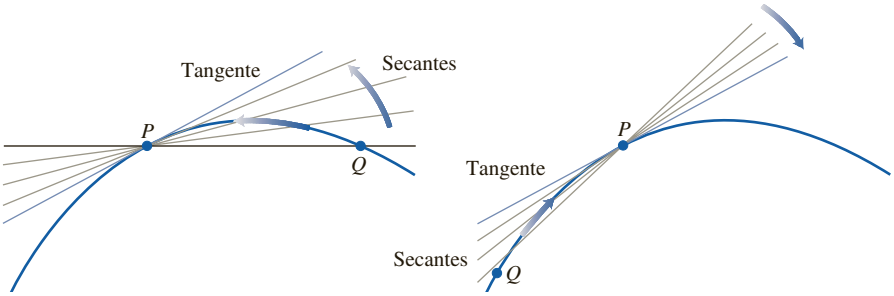


FIGURA 2.3 La tangente a la curva en P es la recta que pasa por P cuya pendiente es el límite de las pendientes de las secantes, cuando $Q \to P$ desde cualquier lado.

EJEMPLO 3 Determine la pendiente de la parábola $y = x^2$ en el punto $P(2, 4)$. Escriba una ecuación para la tangente a la parábola en este punto.

Solución Iniciamos con una recta secante que pasa por el punto $P(2, 4)$ y el punto cercano $Q(2 + h, (2 + h)^2)$. Luego, escribimos una expresión para la pendiente de la secante PQ e investigamos qué sucede con la pendiente cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva.

$$\text{Pendiente de la secante} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2 + h)^2 - 2^2}{h} = \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h}$$
$$= \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4.$$

Si $h > 0$, entonces, Q se encuentra arriba y a la derecha de P, como en la figura 2.4. Si $h < 0$, entonces, Q se encuentra a la izquierda de P (esto no se muestra). En cualquier caso, conforme Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero, y la pendiente de la secante $h + 4$ se aproxima a 4. Tomamos 4 como la pendiente de la parábola en P.

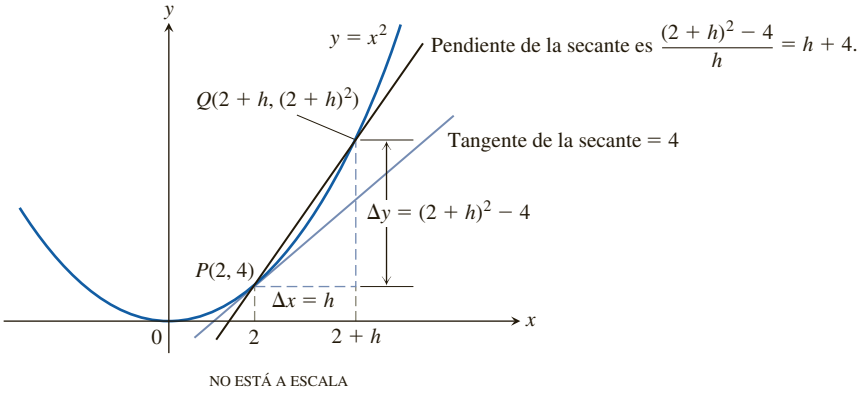


FIGURA 2.4 Obtención de la pendiente de la parábola $y = x^2$ en el punto $P(2, 4)$ como el límite de pendientes de secantes (ejemplo 3).

La tangente a la parábola en P es la recta que pasa por P y tiene pendiente 4:

$$y = 4 + 4(x - 2) \qquad \text{Ecuación punto-pendiente}$$
$$y = 4x - 4.$$

■

Razones de cambio instantáneas y rectas tangentes

Las razones de cambio a las cuales la piedra del ejemplo 2 estaba cayendo en los instantes $t = 1$ y $t = 2$ se llaman *razones instantáneas de cambio*. Las razones instantáneas y las pendientes de las rectas tangentes están íntimamente relacionadas, como se verá en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 4 En la figura 2.5 se muestra el crecimiento poblacional p de la mosca de la fruta (*Drosophila*), durante un experimento de 50 días. El número de moscas se contó en intervalos regulares de tiempo, los valores obtenidos se graficaron con respecto al tiempo t, y los puntos resultantes se unieron mediante una curva suave. Determine la razón de crecimiento promedio del día 23 al 45.

Solución El día 23 había 150 moscas, mientras que en el día 45 había 340. Por lo tanto, el número de moscas se incrementó en $340 - 150 = 190$ en un lapso de $45 - 23 = 22$ días. La razón promedio de cambio de la población entre los días 23 y 45 fue

$$\text{Razón promedio de cambio: } \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{340 - 150}{45 - 23} = \frac{190}{22} \approx 8.6 \text{ moscas/día.}$$

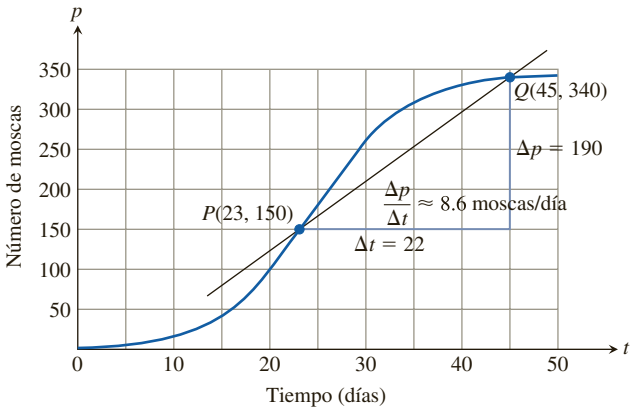


FIGURA 2.5 Crecimiento de la población de la mosca de la fruta en un experimento controlado. La razón promedio de cambio en 22 días es la pendiente $\Delta p/\Delta t$ de la recta secante (ejemplo 4).

Este promedio es la pendiente de la secante que pasa por los puntos P y Q en la gráfica de la figura 2.5. ■

Sin embargo, la razón promedio de cambio entre los días 23 y 45 calculada en el ejemplo 4 no nos indica qué tan rápido se modificó la población el día 23. Para conocer ese dato, necesitamos examinar intervalos de tiempo más cercanos al día en cuestión.

EJEMPLO 5 ¿Qué tan rápido aumentó la población de moscas del ejemplo 4 el día 23?

Solución Para contestar esta pregunta, examinamos las razones promedio de cambio en intervalos de tiempo cada vez más cortos a partir del día 23. En términos geométricos, para encontrar estas razones, debemos calcular las pendientes de las secantes de P a Q, para una sucesión de puntos Q que se acercan a P a lo largo de la curva (figura 2.6).

Q	Pendiente de $PQ = \Delta p/\Delta t$ (moscas/día)
(45, 340)	$\frac{340 - 150}{45 - 23} \approx 8.6$
(40, 330)	$\frac{330 - 150}{40 - 23} \approx 10.6$
(35, 310)	$\frac{310 - 150}{35 - 23} \approx 13.3$
(30, 265)	$\frac{265 - 150}{30 - 23} \approx 16.4$

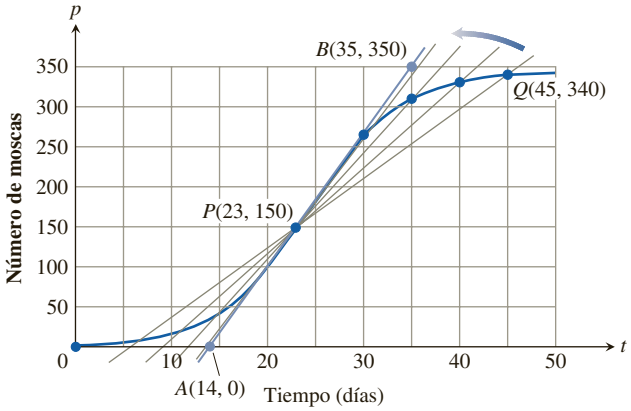


FIGURA 2.6 Posiciones y pendientes de cuatro secantes que pasan por el punto P en la gráfica de la mosca de la fruta (ejemplo 5).

Los valores de la tabla indican que las pendientes de las secantes aumentan de 8.6 a 16.4 a medida que la coordenada t de Q decrece de 45 a 30, lo que nos permitiría suponer que las pendientes se elevan ligeramente más a medida que t sigue su camino hacia 23. Geométricamente, las secantes giran en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de P y parecen acercarse a la recta tangente marcada en color en la figura 2.6. Como, al parecer, la recta pasa por los puntos (14, 0) y (35, 350), tiene una pendiente de

$$\frac{350 - 0}{35 - 14} = 16.7 \text{ moscas/día (aproximadamente).}$$

El día 23, la población se incrementó a una razón aproximada de 16.7 moscas por día. ■

En el ejemplo 2, se determinó que las razones instantáneas fueron los valores de las velocidades promedio, o razones promedio de cambio, conforme el intervalo de tiempo de longitud h se aproximaba a 0. Es decir, la razón instantánea es el valor al que la razón promedio se aproxima cuando la longitud h del intervalo en el cual ocurre el cambio se aproxima a cero. La razón promedio de cambio corresponde a la pendiente de una recta secante; la razón instantánea corresponde a la pendiente de la recta tangente conforme la variable independiente se aproxima a un valor fijo. En el ejemplo 2, la variable independiente t se aproximaba a los valores $t = 1$ y $t = 2$. En el ejemplo 3, la variable independiente x se aproximaba al valor $x = 2$. De esta forma, vemos que las razones instantáneas y las pendientes de las rectas tangentes están estrechamente relacionadas. En el siguiente capítulo investigaremos minuciosamente esta conexión, pero para ello, necesitaremos el concepto de *límite*.

Ejercicios 2.1

Razones promedio de cambio

En los ejercicios 1 a 6, determine la razón promedio de cambio de la función en el intervalo o intervalos dados.

1. $f(x) = x^3 + 1$

a) $[2, 3]$ ***b)*** $[-1, 1]$

2. $g(x) = x^2 - 2x$

a) $[1, 3]$ ***b)*** $[-2, 4]$

3. $h(t) = \cot t$

a) $[\pi/4, 3\pi/4]$ ***b)*** $[\pi/6, \pi/2]$

4. $g(t) = 2 + \cos t$

a) $[0, \pi]$ ***b)*** $[-\pi, \pi]$

5. $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1}$; $[0, 2]$

6. $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta$; $[1, 2]$

Pendiente de una curva en un punto

En los ejercicios 7 a 14, utilice el método del ejemplo 3 para determinar ***a)*** la pendiente de la curva en el punto P dado, y ***b)*** la ecuación de la recta tangente en P.

7. $y = x^2 - 5$, $P(2, -1)$

8. $y = 7 - x^2$, $P(2, 3)$

9. $y = x^2 - 2x - 3$, $P(2, -3)$

10. $y = x^2 - 4x$, $P(1, -3)$

11. $y = x^3$, $P(2, 8)$

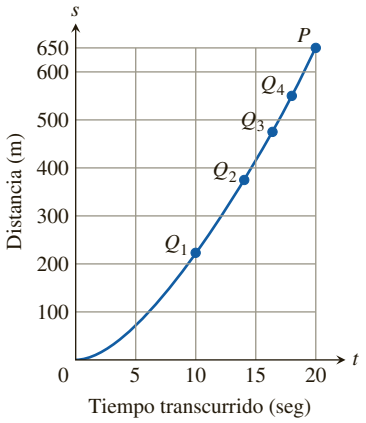
12. $y = 2 - x^3, \quad P(1, 1)$

13. $y = x^3 - 12x, \quad P(1, -11)$

14. $y = x^3 - 3x^2 + 4, \quad P(2, 0)$

Razones instantáneas de cambio

15. Rapidez de un automóvil La siguiente figura muestra la gráfica tiempo-distancia de un automóvil deportivo que acelera desde el reposo.



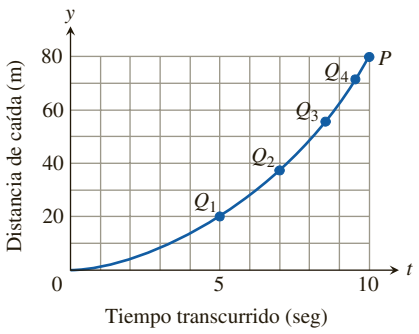
a) Determine las pendientes de las secantes PQ_1, PQ_2, PQ_3 y PQ_4, ordenándolas en una tabla como la de la figura 2.6. ¿Cuáles son las unidades adecuadas para estas pendientes?

b) Después, estime la rapidez del automóvil para el tiempo $t =$ 20 s.

16. La siguiente figura muestra la gráfica de la distancia de caída libre contra el tiempo para un objeto que cae desde un módulo espacial que se encuentra a una distancia de 80 m de la superficie de la Luna.

a) Estime las pendientes de las secantes PQ_1, PQ_2, PQ_3 y PQ_4, ordenándolas en una tabla como la de la figura 2.6.

b) ¿Cuál será la rapidez aproximada del objeto cuando choca con la superficie de la Luna?



T **17.** En la siguiente tabla se registran las utilidades de una pequeña empresa en cada uno de sus primeros cinco años de operación:

Año	Utilidades en miles de $1000s
2010	6
2011	27
2012	62
2013	111
2014	174

a) Trace los puntos que representan las utilidades como una función del año, y únalos mediante una curva suave.

b) ¿Cuál es la razón promedio de incremento de las utilidades entre 2012 y 2014?

c) Use su gráfica para estimar la razón a la que cambiaron las utilidades en 2012.

T **18.** Elabore una tabla de valores para la función $F(x) = (x+2)/(x-2)$ en los puntos $x = 1.2$, $x = 11/10$, $x = 101/100$, $x = 1001/1000$, $x = 10001/10000$, y $x = 1$.

a) Determine la razón promedio de cambio de $F(x)$ en los intervalos $[1, x]$ para cada $x \neq 1$ de su tabla.

b) Si es necesario, amplíe su tabla para intentar determinar la razón de cambio de $F(x)$ en $x = 1$.

T **19.** Sea $g(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$.

a) Obtenga la razón promedio de cambio de $g(x)$ con respecto a x en los intervalos $[1, 2]$, $[1, 1.5]$ y $[1, 1 + h]$.

b) Elabore una tabla de valores de la razón promedio de cambio de g con respecto a x en el intervalo $[1, 1 + h]$ para algunos valores de h cercanos a cero, digamos, $h = 0.1$, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001 y 0.000001.

c) De acuerdo con su tabla, ¿cuál es la razón de cambio de $g(x)$ con respecto a x en $x = 1$?

d) Calcule el límite, cuando h se aproxima a cero, de la razón promedio de cambio de $g(x)$ con respecto a x en el intervalo $[1, 1 + h]$.

T **20.** Sea $f(t) = 1/t$ para $t \neq 0$.

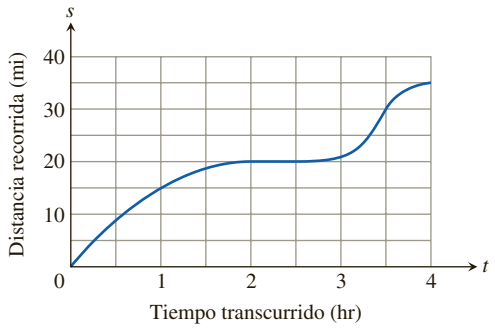
a) Obtenga la razón promedio de cambio de f con respecto a t en los intervalos **i.** de $t = 2$ a $t = 3$, y **ii.** de $t = 2$ a $t = T$.

b) Elabore una tabla de valores de la razón promedio de cambio de f con respecto a t en el intervalo $[2, T]$ para algunos valores de T cercanos a 2, digamos, $T = 2.1$, 2.01, 2.001, 2.0001, 2.00001 y 2.000001.

c) De acuerdo con su tabla, ¿cuál es la razón de cambio de f con respecto a t en $t = 2$?

d) Calcule el límite, cuando T se aproxima a 2, de la razón promedio de cambio de f con respecto a t en el intervalo de 2 a T. Tendrá que hacer algo de álgebra antes de que pueda sustituir $T = 2$.

21. La siguiente gráfica muestra la distancia total s, que recorre un ciclista después de t horas.



a) Estime la velocidad promedio del ciclista en los intervalos de tiempo [0, 1], [1, 2.5] y [2.5, 3.5].

b) Estime la velocidad instantánea del ciclista en los tiempos $t = \frac{1}{2}$, $t = 2$ y $t = 3$.

c) Estime la velocidad máxima del ciclista y el tiempo específico en que ésta se registra.

22. La siguiente gráfica muestra la cantidad total de gasolina A en el tanque de un automóvil después de conducirlo t días.

a) Estime la razón promedio del consumo de gasolina en los intervalos de tiempo [0, 3], [0, 5] y [7, 10].

b) Estime la razón instantánea de consumo de gasolina en los tiempos $t = 1$, $t = 4$ y $t = 8$.

c) Estime la razón máxima de consumo de gasolina y el tiempo específico en que ésta se registra.

2.2 Límite de una función y leyes de los límites

En la sección 2.1 vimos que los límites surgen cuando se quiere encontrar la razón instantánea de cambio de una función o la tangente a una curva. En esta sección iniciamos con una definición informal de *límite* y mostramos cómo se pueden calcular los valores de los límites. En la siguiente sección se presentará una definición precisa.

Límites de valores de funciones

Cuando estudiamos una función $y = f(x)$, a menudo nos interesa el comportamiento de la función *cerca* de un punto particular c, pero no *en* c. Éste podría ser el caso, por ejemplo, si c es un número irracional, como π, o $\sqrt{2}$, cuyos valores sólo se pueden aproximar mediante números racionales "cercanos" en los cuales evaluamos realmente la función. Otra situación se presenta cuando intentamos evaluar una función en c y esto lleva a dividir entre cero, lo cual es una operación indefinida. Este último caso se presenta cuando buscamos la razón instantánea de cambio en y considerando la función cociente $\Delta y/h$ para h cada vez más y más cerca de cero. En el ejemplo que sigue exploramos numéricamente cómo se comporta una función cerca de un punto particular en el cual no se puede evaluar directamente la función.

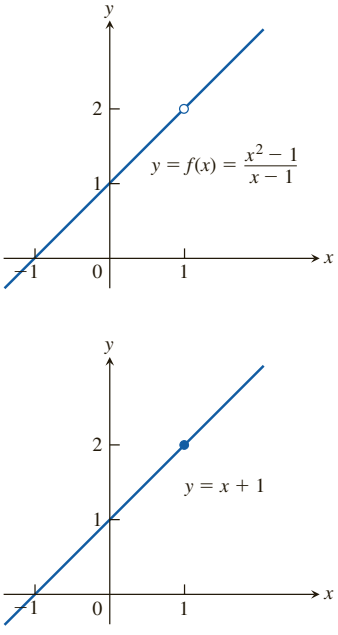


FIGURA 2.7 La gráfica de f es idéntica a la de la recta $y = x + 1$, excepto en $x = 1$, donde f no está definida (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 ¿Cómo se comporta la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

cerca de $x = 1$?

Solución La fórmula define a f para todos los números reales x, excepto para $x = 1$ (ya que no se puede dividir entre cero). Para cualquier $x \neq 1$, podemos simplificar la fórmula factorizando el numerador y eliminando los factores comunes:

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \qquad \text{para} \qquad x \neq 1.$$

La gráfica de f es la recta $y = x + 1$ *sin* el punto (1, 2). El punto eliminado se representa como un "hueco" en la figura 2.7. Aun cuando $f(1)$ no está definida, es claro que podemos determinar el valor de $f(x)$ *tan cerca como queramos* de 2, eligiendo a x *lo suficientemente cerca* de 1 (tabla 2.2). ■

TABLA 2.2 Conforme x se acerca más a 1, $f(x)$ se acerca más a 2.

x	$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

Para generalizar la idea ilustrada en el ejemplo 1, suponga que $f(x)$ está definida en un intervalo abierto que contiene a c, *excepto posiblemente en c misma*. Si $f(x)$ está arbitrariamente cerca del número L (tan cerca de L como queramos) para toda x suficientemente cerca de c, decimos que f se aproxima al **límite** L cuando x se aproxima a c, y escribimos

$$\lim_{x \to c} f(x) = L,$$

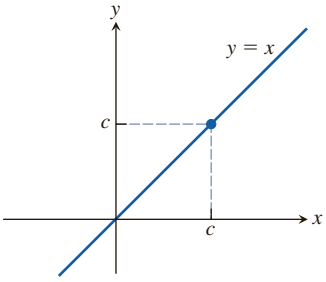
lo cual se lee como "el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c es L". Así, en el ejemplo 1 diríamos que $f(x)$ se aproxima al *límite* 2 cuando x se aproxima a 1, y escribimos

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2, \quad \text{para} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

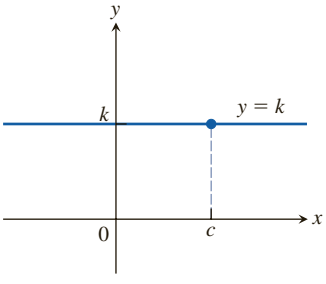
En esencia, la definición afirma que los valores de $f(x)$ están cerca del número L siempre que x esté cerca de c (por cualquier lado de c).

Esta definición es "informal" porque frases como *arbitrariamente cerca* y *suficientemente cerca* son imprecisas; su significado depende del contexto. (Para un mecánico que fabrica un pistón, *cerca* puede significar *milésimas de pulgada*. Para un astrónomo que estudia galaxias lejanas, *cerca* podría significar *algunos miles de* años luz). No obstante, la definición es lo suficientemente clara para permitirnos identificar y evaluar límites de muchas funciones específicas. Sin embargo, necesitaremos la definición precisa de la sección 2.3, cuando nos dispongamos a demostrar teoremas acerca de límites o a estudiar funciones complicadas. He aquí algunos ejemplos más para explorar la idea de límites.

EJEMPLO 2 El valor del límite de una función no depende de cómo esté definida la función en el punto que está siendo aproximado. Considere las tres funciones de la figura 2.8. La función f tiene el límite 2 cuando $x \to 1$, aunque f no está definida en $x = 1$. La función g tiene el límite 2 cuando $x \to 1$, aunque $2 \neq g(1)$. La función h es la única de las tres funciones de la figura 2.8 cuyo límite cuando $x \to 1$ es igual a su valor en $x = 1$. Para h tenemos que $\lim_{x \to 1} h(x) = h(1)$. Esta igualdad entre el límite y el valor de la función es de especial importancia, y volveremos a ella en la sección 2.5. ■

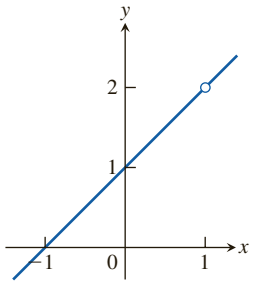


a) Función identidad

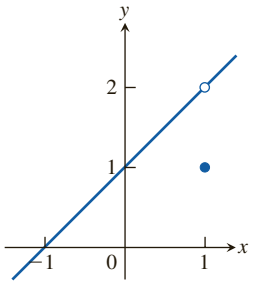


b) Función constante

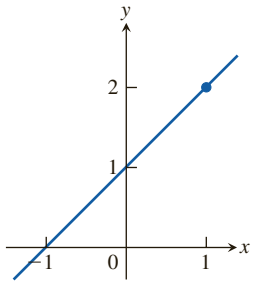
FIGURA 2.9 Las funciones del ejemplo 3 tienen límites en todos los puntos c.



a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$



b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$



c) $h(x) = x + 1$

FIGURA 2.8 Los límites de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son iguales a 2 cuando x se aproxima a 1. Sin embargo, el valor de la función y su límite en $x = 1$ sólo coinciden para $h(x)$ (ejemplo 2).

EJEMPLO 3

a) Si f es la **función identidad** $f(x) = x$, entonces, para cualquier valor de c (figura 2.9*a*),

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c.$$

b) Si f es la **función constante** $f(x) = k$ (función con valor constante k), entonces, para cualquier valor de c (figura 2.9*b*),

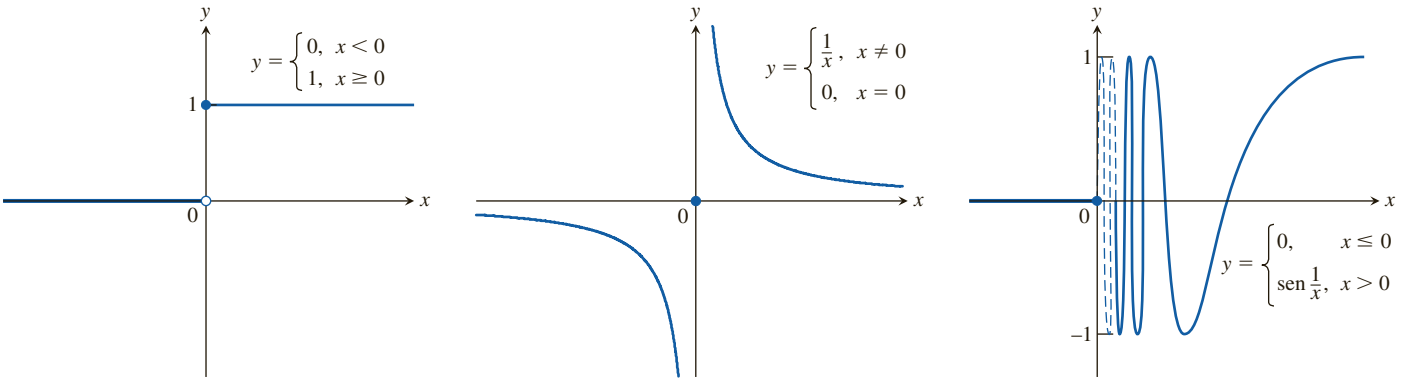
$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k.$$

Como ejemplos de cada una de estas reglas, tenemos

$$\lim_{x\to 3} x = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to -7}(4) = \lim_{x\to 2}(4) = 4.$$

En el ejemplo 3 de la sección 2.3, se demuestran estas reglas. ■

Una función podría no tener límite en un punto particular. Algunas maneras en las que podrían no existir límites se ilustran en la figura 2.10 y se describen en el siguiente ejemplo.



a) Función escalón unitario $U(x)$ *b*) $g(x)$ *c*) $f(x)$

FIGURA 2.10 Ninguna de estas funciones tiene un límite cuando x se aproxima a 0 (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Analice el comportamiento de las siguientes funciones, explicando por qué no tienen límite cuando $x \to 0$.

a) $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

Solución

a) La función presentada en *a*) tiene un *salto*: la **función escalón unitario** $U(x)$ no tiene límite cuando $x \to 0$ porque sus valores saltan en $x = 0$. Para valores negativos de x arbitrariamente cercanos a cero, $U(x) = 0$. Para valores positivos de x arbitrariamente cercanos a cero, $U(x) = 1$. No hay un valor único de L al que $U(x)$ se acerque cuando $x \to 0$ (figura 2.10*a*).

b) La función presentada en *b*) *crece demasiado para tener un límite*: $g(x)$ no tiene límite cuando $x \to 0$ porque los valores de g aumentan arbitrariamente en valor absoluto cuando $x \to 0$, y no permanecen cerca de *algún* número real fijo (figura 2.10*b*). Se dice que la función *no está acotada*.

c) La función presentada en *c*) *oscila demasiado para tener un límite*: $f(x)$ no tiene límite cuando $x \to 0$, ya que sus valores oscilan entre +1 y −1 en todo intervalo abierto que contenga a 0. Los valores no parecen estar cercanos a algún número cuando $x \to 0$ (figura 2.10*c*). ■

Leyes de los límites

Para calcular los límites de funciones que son combinaciones aritméticas de otras cuyos límites ya se conocen, se usan algunas reglas fundamentales.

TEOREMA 1: Leyes de los límites Si L, M, c y k son números reales y

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} g(x) = M, \text{ entonces,}$$

1. *Regla de la suma:* $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L + M$
2. *Regla de la diferencia:* $\lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = L - M$
3. *Regla del múltiplo constante:* $\lim_{x\to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot L$
4. *Regla del producto:* $\lim_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
5. *Regla del cociente:* $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$
6. *Regla de la potencia:* $\lim_{x\to c}[\, f(x)]^{\,n} = L^n$, n es un entero positivo
7. *Regla de la raíz:* $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, n es un entero positivo

(Si n es par, se supone además que $\lim_{x\to c} f(x) = L > 0$.)

En palabras, la regla de la suma afirma que el límite de una suma es la suma de los límites. De forma similar, las reglas que le siguen afirman que el límite de una diferencia es la diferencia de los límites; el límite de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por el límite de la función; el límite de un producto es el producto de los límites; el límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre y cuando el límite del denominador no sea 0); el límite de una potencia (o raíz) entera positiva de una función es la potencia (o raíz) del límite (siempre que la raíz del límite sea un número real).

Es fácil convencernos de que las propiedades del teorema 1 son verdaderas (aunque estos argumentos intuitivos no constituyen una demostración). De acuerdo con nuestra definición informal de límite, si x está suficientemente cerca de c, entonces, $f(x)$ está cerca de L y $g(x)$ está cerca de M. Por lo tanto, es razonable que $f(x) + g(x)$ esté cerca de $L + M$; que $f(x) - g(x)$ esté cerca de $L - M$; que $kf(x)$ esté cerca de kL; que $f(x)g(x)$ esté cerca de LM; y que $f(x)/g(x)$ esté cerca de L/M si M es diferente de cero. En la sección 2.3 demostraremos la regla de la suma, con base en una definición precisa de límite. Las reglas 2 a 5 se demuestran en el apéndice 4. La regla 6 se obtiene aplicando sucesivamente la regla 4. La regla 7 se demuestra en textos más avanzados. Las reglas de suma, diferencia y producto se pueden extender para cualquier número de funciones, no sólo para dos.

EJEMPLO 5 Considere las observaciones $\lim_{x\to c} k = k$ y $\lim_{x\to c} x = c$ (ejemplo 3), así como las reglas fundamentales de límites, para obtener los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to c}(x^3 + 4x^2 - 3)$

b) $\lim_{x\to c} \dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$

c) $\lim_{x\to -2} \sqrt{4x^2 - 3}$

Solución

$$\textit{a)}\quad \lim_{x\to c}(x^3 + 4x^2 - 3) = \lim_{x\to c} x^3 + \lim_{x\to c} 4x^2 - \lim_{x\to c} 3 \qquad \text{Reglas de suma y diferencia}$$

$$= c^3 + 4c^2 - 3 \qquad \text{Reglas de la potencia y del múltiplo}$$

$$\textit{b)}\quad \lim_{x\to c}\frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} = \frac{\lim_{x\to c}(x^4 + x^2 - 1)}{\lim_{x\to c}(x^2 + 5)} \qquad \text{Regla del cociente}$$

$$= \frac{\lim_{x\to c} x^4 + \lim_{x\to c} x^2 - \lim_{x\to c} 1}{\lim_{x\to c} x^2 + \lim_{x\to c} 5} \qquad \text{Reglas de suma y diferencia}$$

$$= \frac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5} \qquad \text{Reglas de la potencia o del producto}$$

$$\textit{c)}\quad \lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{\lim_{x\to -2}(4x^2 - 3)} \qquad \text{Regla de la raíz con } n = 2$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to -2} 4x^2 - \lim_{x\to -2} 3} \qquad \text{Regla de la diferencia}$$

$$= \sqrt{4(-2)^2 - 3} \qquad \text{Reglas del producto y del múltiplo}$$

$$= \sqrt{16 - 3}$$

$$= \sqrt{13}$$

■

El teorema 1 simplifica la tarea de calcular los límites de funciones polinomiales y racionales. Para evaluar el límite de una función polinomial cuando x se aproxima c, simplemente se sustituye x por c en la fórmula de la función. Para evaluar el límite de una función racional conforme x se aproxima a un punto c *cuyo denominador es distinto de cero*, sustituimos x por c en la fórmula de la función. (Vea los ejemplos 5*a* y 5*b*). Estableceremos formalmente estos resultados como teoremas.

TEOREMA 2: Límites de las funciones polinomiales

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, entonces,

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0.$$

TEOREMA 3: Límites de las funciones racionales

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, y $Q(c) \neq 0$, entonces,

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

EJEMPLO 6 Los siguientes cálculos ilustran los teoremas 2 y 3:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 5} = \frac{0}{6} = 0$$

■

Identificación de factores comunes

Se puede demostrar que si $Q(x)$ es una función polinomial y $Q(c) = 0$, entonces, $(x - c)$ es un factor de $Q(x)$. Por consiguiente, si tanto el numerador como el denominador de una función racional de x son iguales a cero en $x = c$, entonces, ambos tienen como factor común a $(x - c)$.

Eliminación algebraica de denominadores iguales a cero

El teorema 3 es válido únicamente si el denominador de la función racional es diferente de cero en el punto límite c. Si el denominador es igual a cero, eliminar los factores comunes en el numerador y el denominador puede reducir la fracción a una cuyo denominador ya no sea igual a cero en c. Si esto ocurre, es posible obtener el límite por sustitución en la fracción simplificada.

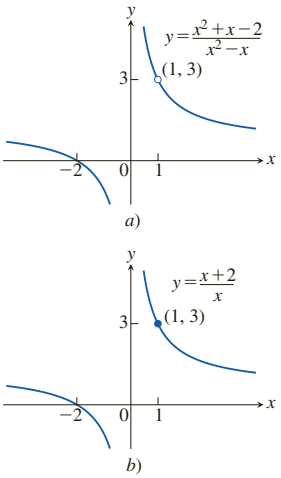


FIGURA 2.11 La gráfica de $f(x) = (x^2 + x - 2)/(x^2 - x)$ del inciso *a*) es la misma gráfica que la de $g(x) = (x + 2)/x$ del inciso *b*), excepto en $x = 1$, donde f no está definida. Las funciones tienen el mismo límite cuando $x \to 1$ (ejemplo 7).

EJEMPLO 7 Evalúe

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}.$$

Solución No podemos sustituir $x = 1$ porque obtendríamos un denominador igual a cero. Evaluamos el numerador en $x = 1$ para ver si también es igual a cero. Lo es, de modo que tiene un factor común $(x - 1)$ con el denominador. Al eliminar este factor común, obtenemos una fracción más sencilla con los mismos valores que la original para $x \neq 1$:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x - 1)(x + 2)}{x(x - 1)} = \frac{x + 2}{x}, \qquad \text{si } x \neq 1.$$

Con la fracción más sencilla y aplicando el teorema 3, obtenemos el límite de estos valores cuando $x \to 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 2}{x} = \frac{1 + 2}{1} = 3.$$

Vea la figura 2.11. ■

Uso de calculadoras y computadoras para estimar límites

Cuando no se puede aplicar la regla del cociente del teorema 1 porque el límite del denominador es cero, podemos intentar el uso de calculadoras o computadoras para obtener un límite numérico cuando x se aproxima cada vez más a c. Utilizamos este enfoque en el ejemplo 1, pero las calculadoras y computadoras en ocasiones dan valores falsos y causan impresiones engañosas de funciones que no están definidas en un punto, o que no tienen límite en éste. Por lo regular, el problema se debe a errores de redondeo, como veremos en seguida.

EJEMPLO 8 Estime el valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}$.

Solución En la tabla 2.3 se listan los valores de la función, obtenidos con una calculadora, para varios puntos próximos a $x = 0$. Cuando x se aproxima a cero por los puntos ± 1, ± 0.5, ± 0.10 y ± 0.01, la función parece aproximarse al número 0.05.

Pero cuando tomamos valores de x aún más pequeños, ± 0.0005, ± 0.0001, ± 0.00001 y ± 0.000001, la función parece aproximarse al número 0.

Entonces, ¿cuál es la respuesta? ¿Es 0.05 o 0, o algún otro valor? Contestaremos esta pregunta en el siguiente ejemplo. ■

TABLA 2.3 Valores calculados de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}$ cerca de $x = 0$

x	$f(x)$	
± 1	0.049876	¿Se aproxima a 0.05?
± 0.5	0.049969	
± 0.1	0.049999	
± 0.01	0.050000	
± 0.0005	0.050000	¿Se aproxima a 0?
± 0.0001	0.000000	
± 0.00001	0.000000	
± 0.000001	0.000000	

Una calculadora o una computadora pueden dar resultados ambiguos, como en el último ejemplo. La calculadora no considera los dígitos suficientes para eliminar errores de redondeo al calcular los valores de $f(x)$ cuando x es muy pequeña. No podemos usar $x = 0$ en el problema, y el numerador y el denominador no tienen factores comunes evidentes (como sucedía en el ejemplo 7). Sin embargo, en ocasiones, podemos crear un factor común algebraicamente.

EJEMPLO 9 Evalúe

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}.$$

Solución Éste es el límite considerado en el ejemplo 8. Podemos crear un factor común multiplicando tanto el numerador como el denominador por la expresión radical conjugada $\sqrt{x^2 + 100} + 10$ (que se obtiene cambiando el signo después de la raíz cuadrada). El álgebra preliminar racionaliza el numerador:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} &= \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 100} + 10}{\sqrt{x^2 + 100} + 10} \\
&= \frac{x^2 + 100 - 100}{x^2(\sqrt{x^2 + 100} + 10)} \\
&= \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 100} + 10} && \text{Factor común } x^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 100} + 10}. && \text{Se elimina } x^2 \text{ para } x \neq 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 100} + 10} \\
&= \frac{1}{\sqrt{0^2 + 100} + 10} && \text{Denominador diferente de 0 en } x = 0\text{; se sustituye.} \\
&= \frac{1}{20} = 0.05.
\end{aligned}$$

Este cálculo brinda la respuesta correcta, a diferencia de los resultados ambiguos con el uso de la computadora en el ejemplo 8. ■

El problema de obtener el límite de un cociente donde el denominador se vuelve cero no siempre se puede resolver algebraicamente. En algunos casos, el límite se encuentra con ayuda de la geometría aplicada al problema (vea la demostración del teorema 7 en la sección 2.4), o a través de métodos de cálculo (ilustrados en la sección 7.5). Los siguientes teoremas ofrecen herramientas útiles que utilizan comparación entre funciones.

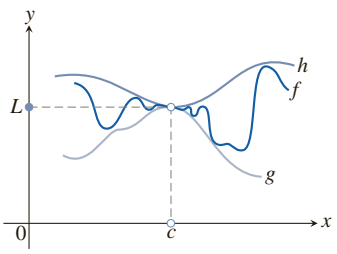


FIGURA 2.12 La gráfica de f se encuentra entre las gráficas de g y h.

El teorema del sándwich

El siguiente teorema nos permite calcular una variedad de límites. Se conoce como teorema del sándwich (o de la compresión) porque se refiere a una función f cuyos valores están comprendidos entre los valores de otras dos funciones g y h que tienen el mismo límite L en el punto c. Al estar atrapados entre los valores de dos funciones que se acercan a L, los valores de f también deben acercarse a L (figura 2.12). Encontrará una demostración de ello en el apéndice 4.

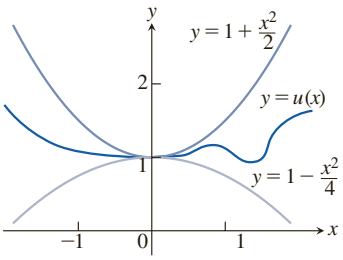


FIGURA 2.13 Cualquier función $u(x)$ cuya gráfica se encuentre en la región entre $y = 1 + (x^2/2)$ y $y = 1 - (x^2/4)$ tiene límite 1 cuando $x \to 0$ (ejemplo 10).

TEOREMA 4: El teorema del sándwich Suponga que $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a c, excepto posiblemente en $x = c$. Suponga también que

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L.$$

Entonces $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

El teorema del sándwich también se conoce como teorema de la compresión.

EJEMPLO 10 Dado que

$$1 - \frac{x^2}{4} \le u(x) \le 1 + \frac{x^2}{2} \qquad \text{para toda } x \ne 0,$$

encuentre $\lim_{x \to 0} u(x)$, sin importar qué tan complicada sea u.

Solución Como

$$\lim_{x \to 0}(1 - (x^2/4)) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0}(1 + (x^2/2)) = 1,$$

El teorema del sándwich implica que $\lim_{x \to 0} u(x) = 1$ (figura 2.13). ■

EJEMPLO 11 El teorema del sándwich nos ayuda a establecer varias reglas importantes de límites:

a) $\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta = 0$ ***b)*** $\lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1$

c) Para cualquier función f, $\lim_{x \to c} |f(x)| = 0$ implica que $\lim_{x \to c} f(x) = 0$.

Solución

a) En la sección 1.3 establecimos que $-|\theta| \le \operatorname{sen} \theta \le |\theta|$ para toda θ (vea la figura 2.14*a*). Como $\lim_{\theta \to 0}(-|\theta|) = \lim_{\theta \to 0} |\theta| = 0$, tenemos

$$\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta = 0.$$

b) De la sección 1.3, $0 \le 1 - \cos \theta \le |\theta|$ para toda θ (vea la figura 2.14*b*), y tenemos que $\lim_{\theta \to 0}(1 - \cos \theta) = 0$ o

$$\lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1.$$

c) Como $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ y $-|f(x)|$ y $|f(x)|$ tienen límite 0 cuando x se aproxima a c, se deduce que $\lim_{x \to c} f(x) = 0$. ■

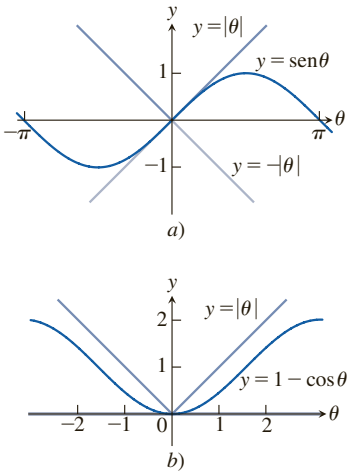


FIGURA 2.14 El teorema del sándwich confirma los límites en el ejemplo 11.

Otra propiedad importante de los límites está implicada en el siguiente teorema. La demostración se presenta en la siguiente sección.

TEOREMA 5: Si $f(x) \le g(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en $x = c$, y los límites de f y g existen cuando x se aproxima a c, entonces,

$$\lim_{x \to c} f(x) \le \lim_{x \to c} g(x).$$

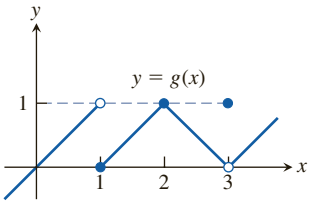
¡Cuidado! Si sustituimos en el teorema 5 el signo menor o igual que ($\le$) por la desigualdad estricta menor que ($<$), la proposición que resulta es falsa. En la figura 2.14*a*) se muestra que para $\theta \ne 0$, $-|\theta| < \operatorname{sen} \theta < |\theta|$. Así, $\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta = 0 = \lim_{\theta \to 0} |\theta|$, pero no $\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta < \lim_{\theta \to 0} |\theta|$.

Ejercicios 2.2

Límites a partir de gráficas

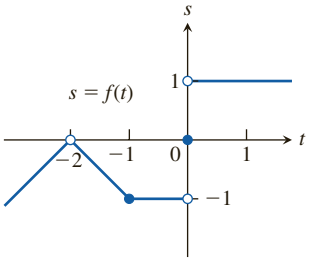
1. Para la función $g(x)$ cuya gráfica aparece a continuación, determine los siguientes límites o explique por qué no existen.

a) $\lim_{x\to 1} g(x)$ ***b)*** $\lim_{x\to 2} g(x)$ ***c)*** $\lim_{x\to 3} g(x)$ ***d)*** $\lim_{x\to 2.5} g(x)$



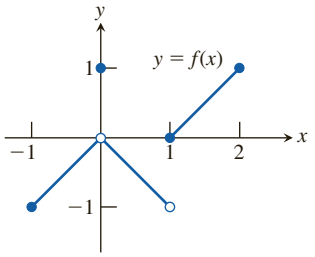
2. Para la función $f(t)$ cuya gráfica aparece a continuación, determine los siguientes límites o explique por qué no existen.

a) $\lim_{t\to -2} f(t)$ ***b)*** $\lim_{t\to -1} f(t)$ ***c)*** $\lim_{t\to 0} f(t)$ ***d)*** $\lim_{t\to -0.5} f(t)$



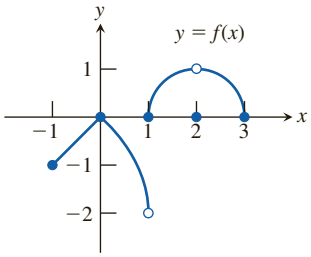
3. ¿Cuáles de los siguientes enunciados acerca de la función $y = f(x)$, cuya gráfica aparece a continuación, son verdaderos y cuáles son falsos?

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe.
b) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$
d) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$
e) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$
f) $\lim_{x\to c} f(x)$ existe en todos los puntos c en $(-1, 1)$.
g) $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe.



4. ¿Cuáles de los siguientes enunciados acerca de la función $y = f(x)$, cuya gráfica aparece a continuación, son verdaderos y cuáles son falsos?

a) $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe.
b) $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$
c) $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe.
d) $\lim_{x\to c} f(x)$ existe en todos los puntos c en $(-1, 1)$.
e) $\lim_{x\to c} f(x)$ existe en todos los puntos c en $(1, 3)$.



Existencia de límites

En los ejercicios 5 y 6, explique por qué los límites no existen.

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$ **6.** $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$

7. Suponga que una función $f(x)$ está definida para todos los valores reales de x, excepto para $x = c$. ¿Qué puede decirse con respecto a la existencia de $\lim_{x\to c} f(x)$? Justifique su respuesta.

8. Suponga que una función $f(x)$ está definida para toda x en $[-1, 1]$. ¿Qué puede decirse con respecto a la existencia de $\lim_{x\to 0} f(x)$? Justifique su respuesta.

9. Si $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$, ¿debe estar definida f en $x = 1$? Si es así, ¿$f(1)$ debe ser igual a 5? ¿Es posible concluir *algo* con respecto a los valores de f en $x = 1$? Explique.

10. Si $f(1) = 5$, ¿debe existir el $\lim_{x\to 1} f(x)$? Si es así, ¿$\lim_{x\to 1} f(x)$ debe ser igual a 5? ¿Es posible concluir *algo* respecto del $\lim_{x\to 1} f(x)$? Explique.

Cálculo de límites

En los ejercicios 11 a 22, encuentre los límites.

11. $\lim_{x\to -3} (x^2 - 13)$ **12.** $\lim_{x\to 2} (-x^2 + 5x - 2)$

13. $\lim_{t\to 6} 8(t - 5)(t - 7)$ **14.** $\lim_{x\to -2} (x^3 - 2x^2 + 4x + 8)$

15. $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x + 5}{11 - x^3}$ **16.** $\lim_{s\to 2/3} (8 - 3s)(2s - 1)$

17. $\lim_{x\to -1/2} 4x(3x + 4)^2$ **18.** $\lim_{y\to 2} \dfrac{y + 2}{y^2 + 5y + 6}$

19. $\lim_{y\to -3} (5 - y)^{4/3}$ **20.** $\lim_{z\to 4} \sqrt{z^2 - 10}$

21. $\lim_{h\to 0} \dfrac{3}{\sqrt{3h + 1} + 1}$ **22.** $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{5h + 4} - 2}{h}$

Límites de cocientes Encuentre los límites en los ejercicios 23 a 42.

23. $\lim_{x\to 5} \dfrac{x - 5}{x^2 - 25}$ **24.** $\lim_{x\to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$

25. $\lim_{x\to -5} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$ **26.** $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}$

27. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^2 + t - 2}{t^2 - 1}$ **28.** $\lim_{t\to -1} \dfrac{t^2 + 3t + 2}{t^2 - t - 2}$

29. $\lim_{x\to -2} \dfrac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2}$ **30.** $\lim_{y\to 0} \dfrac{5y^3 + 8y^2}{3y^4 - 16y^2}$

31. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^{-1}-1}{x-1}$

32. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{x}$

33. $\lim_{u\to 1} \dfrac{u^4-1}{u^3-1}$

34. $\lim_{v\to 2} \dfrac{v^3-8}{v^4-16}$

35. $\lim_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

36. $\lim_{x\to 4} \dfrac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$

37. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

38. $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$

39. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2}$

40. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

41. $\lim_{x\to -3} \dfrac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3}$

42. $\lim_{x\to 4} \dfrac{4-x}{5-\sqrt{x^2+9}}$

Límites con funciones trigonométricas En los ejercicios 43 a 50, encuentre los límites.

43. $\lim_{x\to 0} (2\operatorname{sen} x - 1)$

44. $\lim_{x\to \pi/4} \operatorname{sen}^2 x$

45. $\lim_{x\to 0} \sec x$

46. $\lim_{x\to \pi/3} \tan x$

47. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1+x+\operatorname{sen} x}{3\cos x}$

48. $\lim_{x\to 0} (x^2-1)(2-\cos x)$

49. $\lim_{x\to -\pi} \sqrt{x+4}\cos(x+\pi)$

50. $\lim_{x\to 0} \sqrt{7+\sec^2 x}$

Aplicación de las reglas de los límites

51. Suponga que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = -5$. Señale cuáles reglas del teorema 1 se emplean para obtener los pasos *a*), *b*) y *c*) del siguiente cálculo.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2f(x)-g(x)}{(f(x)+7)^{2/3}} = \frac{\lim_{x\to 0}(2f(x)-g(x))}{\lim_{x\to 0}(f(x)+7)^{2/3}} \quad a)$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0} 2f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{\left(\lim_{x\to 0}(f(x)+7)\right)^{2/3}} \quad b)$$

$$= \frac{2\lim_{x\to 0} f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{\left(\lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 0} 7\right)^{2/3}} \quad c)$$

$$= \frac{(2)(1)-(-5)}{(1+7)^{2/3}} = \frac{7}{4}$$

52. Sean $\lim_{x\to 1} h(x) = 5$, $\lim_{x\to 1} p(x) = 1$, y $\lim_{x\to 1} r(x) = 2$. Señale cuáles reglas del teorema 1 se emplean para obtener los pasos *a*), *b*) y *c*) del siguiente cálculo.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4-r(x))} = \frac{\lim_{x\to 1}\sqrt{5h(x)}}{\lim_{x\to 1}(p(x)(4-r(x)))} \quad a)$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 1} 5h(x)}}{\left(\lim_{x\to 1} p(x)\right)\left(\lim_{x\to 1}(4-r(x))\right)} \quad b)$$

$$= \frac{\sqrt{5\lim_{x\to 1} h(x)}}{\left(\lim_{x\to 1} p(x)\right)\left(\lim_{x\to 1} 4 - \lim_{x\to 1} r(x)\right)} \quad c)$$

$$= \frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4-2)} = \frac{5}{2}$$

53. Suponga que $\lim_{x\to c} f(x) = 5$ y $\lim_{x\to c} g(x) = -2$. Encuentre

a) $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$

b) $\lim_{x\to c} 2f(x)g(x)$

c) $\lim_{x\to c} (f(x) + 3g(x))$

d) $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{f(x)-g(x)}$

54. Suponga que $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 4} g(x) = -3$. Encuentre

a) $\lim_{x\to 4} (g(x) + 3)$

b) $\lim_{x\to 4} xf(x)$

c) $\lim_{x\to 4} (g(x))^2$

d) $\lim_{x\to 4} \dfrac{g(x)}{f(x)-1}$

55. Suponga que $\lim_{x\to b} f(x) = 7$ y $\lim_{x\to b} g(x) = -3$. Encuentre

a) $\lim_{x\to b} (f(x) + g(x))$

b) $\lim_{x\to b} f(x)\cdot g(x)$

c) $\lim_{x\to b} 4g(x)$

d) $\lim_{x\to b} f(x)/g(x)$

56. Suponga que $\lim_{x\to -2} p(x) = 4$, $\lim_{x\to -2} r(x) = 0$, y $\lim_{x\to -2} s(x) = -3$. Obtenga

a) $\lim_{x\to -2} (p(x) + r(x) + s(x))$

b) $\lim_{x\to -2} p(x)\cdot r(x)\cdot s(x)$

c) $\lim_{x\to -2} (-4p(x) + 5r(x))/s(x)$

Límites de razones promedio de cambio

Debido a la relación que existe entre rectas secantes, tangentes y razones instantáneas, límites de la forma

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

aparecen a menudo en cálculo. En los ejercicios 57 a 62, evalúe este límite para el valor de x y la función f dados.

57. $f(x) = x^2, \quad x = 1$

58. $f(x) = x^2, \quad x = -2$

59. $f(x) = 3x - 4, \quad x = 2$

60. $f(x) = 1/x, \quad x = -2$

61. $f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 7$

62. $f(x) = \sqrt{3x+1}, \quad x = 0$

Aplicación del teorema del sándwich

63. Si $\sqrt{5-2x^2} \le f(x) \le \sqrt{5-x^2}$ para $-1 \le x \le 1$, determine $\lim_{x\to 0} f(x)$.

64. Si $2 - x^2 \le g(x) \le 2\cos x$ para toda x, determine $\lim_{x\to 0} g(x)$.

65. ***a)*** Es posible demostrar que las desigualdades

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x\operatorname{sen} x}{2-2\cos x} < 1$$

son válidas para todos los valores de x cercanos a cero. ¿Se puede decir algo acerca del

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{sen} x}{2-2\cos x}?$$

Justifique su respuesta.

T ***b)*** Dibuje en una misma gráfica $y = 1 - (x^2/6)$, $y = (x\operatorname{sen} x)/(2-2\cos x)$, y $y = 1$ para $-2 \le x \le 2$. Comente sobre el comportamiento de las gráficas cuando $x \to 0$.

66. ***a)*** Suponga que las desigualdades

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$$

son válidas para los valores de x cercanos a cero. (Así sucede, como verá en la sección 9.9). ¿Qué se puede decir, si acaso, acerca del

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}?$$

Justifique su respuesta.

T ***b)*** Grafique juntas las ecuaciones $y = (1/2) - (x^2/24)$, $y = (1 - \cos x)/x^2$, y $y = 1/2$ para $-2 \le x \le 2$. Comente sobre el comportamiento de las gráficas cuando $x \to 0$.

Estimación de límites

T Una calculadora graficadora podría serle útil para resolver los ejercicios 67 a 74.

67. Sea $f(x) = (x^2 - 9)/(x + 3)$.

a) Elabore una tabla con los valores de f en los puntos $x = -3.1$, -3.01, -3.001, y así sucesivamente hasta donde lo permita su calculadora. Después, estime $\lim_{x \to -3} f(x)$. ¿Qué estimación obtendrá si ahora evalúa f en $x = -2.9$, -2.99, -2.999,…?

b) Apoye las conclusiones a las que llegó en el inciso *a)* graficando f cerca de $c = -3$ y empleando las funciones Zoom y Trace de su calculadora para estimar los valores y de la gráfica cuando $x \to -3$.

c) Determine $\lim_{x \to -3} f(x)$ algebraicamente, como en el ejemplo 7.

68. Sea $g(x) = (x^2 - 2)/(x - \sqrt{2})$.

a) Elabore una tabla con los valores de g en los puntos $x = 1.4$, 1.41, 1.414, y así sucesivamente con las aproximaciones decimales sucesivas de $\sqrt{2}$. Estime $\lim_{x \to \sqrt{2}} g(x)$.

b) Apoye las conclusiones a las que llegó en el inciso *a)* graficando g cerca de $c = \sqrt{2}$ y empleando las funciones Zoom y Trace de su calculadora para estimar los valores y de la gráfica cuando $x \to \sqrt{2}$.

c) Determine $\lim_{x \to \sqrt{2}} g(x)$ algebraicamente.

69. Sea $G(x) = (x + 6)/(x^2 + 4x - 12)$.

a) Elabore una tabla con los valores de G en los puntos $x = -5.9$, -5.99, -5.999, y así sucesivamente. Después, estime $\lim_{x \to -6} G(x)$. ¿Qué estimaciones obtendrá si ahora evalúa G en $x = -6.1$, -6.01, -6.001,…?

b) Apoye las conclusiones a las que llegó en el inciso *a)* graficando G y empleando las funciones Zoom y Trace de su calculadora para estimar los valores y de la gráfica cuando $x \to -6$.

c) Determine $\lim_{x \to -6} G(x)$ algebraicamente.

70. Sea $h(x) = (x^2 - 2x - 3)/(x^2 - 4x + 3)$.

a) Elabore una tabla con los valores de h en los puntos $x = 2.9$, 2.99, 2.999, y así sucesivamente. Después, estime $\lim_{x \to 3} h(x)$. ¿Qué estimaciones obtendrá si ahora evalúa h en $x = 3.1$, 3.01, 3.001,…?

b) Apoye las conclusiones a las que llegó en el inciso *a)* graficando h cerca de $c = 3$ y empleando las funciones Zoom y Trace de su calculadora para estimar los valores y de la gráfica cuando $x \to 3$.

c) Determine $\lim_{x \to 3} h(x)$ algebraicamente.

71. Sea $f(x) = (x^2 - 1)/(|x| - 1)$.

a) Elabore una tabla con los valores de f en valores de x que se aproximan a $c = -1$ por la derecha y por la izquierda. Después, estime $\lim_{x \to -1} f(x)$.

b) Apoye las conclusiones a las que llegó en el inciso *a)* graficando f cerca de $c = -1$ y empleando las funciones Zoom y Trace de su calculadora para estimar los valores y de la gráfica cuando $x \to -1$.

c) Determine $\lim_{x \to -1} f(x)$ algebraicamente.

72. Sea $F(x) = (x^2 + 3x + 2)/(2 - |x|)$.

a) Elabore una tabla con los valores de F en valores de x que se aproximan a $c = -2$ por la derecha y por la izquierda. Después, estime $\lim_{x \to -2} F(x)$.

b) Apoye las conclusiones a las que llegó en el inciso *a)* graficando F cerca de $c = -2$ y empleando las funciones Zoom y Trace de su calculadora para estimar los valores y de la gráfica cuando $x \to -2$.

c) Determine $\lim_{x \to -2} F(x)$ algebraicamente.

73. Sea $g(\theta) = (\operatorname{sen} \theta)/\theta$.

a) Elabore una tabla con los valores de g en los valores de θ que se aproximan a $\theta_0 = 0$ por la derecha y por la izquierda. Después, estime $\lim_{\theta \to 0} g(\theta)$.

b) Apoye las conclusiones a las que llegó en el inciso *a)* graficando g cerca de $\theta_0 = 0$.

74. Sea $G(t) = (1 - \cos t)/t^2$.

a) Elabore una tabla con los valores de G en los valores de t que se aproximan a $t_0 = 0$ por la derecha y por la izquierda. Después, estime $\lim_{t \to 0} G(t)$.

b) Apoye las conclusiones a las que llegó en el inciso *a)* graficando G cerca de $t_0 = 0$.

Teoría y ejemplos

75. Si $x^4 \le f(x) \le x^2$ para x en $[-1, 1]$ y $x^2 \le f(x) \le x^4$ para $x < -1$ y $x > 1$, ¿en qué puntos c conocemos automáticamente $\lim_{x \to c} f(x)$? ¿Qué se puede decir sobre el valor del límite en esos puntos?

76. Suponga que $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para toda $x \ne 2$, y suponga que

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} h(x) = -5.$$

¿Puede concluirse algo acerca de los valores de f, g y h en $x = 2$? ¿Es posible que $f(2) = 0$? ¿Es posible que $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$? Justifique sus respuestas.

77. Si $\lim_{x \to 4} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$, determine $\lim_{x \to 4} f(x)$.

78. Si $\lim_{x \to -2} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$, determine

a) $\lim_{x \to -2} f(x)$

b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{f(x)}{x}$

79. ***a)*** Si $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$, determine $\lim_{x \to 2} f(x)$.

b) Si $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 4$, determine $\lim_{x \to 2} f(x)$.

80. Si $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$, determine

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

T **81.** *a*) Grafique $g(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ para estimar $\lim_{x\to 0} g(x)$, acercándose al origen tanto como sea necesario.

b) Confirme con una demostración el resultado del inciso *a*).

T **82.** *a*) Grafique $h(x) = x^2 \cos(1/x^3)$ para estimar $\lim_{x\to 0} h(x)$, acercándose al origen tanto como sea necesario.

b) Confirme con una demostración el resultado del inciso *a*).

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Estimaciones de límites mediante gráficas

En los ejercicios 83 a 88, use un software matemático para realizar los siguientes pasos:

a) Grafique la función en la cercanía del punto punto c al que se aproximará.

b) Deduzca el valor del límite a partir de su gráfica.

83. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

84. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{(x+1)^2}$

85. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$

86. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2+7} - 4}$

87. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \operatorname{sen} x}$

88. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{3 - 3\cos x}$

2.3 Definición formal de límite

Ahora pondremos nuestra atención en la definición precisa de límite. Para ello, reemplazaremos las frases ambiguas como "se acerca arbitrariamente a", que utilizamos en la definición informal, por condiciones específicas que pueden aplicarse a cualquier ejemplo particular. Con una definición formal, podemos eliminar malentendidos, demostrar las propiedades de los límites mencionadas en la sección anterior y establecer muchos límites importantes.

Para probar que el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$ es igual a L, necesitamos demostrar que la brecha entre $f(x)$ y L puede hacerse "tan pequeña como queramos", si x se mantiene "lo suficientemente cerca" de c. Veamos cómo podemos conseguir esto si especificamos el tamaño de la diferencia entre $f(x)$ y L.

EJEMPLO 1 Considere la función $y = 2x - 1$ cerca de $x = 4$. Intuitivamente, parece que y está cerca de 7 cuando x está cerca de 4, así que $\lim_{x\to 4}(2x - 1) = 7$. Sin embargo, ¿qué tan cerca debe estar x de 4 para que $y = 2x - 1$ difiera de 7 en, digamos, menos de 2 unidades?

Solución Podemos preguntarnos: ¿para qué valores de x es $|y - 7| < 2$? Para contestar esta pregunta, primero expresamos $|y - 7|$ en términos de x:

$$|y - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8|.$$

Entonces, la pregunta se convierte en: ¿qué valores de x satisfacen la desigualdad $|2x - 8| < 2$? Para encontrarlos, resolvemos la desigualdad:

$$\begin{aligned} |2x - 8| &< 2 \\ -2 < 2x - 8 &< 2 \\ 6 < 2x &< 10 \\ 3 < x &< 5 \qquad \text{Se resuelve para } x. \\ -1 < x - 4 &< 1. \qquad \text{Se resuelve para } x - 4. \end{aligned}$$

Al mantener a x a menos de una unidad de $x = 4$, mantendremos a y a menos de 2 unidades de $y = 7$ (figura 2.15). ■

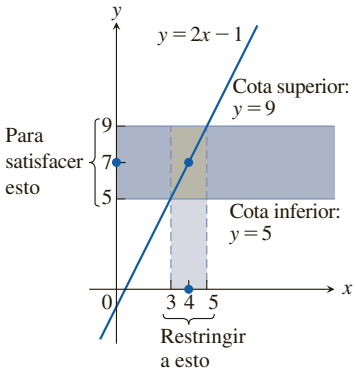


FIGURA 2.15 Al mantener a x a menos de 1 unidad de $x = 4$, mantendremos a y a menos de 2 unidades de $y = 7$ (ejemplo 1).

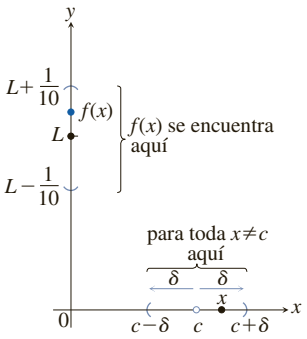


FIGURA 2.16 ¿Cómo debemos definir $\delta > 0$ de manera que, al mantener a x en el intervalo $(c-\delta, c+\delta)$, mantengamos a $f(x)$ en el intervalo $\left(L-\frac{1}{10}, L+\frac{1}{10}\right)$?

En el ejemplo anterior, determinamos qué tan cerca debe estar x de un valor particular c para asegurarnos de que los valores $f(x)$ de alguna función estén dentro de un intervalo prescrito alrededor del valor límite L. Para probar que el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$ es igual a L, debemos ser capaces de demostrar que la diferencia entre $f(x)$ y L puede hacerse menor que *cualquier error prescrito*, sin importar cuán pequeño sea éste, manteniendo a x lo suficientemente cerca de c.

Definición de límite

Suponga que estamos observando los valores de una función $f(x)$ cuando x se aproxima a c (sin tomar el valor de c mismo). Desde luego, nos interesa poder decir que $f(x)$ está a menos de una décima de unidad de L tan pronto como x esté a menos de una distancia δ de c (figura 2.16). Pero esto no es suficiente por sí solo, ya que, a medida que x continúa su camino hacia c, ¿qué impediría que $f(x)$ oscilara caóticamente dentro del intervalo de $L-(1/10)$ a $L+(1/10)$ sin tender hacia L?

Se nos puede decir que el error no debe ser mayor que $1/100$ o $1/1000$ o $1/100{,}000$. Siempre encontraremos un nuevo δ-intervalo alrededor de c, de manera que manteniendo a x dentro de ese intervalo se satisface la nueva tolerancia de error. Pero siempre existe la posibilidad de que $f(x)$ oscile caóticamente alejándose de L en algún momento.

Las figuras de la siguiente página ilustran el problema. Podríamos comparar esta situación con la discusión entre un escéptico y un académico. El escéptico presenta ϵ-retos para demostrar que el límite no existe o, más precisamente, que hay razón para dudar; el académico responde a cada reto estableciendo un δ-intervalo alrededor de c en el cual los valores de la función se mantienen a una distancia menor a ϵ de L.

¿Cómo podemos poner fin a esta serie de retos y respuestas aparentemente interminable? Probando que para todo error de tolerancia ϵ que pueda generar el escéptico, es posible encontrar una distancia δ correspondiente que mantenga a x "lo suficientemente cerca" de c para que $f(x)$ esté dentro del rango de tolerancia ϵ de L (figura 2.17). Esto nos conduce a la definición formal de límite.

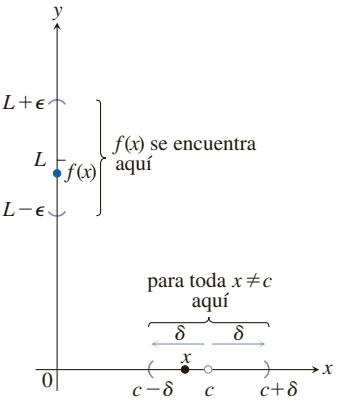


FIGURA 2.17 La relación entre δ y ϵ en la definición de límite.

DEFINICIÓN Sea $f(x)$ definida en un intervalo abierto alrededor de c, excepto posiblemente en c mismo. Decimos que el **límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c es el número L**, y escribimos

$$\lim_{x \to c} f(x) = L,$$

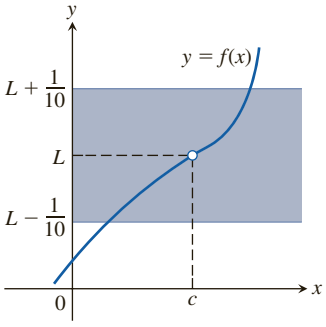
Si, para todo número $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ correspondiente, tal que, para toda x,

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

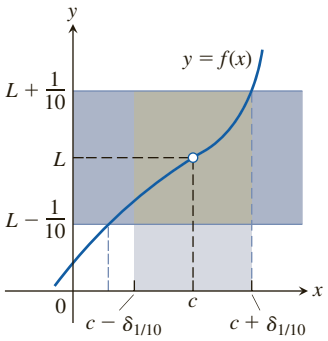
Una manera de interpretar esta definición es suponer, por ejemplo, que estamos fabricando el eje de diámetro L de un generador, con una tolerancia muy pequeña en las especificaciones. Intentaríamos obtener el diámetro L, pero como nada es perfecto, debemos darnos por satisfechos con un diámetro $f(x)$, cuya medida se encuentra entre $L-\epsilon$ y $L+\epsilon$. La δ es la medida de qué tan preciso debe ser nuestro control sobre x para garantizar el nivel de precisión requerido en el diámetro del eje. Observe que, a medida que la tolerancia de error se vuelve más estricta, tal vez tengamos que ajustar δ. Esto es, el valor de δ, que determina qué tan estricto debe ser nuestro control, depende del valor de ϵ, que es la tolerancia de error.

Ejemplos: Ensayo de la definición

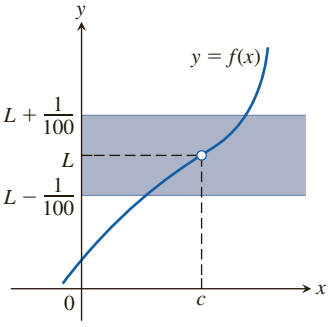
La definición formal de límite no nos dice cómo encontrar el límite de una función, pero nos permite verificar si el valor que se conjetura de un límite es correcto. Los siguientes ejemplos muestran cómo puede usarse la definición para verificar enunciados de límites para funciones específicas. Sin embargo, el verdadero propósito de la definición no es realizar cálculos como éstos, sino comprobar teoremas generales, de manera que los cálculos de límites específicos puedan simplificarse, como los teoremas enunciados en la sección anterior.



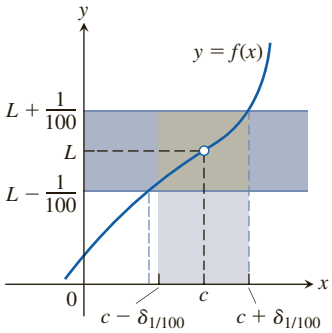
El reto:
Hacer: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{10}$



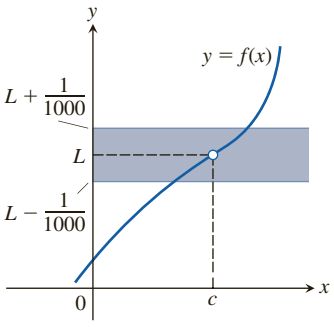
Respuesta:
$|x - c| < \delta_{1/10}$ (es un número)



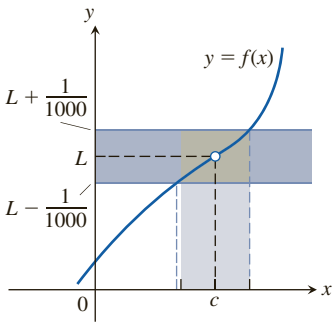
Nuevo reto:
Hacer: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{100}$



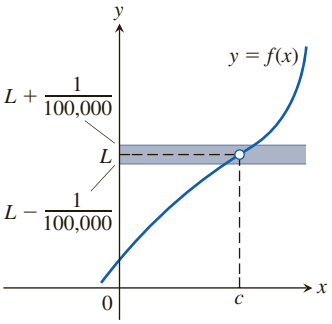
Respuesta:
$|x - c| < \delta_{1/100}$



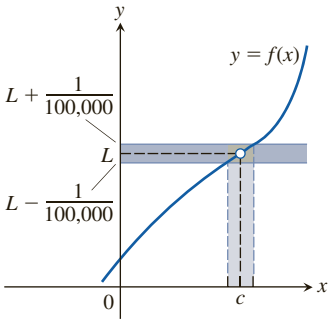
Nuevo reto:
$\epsilon = \frac{1}{1000}$



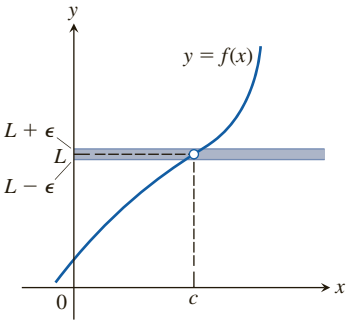
Respuesta:
$|x - c| < \delta_{1/1000}$



Nuevo reto:
$\epsilon = \frac{1}{100,000}$



Respuesta:
$|x - c| < \delta_{1/100,000}$



Nuevo reto:
$\epsilon = \cdots$

EJEMPLO 2 Demuestre que

$$\lim_{x \to 1} (5x - 3) = 2.$$

Solución Pongamos $c = 1$, $f(x) = 5x - 3$, y $L = 2$ en la definición de límite. Para cualquier $\epsilon > 0$ dada, debemos encontrar una $\delta > 0$ conveniente, de manera que si $x \neq 1$ y x está a una distancia menor que δ de $c = 1$, es decir, siempre que

$$0 < |x - 1| < \delta,$$

será cierto que $f(x)$ está a una distancia menor que ϵ de $L = 2$, de modo que

$$|f(x) - 2| < \epsilon.$$

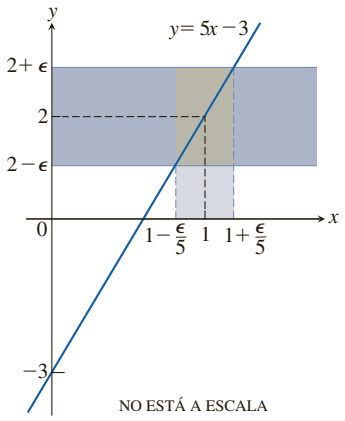


FIGURA 2.18 Si $f(x) = 5x - 3$, entonces, $0 < |x - 1| < \epsilon/5$ garantiza que $|f(x) - 2| < \epsilon$ (ejemplo 2).

Para determinar δ, trabajamos hacia atrás a partir de la ϵ-desigualdad:

$$\begin{aligned} |(5x - 3) - 2| &= |5x - 5| < \epsilon \\ 5|x - 1| &< \epsilon \\ |x - 1| &< \epsilon/5. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos tomar $\delta = \epsilon/5$ (figura 2.18). Si $0 < |x - 1| < \delta = \epsilon/5$ entonces,

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| = 5\,|x - 1| < 5(\epsilon/5) = \epsilon,$$

lo que demuestra que $\lim_{x \to 1} (5x - 3) = 2$.

El valor $\delta = \epsilon/5$ no es el único que hará que $0 < |x - 1| < \delta$ implique $|5x - 5| < \epsilon$. Cualquier δ positiva menor también lo hará. La definición no exige encontrar la "mejor" δ positiva, sólo una que funcione. ■

EJEMPLO 3 Demuestre los siguientes resultados presentados gráficamente en la sección 2.2.

a) $\lim_{x \to c} x = c$

b) $\lim_{x \to c} k = k$ (k constante)

Solución

a) Sea $\epsilon > 0$. Debemos encontrar $\delta > 0$ tal que, para toda x,

$$0 < |x - c| < \delta \quad \text{implique} \quad |x - c| < \epsilon.$$

La implicación será válida si δ es igual a ϵ o a cualquier número positivo menor (figura 2.19). Esto demuestra que $\lim_{x \to c} x = c$.

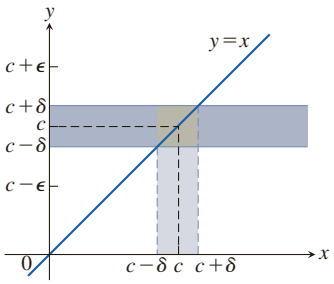


FIGURA 2.19 Para la función $f(x) = x$, encontramos que $0 < |x - c| < \delta$ garantizará que $|f(x) - c| < \epsilon$ siempre que $\delta \leq \epsilon$ (ejemplo 3*a*).

b) Sea $\epsilon > 0$. Debemos encontrar $\delta > 0$ tal que, para toda x,

$$0 < |x - c| < \delta \quad \text{implique} \quad |k - k| < \epsilon.$$

Como $k - k = 0$, podemos utilizar cualquier número positivo para δ, y la implicación será válida (figura 2.20). Esto demuestra que $\lim_{x \to c} k = k$. ■

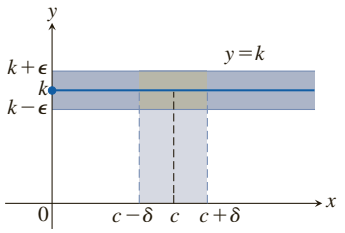


FIGURA 2.20 Para la función $f(x) = k$, encontramos que $|f(x) - k| < \epsilon$ para cualquier δ positiva (ejemplo 3*b*).

Determinación algebraica de deltas para una épsilon dada

En los ejemplos 2 y 3 el intervalo de valores alrededor de c, para los cuales $|f(x) - L|$ era menor que ϵ, era simétrico con respecto a c, lo que nos permitió elegir δ como la mitad de la longitud de ese intervalo. Cuando no existe tal simetría, lo cual es bastante común, podemos tomar δ como la distancia entre c y el extremo del intervalo que sea *más cercano* a c.

EJEMPLO 4 Para el límite $\lim_{x \to 5} \sqrt{x - 1} = 2$, obtenga una $\delta > 0$ que funcione para $\epsilon = 1$. Esto es, encuentre una $\delta > 0$ tal que, para toda x,

$$0 < |x - 5| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x - 1} - 2| < 1.$$

Solución Organizaremos la búsqueda en dos pasos.

1. *Resuelva la desigualdad* $|\sqrt{x - 1} - 2| < 1$ *para encontrar un intervalo que contenga a* $x = 5$ *donde la desigualdad se satisfaga para toda* $x \neq 5$.

$$\begin{aligned} |\sqrt{x - 1} - 2| &< 1 \\ -1 < \sqrt{x - 1} - 2 &< 1 \\ 1 < \sqrt{x - 1} &< 3 \\ 1 < x - 1 &< 9 \\ 2 < x &< 10 \end{aligned}$$

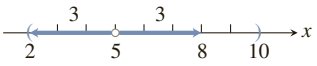


FIGURA 2.21 Un intervalo abierto de radio 3 centrado en $x = 5$ estará contenido en el intervalo abierto (2, 10).

La desigualdad se satisface para toda x en el intervalo abierto (2, 10), de manera que también se satisface para toda $x \neq 5$ en ese intervalo.

2. *Encuentre un valor de* $\delta > 0$ *para colocar el intervalo centrado* $5 - \delta < x < 5 + \delta$ (con centro en $x = 5$) *dentro del intervalo* (2, 10). La distancia entre 5 y el extremo más cercano de (2, 10) es 3 (figura 2.21). Si tomamos a $\delta = 3$ o a cualquier número positivo menor, la desigualdad $0 < |x - 5| < \delta$ colocará automáticamente a x entre 2 y 10 para hacer que $|\sqrt{x - 1} - 2| < 1$ (figura 2.22):

$$0 < |x - 5| < 3 \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x - 1} - 2| < 1.$$

■

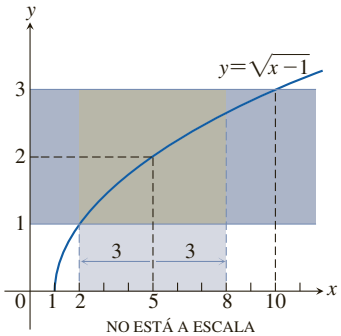


FIGURA 2.22 La función y los intervalos del ejemplo 4.

Cómo obtener δ algebraicamente para f, L, c y $\epsilon > 0$

El proceso para encontrar una $\delta > 0$ tal que, para toda x,

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

puede realizarse en dos pasos.

1. *Resuelva la desigualdad* $|f(x) - L| < \epsilon$ para encontrar un intervalo abierto (a, b) que contenga a c en el que la desigualdad se satisfaga para toda $x \neq c$.

2. *Encuentre un valor de* $\delta > 0$ que coloque el intervalo abierto $(c - \delta, c + \delta)$ centrado en c dentro del intervalo (a, b). La desigualdad $|f(x) - L| < \epsilon$ se cumplirá para toda $x \neq c$ en este intervalo δ.

EJEMPLO 5 Demuestre que $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ si

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2. \end{cases}$$

Solución Nuestra tarea consiste en demostrar que dada $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que, para toda x,

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 4| < \epsilon.$$

1. *Resuelva la desigualdad* $|f(x) - 4| < \epsilon$ *para encontrar un intervalo abierto que contenga a* $x = 2$ *en el que la desigualdad se satisfaga para toda* $x \neq 2$.

Para $x \neq c = 2$, tenemos que $f(x) = x^2$, y la desigualdad a resolver es $|x^2 - 4| < \epsilon$:

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| &< \epsilon \\ -\epsilon < x^2 - 4 &< \epsilon \\ 4 - \epsilon < x^2 &< 4 + \epsilon \\ \sqrt{4 - \epsilon} < |x| &< \sqrt{4 + \epsilon} \\ \sqrt{4 - \epsilon} < x &< \sqrt{4 + \epsilon}. \end{aligned}$$

Suponga que $\epsilon < 4$; vea abajo.

Un intervalo abierto alrededor de $x = 2$ que resuelve la desigualdad.

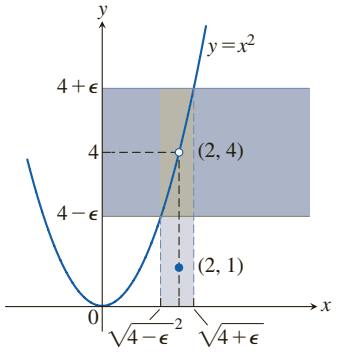


FIGURA 2.23 Un intervalo que contiene a $x = 2$, de manera que la función del ejemplo 5 satisface $|f(x) - 4| < \epsilon$.

La desigualdad $|f(x) - 4| < \epsilon$ se satisface para toda $x \neq 2$ en el intervalo abierto $(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon})$ (figura 2.23).

2. *Encuentre un valor de* $\delta > 0$ *que coloque el intervalo centrado* $(2 - \delta, 2 + \delta)$ *dentro del intervalo* $(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon})$.

Tomamos δ como la distancia de $x = 2$ al extremo más cercano de $(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon})$. En otras palabras, tomamos $\delta = \text{mín}\{2 - \sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon} - 2\}$, es decir, el

mínimo (el más pequeño de los dos números) $2 - \sqrt{4 - \epsilon}$ y $\sqrt{4 + \epsilon} - 2$. Si δ tiene éste o cualquier valor menor positivo, la desigualdad $0 < |x - 2| < \delta$ colocará automáticamente a x entre $\sqrt{4 - \epsilon}$ y $\sqrt{4 + \epsilon}$ para hacer que $|f(x) - 4| < \epsilon$. Para toda x,

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 4| < \epsilon.$$

Esto completa la prueba para $\epsilon < 4$.

Si $\epsilon \geq 4$, entonces, tomamos a δ como la distancia de $x = 2$ al extremo más próximo del intervalo $(0, \sqrt{4 + \epsilon})$. En otras palabras, se toma $\delta = \text{mín}\left\{2, \sqrt{4 + \epsilon} - 2\right\}$. (Vea la figura 2.23). ■

Uso de la definición para demostrar teoremas

Casi nunca se emplea la definición formal de límite para verificar límites específicos como los que se presentaron en los ejemplos anteriores. Para ello, resultan más útiles los teoremas generales sobre límites, en particular los teoremas de la sección 2.2. La definición se utiliza, más bien, para demostrar dichos teoremas (apéndice 5). Por ejemplo, demostraremos la parte 1 del teorema 1, es decir, la regla de la suma.

EJEMPLO 6 Dado que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c} g(x) = M$, demuestre que

$$\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M.$$

Solución Sea $\epsilon > 0$. Queremos encontrar un número positivo δ tal que, para toda x,

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \epsilon.$$

Al reagrupar términos, obtenemos

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M|. \end{aligned}$$

Desigualdad del triángulo: $|a + b| \leq |a| + |b|$

Como $\lim_{x \to c} f(x) = L$, existe un número $\delta_1 > 0$ tal que, para toda x,

$$0 < |x - c| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon/2.$$

De manera similar, como $\lim_{x \to c} g(x) = M$, existe un número $\delta_2 > 0$ tal que, para toda x,

$$0 < |x - c| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - M| < \epsilon/2.$$

Sea $\delta = \text{mín}\ \{\delta_1, \delta_2\}$, el menor de δ_1 y δ_2. Si $0 < |x - c| < \delta$, entonces, $|x - c| < \delta_1$, de manera que $|f(x) - L| < \epsilon/2$, y $|x - c| < \delta_2$, de manera que $|g(x) - M| < \epsilon/2$. Por lo tanto,

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Esto demuestra que $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$. ■

Ahora demostraremos el teorema 5 de la sección 2.2.

EJEMPLO 7 Dado que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c} g(x) = M$, y que $f(x) \leq g(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contiene a c (excepto posiblemente la misma c), demuestre que $L \leq M$.

Solución Usaremos el método de demostración por contradicción. En otras palabras, supondremos lo contrario de lo que se afirma, es decir, que $L > M$. Entonces, de acuerdo con la propiedad del límite de una diferencia del teorema 1,

$$\lim_{x \to c} (g(x) - f(x)) = M - L.$$

En consecuencia, para cualquier $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que

$$|(g(x) - f(x)) - (M - L)| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Como, por hipótesis, $L - M > 0$, tomamos $\epsilon = L - M$ en particular, y tenemos un número $\delta > 0$ tal que

$$|(g(x) - f(x)) - (M - L)| < L - M \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Como $a \leq |a|$ para cualquier número a, tenemos que

$$(g(x) - f(x)) - (M - L) < L - M \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta,$$

lo cual se simplifica en

$$g(x) < f(x) \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Pero esto contradice que $f(x) \leq g(x)$. Por lo tanto, la desigualdad $L > M$ debe ser falsa. En consecuencia, $L \leq M$. ■

Ejercicios 2.3

Centrar intervalos en torno a un punto

En los ejercicios 1 a 6, trace el intervalo (a, b) en el eje x, con el punto c en su interior. Luego, encuentre un valor de $\delta > 0$ tal que, para toda x, $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow a < x < b$.

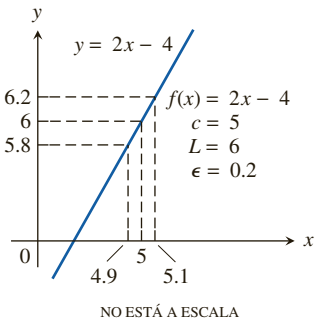
1. $a = 1, \quad b = 7, \quad c = 5$
2. $a = 1, \quad b = 7, \quad c = 2$
3. $a = -7/2, \quad b = -1/2, \quad c = -3$
4. $a = -7/2, \quad b = -1/2, \quad c = -3/2$
5. $a = 4/9, \quad b = 4/7, \quad c = 1/2$
6. $a = 2.7591, \quad b = 3.2391, \quad c = 3$

Determinación gráfica de deltas

En los ejercicios 7 a 14, use las gráficas para encontrar una $\delta > 0$ tal que, para toda x,

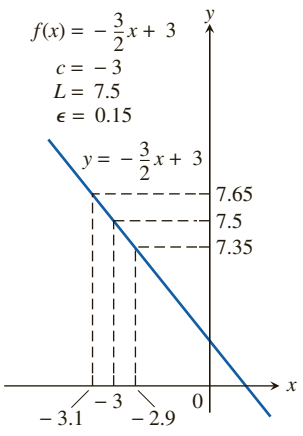
$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

7.



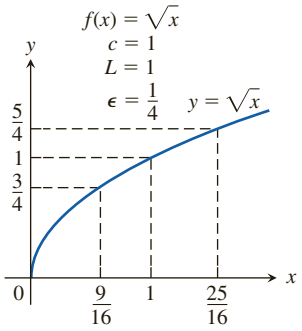
NO ESTÁ A ESCALA

8.

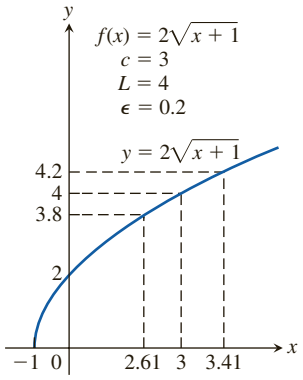


NO ESTÁ A ESCALA

9.

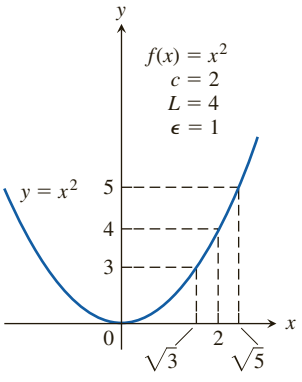


10.



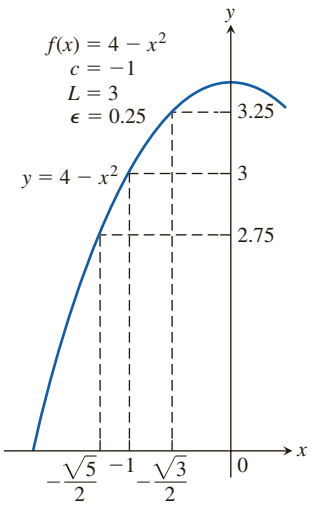
NO ESTÁ A ESCALA

11.



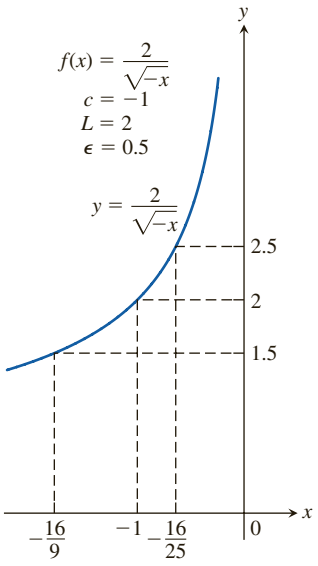
NO ESTÁ A ESCALA

12.

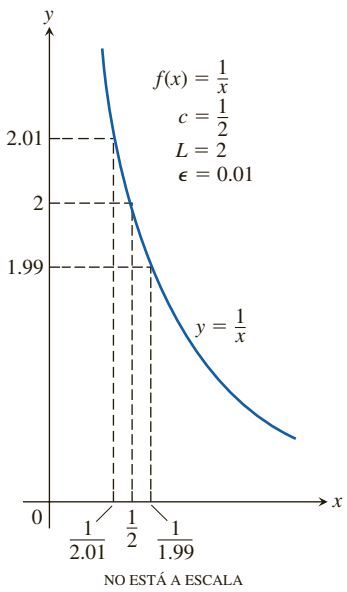


NO ESTÁ A ESCALA

13.



14.



NO ESTÁ A ESCALA

Determinación algebraica de deltas

En cada uno de los ejercicios 15 a 30 se presenta una función $f(x)$ y los números L, c y $\epsilon > 0$. En cada caso, encuentre un intervalo abierto alrededor de c donde se cumpla la desigualdad $|f(x) - L| < \epsilon$. Después, dé un valor para $\delta > 0$ tal que, para toda x que satisfaga $0 < |x - c| < \delta$, se cumpla la desigualdad $|f(x) - L| < \epsilon$.

15. $f(x) = x + 1, \quad L = 5, \quad c = 4, \quad \epsilon = 0.01$

16. $f(x) = 2x - 2, \quad L = -6, \quad c = -2, \quad \epsilon = 0.02$

17. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad L = 1, \quad c = 0, \quad \epsilon = 0.1$

18. $f(x) = \sqrt{x}, \quad L = 1/2, \quad c = 1/4, \quad \epsilon = 0.1$

19. $f(x) = \sqrt{19 - x}, \quad L = 3, \quad c = 10, \quad \epsilon = 1$

20. $f(x) = \sqrt{x - 7}, \quad L = 4, \quad c = 23, \quad \epsilon = 1$

21. $f(x) = 1/x, \quad L = 1/4, \quad c = 4, \quad \epsilon = 0.05$

22. $f(x) = x^2, \quad L = 3, \quad c = \sqrt{3}, \quad \epsilon = 0.1$

23. $f(x) = x^2, \quad L = 4, \quad c = -2, \quad \epsilon = 0.5$

24. $f(x) = 1/x, \quad L = -1, \quad c = -1, \quad \epsilon = 0.1$

25. $f(x) = x^2 - 5, \quad L = 11, \quad c = 4, \quad \epsilon = 1$

26. $f(x) = 120/x, \quad L = 5, \quad c = 24, \quad \epsilon = 1$

27. $f(x) = mx, \quad m > 0, \quad L = 2m, \quad c = 2, \quad \epsilon = 0.03$

28. $f(x) = mx, \quad m > 0, \quad L = 3m, \quad c = 3, \quad \epsilon = c > 0$

29. $f(x) = mx + b, \quad m > 0, \quad L = (m/2) + b, \quad c = 1/2, \quad \epsilon = c > 0$

30. $f(x) = mx + b, \quad m > 0, \quad L = m + b, \quad c = 1, \quad \epsilon = 0.05$

Uso de la definición formal

En cada uno de los ejercicios 31 a 36 se presenta una función $f(x)$, un punto c y un número ϵ positivo. Encuentre $L = \lim_{x \to c} f(x)$. Después, encuentre un número $\delta > 0$ tal que, para toda x,

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

31. $f(x) = 3 - 2x, \quad c = 3, \quad \epsilon = 0.02$

32. $f(x) = -3x - 2, \quad c = -1, \quad \epsilon = 0.03$

33. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \quad c = 2, \quad \epsilon = 0.05$

34. $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x + 5}, \quad c = -5, \quad \epsilon = 0.05$

35. $f(x) = \sqrt{1 - 5x}, \quad c = -3, \quad \epsilon = 0.5$

36. $f(x) = 4/x, \quad c = 2, \quad \epsilon = 0.4$

Demuestre los límites de los ejercicios 37 a 50.

37. $\lim_{x \to 4} (9 - x) = 5$

38. $\lim_{x \to 3} (3x - 7) = 2$

39. $\lim_{x \to 9} \sqrt{x - 5} = 2$

40. $\lim_{x \to 0} \sqrt{4 - x} = 2$

41. $\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \quad \text{si} \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

42. $\lim_{x \to -2} f(x) = 4 \quad \text{si} \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq -2 \\ 1, & x = -2 \end{cases}$

43. $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{x} = 1$

44. $\lim_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{3}$

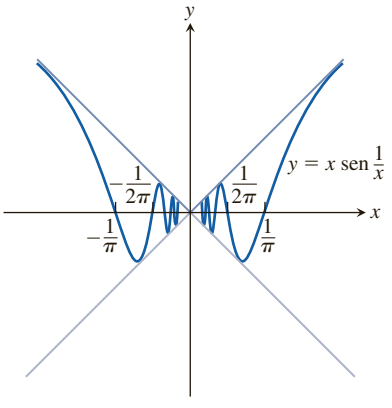
45. $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} = -6$

46. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

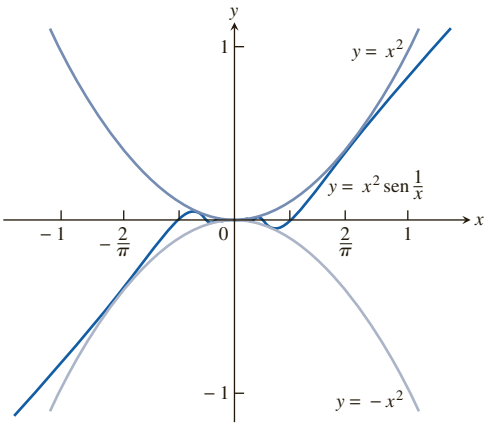
47. $\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \quad \text{si} \quad f(x) = \begin{cases} 4 - 2x, & x < 1 \\ 6x - 4, & x \geq 1 \end{cases}$

48. $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \quad \text{si} \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ x/2, & x \geq 0 \end{cases}$

49. $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$



50. $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$



Teoría y ejemplos

51. Explique qué significa afirmar que $\lim_{x\to 0} g(x) = k$.

52. Demuestre que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{h\to 0} f(h + c) = L$.

53. Una afirmación errónea acerca de límites Demuestre con un ejemplo que el siguiente enunciado es erróneo:

> El número L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c si $f(x)$ se acerca más a L a medida que x se aproxima a c.

Explique por qué la función de su ejemplo no tiene el valor L dado como un límite cuando $x \to c$.

54. Otra afirmación incorrecta acerca de límites Demuestre con un ejemplo que la siguiente afirmación es incorrecta:

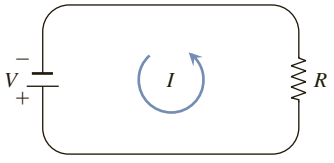
> El número L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c si, dada cualquier $\epsilon > 0$, existe un valor de x para el que $|f(x) - L| < \epsilon$.

Explique por qué la función de su ejemplo no tiene el valor L dado, como límite cuando $x \to c$.

T

55. Rectificación de cilindros de un motor Antes de solicitar la rectificación de cilindros para motor de automóviles con un área transversal de 9 pulg^2, usted necesita saber qué tanta desviación, respecto del diámetro ideal del cilindro de $c = 3.385$ in, puede permitir para obtener un área con un error menor que 0.01 pulg^2 a partir de las 9 pulg^2 requeridas. Para averiguarlo, considere $A = \pi(x/2)^2$ y busque un intervalo en el cual estén los valores de x que hagan que $|A - 9| \le 0.01$. ¿Qué intervalo encontró?

56. Fabricación de resistencias eléctricas La ley de Ohm para circuitos eléctricos como el que se ilustra en la figura, establece que $V = RI$. En esta ecuación, V es un voltaje constante (expresado en volts), I es la corriente (en amperes) y R es la resistencia (en ohms). A la empresa donde usted trabaja le han pedido que suministre las resistencias para un circuito donde V será de 120 volts e I será de 5 ± 0.1 amperes. ¿En qué intervalo debe encontrarse R para que I esté a menos de 0.1 amperes del valor $I_0 = 5$?



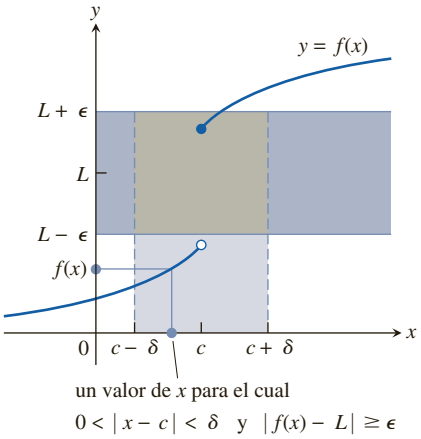
¿Cuando un número L no es el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$?

Demostración de que L no es un límite Podemos demostrar que $\lim_{x\to c} f(x) \neq L$ proporcionando una $\epsilon > 0$ tal que ninguna $\delta > 0$ satisfaga la condición:

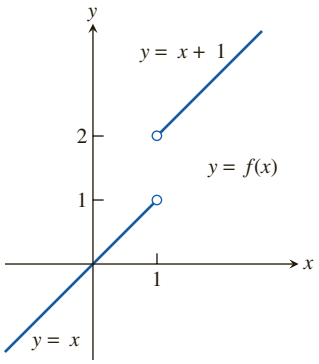
$$\text{para toda } x,\ 0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Ejecutamos esto para nuestra ϵ candidata demostrando que, para cada $\delta > 0$, existe un valor de x tal que

$$0 < |x - c| < \delta \qquad \text{y} \qquad |f(x) - L| \ge \epsilon.$$



57. Sea $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x + 1, & x > 1. \end{cases}$



a) Sea $\epsilon = 1/2$. Demuestre que ninguna $\delta > 0$ posible satisface la siguiente condición:

$$\text{Para toda } x,\ 0 < |x - 1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 2| < 1/2.$$

Esto es, para cada $\delta > 0$, pruebe que existe un valor de x tal que

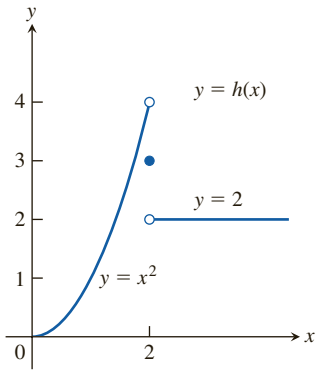
$$0 < |x - 1| < \delta \qquad \text{y} \qquad |f(x) - 2| \ge 1/2.$$

Esto demostrará que $\lim_{x\to 1} f(x) \neq 2$.

b) Demuestre que $\lim_{x\to 1} f(x) \neq 1$.

c) Compruebe que $\lim_{x\to 1} f(x) \neq 1.5$.

58. Sea $h(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ 2, & x > 2. \end{cases}$



Demuestre que

a) $\lim_{x \to 2} h(x) \neq 4$

b) $\lim_{x \to 2} h(x) \neq 3$

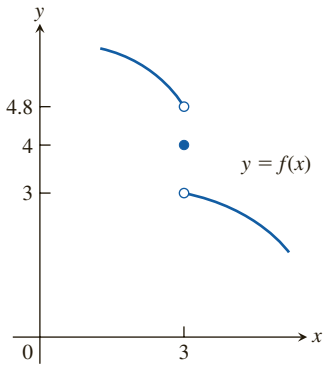
c) $\lim_{x \to 2} h(x) \neq 2$

59. Para la función cuya gráfica se muestra a continuación, explique por qué

a) $\lim_{x \to 3} f(x) \neq 4$

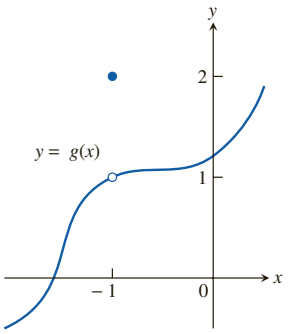
b) $\lim_{x \to 3} f(x) \neq 4.8$

c) $\lim_{x \to 3} f(x) \neq 3$



60. ***a)*** Para la función cuya gráfica se muestra a continuación, demuestre que $\lim_{x \to -1} g(x) \neq 2$.

b) ¿Existirá $\lim_{x \to -1} g(x)$? Si es así, ¿cuál es el valor del límite? Si no existe, explique por qué.



EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 61 a 66, usted explorará con más detalle cómo encontrar gráficamente deltas. Use un software matemático para realizar los siguientes pasos:

a) Grafique la función $y = f(x)$ cerca del punto c que será aproximado.

b) Estime cuál es el valor del límite L y, luego, calcule el límite para ver si su estimación es correcta.

c) Use el valor $\epsilon = 0.2$, para trazar, en una misma gráfica, las rectas que limitan la banda de $y_1 = L - \epsilon$ a $y_2 = L + \epsilon$, junto con la función f cerca de c.

d) A partir de la gráfica obtenida en el inciso *c*), estime una $\delta > 0$ tal que, para toda x,

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Compruebe su estimación graficando f, y_1 y y_2 en el intervalo $0 < |x - c| < \delta$. Use $c - 2\delta \leq x \leq c + 2\delta$ y $L - 2\epsilon \leq y \leq L + 2\epsilon$, para establecer el tamaño de su pantalla de visualización. Si algún valor de la función está fuera del intervalo $[L - \epsilon, L + \epsilon]$, significa que eligió una δ demasiado grande. Inténtelo nuevamente con una estimación menor.

e) Repita sucesivamente los pasos indicados en los incisos *c*) y *d*) para $\epsilon = 0.1$, 0.05 y 0.001.

61. $f(x) = \dfrac{x^4 - 81}{x - 3}, \quad c = 3$ **62.** $f(x) = \dfrac{5x^3 + 9x^2}{2x^5 + 3x^2}, \quad c = 0$

63. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{3x}, \quad c = 0$ **64.** $f(x) = \dfrac{x(1 - \cos x)}{x - \operatorname{sen} x}, \quad c = 0$

65. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}, \quad c = 1$

66. $f(x) = \dfrac{3x^2 - (7x + 1)\sqrt{x} + 5}{x - 1}, \quad c = 1$

2.4 Límites laterales

En esta sección extendemos el concepto de límite a *límites laterales*, que son límites cuando x se aproxima a c solamente por el lado izquierdo (cuando $x < c$) o sólo por el lado derecho (cuando $x > c$).

Aproximación lateral a un valor límite

Para que una función tenga un límite L cuando x se aproxima a c, debe estar definida en *ambos lados* de c, y los valores de $f(x)$ deben aproximarse a L a medida que x se aproxima a c por cualquiera de los dos lados. Es decir, f debe estar definida en un intervalo abierto en torno a c, pero no necesariamente en c. Debido a esto, los límites usuales se llaman **bilaterales**.

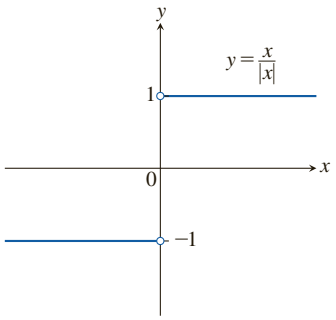


FIGURA 2.24 Límites laterales derecho e izquierdo, distintos en el origen.

Aun cuando f no tenga un límite bilateral en c, podría tener algún límite lateral, esto es, un límite si la aproximación es sólo por un lado. Si la aproximación es por la derecha, se trata de un **límite lateral derecho**; si es por la izquierda, estamos ante un **límite lateral izquierdo**.

La función $f(x) = x/|x|$ (figura 2.24) tiene límite 1 cuando x se aproxima a 0 por la derecha, y límite -1 cuando x se aproxima a 0 por la izquierda. Como estos valores de límites laterales son distintos, no hay un único número al que $f(x)$ se aproxime cuando x se aproxima a 0. De esta manera, $f(x)$ no tiene un límite (bilateral) en 0.

Intuitivamente, si $f(x)$ está definida en un intervalo (c, b), donde $c < b$, y se aproxima arbitrariamente a L cuando x se aproxima a c dentro de ese intervalo, entonces, f tiene **límite lateral derecho** L en c. Se escribe

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L.$$

El símbolo "$x \to c^+$" significa que consideramos sólo los valores de x mayores que c.

De forma similar, si $f(x)$ está definida en un intervalo (a, c), donde $a < c$ y se aproxima arbitrariamente a M cuando x se aproxima a c dentro de ese intervalo, entonces, f tiene **límite lateral izquierdo** M en c. Se escribe

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = M.$$

El símbolo "$x \to c^-$" significa que consideramos solamente los valores de x menores que c.

Estas definiciones informales de límites laterales se ilustran en la figura 2.25. Para la función $f(x) = x/|x|$ de la figura 2.24, tenemos

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1.$$

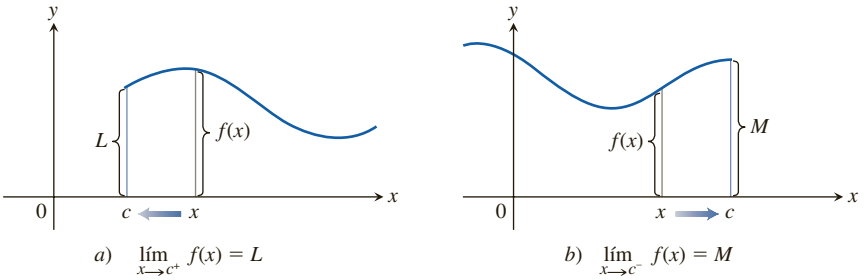


FIGURA 2.25 *a*) Límite lateral derecho cuando x se aproxima a c. *b*) Límite lateral izquierdo cuando x se aproxima a c.

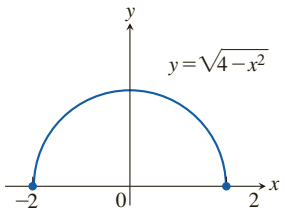


FIGURA 2.26 La función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ tiene límite lateral derecho 0 en $x = -2$ y límite lateral izquierdo 0 en $x = 2$ (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 El dominio de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es $[-2, 2]$; su gráfica es la semicircunferencia de la figura 2.26. De esta forma, tenemos

$$\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0.$$

La función no tiene límite lateral izquierdo en $x = -2$, ni límite lateral derecho en $x = 2$. Tampoco tiene límites bilaterales en -2 ni en 2 porque los puntos no pertenecen a un intervalo abierto en el que esté definida f. ■

Los límites laterales tienen todas las propiedades listadas en el teorema 1 de la sección 2.2. El límite lateral derecho de la suma de dos funciones es la suma de sus límites laterales derechos, y así sucesivamente. Los teoremas de límites de funciones polinomiales y racionales son aplicables a los límites laterales, al igual que el teorema del sándwich y el teorema 5. Los límites laterales se relacionan con los límites de la siguiente manera.

TEOREMA 6: Una función $f(x)$ tiene un límite cuando x se aproxima a c si y sólo si existen los límites laterales izquierdo y derecho, y además estos límites laterales son iguales:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = L.$$

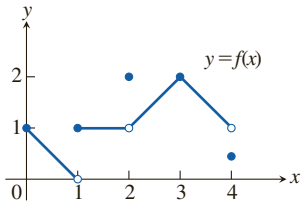


FIGURA 2.27 Gráfica de la función del ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Para la función cuya gráfica aparece en la figura 2.27:

En $x = 0$: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$,
$\lim_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe. La función no está definida a la izquierda de $x = 0$.

En $x = 1$: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ aun cuando $f(1) = 1$,
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$,
$\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe. Los límites laterales derecho e izquierdo no son iguales.

En $x = 2$: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$,
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$,
$\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ aun cuando $f(2) = 2$.

En $x = 3$: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 2$.

En $x = 4$: $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$ aun cuando $f(4) \neq 1$,
$\lim_{x\to 4^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 4} f(x)$ no existe. La función no está definida a la derecha de $x = 4$.

En cualquier otro punto c en $[0, 4]$, $f(x)$ tiene el límite $f(c)$. ■

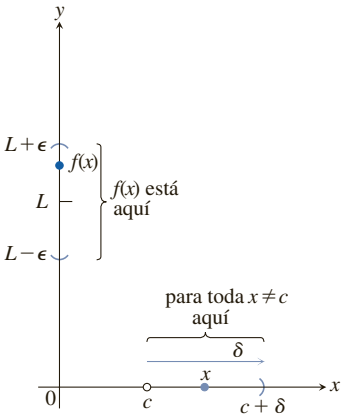


FIGURA 2.28 Intervalos asociados con la definición de límite lateral derecho.

Definiciones formales de límites laterales

La definición formal de límite en la sección 2.3 puede modificarse fácilmente para los límites laterales.

DEFINICIONES Decimos que $f(x)$ tiene **límite lateral derecho L en c**, y escribimos

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L \qquad \text{(vea figura 2.28)}$$

si para todo número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ correspondiente tal que, para toda x,

$$c < x < c + \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Decimos que $f(x)$ tiene **límite lateral izquierdo L en c**, y escribimos

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L \qquad \text{(vea figura 2.29)}$$

si para todo número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ correspondiente tal que, para toda x,

$$c - \delta < x < c \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

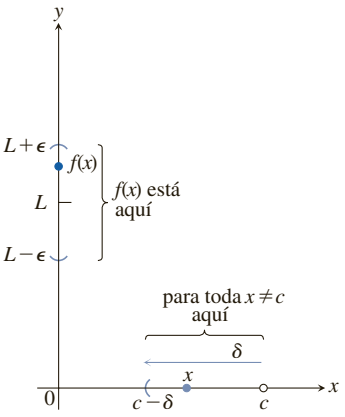


FIGURA 2.29 Intervalos asociados con la definición de límite lateral izquierdo.

EJEMPLO 3 Demuestre que

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

Solución Sea $\epsilon > 0$. Aquí, $c = 0$ y $L = 0$, de manera que debemos obtener una $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < x < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x} - 0| < \epsilon,$$

o

$$0 < x < \delta \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} < \epsilon.$$

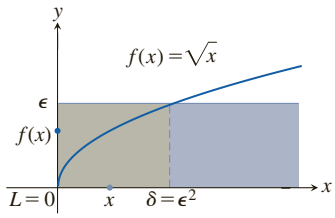


FIGURA 2.30 $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$ del ejemplo 3.

Elevando al cuadrado ambos lados de la última desigualdad, tenemos

$$x < \epsilon^2 \qquad \text{si} \qquad 0 < x < \delta.$$

Si elegimos $\delta = \epsilon^2$, tenemos

$$0 < x < \delta = \epsilon^2 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{x} < \epsilon,$$

o

$$0 < x < \epsilon^2 \qquad \Rightarrow \qquad |\sqrt{x} - 0| < \epsilon.$$

De acuerdo con la definición, esto demuestra que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$ (figura 2.30). ■

Las funciones que hemos examinado hasta ahora han tenido algún tipo de límite en cada punto de interés. Sin embargo, no necesariamente ocurre así.

EJEMPLO 4 Demuestre que $y = \text{sen}(1/x)$ no tiene límite cuando x se aproxima a cero por cualquier lado (figura 2.31).

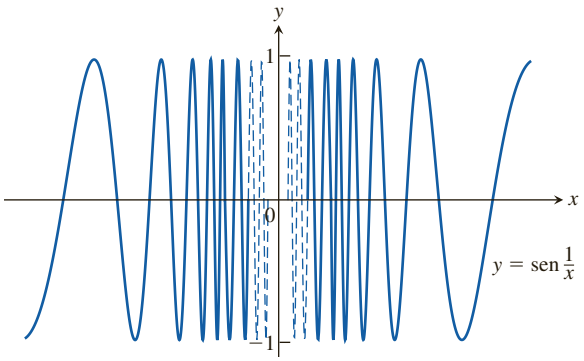
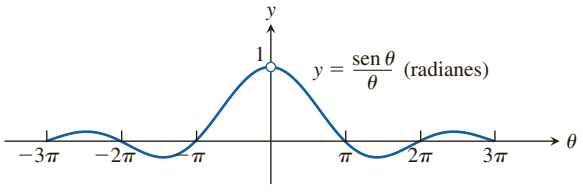


FIGURA 2.31 La función $y = \text{sen}(1/x)$ no tiene límite lateral derecho ni límite lateral izquierdo cuando x se aproxima a cero (ejemplo 4). La gráfica presentada omite valores muy cerca del eje y.

Solución Cuando x se aproxima a cero, su recíproco, $1/x$, aumenta sin cota y los valores de $\text{sen}(1/x)$ se repiten periódicamente entre -1 y 1. No hay un solo número L al que los valores de la función se acerquen cada vez más cuando x se aproxima a cero. Esto es cierto aun si restringimos x a valores sólo positivos o a valores sólo negativos. La función no tiene límites laterales izquierdo o derecho en $x = 0$. ■

Límites que usan $(\text{sen}\,\theta)/\theta$

Un hecho importante acerca de $(\text{sen}\,\theta)/\theta$ es que, cuando se mide en radianes, su límite cuando $\theta \to 0$ es 1. Podemos ver esto en la figura 2.32, y confirmarlo algebraicamente con el teorema del sándwich. En la sección 3.5 veremos la importancia de este límite, cuando estudiemos las razones instantáneas de cambio de las funciones trigonométricas.



NO ESTÁ A ESCALA

FIGURA 2.32 La gráfica de $f(\theta) = (\text{sen}\,\theta)/\theta$ sugiere que los límites laterales derecho e izquierdo cuando θ se aproxima a 0 son iguales a 1.

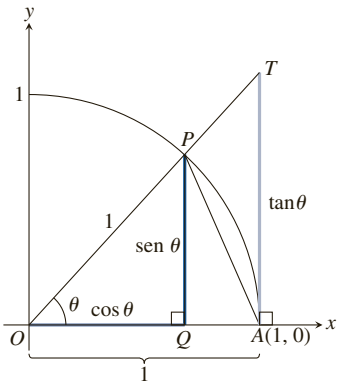


FIGURA 2.33 Figura para la demostración del teorema 7. Por definición, $TA/OA = \tan\theta$, pero $OA = 1$, de modo que $TA = \tan\theta$.

TEOREMA 7: Límite de la razón sen θ/θ cuando $\theta \to 0$

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 \qquad (\theta \text{ en radianes}) \tag{1}$$

Demostración El plan es demostrar que los límites laterales, derecho e izquierdo, son iguales a 1. Entonces, sabremos que el límite bilateral también es igual a 1.

Para demostrar que el límite lateral derecho es 1, comenzamos con valores positivos de θ menores que $\pi/2$ (figura 2.33). Observe que

$$\text{Área } \Delta OAP < \text{área del sector } OAP < \text{área } \Delta OAT.$$

Podemos expresar estas áreas en términos de θ como sigue:

$$\text{Área } \Delta OAP = \frac{1}{2}\text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2}(1)(\operatorname{sen}\theta) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$$

$$\text{Área sector } OAP = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(1)^2\theta = \frac{\theta}{2} \tag{2}$$

$$\text{Área } \Delta OAT = \frac{1}{2}\text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2}(1)(\tan\theta) = \frac{1}{2}\tan\theta.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta.$$

La medición en radianes se usa en la ecuación (2): el área del sector OAP es $\theta/2$ sólo si θ se mide en radianes.

Esta última desigualdad no se altera si dividimos los tres términos entre $(1/2)\operatorname{sen}\theta$, que es positivo, ya que $0 < \theta < \pi/2$:

$$1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}.$$

Las desigualdades se invierten al tomar recíprocos:

$$1 > \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} > \cos\theta.$$

Como $\lim_{\theta\to 0^+}\cos\theta = 1$ [ejemplo 11*b*), sección 2.2], el teorema del sándwich nos da

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1.$$

Para encontrar el límite lateral izquierdo, recuerde que sen θ y θ son *funciones impares* (sección 1.1). Por lo tanto, $f(\theta) = (\operatorname{sen}\theta)/\theta$ es una *función par*, con una gráfica simétrica con respecto al eje y (vea la figura 2.32). Esta simetría implica que existe el límite lateral izquierdo en 0, y tiene el mismo valor que el límite lateral derecho:

$$\lim_{\theta\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta},$$

así, de acuerdo con el teorema 6, $\lim_{\theta\to 0}(\operatorname{sen}\theta)/\theta = 1$. ■

EJEMPLO 5 Demuestre que ***a)*** $\lim_{h\to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$ y ***b)*** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{5x} = \dfrac{2}{5}$.

Solución

a) Usando la fórmula del ángulo medio, $\cos h = 1 - \operatorname{sen}^2(h/2)$, calculamos

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{2\operatorname{sen}^2(h/2)}{h}$$

$$= -\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\operatorname{sen}\theta \qquad \text{Sea } \theta = h/2.$$

$$= -(1)(0) = 0. \qquad \text{Ecuación 1 y ejemplo 11}a\text{) de la sección 2.2}$$

b) La ecuación (1) no se aplica a la fracción original. En el denominador necesitamos $2x$, no $5x$. Para obtenerlo, multiplicamos por $2/5$ el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{(2/5)\cdot \operatorname{sen} 2x}{(2/5)\cdot 5x}$$

$$= \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \qquad \text{Ahora se aplica la ecuación (1) con } \theta = 2x.$$

$$= \frac{2}{5}(1) = \frac{2}{5}$$

■

EJEMPLO 6 Encuentre $\lim_{t\to 0}\dfrac{\tan t \sec 2t}{3t}$.

Solución De la definición de $\tan t$ y $\sec 2t$, tenemos

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tan t \sec 2t}{3t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos 2t}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\cdot\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos 2t}$$

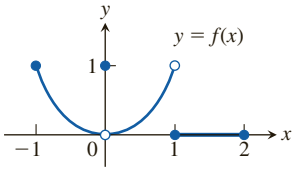
$$= \frac{1}{3}(1)(1)(1) = \frac{1}{3}. \qquad \text{Ecuación 1 y ejemplo 11}b\text{) de la sección 2.2}$$

■

Ejercicios 2.4

Obtención gráfica de límites

1. ¿Cuáles de los siguientes enunciados con respecto a la función $y = f(x)$, cuya gráfica aparece a continuación, son verdaderos y cuáles son falsos?



a) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$

b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

c) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

d) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

e) $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe.

f) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

g) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

h) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

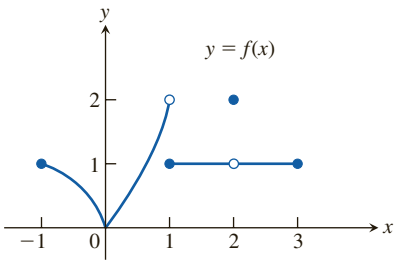
i) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

j) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$

k) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ no existe.

l) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$

2. ¿Cuáles de los siguientes enunciados con respecto a la función $y = f(x)$, cuya gráfica aparece a continuación, son verdaderos y cuáles son falsos?



a) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$

b) $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe.

c) $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

d) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$

e) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

f) $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe.

g) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

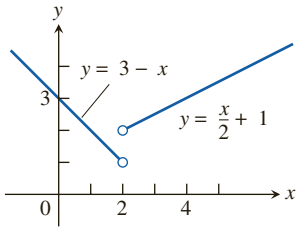
h) $\lim_{x\to c} f(x)$ existe para toda c en el intervalo abierto $(-1, 1)$.

i) $\lim_{x\to c} f(x)$ existe para toda c en el intervalo abierto $(1, 3)$

j) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0$

k) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ no existe.

3. Sea $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ \frac{x}{2} + 1, & x > 2. \end{cases}$



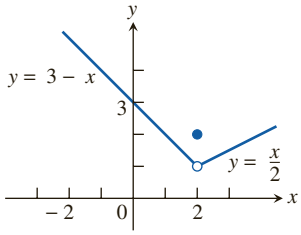
a) Obtenga $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ y $\lim_{x \to 2^-} f(x)$.

b) ¿Existe $\lim_{x \to 2} f(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no, explique por qué.

c) Obtenga $\lim_{x \to 4^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 4^+} f(x)$.

d) ¿Existe $\lim_{x \to 4} f(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no, explique por qué.

4. Sea $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ \frac{x}{2}, & x > 2. \end{cases}$



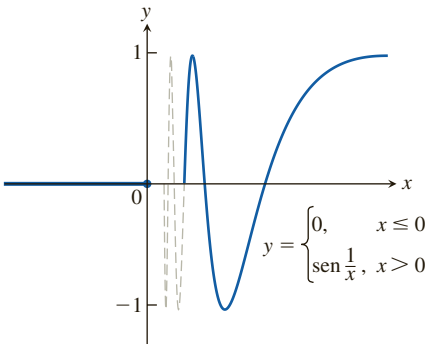
a) Obtenga $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ y $f(2)$.

b) ¿Existe $\lim_{x \to 2} f(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no, explique por qué.

c) Obtenga $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ y $\lim_{x \to -1^+} f(x)$.

d) ¿Existe $\lim_{x \to -1} f(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no, explique por qué.

5. Sea $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$

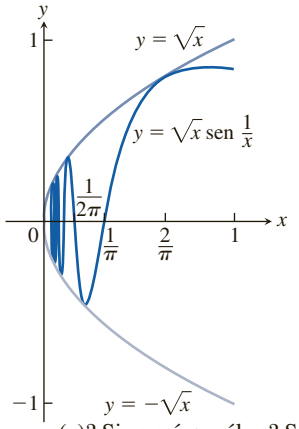


a) ¿Existe $\lim_{x \to 0^+} f(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no, explique por qué.

b) ¿Existe $\lim_{x \to 0^-} f(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no, explique por qué.

c) ¿Existe $\lim_{x \to 0} f(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no, explique por qué.

6. Sea $g(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen}(1/x)$.



a) ¿Existe $\lim_{x \to 0^+} g(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no, explique por qué.

b) ¿Existe $\lim_{x \to 0^-} g(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no, explique por qué.

c) ¿Existe $\lim_{x \to 0} g(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no, explique por qué.

7. ***a)*** Grafique $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1. \end{cases}$

b) Obtenga $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.

c) ¿Existe $\lim_{x \to 1} f(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no, explique por qué.

8. ***a)*** Grafique $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1. \end{cases}$

b) Obtenga $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ y $\lim_{x \to 1^-} f(x)$.

c) ¿Existe $\lim_{x \to 1} f(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no, explique por qué.

Grafique las funciones de los ejercicios 9 y 10. Después, conteste estas preguntas.

a) ¿Cuál es el dominio y el rango de f?

b) ¿En qué puntos c, si acaso, existe $\lim_{x \to c} f(x)$?

c) ¿En qué puntos sólo existe el límite lateral izquierdo?

d) ¿En qué puntos sólo existe el límite lateral derecho?

9. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0, \quad \text{o} \quad 0 < x \le 1 \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x < -1 \quad \text{o} \quad x > 1 \end{cases}$

Obtención algebraica de límites laterales

Determine los límites en los ejercicios 11 a 18.

11. $\lim_{x \to -0.5^-} \sqrt{\frac{x + 2}{x + 1}}$

12. $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{\frac{x - 1}{x + 2}}$

13. $\lim_{x \to -2^+} \left(\frac{x}{x + 1}\right)\left(\frac{2x + 5}{x^2 + x}\right)$

14. $\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{x + 1}\right)\left(\frac{x + 6}{x}\right)\left(\frac{3 - x}{7}\right)$

15. $\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h^2 + 4h + 5} - \sqrt{5}}{h}$

16. $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{5h^2 + 11h + 6}}{h}$

17. ***a)*** $\lim_{x\to -2^+} (x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$ ***b)*** $\lim_{x\to -2^-} (x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$

18. ***a)*** $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$ ***b)*** $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$

Use la gráfica de la función mayor entero $y = \lfloor x \rfloor$, figura 1.10 en la sección 1.1, para encontrar los límites en los ejercicios 19 y 20.

19. ***a)*** $\lim_{\theta\to 3^+} \dfrac{\lfloor \theta \rfloor}{\theta}$ ***b)*** $\lim_{\theta\to 3^-} \dfrac{\lfloor \theta \rfloor}{\theta}$

20. ***a)*** $\lim_{t\to 4^+} (t - \lfloor t \rfloor)$ ***b)*** $\lim_{t\to 4^-} (t - \lfloor t \rfloor)$

Uso de $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$

Obtenga los límites en los ejercicios 21 a 42.

21. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{2}\theta}{\sqrt{2}\theta}$

22. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} kt}{t}$ (k constante)

23. $\lim_{y\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3y}{4y}$

24. $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{h}{\operatorname{sen} 3h}$

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{x}$

26. $\lim_{t\to 0} \dfrac{2t}{\tan t}$

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \csc 2x}{\cos 5x}$

28. $\lim_{x\to 0} 6x^2(\cot x)(\csc 2x)$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + x\cos x}{\operatorname{sen} x \cos x}$

30. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 - x + \operatorname{sen} x}{2x}$

31. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$

32. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - x\cos x}{\operatorname{sen}^2 3x}$

33. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(1 - \cos t)}{1 - \cos t}$

34. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} h)}{\operatorname{sen} h}$

35. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$

36. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 4x}$

37. $\lim_{\theta\to 0} \theta\cos\theta$

38. $\lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}\theta \cot 2\theta$

39. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\operatorname{sen} 8x}$

40. $\lim_{y\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3y \cot 5y}{y \cot 4y}$

41. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\tan\theta}{\theta^2 \cot 3\theta}$

42. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\theta \cot 4\theta}{\operatorname{sen}^2\theta \cot^2 2\theta}$

Teoría y ejemplos

43. Si conocemos $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$ en un punto interior del dominio de f, ¿conocemos también $\lim_{x\to a} f(x)$? Justifique su respuesta.

44. Si sabemos que $\lim_{x\to c} f(x)$ existe, ¿es posible encontrar su valor calculando $\lim_{x\to c^+} f(x)$? Justifique su respuesta.

45. Suponga que f es una función impar de x. ¿Saber que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$ nos indica algo acerca de $\lim_{x\to 0^-} f(x)$? Justifique su respuesta.

46. Suponga que f es una función par de x. ¿Saber que $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 7$ nos indica algo acerca de $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ o $\lim_{x\to -2^+} f(x)$? Justifique su respuesta.

Definiciones formales de límites laterales

47. Dada $\epsilon > 0$, encuentre un intervalo $I = (5, 5+\delta)$, $\delta > 0$, tal que si x está en I, entonces, $\sqrt{x-5} < \epsilon$. ¿Qué límite se está verificando y cuál es su valor?

48. Dada $\epsilon > 0$, encuentre un intervalo $I = (4-\delta, 4)$, $\delta > 0$, tal que si x está en I, entonces, $\sqrt{4-x} < \epsilon$. ¿Qué límite se está verificando y cuál es su valor?

Con base en las definiciones de límite lateral izquierdo y derecho, demuestre los límites propuestos en los ejercicios 49 y 50.

49. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} = -1$

50. $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x-2}{|x-2|} = 1$

51. Función mayor entero Encuentre ***a)*** $\lim_{x\to 400^+} \lfloor x \rfloor$ y ***b)*** $\lim_{x\to 400^-} \lfloor x \rfloor$; después, considere las definiciones de límite para verificar sus resultados. ***c)*** Con base en sus conclusiones de los incisos *a*) y *b*), ¿puede decir algo acerca de $\lim_{x\to 400} \lfloor x \rfloor$? Justifique su respuesta.

52. Límites laterales Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0. \end{cases}$

Obtenga ***a)*** $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y ***b)*** $\lim_{x\to 0^-} f(x)$; después, considere las definiciones de límite para verificar sus resultados. ***c)*** Con base en sus conclusiones de los incisos *a*) y *b*), ¿puede decir algo acerca de $\lim_{x\to 0} f(x)$? Justifique su respuesta.

2.5 Continuidad

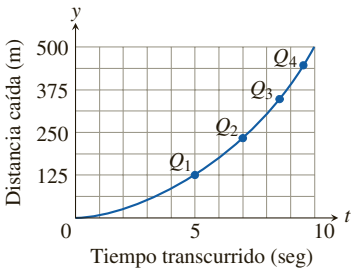


FIGURA 2.34 Conexión de los puntos marcados, mediante una curva ininterrumpida para los datos experimentales Q_1, Q_2, Q_3,… de un objeto que cae.

Cuando se representan en un plano los valores de una función, ya sean datos generados en un laboratorio o recopilados en el campo, a menudo los puntos graficados se unen mediante una curva continua para mostrar dónde es probable que estén los valores de la función en los puntos donde no se tomaron mediciones (figura 2.34). Al hacerlo, suponemos que estamos trabajando con una *función continua*, de manera que sus salidas varían con regularidad y consistencia con las entradas, y no saltan abruptamente de un valor a otro sin tomar en cuenta los valores intermedios. Intuitivamente, cualquier función $y = f(x)$ cuya gráfica se puede dibujar sobre su dominio con un movimiento ininterrumpido es un ejemplo de una función continua. Estas funciones desempeñan un papel importante en el estudio del cálculo y sus aplicaciones.

Continuidad en un punto

Para entender la continuidad, resulta útil considerar una función como la de la figura 2.35, cuyos límites investigamos en el ejemplo 2 de la sección anterior.

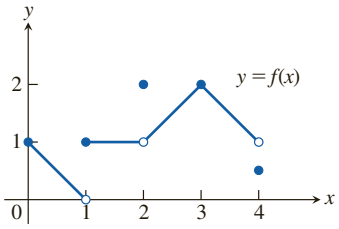


FIGURA 2.35 La función no es continua en $x = 1$, $x = 2$ y $x = 4$ (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Obtenga los puntos en los que la función f de la figura 2.35 parece ser discontinua. Explique por qué. ¿Qué ocurre en otros puntos del dominio?

Solución Primero, observe que el dominio de la función es el intervalo cerrado [0, 4], de modo que consideraremos los números x dentro del intervalo. En la figura, observamos inmediatamente que hay interrupciones en la gráfica en los valores $x = 1$, $x = 2$ y $x = 4$. Las interrupciones aparecen como saltos, que más tarde identificaremos como "discontinuidades de salto". Éstos son los valores para los cuales la función no es continua, y en su momento los analizaremos uno por uno.

Puntos en los que *f* es discontinua:

En $x = 1$, la función no tiene límite. Es cierto que tiene un límite izquierdo $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ y un límite derecho $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$, pero los valores límite son diferentes, por lo que se trata de un salto en la gráfica. La función no es continua en $x = 1$.

En $x = 2$, la función tiene un límite, $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$, pero el valor de la función es $f(2) = 2$. Los valores del límite y de la función no son los mismos, de modo que se trata de una interrupción en la gráfica y f no es continua en $x = 2$.

En $x = 4$, la función tiene un límite lateral izquierdo en este extremo derecho, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$, pero nuevamente el valor de la función $f(4) = \frac{1}{2}$ difiere del valor del límite. Una vez más, vemos una interrupción en la gráfica de la función en este extremo, y la función no es continua por la izquierda.

Puntos en los que *f* es continua:

En $x = 0$, la función tiene un límite derecho en este extremo izquierdo, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, y el valor de la función es el mismo, $f(0) = 1$. Así, no hay interrupción en la gráfica de la función en este extremo, y la función es continua por la derecha en $x = 0$.

En $x = 3$, la función tiene un límite $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$. Además, el límite allí tiene el mismo valor que el de la función, $f(3) = 2$. No se presenta interrupción en la gráfica, y la función es continua en $x = 3$.

En todos los otros valores $x = c$ del dominio que no se han considerado, la función tiene un límite igual al valor de la función en el punto, de modo que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Por ejemplo, $\lim_{x\to 5/2} f(x) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}$. No aparecen interrupciones en la gráfica de la función en cualquier otro de los valores restantes, y la función es continua en cada uno de ellos. ■

Las siguientes definiciones captan las ideas de continuidad observadas en el ejemplo 1.

DEFINICIONES Sea c un número real en el eje x.

La función f es **continua en *c*** si

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

La función f es **continua por la derecha en *c*** si

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c).$$

La función f es **continua por la izquierda en *c*** si

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c).$$

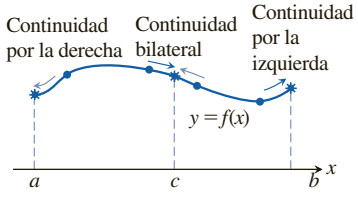


FIGURA 2.36 Continuidad en los puntos a, b y c.

Del teorema 6, se deduce inmediatamente que una función f es continua en un punto interior c de su dominio, si y sólo si es continua por la derecha y continua por la izquierda en c (figura 2.36). Decimos que una función es **continua en un intervalo cerrado** $[a, b]$, si es continua por la derecha en a, continua por la izquierda en b, y continua en todos los puntos interiores del intervalo.

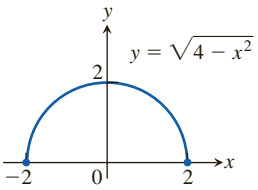


FIGURA 2.37 Una función que es continua en todo su dominio (ejemplo 2).

Esta definición sirve también para los intervalos cerrados infinitos $[a, \infty)$ y $(-\infty, b]$, aunque sólo un extremo del intervalo está implicado. Si una función no es continua en un punto interior c de su dominio, decimos que f es **discontinua en** c, y que c es un punto de discontinuidad de f. Observe que una función f puede ser continua, continua por la derecha o continua por la izquierda sólo en el punto c para el cual $f(c)$ está definida.

EJEMPLO 2 La función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es continua en su dominio $[-2, 2]$ (figura 2.37). Es continua por la derecha en $x = -2$, y continua por la izquierda en $x = 2$. ■

EJEMPLO 3 La función escalonada unitaria $U(x)$, cuya gráfica aparece en la figura 2.38, es continua por la derecha en $x = 0$, pero no es continua por la izquierda ni continua en el punto mencionado. Tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$. ■

A continuación se resumen las condiciones que deben cumplirse para la continuidad en un punto interior.

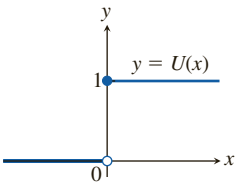


FIGURA 2.38 Una función que tiene una discontinuidad de salto en el origen (ejemplo 3).

Prueba de continuidad

Una función $f(x)$ es continua en un punto $x = c$ si y sólo si cumple las tres condiciones siguientes.

1. $f(c)$ existe (c está en el dominio de f).
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe (f tiene un límite cuando $x \to c$).
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (el límite es igual al valor de la función).

Para la continuidad lateral y la continuidad en un punto extremo de un intervalo, los límites de las condiciones 2 y 3 deben reemplazarse por los límites laterales adecuados.

EJEMPLO 4 La función $y = \lfloor x \rfloor$ presentada en la sección 1.1 está graficada en la figura 2.39. Es discontinua en todos los números enteros porque los límites izquierdo y derecho no son iguales cuando $x \to n$:

$$\lim_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n.$$

Como $\lfloor n \rfloor = n$, la función mayor entero es continua por la derecha en todo entero n (pero no es continua por la izquierda).

La función mayor entero es continua en todos los números reales que no son enteros. Por ejemplo,

$$\lim_{x \to 1.5} \lfloor x \rfloor = 1 = \lfloor 1.5 \rfloor.$$

En general, si $n - 1 < c < n$, siendo n un entero, entonces,

$$\lim_{x \to c} \lfloor x \rfloor = n - 1 = \lfloor c \rfloor.$$

■

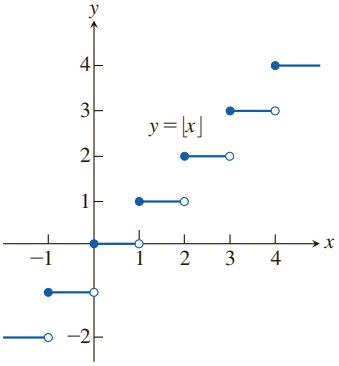


FIGURA 2.39 La función mayor entero es continua en todo punto no entero. Es continua por la derecha, pero no por la izquierda, en todo punto entero (ejemplo 4).

La figura 2.40 muestra varios tipos comunes de discontinuidades. La función en la figura 2.40*a*) es continua en $x = 0$. La función en la figura 2.40*b*) sería continua si tuviera $f(0) = 1$. La función en la figura 2.40*c*) sería continua si $f(0)$ fuera 1 en vez de 2. La discontinuidad en la figura 2.40*c*) es **removible**. La función tiene un límite cuando $x \to 0$, y podemos eliminar la discontinuidad haciendo que $f(0)$ sea igual a ese límite.

Las discontinuidades en las figuras 2.40*d*) a 2.40*f*) son más serias: $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe y no hay manera de mejorar la situación cambiando el valor de f en 0. La función escalonada de la figura 2.40*d*) tiene una **discontinuidad de salto**: existen los límites laterales, pero tienen valores distintos. La función $f(x) = 1/x^2$ de la figura 2.40*e*) tiene una **discontinuidad infinita**. La función de la figura 2.40*f*) tiene una **discontinuidad oscilante**: oscila demasiado para tener un límite cuando $x \to 0$.

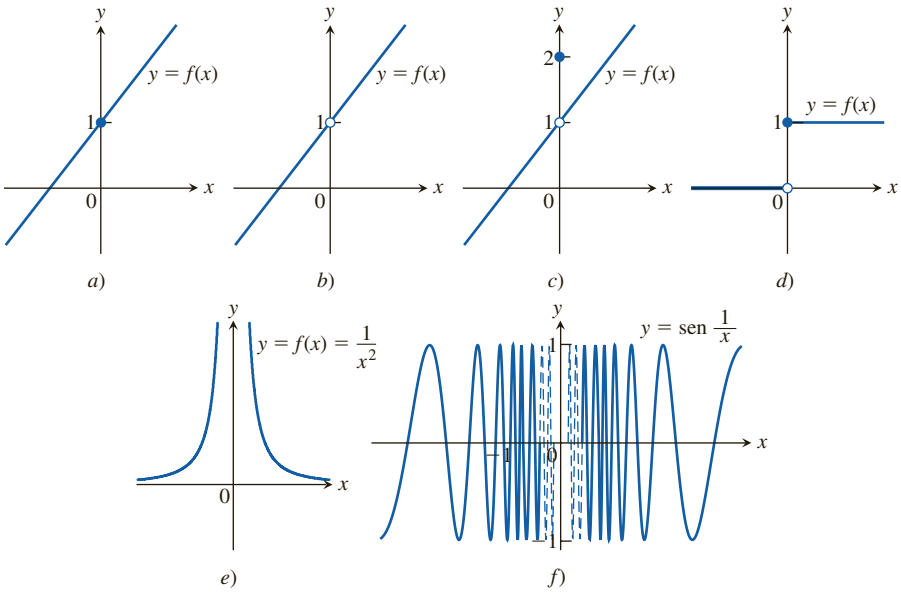


FIGURA 2.40 La función en *a*) es continua en $x = 0$; las funciones de *b*) a *f*) no lo son.

Funciones continuas

En general, se desea describir el comportamiento continuo de una función en todo su dominio, no sólo en un punto específico. Sabemos cómo hacerlo si el dominio es un intervalo cerrado. De la misma manera, definimos una **función continua** como una función que es continua en todos los puntos de su dominio. Ésta es una propiedad de la *función*. Una función siempre tiene un dominio especificado, de modo que si cambiamos el dominio, modificamos la función, y esto también podría alterar sus propiedades de continuidad. Si una función es discontinua en uno o más puntos de su dominio, se dice que es una función **discontinua**.

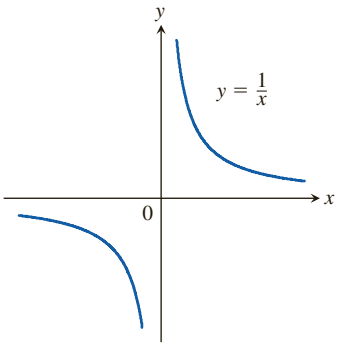


FIGURA 2.41 La función $y = 1/x$ es continua en todo su dominio natural. Tiene un punto de discontinuidad en el origen, de modo que es discontinua en cualquier intervalo que contenga $x = 0$ (ejemplo 5).

EJEMPLO 5

a) La función $y = 1/x$ (figura 2.41) es una función continua porque es continua en todos los puntos de su dominio. Sin embargo, tiene un punto de discontinuidad en $x = 0$, porque no está definida allí, es decir, es discontinua en cualquier intervalo que contenga $x = 0$.

b) De acuerdo con el ejemplo 3 de la sección 2.3, la función identidad $f(x) = x$ y las funciones constantes son continuas en todos lados. ■

Las combinaciones algebraicas de funciones continuas son continuas en todo lugar donde estén definidas.

TEOREMA 8: Propiedades de las funciones continuas Si las funciones f y g son continuas en $x = c$, entonces, las siguientes combinaciones algebraicas son continuas en $x = c$.

1.	*Sumas*:	$f + g$
2.	*Diferencias*:	$f - g$
3.	*Múltiplos constantes*:	$k \cdot f$, para cualquier número k
4.	*Productos*:	$f \cdot g$
5.	*Cocientes*:	f/g, siempre que $g(c) \neq 0$
6.	*Potencias*:	f^n, n es un entero positivo
7.	*Raíces*:	$\sqrt[n]{f}$, siempre que esté definida en un intervalo abierto que contenga c, donde n es un entero positivo

La mayoría de los resultados del teorema 8 se deducen de las reglas de límites incluidas en el teorema 1 de la sección 2.2. Por ejemplo, para demostrar las propiedades de la suma, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}(f+g)(x) &= \lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) \\ &= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) && \text{Regla de la suma, teorema 1} \\ &= f(c) + g(c) && \text{Continuidad de } f, g \text{ en } c. \\ &= (f+g)(c).\end{aligned}$$

Esto demuestra que $f + g$ es continua.

EJEMPLO 6

a) Toda función polinomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ es continua porque $\lim_{x\to c} P(x) = P(c)$ de acuerdo con el teorema 2 de la sección 2.2.

b) Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, entonces, la función racional $P(x)/Q(x)$ es continua siempre que esté definida ($Q(c) \neq 0$), de acuerdo con el teorema 3 de la sección 2.2. ■

EJEMPLO 7 La función $f(x) = |x|$ es continua. Si $x > 0$, tenemos que $f(x) = x$, una función polinomial. Si $x < 0$, tenemos $f(x) = -x$, otra función polinomial. Finalmente, en el origen, $\lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0|$. ■

Las funciones $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ son continuas en $x = 0$, según el ejemplo 11 de la sección 2.2. De hecho, ambas funciones son continuas en todo punto (vea el ejercicio 70). Según el teorema 8, las seis funciones trigonométricas son continuas donde sea que estén definidas. Por ejemplo, $y = \tan x$ es continua en $\cdots \cup (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2) \cup \cdots$.

Funciones compuestas

Todas las composiciones de funciones continuas son continuas. La idea es que si $f(x)$ es continua en $x = c$, y $g(x)$ es continua en $x = f(c)$, entonces, $g \circ f$ es continua en $x = c$ (figura 2.42). En este caso, el límite cuando $x \to c$ es $g(f(c))$.

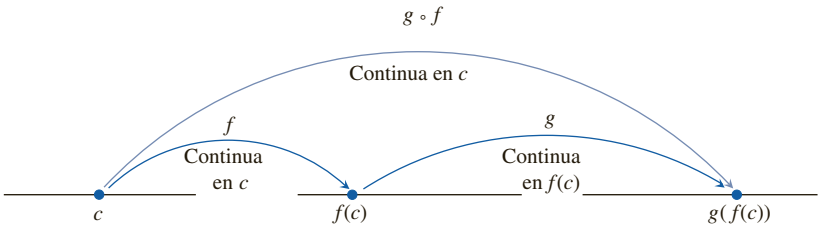


FIGURA 2.42 Las composiciones de funciones continuas son continuas.

TEOREMA 9: Composición de funciones continuas Si f es continua en c, y g es continua en $f(c)$, entonces, la composición $f \circ g$ es continua en c.

Intuitivamente, el teorema 9 es razonable, porque si x está cerca de c, entonces, $f(x)$ está cerca de $f(c)$, y como g es continua en $f(c)$, resulta que $g(f(x))$ está cerca de $g(f(c))$.

La continuidad de composiciones se cumple al componer cualquier número finito de funciones. El único requisito es que cada función sea continua donde está aplicada. En el ejercicio 6 del apéndice 4 se presenta un bosquejo de la demostración del teorema 9.

EJEMPLO 8 Demuestre que las siguientes funciones son continuas en sus dominios naturales.

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$ ***b)*** $y = \dfrac{x^{2/3}}{1 + x^4}$

c) $y = \left|\dfrac{x - 2}{x^2 - 2}\right|$ ***d)*** $y = \left|\dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 2}\right|$

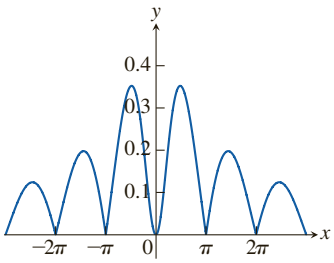


FIGURA 2.43 La gráfica sugiere que $y = |(x \operatorname{sen} x)/(x^2 + 2)|$ es continua (ejemplo 8*d*).

Solución

a) La función raíz cuadrada es continua en $[0, \infty)$ porque es una raíz de la función identidad (continua) $f(x) = x$ (apartado 7, teorema 8). Entonces, la función dada es la composición de la función polinomial $f(x) = x^2 - 2x - 5$ con la función raíz cuadrada $g(t) = \sqrt{t}$, y es continua en su dominio natural.

b) El numerador es la raíz cúbica de la función identidad al cuadrado; el denominador es un polinomio positivo en todos sus puntos. Por lo tanto, el cociente es continuo.

c) El cociente $(x - 2)/(x^2 - 2)$ es continuo para toda $x \neq \pm\sqrt{2}$, y la función es la composición de este cociente con la función continua valor absoluto (ejemplo 7).

d) Como la función seno es continua en todos sus puntos (ejercicio 70), el término del numerador x sen x es el producto de funciones continuas, y el término del denominador $x^2 + 2$ es una función polinomial positiva en todos sus puntos. La función dada es la composición de un cociente de funciones continuas con la función continua valor absoluto (figura 2.43). ■

El teorema 9 es en realidad una consecuencia de un resultado más general, el cual enunciamos y demostramos en seguida.

TEOREMA 10: Límites de funciones continuas Si g es continua en el punto b y $\lim_{x \to c} f(x) = b$, entonces,

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(b) = g(\lim_{x \to c} f(x)).$$

Demostración Sea $\epsilon > 0$. Como g es continua en b, existe un número $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g(y) - g(b)| < \epsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |y - b| < \delta_1.$$

Como $\lim_{x \to c} f(x) = b$, existe una $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - b| < \delta_1 \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Si consideramos que $y = f(x)$, entonces, tenemos que

$$|y - b| < \delta_1 \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - c| < \delta,$$

lo que, de acuerdo con el primer enunciado, implica que $|g(y) - g(b)| = |g(f(x)) - g(b)| < \epsilon$ cuando $0 < |x - c| < \delta$. Según la definición de límite, esto prueba que $\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(b)$. ■

EJEMPLO 9 El siguiente cálculo es una aplicación del teorema 10.

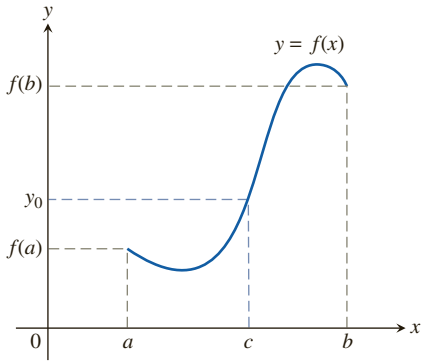
$$\lim_{x \to \pi/2} \cos\left(2x + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right) = \cos\left(\lim_{x \to \pi/2} 2x + \lim_{x \to \pi/2} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right)$$
$$= \cos(\pi + \operatorname{sen} 2\pi) = \cos \pi = -1.$$

■

Teorema del valor intermedio para funciones continuas

Las funciones que son continuas en intervalos tienen propiedades que las hacen particularmente útiles en matemáticas y en sus aplicaciones. Una de éstas es la *propiedad del valor intermedio*. Se dice que una función tiene la **propiedad del valor intermedio** si siempre que toma dos valores, también adopta todos los valores intermedios.

TEOREMA 11: El teorema del valor intermedio para funciones continuas Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, y y_0 es cualquier valor entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces, $y_0 = f(c)$ para alguna c en $[a, b]$.



El teorema 11 afirma que las funciones continuas en intervalos *cerrados finitos* tienen la propiedad del valor intermedio. Geométricamente, el teorema del valor intermedio afirma que cualquier recta horizontal $y = y_0$ que cruza el eje y entre los números $f(a)$ y $f(b)$ cruzará la curva $y = f(x)$ al menos una vez en el intervalo $[a, b]$.

La demostración del teorema del valor intermedio depende de la propiedad de completitud del sistema de los números reales (apéndice 7), y se puede encontrar en textos más avanzados.

La continuidad de f en el intervalo es esencial para el teorema 11. Si f es discontinua aunque sea en un solo punto del intervalo, la conclusión del teorema podría no cumplirse, como sucede en el caso de la función cuya gráfica aparece en la figura 2.44 (elija y_0 como cualquier número entre 2 y 3).

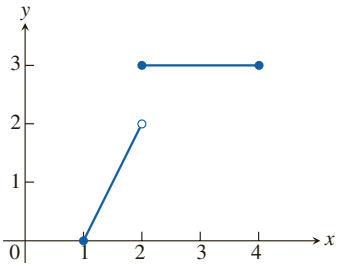


FIGURA 2.44 La función

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & 1 \le x < 2 \\ 3, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

no toma todos los valores entre $f(1) = 0$ y $f(4) = 3$; omite todos los valores entre 2 y 3.

Una consecuencia para la graficación: la conexidad El teorema 11 implica que la gráfica de una función continua en un intervalo no puede tener rupturas sobre ese intervalo. En tal caso, será **conexa**, es decir, una curva sin perforaciones o rupturas. No tendrá saltos, como la gráfica de la función mayor entero (figura 2.39), o ramas separadas como la gráfica de $1/x$ (figura 2.41).

Una consecuencia para encontrar raíces Una solución de la ecuación $f(x) = 0$ se denomina **raíz** de la ecuación o **cero** de la función f. Por el teorema del valor intermedio, sabemos que si f es una función continua, entonces, cualquier intervalo donde f cambie de signo contendrá un cero de la función.

En términos prácticos, cuando vemos en una pantalla de computadora que la gráfica de una función continua cruza el eje horizontal, sabemos que no lo salta. Hay, en efecto, un punto donde el valor de la función es cero.

EJEMPLO 10 Demuestre que hay una raíz de la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ entre 1 y 2.

Solución Sea $f(x) = x^3 - x - 1$. Como $f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$, y $f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5 > 0$, vemos que $y_0 = 0$ es un valor entre $f(1)$ y $f(2)$. Como f es continua, por el teorema del valor intermedio, hay un cero de f entre 1 y 2. La figura 2.45 muestra el resultado de una amplificación para localizar la raíz cerca de $x = 1.32$. ■

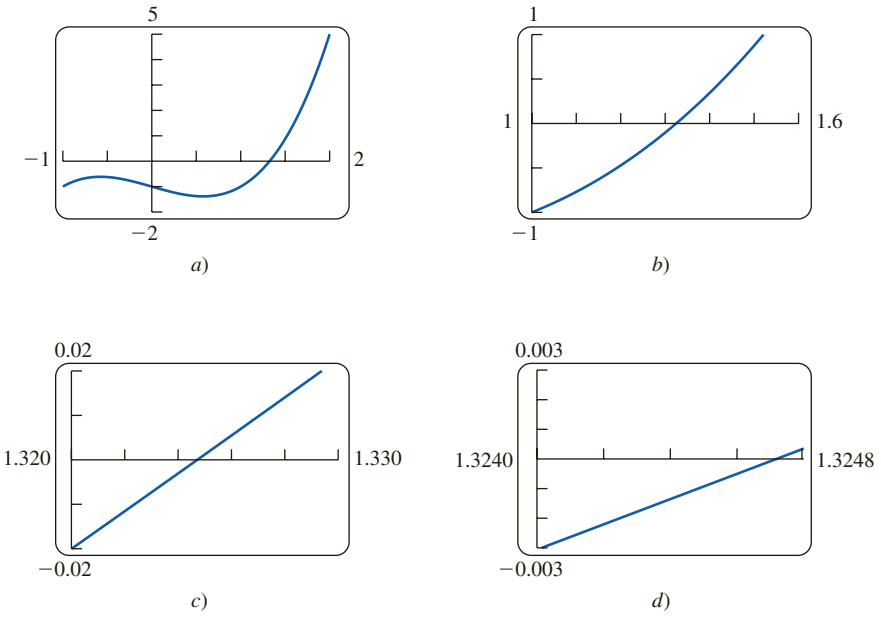


FIGURA 2.45 Acercamiento al cero de la función $f(x) = x^3 - x - 1$. El cero está cerca de $x = 1.3247$ (ejemplo 10).

EJEMPLO 11 Use el teorema del valor intermedio para demostrar que la ecuación

$$\sqrt{2x + 5} = 4 - x^2$$

tiene una solución (figura 2.46).

Solución Rescribimos esta ecuación como

$$\sqrt{2x + 5} + x^2 = 4,$$

y consideramos $f(x) = \sqrt{2x + 5} + x^2$. Ahora $g(x) = \sqrt{2x + 5}$ es continua en el intervalo $[-5/2, \infty)$, puesto que es la composición de la función raíz cuadrada con la función lineal no negativa $y = 2x + 5$. Entonces, f es la suma de la función g y la función cuadrática $y = x^2$, y la función cuadrática es continua para todos los valores de x. Resulta que $f(x) = \sqrt{2x + 5} + x^2$ es continua en el intervalo $[-5/2, \infty)$. Por ensayo y error, se encuentran los valores de la función $f(0) = \sqrt{5} \approx 2.24$ y $f(2) = \sqrt{9} + 4 = 7$, y se observa que f también es continua en el intervalo cerrado finito $[0, 2] \subset [-5/2, \infty)$. Como el valor $y_0 = 4$ está entre los números 2.24 y 7, por el teorema del valor intermedio existe un número $c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = 4$. Es decir, el número c resuelve la ecuación original. ■

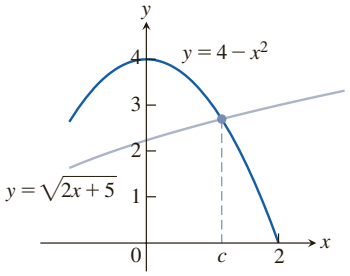


FIGURA 2.46 Las curvas $y = \sqrt{2x + 5}$ y $y = 4 - x^2$ tienen el mismo valor en $x = c$ donde $\sqrt{2x + 5} = 4 - x^2$ (ejemplo 11).

Extensión continua para un punto

En ocasiones, la fórmula que describe una función f no tiene sentido en un punto $x = c$. No obstante, podría ser posible ampliar el dominio de f, para incluir $x = c$, creando una nueva función que sea continua en $x = c$. Por ejemplo, la función $y = f(x) = (\text{sen } x)/x$ es continua en todos los puntos excepto en $x = 0$, ya que el origen no está en su dominio. Como $y = (\text{sen } x)/x$ tiene un límite finito cuando $x \to 0$ (teorema 7), podemos ampliar el dominio de la función para incluir el punto $x = 0$ de modo que la función ampliada sea continua en $x = 0$. Definimos la nueva función como

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen } x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

La función $F(x)$ es continua en $x = 0$ porque

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = F(0),$$

de manera que cumple los requerimientos de continuidad (figura 2.47).

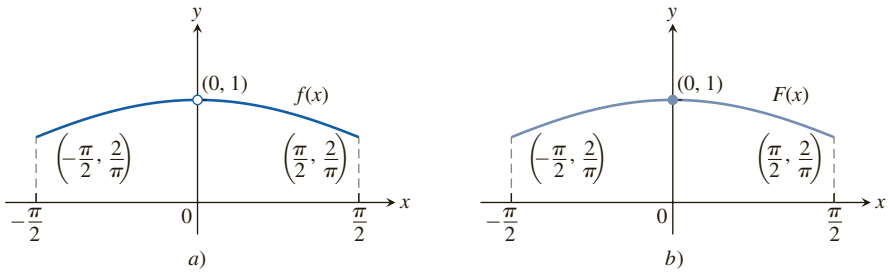


FIGURA 2.47 La gráfica *a*) de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ para $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ no incluye el punto (0, 1), ya que la función no está definida en $x = 0$. *b*) Podemos eliminar la discontinuidad de la gráfica definiendo la nueva función $F(x)$ como $F(0) = 1$ y $F(x) = f(x)$ en cualquier otro lado. Observe que $F(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$.

En general, una función (como una función racional) puede tener un límite incluso en un punto donde no esté definida. Si $f(c)$ no está definido, pero existe $\lim_{x \to c} f(x) = L$, podemos definir una nueva función $F(x)$ mediante la regla

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \text{ está en el dominio de } f \\ L, & \text{si } x = c. \end{cases}$$

La función F es continua en $x = c$. Se conoce como la **extensión continua de *f*** a $x = c$. Para funciones racionales f, las extensiones continuas generalmente se obtienen cancelando factores comunes en el numerador y el denominador.

EJEMPLO 12 Demuestre que

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}, \quad x \neq 2$$

tiene una extensión continua para $x = 2$, y obtenga esa extensión.

Solución Aun cuando $f(2)$ no está definida, si $x \neq 2$, tenemos

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x + 3}{x + 2}.$$

La nueva función

$$F(x) = \frac{x + 3}{x + 2}$$

es igual a $f(x)$ para $x \neq 2$, pero es continua en $x = 2$, y ahí tiene el valor de $5/4$. Por lo tanto, F es la extensión continua de f a $x = 2$, y

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} f(x) = \frac{5}{4}.$$

En la figura 2.48 se presenta la gráfica de f. La extensión continua F tiene la misma gráfica, pero sin la perforación en $(2, 5/4)$. En efecto, F es la función f con su punto de discontinuidad en $x = 2$ removido. ■

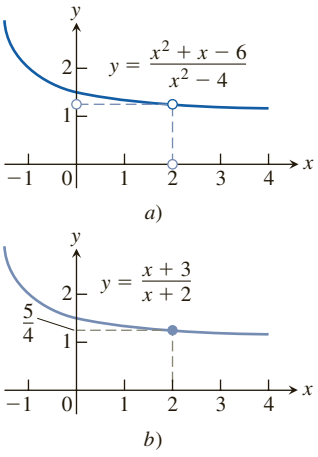


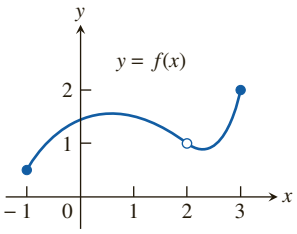
FIGURA 2.48 *a*) La gráfica de $f(x)$ y *b*) la gráfica de su extensión continua $F(x)$ (ejemplo 12).

Ejercicios 2.5

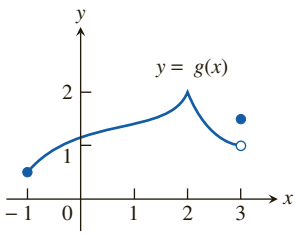
Continuidad vía la gráfica

En los ejercicios 1 a 4, indique si la función graficada es continua en $[-1, 3]$. Si no lo es, explique dónde falla la continuidad y por qué.

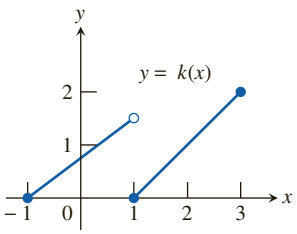
1.



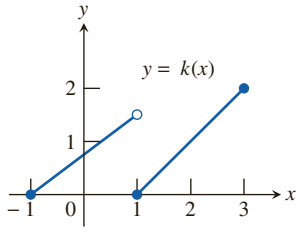
2.



3.



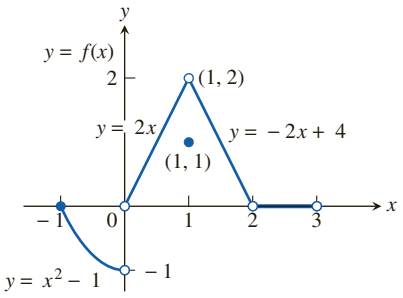
4.



Los ejercicios 5 a 10 se refieren a la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \le x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

cuya gráfica aparece en la siguiente figura.



Gráfica para los ejercicios 5 a 10.

5. ***a)*** ¿Existe $f(-1)$?
b) ¿Existe $\lim_{x \to -1^+} f(x)$?
c) ¿Existe $\lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$?
d) ¿Es f continua en $x = -1$?

6. ***a)*** ¿Existe $f(1)$?
b) ¿Existe $\lim_{x \to 1} f(x)$?
c) ¿Existe $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$?
d) ¿Es f continua en $x = 1$?

7. ***a)*** ¿Está definida f en $x = 2$? (Vea la definición de f).
b) ¿Es f continua en $x = 2$?

8. ¿En qué valores de x es continua f?

9. ¿Qué valor se debe asignar a $f(2)$ para que la función extendida sea continua en $x = 2$?

10. ¿A qué nuevo valor hay que cambiar $f(1)$ para eliminar la discontinuidad?

Uso de la prueba de continuidad

¿En qué puntos las funciones de los ejercicios 11 y 12 no son continuas? ¿En qué puntos, si acaso, son removibles las discontinuidades? ¿En cuáles no es posible removerlas? Justifique sus respuestas.

11. Ejercicio 1 de la sección 2.4 **12.** Ejercicio 2 de la sección 2.4

¿En qué puntos son continuas las funciones de los ejercicios 13 a 30?

13. $y = \dfrac{1}{x - 2} - 3x$

14. $y = \dfrac{1}{(x + 2)^2} + 4$

15. $y = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4x + 3}$

16. $y = \dfrac{x + 3}{x^2 - 3x - 10}$

17. $y = |x - 1| + \operatorname{sen} x$

18. $y = \dfrac{1}{|x| + 1} - \dfrac{x^2}{2}$

19. $y = \dfrac{\cos x}{x}$

20. $y = \dfrac{x + 2}{\cos x}$

21. $y = \csc 2x$

22. $y = \tan \dfrac{\pi x}{2}$

23. $y = \dfrac{x \tan x}{x^2 + 1}$

24. $y = \dfrac{\sqrt{x^4 + 1}}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$

25. $y = \sqrt{2x + 3}$

26. $y = \sqrt[4]{3x - 1}$

27. $y = (2x - 1)^{1/3}$

28. $y = (2 - x)^{1/5}$

29. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}, & x \ne 3 \\ 5, & x = 3 \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & x \ne 2, x \ne -2 \\ 3, & x = 2 \\ 4, & x = -2 \end{cases}$

Límites que involucran funciones trigonométricas

Encuentre los límites de los ejercicios 31 a 38. ¿Son continuas las funciones en el punto al que se está aproximando?

31. $\lim_{x \to \pi} \operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x)$

32. $\lim_{t \to 0} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} \cos(\tan t)\right)$

33. $\lim_{y \to 1} \sec(y \sec^2 y - \tan^2 y - 1)$

34. $\lim_{x \to 0} \tan\left(\dfrac{\pi}{4} \cos(\operatorname{sen} x^{1/3})\right)$

35. $\lim_{t\to 0} \cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{19 - 3\sec 2t}}\right)$

36. $\lim_{x\to \pi/6} \sqrt{\csc^2 x + 5\sqrt{3}\tan x}$

37. $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\sqrt{\dfrac{\cos^2 x - \cos x}{x}}$

38. $\lim_{x\to 0} \sec\left(\dfrac{\pi(\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x)}{3x}\right)$

Extensiones continuas

39. Defina $g(3)$ de manera que extienda $g(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ a una función continua en $x = 3$.

40. Defina $h(2)$ de manera que extienda $h(t) = (t^2 + 3t - 10)/(t - 2)$ a una función continua en $t = 2$.

41. Defina $f(1)$ de manera que extienda $f(s) = (s^3 - 1)/(s^2 - 1)$ a una función continua en $s = 1$.

42. Defina $g(4)$ de manera que extienda

$$g(x) = (x^2 - 16)/(x^2 - 3x - 4)$$

a una función continua en $x = 4$.

43. ¿Para qué valor de a,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

es continua para toda x?

44. ¿Para qué valor de b,

$$g(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ bx^2, & x \geq -2 \end{cases}$$

es continua para toda x?

45. ¿Para qué valores de a,

$$f(x) = \begin{cases} a^2x - 2a, & x \geq 2 \\ 12, & x < 2 \end{cases}$$

es continua para toda x?

46. ¿Para qué valor de b,

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x - b}{b + 1}, & x < 0 \\ x^2 + b, & x > 0 \end{cases}$$

es continua para toda x?

47. ¿Para qué valores de a y b,

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq -1 \\ ax - b, & -1 < x < 1 \\ 3, & x \geq 1 \end{cases}$$

es continua para toda x?

48. ¿Para qué valores de a y b,

$$g(x) = \begin{cases} ax + 2b, & x \leq 0 \\ x^2 + 3a - b, & 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5, & x > 2 \end{cases}$$

es continua para toda x?

T En los ejercicios 49 a 52, grafique la función f para ver si parece tener una extensión continua en el origen. De ser así, utilice las funciones Trace y Zoom con la finalidad de encontrar un punto que sea adecuado para el valor de la función extendida en $x = 0$. Si la función no parece tener una extensión continua, ¿es posible extenderla para que sea continua en el origen por la derecha o por la izquierda? De ser así, ¿cuál debe ser el valor (o cuáles deben ser los valores) de la función extendida?

49. $f(x) = \dfrac{10^x - 1}{x}$

50. $f(x) = \dfrac{10^{|x|} - 1}{x}$

51. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|}$

52. $f(x) = (1 + 2x)^{1/x}$

Teoría y ejemplos

53. Se sabe que una función continua $y = f(x)$ es negativa en $x = 0$ y positiva en $x = 1$. ¿Por qué la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución entre $x = 0$ y $x = 1$? Ilústrelo con un diagrama.

54. Explique por qué la ecuación $\cos x = x$ tiene al menos una solución.

55. Raíces cúbicas Demuestre que la ecuación $x^3 - 15x + 1 = 0$ tiene tres soluciones en el intervalo $[-4, 4]$.

56. Un valor de la función Demuestre que la función $F(x) = (x - a)^2 \cdot (x - b)^2 + x$ toma el valor $(a + b)/2$ para algún valor de x.

57. Resolución de una ecuación Si $f(x) = x^3 - 8x + 10$, demuestre que hay valores de c para los cuales $f(c)$ es igual a ***a)*** π; ***b)*** $-\sqrt{3}$; ***c)*** 5,000,000.

58. Explique por qué los cinco enunciados siguientes están solicitando la misma información.

a) Obtenga las raíces de $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

b) Obtenga las coordenadas x de los puntos donde la curva $y = x^3$ cruza la recta $y = 3x + 1$.

c) Obtenga todos los valores de x para los cuales $x^3 - 3x = 1$.

d) Encuentre las coordenadas x de los puntos donde la curva cúbica $y = x^3 - 3x$ cruza la recta $y = 1$.

e) Resuelva la ecuación $x^3 - 3x - 1 = 0$.

59. Discontinuidad removible Dé un ejemplo de una función $f(x)$ que sea continua para todos los valores de x, excepto para $x = 2$, donde tiene una discontinuidad removible. Explique cómo sabe que $f(x)$ es discontinua en $x = 2$, y cómo sabe que la discontinuidad es removible.

60. Discontinuidad no removible Dé un ejemplo de una función $g(x)$ que sea continua para todos los valores de x, excepto para $x = -1$, donde tiene una discontinuidad no removible. Explique cómo sabe que g es discontinua en ese punto, y cómo sabe que la discontinuidad no es removible.

61. Una función discontinua en todos los puntos

a) Considere el hecho de que todo intervalo no vacío de números reales contiene números racionales e irracionales, para demostrar que la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es discontinua en todos los puntos.

b) ¿Es f continua por la derecha o por la izquierda en algún punto?

62. Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas para $0 \le x \le 1$, ¿podría $f(x)/g(x)$ ser discontinua en un punto de $[0, 1]$? Justifique su respuesta.

63. Si la función producto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ es continua en $x = 0$, ¿deben $f(x)$ y $g(x)$ ser continuas en $x = 0$? Justifique su respuesta.

64. Composición discontinua de funciones continuas Dé un ejemplo de funciones f y g, ambas continuas en $x = 0$, para las que la composición $f \circ g$ sea discontinua en $x = 0$. ¿Esto contradice el teorema 9? Fundamente su respuesta.

65. Funciones continuas siempre diferentes de cero ¿Es cierto que una función continua que nunca es cero en un intervalo jamás cambia de signo en ese intervalo? Justifique su respuesta.

66. Estiramiento de una liga de hule ¿Es cierto que si se estira una liga de hule tirando de uno de sus extremos hacia la derecha y del otro hacia la izquierda, algún punto de la liga terminará en su posición original? Justifique su respuesta.

67. Teorema del punto fijo Suponga que una función f es continua en un intervalo cerrado $[0, 1]$ y que $0 \le f(x) \le 1$ para toda x en $[0, 1]$. Demuestre que debe existir un número c en $[0, 1]$ tal que $f(c) = c$ (c se llama **punto fijo** de f.

68. La propiedad de conservación del signo en funciones continuas Sea f definida en un intervalo (a, b), y suponga que $f(c) \neq 0$ en alguna c donde f es continua. Demuestre que existe un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ alrededor de c donde f tiene el mismo signo que $f(c)$.

69. Demuestre que f es continua en c si y sólo si

$$\lim_{h \to 0} f(c + h) = f(c).$$

70. Con base en el ejercicio 69 y considerando las identidades

$$\operatorname{sen}(h + c) = \operatorname{sen} h \cos c + \cos h \operatorname{sen} c,$$

$$\cos(h + c) = \cos h \cos c - \operatorname{sen} h \operatorname{sen} c$$

demuestre que $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ son continuas en cualquier punto $x = c$.

T Resolución gráfica de ecuaciones

Con base en el teorema del valor intermedio, demuestre que cada ecuación de los ejercicios 71 a 76 tiene una solución. Luego, empleando una calculadora graficadora o un software para graficar, resuelva las ecuaciones.

71. $x^3 - 3x - 1 = 0$

72. $2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

73. $x(x - 1)^2 = 1$ (una raíz)

74. $\sqrt{x} + \sqrt{1 + x} = 4$

75. $\cos x = x$ (una raíz). Asegúrese de usar el modo radián.

76. $2 \operatorname{sen} x = x$ (tres raíces). Asegúrese de usar el modo radián.

2.6 Límites que involucran infinito y asíntotas de gráficas

En esta sección investigaremos el comportamiento de una función cuando la magnitud de la variable independiente x se vuelve cada vez más grande, o $x \to \pm\infty$. Además, ampliaremos el concepto de límite al de *límites infinitos*, los cuales no son como los que hemos visto hasta el momento, sino que exigen una definición nueva. Los límites infinitos aportan símbolos y conceptos útiles para describir el comportamiento de funciones cuyos valores se vuelven arbitrariamente grandes. Emplearemos estas ideas de límite para analizar las gráficas de funciones que tienen *asíntotas horizontales o verticales*.

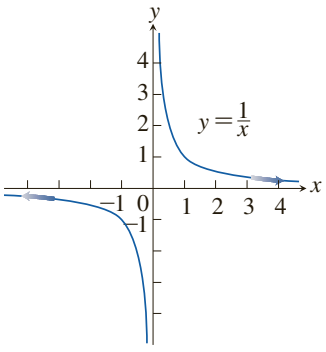


FIGURA 2.49 La gráfica de $y = 1/x$ se aproxima a 0 cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

Límites finitos cuando $x \to \pm\infty$

El símbolo de infinito, ∞, no representa un número real. Se usa para describir el comportamiento de una función cuando los valores en su dominio o rango sobrepasan cualquier cota. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ está definida para toda $x \neq 0$ (figura 2.49). Cuando x es positiva y se vuelve cada vez más grande, $1/x$ se vuelve cada vez más pequeño. Cuando x es negativa y su magnitud se vuelve cada vez más grande, $1/x$ nuevamente se vuelve pequeño. Resumimos estas observaciones diciendo que $f(x) = 1/x$ tiene límite 0 cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, o que 0 es un *límite* de $f(x) = 1/x$ *en el infinito y en el infinito negativo*. A continuación, las definiciones precisas.

DEFINICIONES

1. Se dice que $f(x)$ tiene **límite L cuando x tiende a infinito** y se escribe

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

si, para todo número $\epsilon > 0$, existe un número correspondiente M tal que para toda x

$$x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

2. Se dice que $f(x)$ tiene el **límite L cuando x tiende a menos infinito** y se escribe

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

si, para todo número $\epsilon > 0$, existe un número correspondiente N tal que para toda x

$$x < N \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Intuitivamente, $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ si, cuando x se aleja cada vez más del origen en dirección positiva, $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L. De manera similar, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ si, cuando x se aleja cada vez más del origen en dirección negativa, $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L.

La estrategia para calcular límites de funciones cuando $x \to \pm\infty$ es similar a la de los límites finitos de la sección 2.2. En esa ocasión, calculamos los límites de la constante y de las funciones identidad $y = k$ y $y = x$; después, ampliamos los resultados a otras funciones aplicando el teorema 1 de límites de combinaciones algebraicas. Aquí haremos lo mismo, excepto que las funciones iniciales son $y = k$ y $y = 1/x$, en vez de $y = k$ y $y = x$.

Los resultados básicos que se verificarán usando la definición formal son

$$\lim_{x\to\pm\infty} k = k \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0. \tag{1}$$

Demostramos el segundo resultado en el ejemplo 1, y dejaremos el primero para los ejercicios 87 y 88.

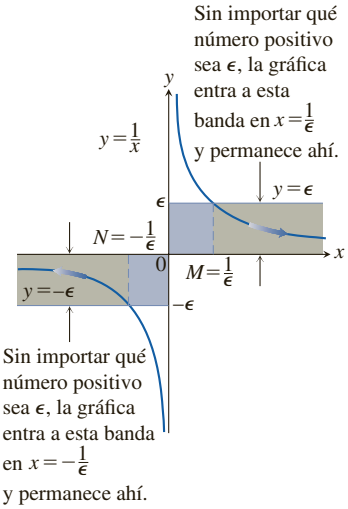


FIGURA 2.50 La geometría detrás del argumento del ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Demuestre que

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ ***b)*** $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$

Solución

a) Sea $\epsilon > 0$ dada. Debemos obtener un número M tal que, para toda x,

$$x > M \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon.$$

La implicación se satisface si $M = 1/\epsilon$ o cualquier número positivo más grande (figura 2.50). Esto demuestra que $\lim_{x\to\infty}(1/x) = 0$.

b) Sea $\epsilon > 0$. Debemos obtener un número N tal que, para toda x,

$$x < N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon.$$

La implicación se satisface si $N = -1/\epsilon$ o cualquier número menor que $-1/\epsilon$ (figura 2.50). Esto demuestra que $\lim_{x\to-\infty}(1/x) = 0$. ■

Los límites en el infinito tienen propiedades similares a las de los límites finitos.

TEOREMA 12: Todas las leyes de límites del teorema 1 son verdaderas cuando sustituimos $\lim_{x\to c}$ por $\lim_{x\to\infty}$ o $\lim_{x\to-\infty}$. Es decir, la variable x puede aproximarse a un número finito c o tender a $\pm\infty$.

EJEMPLO 2 Se utilizan las propiedades del teorema 12 para calcular límites de la misma manera que cuando x se aproxima a un número finito c.

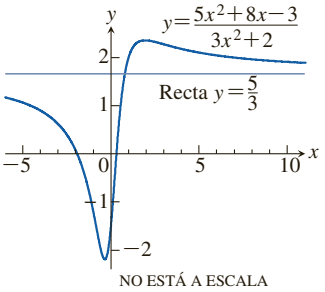
a) $$\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}5+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$$ Regla de la suma

$$=5+0=5$$ Límites conocidos

b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi\sqrt{3}}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\pi\sqrt{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\pi\sqrt{3}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$$ Regla del producto

$$=\pi\sqrt{3}\cdot0\cdot0=0$$ Límites conocidos ■



NO ESTÁ A ESCALA

FIGURA 2.51 Gráfica de la función del ejemplo 3*a*). La gráfica se aproxima a la recta $y=5/3$ cuando $|x|$ aumenta.

Límites al infinito de funciones racionales

Para determinar el límite de una función racional cuando $x\to\pm\infty$, primero dividimos el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x en el denominador. El resultado depende entonces de los grados de los polinomios involucrados.

EJEMPLO 3 Estos ejemplos ilustran lo que sucede cuando el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador.

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+(8/x)-(3/x^2)}{3+(2/x^2)}$$ Dividir el numerador y el denominador entre x^2.

$$=\frac{5+0-0}{3+0}=\frac{5}{3}$$ Vea la figura 2.51.

b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{11x+2}{2x^3-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(11/x^2)+(2/x^3)}{2-(1/x^3)}$$ Dividir el numerador y el denominador entre x^3.

$$=\frac{0+0}{2-0}=0$$ Vea la figura 2.52. ■

En los ejemplos 9 y 13 se ilustran casos en los cuales el grado del numerador es mayor que el grado del denominador.

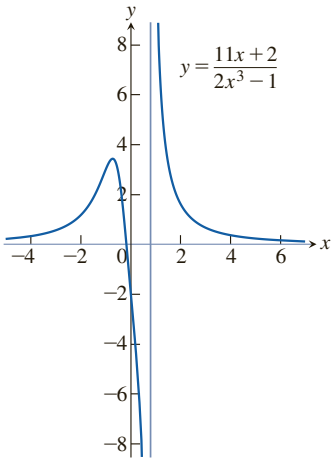


FIGURA 2.52 Gráfica de la función del ejemplo 3*b*). La gráfica se aproxima al eje x cuando $|x|$ aumenta.

Asíntotas horizontales

Si la distancia entre la gráfica de una función y alguna recta fija se aproxima a cero cuando un punto de la gráfica se aleja cada vez más del origen, decimos que la gráfica se aproxima asintóticamente a la recta, y esa recta es una *asíntota* de la gráfica.

Al analizar $f(x)=1/x$ (vea la figura 2.49), se observa que el eje x es una asíntota de la curva por la derecha, ya que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

y una asíntota de la curva por la izquierda porque

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Decimos que el eje x es una *asíntota horizontal* de la gráfica de $f(x)=1/x$.

DEFINICIÓN Una recta $y=b$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de una función $y=f(x)$ si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=b \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=b.$$

La gráfica de la función

$$f(x) = \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}$$

trazada en la figura 2.51 (ejemplo 3*a*) tiene a la recta $y = 5/3$ como asíntota horizontal, tanto a la derecha como a la izquierda, ya que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{5}{3} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{5}{3}.$$

EJEMPLO 4 Encuentre las asíntotas horizontales de la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}.$$

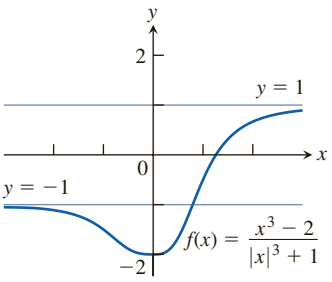


FIGURA 2.53 La gráfica de la función del ejemplo 4 tiene dos asíntotas horizontales.

Solución Calculamos los límites cuando $x \to \pm\infty$.

Para $x \geq 0$: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 2}{x^3 + 1} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1 - (2/x^3)}{1 + (1/x^3)} = 1.$

Para $x < 0$: $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3 - 2}{(-x)^3 + 1} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{1 - (2/x^3)}{-1 + (1/x^3)} = -1.$

Las asíntotas horizontales son $y = -1$ y $y = 1$. La gráfica se presenta en la figura 2.53. Observe que la gráfica cruza la asíntota horizontal $y = -1$ en un valor positivo de x. ■

EJEMPLO 5 Obtenga ***a)*** $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(1/x)$ y ***b)*** $\lim_{x\to\pm\infty} x \operatorname{sen}(1/x)$.

Solución

a) Introducimos una nueva variable, $t = 1/x$. Del ejemplo 1, sabemos que $t \to 0^+$ cuando $x \to \infty$ (vea la figura 2.49). Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{t\to0^+} \operatorname{sen} t = 0.$$

b) Calculamos los límites cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{t\to0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{t\to0^-} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$

La gráfica se presenta en la figura 2.54, y vemos que la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal. ■

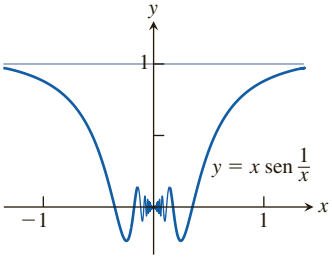


FIGURA 2.54 La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la función graficada aquí (ejemplo 5*b*).

El teorema del sándwich también se cumple para límites cuando $x \to \pm\infty$. Sin embargo, usted debe asegurarse de que la función cuyo límite se intenta determinar se encuentra entre las funciones que la acotan para valores muy grandes de x en magnitud consistente con $x \to \infty$ o con $x \to -\infty$.

EJEMPLO 6 Use el teorema del sándwich para encontrar la asíntota horizontal de la curva

$$y = 2 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

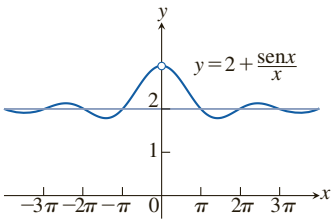


FIGURA 2.55 Una curva puede cruzar una de sus asíntotas una infinidad de veces (ejemplo 6).

Solución Nos interesa saber lo que ocurre cuando $x \to \pm\infty$. Como

$$0 \le \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \le \left|\frac{1}{x}\right|$$

y $\lim_{x\to\pm\infty}|1/x| = 0$, tenemos $\lim_{x\to\pm\infty}(\operatorname{sen} x)/x = 0$ por el teorema del sándwich. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(2 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 2 + 0 = 2,$$

y la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal de la curva, tanto a la izquierda como a la derecha (figura 2.55).

Este ejemplo muestra que una curva puede cruzar muchas veces una de sus asíntotas horizontales. ■

Podemos averiguar el comportamiento de $y = f(1/x)$ cuando $x \to 0$ investigando $y = f(t)$ cuando $t \to \pm\infty$, donde $t = 1/x$.

EJEMPLO 7 Obtenga $\lim_{x\to 0^+} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

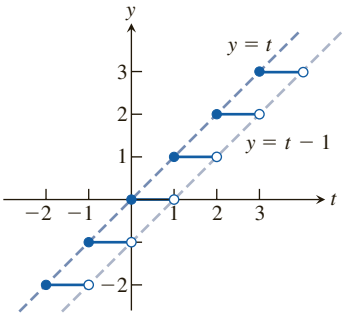


FIGURA 2.56 La gráfica de la función mayor entero $y = \lfloor t \rfloor$ se encuentra entre $y = t - 1$ y $y = t$.

Solución Sea $t = 1/x$, de manera que

$$\lim_{x\to 0^+} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\lfloor t \rfloor$$

De la gráfica en la figura 2.56, vemos que $t - 1 \le \lfloor t \rfloor \le t$, lo cual da

$$1 - \frac{1}{t} \le \frac{1}{t}\lfloor t \rfloor \le 1 \qquad \text{Multiplique las desigualdades por } \frac{1}{t} > 0.$$

Del teorema del sándwich, se deduce que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\lfloor t \rfloor = 1,$$

así que el valor del límite que buscamos es 1. ■

EJEMPLO 8 Obtenga $\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2 + 16}\right)$.

Solución Tanto x como $\sqrt{x^2 + 16}$ tienden a infinito cuando $x \to \infty$, de manera que lo que sucede a la diferencia en el límite no está claro (no podemos restar ∞ de ∞ porque el símbolo no representa un número real). En esta situación multiplicamos el numerador y el denominador por la expresión radical conjugada para obtener un resultado algebraico equivalente:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2 + 16}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2 + 16}\right)\frac{x + \sqrt{x^2 + 16}}{x + \sqrt{x^2 + 16}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - (x^2 + 16)}{x + \sqrt{x^2 + 16}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-16}{x + \sqrt{x^2 + 16}}.$$

Cuando $x \to \infty$, el denominador en esta última expresión se vuelve arbitrariamente grande, por lo que vemos que el límite es 0. También podemos obtener este resultado por un cálculo directo usando las leyes de los límites:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-16}{x + \sqrt{x^2 + 16}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{16}{x}}{1 + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{16}{x^2}}} = \frac{0}{1 + \sqrt{1 + 0}} = 0.$$

■

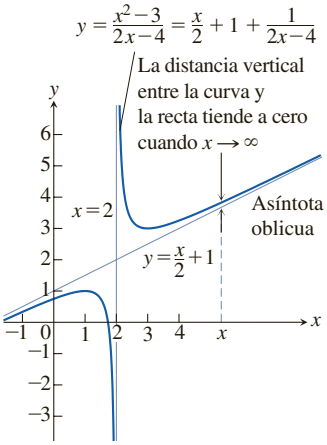


FIGURA 2.57 La gráfica de la función del ejemplo 9 tiene una asíntota oblicua.

Asíntotas oblicuas

Si el grado del numerador de una función racional es mayor en una unidad que el grado del denominador, la gráfica tiene una **asíntota oblicua** o **inclinada**. Obtenemos una ecuación para la asíntota dividiendo el numerador entre el denominador, con el propósito de expresar f como una función lineal más un residuo que tiende a cero cuando $x \to \pm\infty$.

EJEMPLO 9 Obtenga la asíntota oblicua de la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

en la figura 2.57.

Solución Estamos interesados en el comportamiento cuando $x \to \pm\infty$. Al dividir $(x^2 - 3)$ entre $(2x - 4)$, tenemos:

$$\begin{array}{r} \frac{x}{2} + 1 \\ 2x - 4 \overline{)\, x^2 - 3} \\ \underline{x^2 - 2x} \\ 2x - 3 \\ \underline{2x - 4} \\ 1 \end{array}$$

Esto nos dice que

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \underbrace{\left(\frac{x}{2} + 1\right)}_{\substack{\text{función} \\ \text{lineal } g(x)}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2x - 4}\right)}_{\text{residuo}}.$$

Cuando $x \to \pm\infty$, el residuo (cuya magnitud representa la distancia vertical entre las gráficas de f y g) tiende a cero, haciendo que la recta oblicua

$$g(x) = \frac{x}{2} + 1$$

sea una asíntota de la gráfica de f (figura 2.57). La recta $y = g(x)$ es una asíntota tanto a la derecha como a la izquierda. En la siguiente sección confirmaremos que la función $f(x)$ crece arbitrariamente en valor absoluto cuando $x \to 2$ (donde el denominador es cero), como se muestra en la gráfica. ■

Observe en el ejemplo 9 que el grado del numerador en una función racional es mayor que el grado del denominador, por lo que el límite cuando $|x|$ se vuelve más grande es $+\infty$ o $-\infty$, dependiendo de los signos resultantes en el numerador y el denominador.

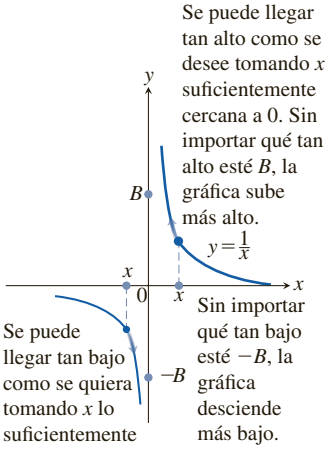


FIGURA 2.58 Límites laterales infinitos:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Límites infinitos

Veamos nuevamente la función $f(x) = 1/x$. Cuando $x \to 0^+$, los valores de f crecen sin cota, alcanzando y rebasando a cualquier número real positivo. Esto es, dado cualquier número real positivo B, sin importar qué tan grande sea, los valores de f pueden ser todavía mayores (figura 2.58). Por lo tanto, f no tiene límite cuando $x \to 0^+$. Sin embargo, es conveniente describir el comportamiento de f diciendo que $f(x)$ tiende a ∞ cuando $x \to 0^+$. Escribimos

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$$

Al escribir esta ecuación, *no* estamos diciendo que el límite exista, ni tampoco que exista un número real ∞, ya que no existe tal número. Más bien, estamos diciendo que $\lim_{x \to 0^+}(1/x)$ *no existe, porque* $1/x$ *se vuelve arbitrariamente grande y es positivo cuando* $x \to 0^+$.

A medida que $x \to 0^-$, los valores de $f(x) = 1/x$ se vuelven arbitrariamente grandes en magnitud y son negativos. Dado cualquier número real $-B$, los valores de f terminan ubicándose por debajo de $-B$. (Vea la figura 2.58). Escribimos

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Una vez más, no se está afirmando que el límite exista, ni que sea igual al número $-\infty$. *No* existe un número real $-\infty$. En realidad, estamos describiendo el comportamiento de una función cuyo límite *no existe* cuando $x \to 0^-$, *porque sus valores son arbitrariamente grandes en magnitud y negativos*.

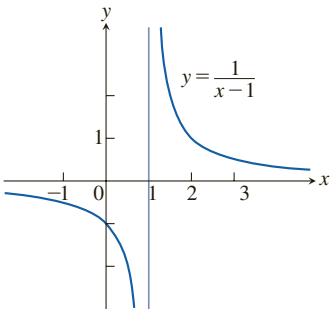


FIGURA 2.59 Cerca de $x = 1$, la función $y = 1/(x-1)$ se comporta igual que la función $y = 1/x$ cerca de $x = 0$. Su gráfica es la gráfica de $y = 1/x$ desplazada 1 unidad a la derecha (ejemplo 10).

EJEMPLO 10 Obtenga $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}$ y $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}$.

Solución geométrica La gráfica de $y = 1/(x-1)$ es la gráfica de $y = 1/x$, desplazada una unidad a la derecha (figura 2.59). Por lo tanto, el comportamiento de $y = 1/(x-1)$ cerca de 1 es exactamente el mismo que el de $y = 1/x$ cerca de 0:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

Solución analítica Piense en el número $x - 1$ y su recíproco. Cuando $x \to 1^+$, tenemos que $(x-1) \to 0^+$ y $1/(x-1) \to \infty$. Cuando $x \to 1^-$, tenemos que $(x-1) \to 0^-$ y $1/(x-1) \to -\infty$. ■

EJEMPLO 11 Explique el comportamiento de

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ cuando } x \to 0.$$

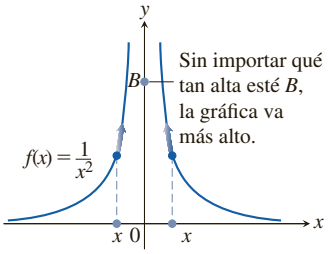


FIGURA 2.60 La gráfica de $f(x)$ del ejemplo 11 tiende al infinito cuando $x \to 0$.

Solución Cuando x se aproxima a cero por cualquier lado, los valores de $1/x^2$ son positivos y se vuelven arbitrariamente grandes (figura 2.60). Esto significa que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

La función $y = 1/x$ muestra un comportamiento inconsistente cuando $x \to 0$. Tenemos que $1/x \to \infty$ si $x \to 0^+$, pero $1/x \to -\infty$ si $x \to 0^-$. Lo único que podemos decir acerca de $\lim_{x\to 0}(1/x)$ es que no existe. La función $y = 1/x^2$ es distinta. Sus valores tienden al infinito cuando x se aproxima a cero por cualquier lado, de manera que podemos decir que $\lim_{x\to 0}(1/x^2) = \infty$. ■

EJEMPLO 12 Los siguientes ejemplos muestran que las funciones racionales pueden comportarse de distintas maneras cerca de los ceros de sus denominadores.

a) $\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x+2} = 0$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

c) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty$

Los valores son negativos para $x > 2$, x cerca de 2.

d) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty$

Los valores son positivos para $x < 2$, x cerca de 2.

e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \dfrac{x-3}{(x-2)(x+2)}$ no existe. Vea los incisos *c)* y *d)*.

f) $\lim_{x\to 2} \dfrac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \dfrac{-(x-2)}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \dfrac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$

En los incisos *a)* y *b)*, el efecto del cero en el denominador en $x = 2$ se cancela, ya que el numerador también es cero en ese punto. Por lo tanto, existe un límite finito. Esto es falso en el inciso *f)*, donde la cancelación todavía deja un factor que se anula en el denominador. ■

EJEMPLO 13 Obtenga $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x^5 - 6x^4 + 1}{3x^2 + x - 7}$.

Solución Se nos pide obtener el límite de una función racional cuando $x \to -\infty$, así que dividimos el numerador y el denominador entre x^2, la mayor potencia de x en el denominador:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^5 - 6x^4 + 1}{3x^2 + x - 7} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3 - 6x^2 + x^{-2}}{3 + x^{-1} - 7x^{-2}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2(x-3) + x^{-2}}{3 + x^{-1} - 7x^{-2}}$$

$$= -\infty, \qquad x^{-n} \to 0,\ x - 3 \to -\infty$$

porque el numerador tiende a $-\infty$, mientras que el denominador se aproxima a 3 cuando $x \to -\infty$. ■

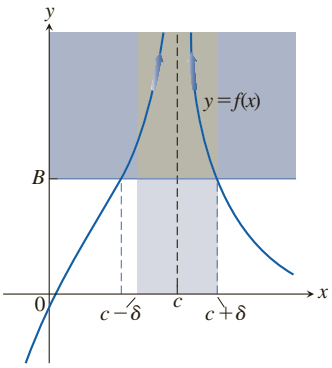


FIGURA 2.61 Para $c - \delta < x < c + \delta$, la gráfica de $f(x)$ se encuentra arriba de la recta $y = B$.

Definición formal de límites infinitos

En lugar de requerir que $f(x)$ esté arbitrariamente cercana a un número finito L para toda x suficientemente cerca de c, las definiciones de límites infinitos requieren que $f(x)$ se ubique arbitrariamente lejos de cero. Excepto por este cambio, el lenguaje es idéntico al que se ha utilizado antes. Las figuras 2.61 y 2.62 ilustran estas definiciones.

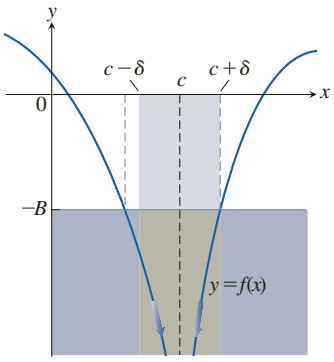


FIGURA 2.62 Para $c - \delta < x < c + \delta$, la gráfica de $f(x)$ se encuentra debajo de la recta $y = -B$.

DEFINICIONES

1. Decimos que ***f*(*x*) tiende a infinito cuando *x* se aproxima a *c***, y escribimos

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty,$$

si para todo número real positivo B existe una correspondiente $\delta > 0$ tal que, para toda x,

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > B.$$

2. Decimos que ***f*(*x*) tiende a menos infinito cuando *x* se aproxima a *c***, y escribimos

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty,$$

si para todo número real negativo $-B$ existe una correspondiente $\delta > 0$ tal que, para toda x,

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < -B.$$

Las definiciones precisas de los límites laterales infinitos en c son similares y se enuncian en los ejercicios.

EJEMPLO 14 Demuestre que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Solución Dada $B > 0$, queremos obtener una $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - 0| < \delta \quad \text{implica} \quad \frac{1}{x^2} > B.$$

Ahora,

$$\frac{1}{x^2} > B \qquad \text{si y sólo si} \qquad x^2 < \frac{1}{B}$$

o, de forma equivalente,

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{B}}.$$

Así, al elegir $\delta = 1/\sqrt{B}$ (o cualquier número positivo menor), vemos que

$$|x| < \delta \quad \text{implica} \quad \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} \geq B.$$

Por lo tanto, por definición,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

■

Asíntotas verticales

Observe que la distancia entre un punto de la gráfica de $f(x) = 1/x$ y el eje y se aproxima a cero cuando el punto se mueve verticalmente a lo largo de la gráfica alejándose del origen (figura 2.63). La función $f(x) = 1/x$ no tiene límite cuando x se aproxima a 0 porque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Decimos que la recta $x = 0$ (el eje y) es una *asíntota vertical* de la gráfica de $f(x) = 1/x$. Observe que el denominador es cero en $x = 0$ y que la función no está definida ahí.

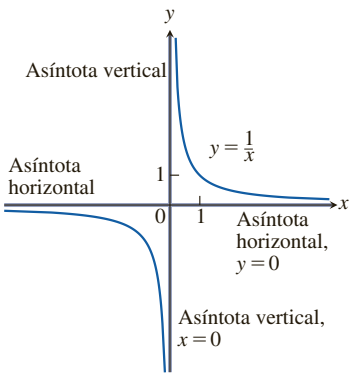


FIGURA 2.63 Los ejes de coordenadas son asíntotas de ambas ramas de la hipérbola $y = 1/x$.

DEFINICIÓN Una recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de una función $y = f(x)$ ya sea que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

EJEMPLO 15 Obtenga las asíntotas horizontal y vertical de la curva

$$y = \frac{x + 3}{x + 2}.$$

Solución Nos interesa el comportamiento cuando $x \to \pm\infty$ y cuando $x \to -2$, donde el denominador es cero.

Las asíntotas se descubren rápidamente si escribimos la función racional como una polinomial con un residuo, dividiendo $(x + 3)$ entre $(x + 2)$:

$$\begin{array}{r} 1 \\ x + 2 \overline{)\, x + 3} \\ \underline{x + 2} \\ 1 \end{array}$$

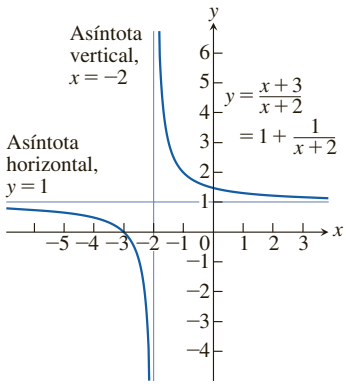


FIGURA 2.64 Las rectas $y = 1$ y $x = -2$ son asíntotas de la curva en el ejemplo 15.

Este resultado nos permite rescribir a y como:

$$y = 1 + \frac{1}{x + 2}.$$

Cuando $x \to \pm\infty$, la curva se aproxima a la asíntota horizontal $y = 1$; cuando $x \to -2$, la curva se aproxima a la asíntota vertical $x = -2$. Vemos que la curva en cuestión es la gráfica de $f(x) = 1/x$ desplazada una unidad hacia arriba y dos unidades hacia la izquierda (figura 2.64). Las asíntotas, en vez de ser los ejes de coordenadas, son ahora las rectas $y = 1$ y $x = -2$. ■

EJEMPLO 16 Obtenga las asíntotas horizontal y vertical de la gráfica de

$$f(x) = -\frac{8}{x^2 - 4}.$$

Solución Estamos interesados en el comportamiento cuando $x \to \pm\infty$ y cuando $x \to \pm 2$, donde el denominador es cero. Observe que f es una función par de x, de manera que su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

a) *El comportamiento cuando* $x \to \pm\infty$. Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica a la derecha. Por simetría, también $y = 0$ es una asíntota por la izquierda (figura 2.65). Observe que la curva se aproxima al eje x sólo por el lado negativo (o por debajo). También, $f(0) = 2$.

b) *El comportamiento cuando* $x \to \pm 2$. Como

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty,$$

la recta $x = 2$ es una asíntota vertical tanto a la derecha como a la izquierda. Por simetría, la recta $x = -2$ también es una asíntota vertical.

No hay otras asíntotas, porque f tiene un límite finito en cualquier otro punto. ■

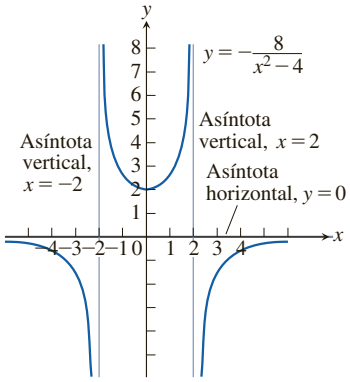


FIGURA 2.65 Gráfica de la función del ejemplo 16. Observe que la curva se aproxima al eje x solamente por un lado. Las asíntotas no tienen que ser bilaterales.

EJEMPLO 17 Las curvas

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{y} \qquad y = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

tienen asíntotas verticales en múltiplos enteros impares de $\pi/2$, donde $\cos x = 0$ (figura 2.66).

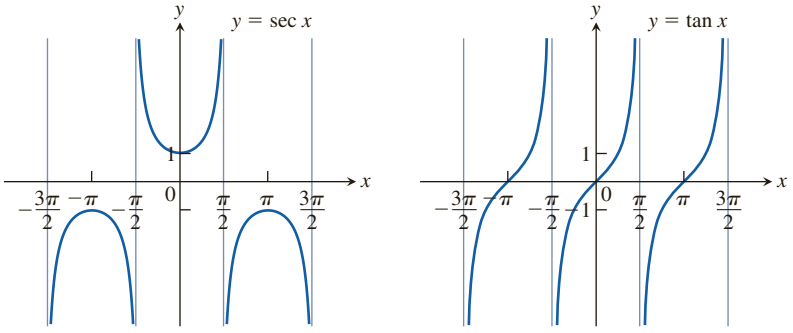


FIGURA 2.66 Las gráficas de sec x y tan x tienen una infinidad de asíntotas verticales (ejemplo 17). ■

Términos dominantes

En el ejemplo 9 vimos que con una división larga pudimos rescribir la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

como una función lineal y un término residual:

$$f(x) = \left(\frac{x}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{2x - 4}\right).$$

Esto inmediatamente nos dice que

$$f(x) \approx \frac{x}{2} + 1 \qquad \text{Para } |x| \text{ grande, } \frac{1}{2x-4} \text{ está cerca de 0.}$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2x - 4} \qquad \text{Para } x \text{ cerca de 2, este término es muy grande en valor absoluto.}$$

Si queremos saber cómo se comporta f, ésta es la manera de averiguarlo. Se comporta como $y = (x/2) + 1$ cuando $|x|$ es grande y la contribución de $1/(2x-4)$ al valor total de f es insignificante. Se comporta como $1/(2x-4)$ cuando x está tan cerca de 2 que $1/(2x-4)$ hace la contribución dominante.

Decimos que $(x/2) + 1$ **domina** cuando x es numéricamente grande, y también que $1/(2x-4)$ domina cuando x está cerca de 2. Los **términos dominantes** como éstos ayudan a predecir el comportamiento de las funciones.

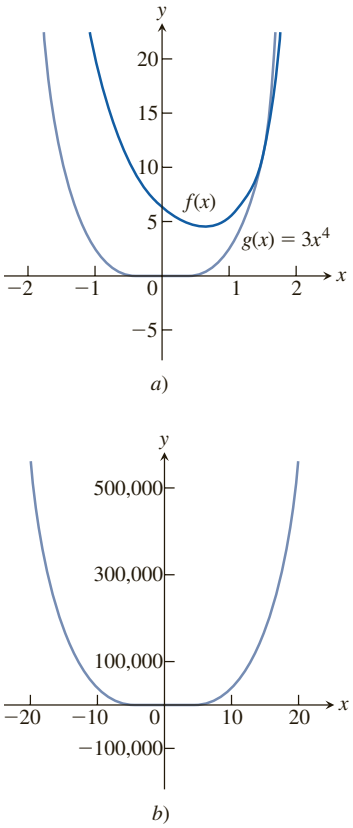


FIGURA 2.67 Las gráficas de f y g son *a*) distintas para $|x|$ pequeña, y *b*) casi idénticas para $|x|$ grande (ejemplo 18).

EJEMPLO 18 Sean $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6$ y $g(x) = 3x^4$. Demuestre que aunque f y g son bastante diferentes para valores numéricos pequeños de x, son prácticamente idénticas para $|x|$ muy grande, en el sentido de que sus razones se aproximan a 1 cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

Solución Las gráficas de f y g se comportan de manera bastante diferente cerca del origen (figura 2.67*a*), pero parecen prácticamente idénticas a gran escala (figura 2.67*b*).

Podemos probar que el término $3x^4$ en f, representado gráficamente por g, domina a la polinomial f para valores numéricos grandes de x, examinando la razón de las dos funciones cuando $x \to \pm\infty$. Encontramos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6}{3x^4} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{3x^3} + \frac{2}{x^4}\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

lo que significa que f y g parecen aproximadamente idénticas cuando $|x|$ es grande. ■

Resumen

En este capítulo vimos varias ideas fundamentales del cálculo que son significativas y precisas por el concepto de límite. Éstas incluyen las tres ideas de la razón de cambio exacta de una función, la pendiente de la gráfica de una función en un punto y la continuidad de una función. Los métodos principales que se utilizan para el cálculo de límites de muchas funciones están incluidos en las leyes algebraicas de los límites del teorema 1 y en el teorema del sándwich, los cuales se demuestran usando la definición precisa de límite. Vimos que estas reglas de cálculo también se aplican para límites laterales y límites al infinito. Sin embargo, para calcular límites complicados como

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}, \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} x^{1/x},$$

se requiere algo más que las técnicas sencillas del álgebra. La *derivada* es una de las herramientas que necesitamos para calcular límites como éstos, y tal concepto es el tema central del siguiente capítulo.

Ejercicios 2.6

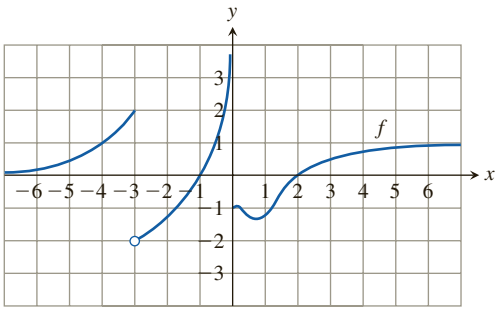
Obtención de límites

1. Para la función f, cuya gráfica se presenta, determine los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 2} f(x)$ ***b)*** $\lim_{x\to -3^+} f(x)$ ***c)*** $\lim_{x\to -3^-} f(x)$

d) $\lim_{x\to -3} f(x)$ ***e)*** $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ***f)*** $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

g) $\lim_{x\to 0} f(x)$ ***h)*** $\lim_{x\to \infty} f(x)$ ***i)*** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$



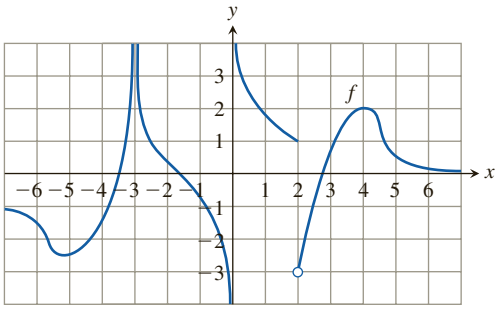
2. Para la función f, cuya gráfica se presenta, determine los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 4} f(x)$ ***b)*** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ ***c)*** $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

d) $\lim_{x\to 2} f(x)$ ***e)*** $\lim_{x\to -3^+} f(x)$ ***f)*** $\lim_{x\to -3^-} f(x)$

g) $\lim_{x\to -3} f(x)$ ***h)*** $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ***i)*** $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

j) $\lim_{x\to 0} f(x)$ ***k)*** $\lim_{x\to \infty} f(x)$ ***l)*** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$



En los ejercicios 3 a 8, encuentre el límite de cada función ***a)*** cuando $x \to \infty$ y ***b)*** cuando $x \to -\infty$. (Quizá le convendría visualizar su respuesta en una calculadora o con algún software para graficar).

3. $f(x) = \dfrac{2}{x} - 3$

4. $f(x) = \pi - \dfrac{2}{x^2}$

5. $g(x) = \dfrac{1}{2 + (1/x)}$

6. $g(x) = \dfrac{1}{8 - (5/x^2)}$

7. $h(x) = \dfrac{-5 + (7/x)}{3 - (1/x^2)}$

8. $h(x) = \dfrac{3 - (2/x)}{4 + (\sqrt{2}/x^2)}$

Encuentre los límites en los ejercicios 9 a 12.

9. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

10. $\lim_{\theta\to -\infty} \dfrac{\cos\theta}{3\theta}$

11. $\lim_{t\to -\infty} \dfrac{2 - t + \operatorname{sen} t}{t + \cos t}$

12. $\lim_{r\to \infty} \dfrac{r + \operatorname{sen} r}{2r + 7 - 5\operatorname{sen} r}$

Límites de funciones racionales

En los ejercicios 13 a 22, obtenga el límite de cada función racional ***a)*** cuando $x \to \infty$ y ***b)*** cuando $x \to -\infty$.

13. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{5x + 7}$

14. $f(x) = \dfrac{2x^3 + 7}{x^3 - x^2 + x + 7}$

15. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 3}$

16. $f(x) = \dfrac{3x + 7}{x^2 - 2}$

17. $h(x) = \dfrac{7x^3}{x^3 - 3x^2 + 6x}$

18. $h(x) = \dfrac{9x^4 + x}{2x^4 + 5x^2 - x + 6}$

19. $g(x) = \dfrac{10x^5 + x^4 + 31}{x^6}$

20. $g(x) = \dfrac{x^3 + 7x^2 - 2}{x^2 - x + 1}$

21. $f(x) = \dfrac{3x^7 + 5x^2 - 1}{6x^3 - 7x + 3}$

22. $h(x) = \dfrac{5x^8 - 2x^3 + 9}{3 + x - 4x^5}$

Límites cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$

El proceso por el cual determinamos los límites de las funciones racionales se aplica por igual a razones que incluyen potencias no enteras o negativas de x. Divida el numerador y el denominador entre la potencia más alta de x en el denominador y proceda a partir de ahí. Obtenga los límites de los ejercicios 23 a 36.

23. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{\dfrac{8x^2 - 3}{2x^2 + x}}$

24. $\lim_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^2 + x - 1}{8x^2 - 3}\right)^{1/3}$

25. $\lim_{x\to -\infty} \left(\dfrac{1 - x^3}{x^2 + 7x}\right)^5$

26. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x}{x^3 + x - 2}}$

27. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7}$

28. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$

29. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$

30. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^{-1} + x^{-4}}{x^{-2} - x^{-3}}$

31. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2x^{5/3} - x^{1/3} + 7}{x^{8/5} + 3x + \sqrt{x}}$

32. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + x^{2/3} - 4}$

33. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$

34. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$

35. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x - 3}{\sqrt{4x^2 + 25}}$

36. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{4 - 3x^3}{\sqrt{x^6 + 9}}$

Límites infinitos

Obtenga los límites en los ejercicios 37 a 48.

37. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{3x}$

38. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{5}{2x}$

39. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{3}{x - 2}$

40. $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x - 3}$

41. $\lim_{x\to -8^+} \dfrac{2x}{x + 8}$

42. $\lim_{x\to -5^-} \dfrac{3x}{2x + 10}$

43. $\lim_{x\to 7} \dfrac{4}{(x - 7)^2}$

44. $\lim_{x\to 0} \dfrac{-1}{x^2(x + 1)}$

45. ***a)*** $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{2}{3x^{1/3}}$ ***b)*** $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{2}{3x^{1/3}}$

46. *a)* $\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^{1/5}}$ *b)* $\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x^{1/5}}$

47. $\lim_{x\to 0} \frac{4}{x^{2/5}}$ **48.** $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}}$

Obtenga los límites en los ejercicios 49 a 52.

49. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan x$ **50.** $\lim_{x\to(-\pi/2)^+} \sec x$

51. $\lim_{\theta\to 0^-} (1 + \csc\theta)$ **52.** $\lim_{\theta\to 0} (2 - \cot\theta)$

Obtenga los límites en los ejercicios 53 a 58.

53. $\lim \frac{1}{x^2 - 4}$ cuando

a) $x \to 2^+$ *b)* $x \to 2^-$

c) $x \to -2^+$ *d)* $x \to -2^-$

54. $\lim \frac{x}{x^2 - 1}$ cuando

a) $x \to 1^+$ *b)* $x \to 1^-$

c) $x \to -1^+$ *d)* $x \to -1^-$

55. $\lim \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right)$ cuando

a) $x \to 0^+$ *b)* $x \to 0^-$

c) $x \to \sqrt[3]{2}$ *d)* $x \to -1$

56. $\lim \frac{x^2 - 1}{2x + 4}$ cuando

a) $x \to -2^+$ *b)* $x \to -2^-$

c) $x \to 1^+$ *d)* $x \to 0^-$

57. $\lim \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2}$ cuando

a) $x \to 0^+$ *b)* $x \to 2^+$

c) $x \to 2^-$ *d)* $x \to 2$

e) Si es así, ¿qué se puede decir del límite cuando $x \to 0$?

58. $\lim \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x}$ cuando

a) $x \to 2^+$ *b)* $x \to -2^+$

c) $x \to 0^-$ *d)* $x \to 1^+$

e) Si es así, ¿qué se puede decir del límite cuando $x \to 0$?

Obtenga los límites en los ejercicios 59 a 62.

59. $\lim \left(2 - \frac{3}{t^{1/3}}\right)$ cuando

a) $t \to 0^+$ *b)* $t \to 0^-$

60. $\lim \left(\frac{1}{t^{3/5}} + 7\right)$ cuando

a) $t \to 0^+$ *b)* $t \to 0^-$

61. $\lim \left(\frac{1}{x^{2/3}} + \frac{2}{(x-1)^{2/3}}\right)$ cuando

a) $x \to 0^+$ *b)* $x \to 0^-$

c) $x \to 1^+$ *d)* $x \to 1^-$

62. $\lim \left(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\right)$ cuando

a) $x \to 0^+$ *b)* $x \to 0^-$

c) $x \to 1^+$ *d)* $x \to 1^-$

Graficación de funciones racionales sencillas

Grafique las funciones racionales de los ejercicios 63 a 68. Incluya las gráficas y ecuaciones de las asíntotas y los términos dominantes.

63. $y = \frac{1}{x - 1}$ **64.** $y = \frac{1}{x + 1}$

65. $y = \frac{1}{2x + 4}$ **66.** $y = \frac{-3}{x - 3}$

67. $y = \frac{x + 3}{x + 2}$ **68.** $y = \frac{2x}{x + 1}$

Creación de gráficas y funciones

En los ejercicios 69 a 72, trace la gráfica de una función $y = f(x)$ que satisfaga las condiciones indicadas. No se requieren fórmulas, sólo anote el nombre de los ejes de coordenadas al lado de éstos y dibuje la gráfica adecuada. (No hay una sola respuesta, de modo que sus gráficas pueden ser diferentes de las que aparecen en la sección de respuestas).

69. $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

70. $f(0) = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$, y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2$

71. $f(0) = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, y $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$

72. $f(2) = 1$, $f(-1) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, y $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$

En los ejercicios 73 a 76, obtenga una función que satisfaga las condiciones indicadas y trace su gráfica. (No hay una sola respuesta. Cualquier función que satisfaga las condiciones es aceptable. Siéntase en libertad para usar fórmulas definidas en partes, si eso ayuda).

73. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$, y $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$

74. $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$, $\lim_{x\to 3^-} g(x) = -\infty$, y $\lim_{x\to 3^+} g(x) = \infty$

75. $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -1$, $\lim_{x\to\infty} h(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^-} h(x) = -1$, y $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 1$

76. $\lim_{x\to\pm\infty} k(x) = 1$, $\lim_{x\to 1^-} k(x) = \infty$, y $\lim_{x\to 1^+} k(x) = -\infty$

77. Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son polinomiales en x y que $\lim_{x\to\infty} (f(x)/g(x)) = 2$. ¿Puede concluir algo acerca de $\lim_{x\to-\infty} (f(x)/g(x))$? Justifique su respuesta.

78. Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son polinomiales en x. ¿La gráfica de $f(x)/g(x)$ puede tener una asíntota si $g(x)$ nunca es cero? Justifique su respuesta.

79. ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener la gráfica de una función racional dada? Justifique su respuesta.

Obtención de límites de diferencias cuando $x \to \pm\infty$

Obtenga los límites en los ejercicios 80 a 86.

80. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x + 9} - \sqrt{x + 4})$

81. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 25} - \sqrt{x^2 - 1})$

82. $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2 + 3} + x)$

83. $\lim_{x\to-\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + 3x - 2})$

84. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{9x^2 - x} - 3x)$

85. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

86. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

Uso de las definiciones formales

Use las definiciones formales de límites cuando $x\to\pm\infty$ para establecer los límites en los ejercicios 87 y 88.

87. Si f tiene el valor constante $f(x)=k$, entonces, $\lim_{x\to\infty} f(x)=k$.

88. Si f tiene el valor constante $f(x)=k$, entonces, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=k$.

Emplee las definiciones formales de límite para demostrar los enunciados en los ejercicios 89 a 92.

89. $\lim_{x\to0}\dfrac{-1}{x^2}=-\infty$ **90.** $\lim_{x\to0}\dfrac{1}{|x|}=\infty$

91. $\lim_{x\to3}\dfrac{-2}{(x-3)^2}=-\infty$ **92.** $\lim_{x\to-5}\dfrac{1}{(x+5)^2}=\infty$

93. Ésta es la definición de **límite infinito por la derecha**.

> Se dice que $f(x)$ tiende a infinito cuando x se aproxima a c por la derecha, y se escribe
>
> $$\lim_{x\to c^+} f(x)=\infty,$$
>
> si, para todo número real positivo B, existe un número correspondiente $\delta>0$ tal que, para toda x,
>
> $$c<x<c+\delta \quad\Rightarrow\quad f(x)>B.$$

Modifique la definición para cubrir los siguientes casos.

a) $\lim_{x\to c^-} f(x)=\infty$

b) $\lim_{x\to c^+} f(x)=-\infty$

c) $\lim_{x\to c^-} f(x)=-\infty$

Emplee las definiciones formales del ejercicio 93 para demostrar los enunciados de límite en los ejercicios 94 a 98.

94. $\lim_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=\infty$ **95.** $\lim_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

96. $\lim_{x\to2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$ **97.** $\lim_{x\to2^+}\dfrac{1}{x-2}=\infty$

98. $\lim_{x\to1^-}\dfrac{1}{1-x^2}=\infty$

Asíntotas oblicuas

Grafique las funciones racionales en los ejercicios 99 a 104. Incluya las gráficas y ecuaciones de las asíntotas.

99. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ **100.** $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

101. $y=\dfrac{x^2-4}{x-1}$ **102.** $y=\dfrac{x^2-1}{2x+4}$

103. $y=\dfrac{x^2-1}{x}$ **104.** $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$

Ejercicios de graficación adicionales

T Grafique las curvas de los ejercicios 105 a 108. Explique la relación entre la fórmula de la curva y lo que ve.

105. $y=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

106. $y=\dfrac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$

107. $y=x^{2/3}+\dfrac{1}{x^{1/3}}$

108. $y=\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x^2+1}\right)$

T Grafique las funciones de los ejercicios 109 y 110. Después, conteste las siguientes preguntas.

a) ¿Cómo se comporta la gráfica cuando $x\to0^+$?

b) ¿Cómo se comporta la gráfica cuando $x\to\pm\infty$?

c) ¿Cómo se comporta la gráfica cerca de $x=1$ y $x=-1$?

Justifique sus respuestas.

109. $y=\dfrac{3}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{2/3}$ **110.** $y=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{2/3}$

Capítulo 2 Preguntas de repaso

1. ¿Cuál es la razón promedio de cambio de la función $g(t)$ en el intervalo de $t=a$ a $t=b$? ¿Cómo está relacionada con la recta secante?

2. ¿Qué límite debe de calcularse para encontrar la razón de cambio de la función $g(t)$ en $t=t_0$?

3. Dé una definición informal o intuitiva del límite

$$\lim_{x\to c} f(x)=L.$$

¿Por qué decimos que esa definición es "informal"? Dé ejemplos.

4. ¿La existencia y el valor del límite de una función $f(x)$ cuando x se aproxima a c depende siempre de lo que ocurra en $x=c$? Explique por qué y dé ejemplos.

5. ¿Qué comportamiento puede tener una función para que el límite no exista? Dé ejemplos.

6. ¿Qué teoremas nos sirven para calcular límites? Dé ejemplos de su uso.

7. ¿Cómo están relacionados los límites laterales con los límites? ¿Cómo puede usarse (algunas veces) esta relación para calcular un límite o demostrar que no existe? Dé ejemplos.

8. ¿Cuál es el valor de $\lim_{\theta\to0}((\operatorname{sen}\theta)/\theta)$? ¿Importa si θ se mide en radianes o en grados? Explique por qué.

9. ¿Qué significa exactamente $\lim_{x\to c} f(x) = L$? Dé un ejemplo en el que, dados f, L, c y $\epsilon > 0$, encuentre una $\delta > 0$ en la definición formal de límite.

10. Dé las definiciones precisas de los siguientes enunciados.

a) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 5$ ***b)*** $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 5$

c) $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$ ***d)*** $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$

11. ¿Qué condiciones debe satisfacer una función para ser continua en un punto interior de su dominio? ¿Cuáles debe cumplir para ser continua en un punto extremo de su dominio?

12. ¿Cómo puede ayudarnos la observación de la gráfica de una función para identificar dónde es continua la función?

13. ¿Qué significa que una función sea continua por la derecha en un punto? ¿Qué significa que sea continua por la izquierda? ¿Cómo están relacionadas la continuidad y la continuidad lateral?

14. ¿Qué significa que una función sea continua en un intervalo? Dé ejemplos para ilustrar el hecho de que una función que no es continua en todo su dominio puede, sin embargo, ser continua en intervalos seleccionados dentro de su dominio.

15. ¿Cuáles son los tipos básicos de discontinuidades? Dé un ejemplo de cada uno. ¿Qué es una discontinuidad removible? Dé un ejemplo.

16. ¿Qué significa que una función tenga la propiedad del valor intermedio? ¿Qué condiciones garantizan que una función tenga esta propiedad en un intervalo? ¿Cuáles son las consecuencias de graficar y resolver la ecuación $f(x) = 0$?

17. ¿En qué circunstancias se puede extender una función $f(x)$ para que sea continua en el punto $x = c$? Dé un ejemplo.

18. ¿Qué significan exactamente $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$? Dé un ejemplo.

19. ¿Qué son $\lim_{x\to\pm\infty} k$ (k constante) y $\lim_{x\to\pm\infty} (1/x)$? ¿Cómo puede ampliar estos resultados a otras funciones? Dé ejemplos.

20. ¿Cómo obtiene el límite de una función racional cuando $x \to \pm\infty$? Dé ejemplos.

21. ¿Qué son las asíntotas horizontales y verticales? Dé ejemplos.

Capítulo 2 Ejercicios de práctica

Límites y continuidad

1. Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le -1 \\ -x, & -1 < x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

Después, analice con detalle los límites, los límites laterales, la continuidad y la continuidad lateral de f en $x = -1$, 0 y 1. ¿Algunas de las discontinuidades son removibles? Explique.

2. Repita las instrucciones del ejercicio 1 para

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 1/x, & 0 < |x| < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

3. Suponga que $f(t)$ y $g(t)$ están definidas para toda t y que $\lim_{t\to t_0} f(t) = -7$ y $\lim_{t\to t_0} g(t) = 0$. Obtenga el límite de las siguientes funciones cuando $t \to t_0$.

a) $3f(t)$ ***b)*** $(f(t))^2$

c) $f(t)\cdot g(t)$ ***d)*** $\dfrac{f(t)}{g(t) - 7}$

e) $\cos(g(t))$ ***f)*** $|f(t)|$

g) $f(t) + g(t)$ ***h)*** $1/f(t)$

4. Suponga que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ están definidas para toda x y que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1/2$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = \sqrt{2}$. Obtenga los límites de las siguientes funciones cuando $x \to 0$.

a) $-g(x)$ ***b)*** $g(x)\cdot f(x)$

c) $f(x) + g(x)$ ***d)*** $1/f(x)$

e) $x + f(x)$ ***f)*** $\dfrac{f(x)\cdot \cos x}{x - 1}$

En los ejercicios 5 y 6, encuentre el valor que debe tener $\lim_{x\to 0} g(x)$ si los límites dados se satisfacen.

5. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{4 - g(x)}{x}\right) = 1$ **6.** $\lim_{x\to -4}\left(x \lim_{x\to 0} g(x)\right) = 2$

7. ¿En qué intervalos son continuas las siguientes funciones?

a) $f(x) = x^{1/3}$ ***b)*** $g(x) = x^{3/4}$

c) $h(x) = x^{-2/3}$ ***d)*** $k(x) = x^{-1/6}$

8. ¿En qué intervalos son continuas las siguientes funciones?

a) $f(x) = \tan x$ ***b)*** $g(x) = \csc x$

c) $h(x) = \dfrac{\cos x}{x - \pi}$ ***d)*** $k(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

Obtención de límites

En los ejercicios 9 a 24, obtenga el límite o explique por qué no existe.

9. $\lim \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^3 + 5x^2 - 14x}$

a) cuando $x \to 0$ ***b)*** cuando $x \to 2$

10. $\lim_{x \to} \dfrac{x^2 + x}{x^5 + 2x^4 + x^3}$

a) cuando $x \to 0$ ***b)*** cuando $x \to -1$

11. $\lim_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$ **12.** $\lim_{x \to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x^4 - a^4}$

13. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$ **14.** $\lim_{x \to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

15. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{2 + x} - \dfrac{1}{2}}{x}$ **16.** $\lim_{x \to 0} \dfrac{(2 + x)^3 - 8}{x}$

17. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^{1/3} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ **18.** $\lim_{x \to 64} \dfrac{x^{2/3} - 16}{\sqrt{x} - 8}$

19. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan(2x)}{\tan(\pi x)}$ **20.** $\lim_{x \to \pi^-} \csc x$

21. $\lim_{x \to \pi} \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2} + \operatorname{sen} x\right)$ **22.** $\lim_{x \to \pi} \cos^2(x - \tan x)$

23. $\lim_{x \to 0} \dfrac{8x}{3 \operatorname{sen} x - x}$ **24.** $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{\operatorname{sen} x}$

En los ejercicios 25 a 28, obtenga el límite de $g(x)$ cuando x se aproxima al valor indicado.

25. $\lim_{x \to 0^+} (4g(x))^{1/3} = 2$

26. $\lim_{x \to \sqrt{5}} \dfrac{1}{x + g(x)} = 2$

27. $\lim_{x \to 1} \dfrac{3x^2 + 1}{g(x)} = \infty$

28. $\lim_{x \to -2} \dfrac{5 - x^2}{\sqrt{g(x)}} = 0$

T Raíces

29. Sea $f(x) = x^3 - x - 1$.

a) Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que f tiene un cero entre -1 y 2.

b) Resuelva gráficamente la ecuación $f(x) = 0$ con un error de magnitud de, a lo más, 10^{-8}.

c) Se puede demostrar que el valor exacto de la solución del inciso *b)* es

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{1/3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{1/3}.$$

Evalúe esta respuesta exacta y compárela con el valor que obtuvo en el inciso *b)*.

T **30.** Sea $f(\theta) = \theta^3 - 2\theta + 2$.

a) Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que f tiene un cero entre -2 y 0.

b) Resuelva gráficamente la ecuación $f(\theta) = 0$ con un error de magnitud de, a lo más, 10^{-4}.

c) Es posible demostrar que el valor exacto de la solución del inciso *b)* es

$$\left(\sqrt{\frac{19}{27}} - 1\right)^{1/3} - \left(\sqrt{\frac{19}{27}} + 1\right)^{1/3}.$$

Evalúe esta respuesta exacta y compárela con el valor que obtuvo en el inciso *b)*.

Extensión continua

31. ¿Puede $f(x) = x(x^2 - 1)/|x^2 - 1|$ extenderse para que sea continua en $x = 1$ o -1? Justifique sus respuestas. (Grafique la función; encontrará interesante la gráfica).

32. Explique por qué la función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no tiene una extensión continua a $x = 0$.

T En los ejercicios 33 a 36, grafique la función para ver si parece tener una extensión continua en el punto dado a. Si la tiene, use las funciones Trace y Zoom para encontrar un valor adecuado de la extensión de la función en a. Si la función parece no tener una extensión continua, ¿puede extenderse para ser continua por la derecha o por la izquierda? Si es así, ¿cuál cree que debería ser el valor de la función extendida?

33. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x - \sqrt[4]{x}}, \quad a = 1$

34. $g(\theta) = \dfrac{5 \cos \theta}{4\theta - 2\pi}, \quad a = \pi/2$

35. $h(t) = (1 + |t|)^{1/t}, \quad a = 0$

36. $k(x) = \dfrac{x}{1 - 2^{|x|}}, \quad a = 0$

Límites al infinito

Determine los límites en los ejercicios 37 a 46.

37. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x + 3}{5x + 7}$ **38.** $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + 3}{5x^2 + 7}$

39. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 8}{3x^3}$ **40.** $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2 - 7x + 1}$

41. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 7x}{x + 1}$ **42.** $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^4 + x^3}{12x^3 + 128}$

43. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\lfloor x \rfloor}$ (Si tiene una graficadora, intente graficar la función para $-5 \le x \le 5$).

44. $\lim_{\theta \to \infty} \dfrac{\cos \theta - 1}{\theta}$ (Si tiene una graficadora, intente graficar la función $f(x) = x(\cos(1/x) - 1)$ cerca del origen para "ver" el límite en el infinito).

45. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x + \operatorname{sen} x + 2\sqrt{x}}{x + \operatorname{sen} x}$

46. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^{2/3} + x^{-1}}{x^{2/3} + \cos^2 x}$

Asíntotas horizontales y verticales

47. Use límites para determinar las ecuaciones de todas las asíntotas verticales.

a) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x - 3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x + 1}$

c) $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 2x - 8}$

48. Use límites para determinar las ecuaciones de todas las asíntotas horizontales.

a) $y = \dfrac{1 - x^2}{x^2 + 1}$ ***b)*** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 4}$

c) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{x}$ ***d)*** $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 9}{9x^2 + 1}}$

Capítulo 2 Ejercicios adicionales y avanzados

T **1. Asignación de un valor a 0^0** Las reglas de los exponentes nos dicen que $a^0 = 1$ si a es cualquier número diferente de cero. También nos dicen que $0^n = 0$ si n es cualquier número positivo.

Si intentamos ampliar estas reglas para incluir el caso de 0^0, obtendríamos resultados contradictorios. La primera regla diría que $0^0 = 1$, mientras que la segunda afirmaría que $0^0 = 0$.

No se trata de dar una respuesta del tipo verdadero o falso. Ninguna de las reglas es válida en todos los casos, de manera que no hay contradicción. De hecho, podríamos definir 0^0 como cualquier valor que queramos, siempre y cuando convenzamos a los demás de aceptarlo.

¿Qué valor le gustaría que tuviera 0^0? He aquí un ejemplo que le ayudará a decidir. (Vea el ejercicio 2 que sigue, donde se da otro ejemplo).

a) Calcule x^x para $x = 0.1, 0.01, 0.001$, y así sucesivamente hasta donde alcance su calculadora. Apunte los valores que obtenga. ¿Qué patrón distingue?

b) Grafique la función $y = x^x$ para $0 < x \leq 1$. A pesar de que la función no está definida para $x \leq 0$, la gráfica se aproximará al eje y por la derecha. ¿Hacia qué valor de y parece dirigirse? Realice un acercamiento para comprobar su suposición.

T **2. Una razón para que el valor de 0^0 sea distinto de 0 o 1** Cuando un número x aumenta por valores positivos, tanto el número $1/x$ como el número $1/(\ln x)$ se aproximan a cero. ¿Qué pasa con el número

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{1/(\ln x)}$$

cuando x aumenta? A continuación, se describen dos maneras de averiguarlo.

a) Evalúe f para $x = 10, 100, 1000$, y así sucesivamente hasta donde alcance su calculadora. ¿Qué patrón observa?

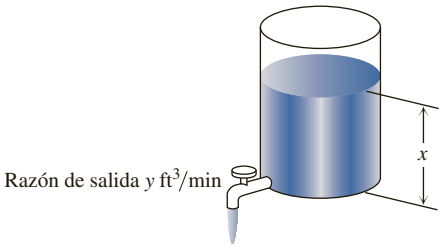
b) Grafique f en varias ventanas de visualización, incluyendo ventanas que contengan el origen. ¿Qué observa? Trace los valores de y a lo largo de la gráfica. ¿Qué encontró?

3. Contracción de Lorentz De acuerdo con la teoría de la relatividad, desde el punto de vista de un observador, la longitud de un objeto, digamos un cohete, parece variar según la velocidad a la que viaja el objeto con respecto al observador. Si este último mide la longitud del cohete en reposo como L_0, a una velocidad v la longitud del objeto parece ser

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Esta ecuación es la fórmula de contracción de Lorentz. Aquí, c es la velocidad de la luz en el vacío, alrededor de 3×10^8 m/s. ¿Qué ocurre con L a medida que v aumenta? Obtenga $\lim_{v \to c^-} L$. ¿Por qué es necesario el límite lateral izquierdo?

4. Control del flujo de un tanque de drenaje La ley de Torricelli afirma que si se vacía un tanque como el que se ilustra en la figura, la razón y a la que sale el agua es una constante multiplicada por la raíz cuadrada de la profundidad x del agua. La constante depende del tamaño y la forma de la válvula de salida.



Suponga que $y = \sqrt{x}/2$ para cierto tanque. Usted está intentando mantener una razón de salida constante, para lo cual añade, de vez en cuando, agua al tanque mediante una manguera. ¿Qué profundidad debe tener el agua si quiere mantener una razón de salida de

a) $y_0 = 1$ ft^3/min con un error no mayor que 0.2 ft^3/min?

b) $y_0 = 1$ ft^3/min con un error no mayor que 0.1 ft^3/min?

5. Expansión térmica en equipos de precisión Como seguramente sabe, casi todos los metales se dilatan con el calor y se contraen con el frío. Las dimensiones de una pieza de equipo de laboratorio son tan importantes, que el taller donde se fabrica tiene que estar a la misma temperatura que el laboratorio donde se usará el equipo. Una barra de aluminio típica de 10 cm de ancho a 70°F tendrá

$$y = 10 + (t - 70) \times 10^{-4}$$

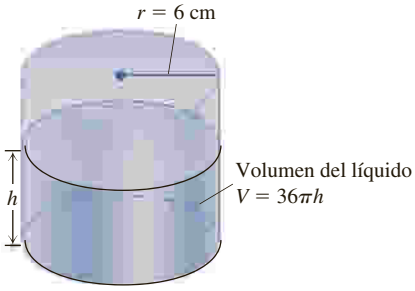
centímetros de ancho a una temperatura t cercana. Suponga que estamos usando una barra como ésta en un detector de ondas de gravedad, y su ancho debe tener, cuando mucho, una diferencia de 0.0005 cm con respecto a los 10 cm ideales. ¿Qué tan cerca de $t_0 = 70$°F debe mantenerse la temperatura para asegurarnos de no exceder esta tolerancia?

6. Marcas en una taza medidora El interior de una típica taza medidora con capacidad de 1 litro es un cilindro circular recto de radio igual a 6 cm (vea la figura de este ejercicio). El volumen de agua que colocamos en la taza es, por lo tanto, una función del nivel h al que se llena la taza; la fórmula correspondiente es

$$V = \pi 6^2 h = 36\pi h.$$

¿Con cuánta exactitud debemos medir h para que el volumen sea de 1 litro de agua (1000 cm^3) con un error no mayor que 1% (10 cm^3)?

a)



b)

Una taza medidora de 1 litro *a*), modelada como un cilindro circular recto *b*) de radio $r = 6$ cm.

Definición formal de límite

En los ejercicios 7 a 10, use la definición formal de límite para demostrar que la función es continua en c.

7. $f(x) = x^2 - 7, \quad c = 1$ **8.** $g(x) = 1/(2x), \quad c = 1/4$

9. $h(x) = \sqrt{2x - 3}, \quad c = 2$ **10.** $F(x) = \sqrt{9 - x}, \quad c = 5$

11. Unicidad del límite Demuestre que una función no puede tener dos límites distintos en el mismo punto. Es decir, si $\lim_{x \to c} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to c} f(x) = L_2$, entonces, $L_1 = L_2$.

12. Demuestre la regla del límite del múltiplo constante:

$$\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x) \quad \text{para cualquier constante } k.$$

13. Límites laterales Si $\lim_{x \to 0^+} f(x) = A$ y $\lim_{x \to 0^-} f(x) = B$, encuentre

a) $\lim_{x \to 0^+} f(x^3 - x)$ ***b***) $\lim_{x \to 0^-} f(x^3 - x)$

c) $\lim_{x \to 0^+} f(x^2 - x^4)$ ***d***) $\lim_{x \to 0^-} f(x^2 - x^4)$

14. Límites y continuidad ¿Cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles falsos? Si es verdadero, diga por qué; si es falso, dé un contraejemplo (es decir, un ejemplo que compruebe su falsedad).

a) Si $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, pero $\lim_{x \to c} g(x)$ no, entonces, $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x))$ no existe.

b) Si no existen ni $\lim_{x \to c} f(x)$, ni $\lim_{x \to c} g(x)$, entonces, $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x))$ no existe.

c) Si f es continua en x, entonces, también lo es $|f|$.

d) Si $|f|$ es continua en c, entonces, también lo es f.

En los ejercicios 15 y 16, emplee la definición formal de límite para demostrar que la función tiene una extensión continua en el valor dado de x.

15. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}, \quad x = -1$ **16.** $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x - 6}, \quad x = 3$

17. Una función continua sólo en un punto Sea

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ es racional.} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

a) Demuestre que f es continua en $x = 0$.

b) Considere el hecho de que todo intervalo abierto no vacío de números reales contiene números racionales e irracionales, para demostrar que f no es continua en valores de x distintos de cero.

18. La función regla de Dirichlet Si x es un número racional, entonces, x puede escribirse en forma única como un cociente de enteros m/n, donde $n > 0$, y m y n no tienen factores comunes mayores que 1. (Decimos que tal fracción está en su *mínima expresión*. Por ejemplo, $6/4$, escrito en su mínima expresión, es $3/2$). Sea $f(x)$ definida para toda x en el intervalo $[0, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{si } x = m/n \text{ es un número racional en su} \\ & \text{mínima expresión.} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Por ejemplo, $f(0) = f(1) = 1$, $f(1/2) = 1/2$, $f(1/3) = f(2/3) = 1/3$, $f(1/4) = f(3/4) = 1/4$, y así sucesivamente.

a) Demuestre que f es discontinua en todo número racional en $[0, 1]$.

b) Demuestre que f es continua en todo número irracional en $[0, 1]$. (*Sugerencia:* Si ϵ es un número positivo dado, demuestre que hay únicamente un número finito de números racionales r en $[0, 1]$ tales que $f(r) \geq \epsilon$).

c) Trace la gráfica de f. ¿Por qué cree que a f se le denomina "función regla"?

19. Puntos antípodas ¿Hay alguna razón para creer que siempre existe un par de puntos antípodas (diametralmente opuestos) en el ecuador de la Tierra, donde las temperaturas son iguales? Explique.

20. Si $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = 3$ y $\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = -1$, obtenga $\lim_{x \to c} f(x)g(x)$.

21. Raíces de una ecuación cuadrática que es casi lineal La ecuación $ax^2 + 2x - 1 = 0$, donde a es constante, tiene dos raíces si $a > -1$ y $a \neq 0$, una positiva y una negativa:

$$r_+(a) = \frac{-1 + \sqrt{1 + a}}{a}, \qquad r_-(a) = \frac{-1 - \sqrt{1 + a}}{a},$$

a) ¿Qué le sucede a $r_+(a)$ cuando $a \to 0$? ¿Y cuándo $a \to -1^+$?

b) ¿Qué le sucede a $r_-(a)$ cuando $a \to 0$? ¿Y cuándo $a \to -1^+$?

c) Sustente sus conclusiones con una gráfica de $r_+(a)$ y $r_-(a)$ como funciones de a. Describa lo que ve.

d) Para sustentar aún más sus conclusiones, trace en una misma ventana las gráficas de $f(x) = ax^2 + 2x - 1$ para $a = 1$, 0.5, 0.2, 0.1 y 0.05.

22. Raíz de una ecuación Demuestre que la ecuación $x + 2 \cos x = 0$ tiene al menos una solución.

23. Funciones acotadas Una función de variable real f está **acotada por arriba** en un conjunto D si existe un número N tal que $f(x) \leq N$ para toda x en D. Llamamos a N, cuando existe, una **cota superior** de f en D, y decimos que f está acotada por arriba por N. De manera análoga, decimos que f está **acotada por abajo** en D si existe un número M tal que $f(x) \geq M$ para toda x en D. Llamamos a M, cuando existe, una **cota inferior** de f en D, y decimos que f está acotada por abajo por M. Decimos que f está **acotada** en D si está acotada por arriba y por abajo.

a) Demuestre que f está acotada en D si y sólo si existe un número B tal que $|f(x)| \leq B$ para toda x en D.

b) Suponga que f está acotada por arriba por N. Demuestre que si $\lim_{x\to c} f(x) = L$, entonces, $L \le N$.

c) Suponga que f está acotada por abajo por M. Demuestre que si $\lim_{x\to c} f(x) = L$, entonces, $L \ge M$.

24. Máx $\{a, b\}$ y mín $\{a, b\}$

a) Demuestre que la expresión

$$\text{máx}\,\{a, b\} = \frac{a + b}{2} + \frac{|a - b|}{2}$$

es igual a a si $a \ge b$, y es igual a b si $b \ge a$. En otras palabras, máx $\{a, b\}$ da el mayor de los números a y b.

b) Obtenga una expresión similar para mín $\{a, b\}$, el menor de a y b.

Generalización de límites que involucran a $\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$

La fórmula $\lim_{\theta\to 0}(\text{sen}\,\theta)/\theta = 1$ se puede generalizar. Si $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ y $f(x)$ nunca es cero en un intervalo abierto que contenga al punto $x = c$, excepto posiblemente la misma c, entonces,

$$\lim_{x\to c} \frac{\text{sen}\, f(x)}{f(x)} = 1.$$

He aquí varios ejemplos.

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, x^2}{x^2} = 1$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, x^2}{x^2} \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = 1 \cdot 0 = 0$

c) $\lim_{x\to -1} \dfrac{\text{sen}(x^2 - x - 2)}{x + 1} = \lim_{x\to -1} \dfrac{\text{sen}(x^2 - x - 2)}{(x^2 - x - 2)} \cdot$

$\lim_{x\to -1} \dfrac{(x^2 - x - 2)}{x + 1} = 1 \cdot \lim_{x\to -1} \dfrac{(x + 1)(x - 2)}{x + 1} = -3$

d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\text{sen}\left(1 - \sqrt{x}\right)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{\text{sen}\left(1 - \sqrt{x}\right)}{1 - \sqrt{x}} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{x - 1} =$

$1 \cdot \lim_{x\to 1} \dfrac{\left(1 - \sqrt{x}\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)}{(x - 1)\left(1 + \sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{1 - x}{(x - 1)\ 1 + \sqrt{x}\,)} = -\dfrac{1}{2}$

Obtenga los límites en los ejercicios 25 a 30.

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(1 - \cos x)}{x}$

26. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\text{sen}\, x}{\text{sen}\sqrt{x}}$

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(\text{sen}\, x)}{x}$

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x^2 + x)}{x}$

29. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\text{sen}(x^2 - 4)}{x - 2}$

30. $\lim_{x\to 9} \dfrac{\text{sen}\left(\sqrt{x} - 3\right)}{x - 9}$

Asíntotas oblicuas

Obtenga todas las asíntotas oblicuas en los ejercicios 31 a 34.

31. $y = \dfrac{2x^{3/2} + 2x - 3}{\sqrt{x} + 1}$

32. $y = x + x\,\text{sen}\dfrac{1}{x}$

33. $y = \sqrt{x^2 + 1}$

34. $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

Capítulo 2 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulo Mathematica/Maple

Encuentre el límite

Parte I
Parte II (Cero elevado a la potencia cero: ¿qué significa?)
Parte III (Límites laterales)
Visualice e interprete el concepto de límite mediante exploraciones gráficas y numéricas.
Parte IV (La potencia hace la diferencia)
Vea qué tan sensibles pueden ser los límites con varias potencias de x.

Tender a infinito

Parte I (Exploración del comportamiento de una función cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$)
Este módulo presenta cuatro ejemplos para explorar el comportamiento de una función cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.
Parte II (Razón de crecimiento)
Observará gráficas que *parecen* continuas, aun cuando la función no lo sea. Se exploran varios casos de continuidad para obtener resultados que encontrará sorprendentes.

3 Derivadas

INTRODUCCIÓN Al principio del capítulo 2, estudiamos cómo determinar la pendiente de una curva en un punto y cómo medir la razón a la que cambia una función. Después de haber estudiado límites, estamos en condiciones de precisar estas ideas y de entender que ambas son interpretaciones de la *derivada* de una función en un punto. Luego, extenderemos el concepto de derivada en un punto al de *función derivada*; también desarrollaremos reglas para obtener esta función derivada fácilmente, sin tener que calcular un límite. Estas reglas se usan para obtener las derivadas de muchas de las funciones conocidas que estudiamos en el capítulo 1, así como de varias de sus combinaciones.

La noción de derivada es una de las ideas clave en el cálculo, y nos permite estudiar un conjunto amplio de problemas en matemáticas, ciencias, economía y medicina. Estos problemas incluyen la obtención de puntos donde una función continua es cero, el cálculo de la velocidad y aceleración de un objeto en movimiento, la determinación de cómo la razón de flujo de un líquido en un recipiente cambia el nivel del líquido contenido en éste, la descripción de la trayectoria de un rayo de luz que va de un punto en el aire a un punto en el agua, la determinación del número de artículos que una compañía debe producir para maximizar sus ingresos, el estudio de la propagación de una enfermedad infecciosa dentro de una población determinada, o el cálculo de la cantidad de sangre que el corazón bombea en un minuto, de acuerdo con el buen funcionamiento de los pulmones.

3.1 Tangentes y la derivada en un punto

En esta sección definiremos la pendiente y la tangente a una curva en un punto y la derivada de una función en un punto. La derivada ofrece una manera de obtener tanto la pendiente de una gráfica como la razón instantánea de cambio de una función.

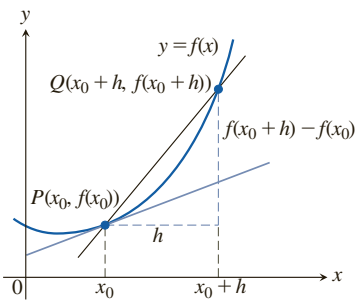


FIGURA 3.1 La pendiente de la recta tangente en P es $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Obtención de la tangente a la gráfica de una función

Para obtener la tangente de una curva cualquiera $y = f(x)$ en un punto $P(x_0, f(x_0))$, usamos el procedimiento presentado en la sección 2.1. Calculamos la pendiente de la secante que pasa por P y un punto cercano $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Después, investigamos el límite de la pendiente cuando $h \to 0$ (figura 3.1). Si el límite existe, lo llamamos la pendiente de la curva en P y definimos la tangente en P como la recta que pasa por P y que tiene dicha pendiente.

DEFINICIONES La **pendiente de la curva** $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, f(x_0))$ es el número

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(siempre y cuando el límite exista).}$$

La **recta tangente** a la curva en P es la recta que pasa por P con esta pendiente.

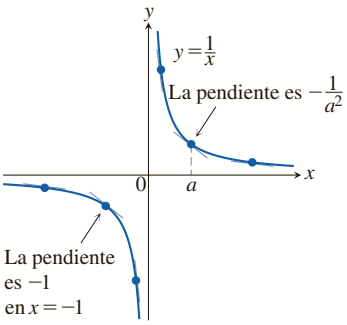


FIGURA 3.2 Las pendientes de las tangentes están más inclinadas cerca del origen, y se vuelven menos inclinadas conforme el punto de tangencia se aleja del origen (ejemplo 1).

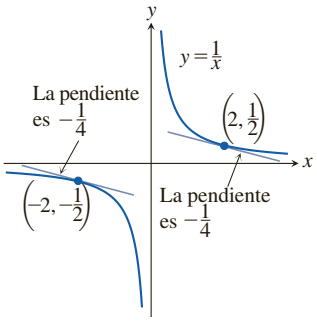


FIGURA 3.3 Las dos rectas tangentes a $y = 1/x$ que tienen una pendiente $-1/4$ (ejemplo 1).

En el ejemplo 3 de la sección 2.1, se aplicaron estas definiciones para obtener la pendiente de la parábola $f(x) = x^2$ en el punto $P(2, 4)$ y la recta tangente a la parábola en P. Consideremos otro ejemplo.

EJEMPLO 1

a) Obtenga la pendiente de la curva $y = 1/x$ en cualquier punto $x = a \neq 0$. ¿Cuál es la pendiente en el punto $x = -1$?

b) ¿En dónde la pendiente es igual a $-1/4$?

c) ¿Qué pasa a la tangente a la curva en el punto $(a, 1/a)$ conforme a cambia?

Solución

a) Aquí, $f(x) = 1/x$. La pendiente en $(a, 1/a)$ es

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{a - (a+h)}{a(a+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{ha(a+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}.$$

Observe cómo tuvimos que escribir todo el tiempo "$\lim_{h\to 0}$" antes de cada fracción hasta la etapa en la cual evaluamos el límite sustituyendo $h = 0$. El número a puede ser positivo o negativo, pero no 0. Cuando $a = -1$, la pendiente es $-1/(-1)^2 = -1$ (figura 3.2).

b) La pendiente de $y = 1/x$ en el punto donde $x = a$ es $-1/a^2$. Será $-1/4$ siempre que

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}.$$

Esta ecuación es equivalente a $a^2 = 4$, de modo que $a = 2$ o $a = -2$. La curva tiene una pendiente de $-1/4$ en los puntos $(2, 1/2)$ y $(-2, -1/2)$ (figura 3.3).

c) La pendiente $-1/a^2$ siempre es negativa si $a \neq 0$. Cuando $a \to 0^+$, la pendiente tiende a $-\infty$ y la tangente se inclina cada vez más (figura 3.2). Nuevamente vemos esta situación cuando $a \to 0^-$. Conforme a se aleja del origen en cualquier dirección, la pendiente se aproxima a 0 y la tangente se vuelve cada vez más y más horizontal. ■

Razones de cambio: Derivada en un punto

La expresión

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0$$

se conoce como **cociente diferencial de f en x_0 con incremento h**. Si el cociente diferencial tiene un límite cuando h se aproxima a cero, a dicho límite se le otorga un nombre y una notación especial.

La notación $f'(x_0)$ se lee "f prima de x_0".

DEFINICIÓN La **derivada de una función f en el punto x_0,** denotada con $f'(x_0)$, es

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

siempre que tal límite exista.

Si interpretamos el cociente diferencial como la pendiente de una recta secante, entonces, la derivada nos indica la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, f(x_0))$. El ejercicio 33 muestra que la derivada de una función lineal $f(x) = mx + b$ en cualquier punto x_0 es simplemente la pendiente de la recta, de modo que

$$f'(x_0) = m,$$

lo cual es consistente con la definición de pendiente.

Si interpretamos el cociente diferencial como una razón promedio de cambio (sección 2.1), la derivada nos da la razón instantánea de cambio de la función con respecto a x en el punto $x = x_0$. Estudiaremos esta interpretación en la sección 3.4.

EJEMPLO 2 En los ejemplos 1 y 2 de la sección 2.1, analizamos la rapidez de una piedra que cae libremente desde el reposo cerca de la superficie de la Tierra. Sabíamos que la piedra caía $y = 16t^2$ ft durante los primeros t segundos, y usamos una sucesión de razones promedio de cambio en intervalos cada vez más cortos para estimar la rapidez de la piedra en el instante $t = 1$. ¿Cuál era *exactamente* la rapidez de la piedra en ese momento?

Solución Sea $f(t) = 16t^2$. La rapidez media de la piedra en el intervalo comprendido entre $t = 1$ y $t = 1 + h$ segundos, para $h > 0$, era

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{16(1 + h)^2 - 16(1)^2}{h} = \frac{16(h^2 + 2h)}{h} = 16(h + 2).$$

Entonces, la rapidez de la piedra en el instante $t = 1$ es

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} 16(h + 2) = 16(0 + 2) = 32 \text{ ft/s}.$$

Nuestra estimación original de 32 ft/s en la sección 2.1 era correcta. ■

Resumen

Hemos analizado las pendientes de curvas, rectas tangentes a una curva, la razón de cambio de una función y la derivada de una función en un punto. Todos estos conceptos se refieren al mismo límite.

Las siguientes son todas las interpretaciones para el límite del cociente diferencial,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

1. La pendiente de la gráfica de $y = f(x)$ en $x = x_0$
2. La pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = x_0$
3. La razón de cambio de $f(x)$ con respecto a x en $x = x_0$
4. La derivada $f'(x_0)$ en un punto

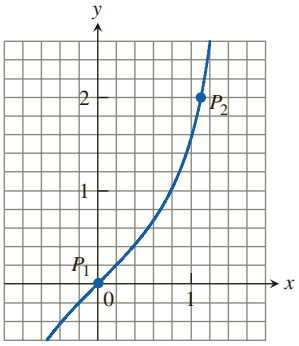
En las siguientes secciones, permitiremos al punto x_0 variar a lo largo del dominio de la función f.

Ejercicios 3.1

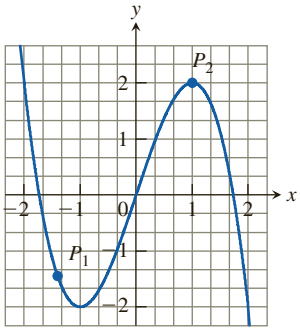
Pendientes y rectas tangentes

En los ejercicios 1 a 4, use la cuadrícula y una regla para hacer una estimación aproximada de la pendiente de la curva (en unidades de y por unidades de x) en los puntos P_1 y P_2.

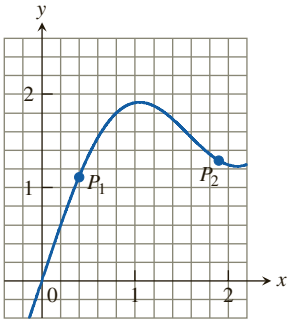
1.



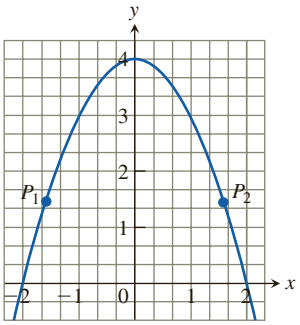
2.



3.



4.



En los ejercicios 5 a 10, obtenga una ecuación de la tangente a la curva en el punto dado. Después, trace la curva y la tangente juntas.

5. $y = 4 - x^2, \quad (-1, 3)$

6. $y = (x - 1)^2 + 1, \quad (1, 1)$

7. $y = 2\sqrt{x}, \quad (1, 2)$

8. $y = \dfrac{1}{x^2}, \quad (-1, 1)$

9. $y = x^3, \quad (-2, -8)$

10. $y = \dfrac{1}{x^3}, \quad \left(-2, -\dfrac{1}{8}\right)$

En los ejercicios 11 a 18, obtenga la pendiente de la gráfica de la función en el punto dado. Después, obtenga una ecuación para la recta tangente a la gráfica en ese punto.

11. $f(x) = x^2 + 1, \quad (2, 5)$

12. $f(x) = x - 2x^2, \quad (1, -1)$

13. $g(x) = \dfrac{x}{x - 2}, \quad (3, 3)$

14. $g(x) = \dfrac{8}{x^2}, \quad (2, 2)$

15. $h(t) = t^3, \quad (2, 8)$

16. $h(t) = t^3 + 3t, \quad (1, 4)$

17. $f(x) = \sqrt{x}, \quad (4, 2)$

18. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad (8, 3)$

En los ejercicios 19 a 22, obtenga la pendiente de la curva en el punto indicado.

19. $y = 5x - 3x^2, \quad x = 1$

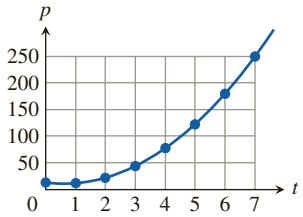
20. $y = x^3 - 2x + 7, \quad x = -2$

21. $y = \dfrac{1}{x - 1}, \quad x = 3$

22. $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}, \quad x = 0$

Interpretación de los valores de la derivada

23. Crecimiento de células de levadura En un experimento controlado de laboratorio, las células de levadura crecen en un sistema de cultivo automatizado que cuenta el número P de células presentes en intervalos de una hora. El número después de t horas se muestra en la siguiente figura.

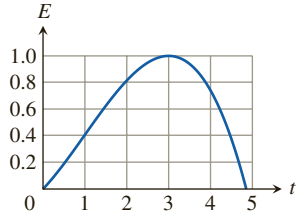


a) Explique lo que significa la derivada $P'(5)$. ¿Cuáles son sus unidades?

b) ¿Cuál es más grande, $P'(2)$ o $P'(3)$? Justifique su respuesta.

c) La curva cuadrática que refleja la tendencia de los datos (vea la sección 1.4) está dada por $P(t) = 6.10t^2 - 9.28t + 16.43$. Obtenga la razón instantánea de crecimiento cuando $t = 5$ horas.

24. Efectividad de un medicamento La efectividad E de un analgésico t horas después de entrar en el torrente sanguíneo se muestra en la siguiente figura, en una escala de 0 a 1.



a) ¿En qué momentos la efectividad parece incrementarse? ¿Qué es cierto acerca de la derivada en esos puntos?

b) ¿En qué tiempo estima que el analgésico alcanza su máxima efectividad? ¿Qué es cierto acerca de la derivada en ese momento? ¿Qué es cierto acerca de la derivada cuando el tiempo se incrementa en la hora *previa* al tiempo que usted estimó?

¿En qué puntos la gráfica de las funciones de los ejercicios 25 y 26 tienen tangentes horizontales?

25. $f(x) = x^2 + 4x - 1$

26. $g(x) = x^3 - 3x$

27. Obtenga las ecuaciones de todas las rectas que tienen pendiente -1 y que son tangentes a la curva $y = 1/(x - 1)$.

28. Obtenga una ecuación de la recta que tiene pendiente de $1/4$ y que es tangente a la curva $y = \sqrt{x}$.

Razones de cambio

29. Objeto lanzado desde una torre Se deja caer un objeto desde una torre de 100 m de altura. Después de t segundos, la altura del objeto por encima del suelo es de $100 - 4.9t^2$ m. ¿Cuál es su velocidad 2 s después de haberlo dejado caer?

30. Velocidad de un cohete A t segundos del despegue, la altura de un cohete es de $3t^2$ ft. ¿Cuál es la rapidez con que asciende el cohete 10 s después del lanzamiento?

31. Cambio del área de un círculo ¿Cuál es la razón de cambio del área de un círculo ($A = \pi r^2$) con respecto al radio, cuando éste es $r = 3$?

32. Cambio de volumen de una pelota ¿Cuál es la razón de cambio del volumen de una pelota ($V = (4/3)\pi r^3$) con respecto al radio, cuando éste es $r = 2$?

33. Demuestre que la recta $y = mx + b$ es su propia tangente en cualquier punto $(x_0, mx_0 + b)$.

34. Obtenga la pendiente de la tangente a la curva $y = 1/\sqrt{x}$ en el punto donde $x = 4$.

Comprobación de tangentes

35. ¿La gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

tiene una tangente en el origen? Justifique su respuesta.

36. ¿La gráfica de

$$g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

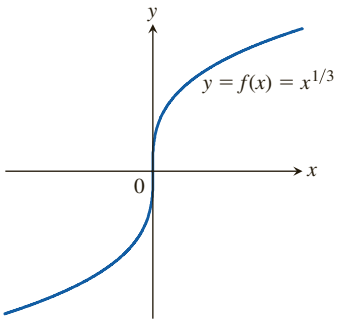
tiene una tangente en el origen? Justifique su respuesta.

Tangentes verticales

Decimos que una curva continua $y = f(x)$ tiene una **tangente vertical** en el punto donde $x = x_0$, si el límite del cociente diferencial es ∞ o $-\infty$. Por ejemplo, $y = x^{1/3}$ tiene una tangente vertical en $x = 0$ (vea la siguiente figura):

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty.$$



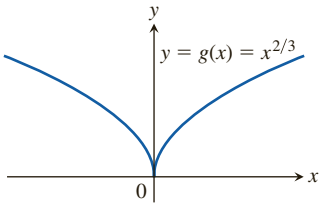
TANGENTE VERTICAL EN EL ORIGEN

Sin embargo, $y = x^{2/3}$ *no* tiene tangente vertical en $x = 0$ (vea la siguiente figura):

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{2/3} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{1/3}}$$

no existe, porque el límite es ∞ por la derecha y $-\infty$ por la izquierda.



NO HAY TANGENTE VERTICAL EN EL ORIGEN

37. ¿La gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

tiene una tangente vertical en el origen? Justifique su respuesta.

38. ¿La gráfica de

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

tiene una tangente vertical en el punto (0, 1)? Justifique su respuesta.

T Grafique las curvas de los ejercicios 39 a 48.

a) ¿En qué puntos las gráficas parecen tener tangentes verticales?

b) Confirme la respuesta que dio al inciso *a)* calculando límites; pero antes de hacerlo, lea la introducción de los ejercicios 37 y 38.

39. $y = x^{2/5}$

40. $y = x^{4/5}$

41. $y = x^{1/5}$

42. $y = x^{3/5}$

43. $y = 4x^{2/5} - 2x$

44. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

45. $y = x^{2/3} - (x-1)^{1/3}$

46. $y = x^{1/3} + (x-1)^{1/3}$

47. $y = \begin{cases} -\sqrt{|x|}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

48. $y = \sqrt{|4 - x|}$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Use un software matemático para ejecutar los siguientes pasos en las funciones de los ejercicios 49 a 52.

a) Trace $y = f(x)$ en el intervalo $(x_0 - 1/2) \leq x \leq (x_0 + 3)$.

b) Manteniendo x_0 fija, el cociente diferencial

$$q(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

en x_0 se convierte en una función del tamaño del incremento h. Introduzca esta función en su software matemático.

c) Obtenga el límite de q cuando $h \to 0$.

d) Defina las rectas secantes $y = f(x_0) + q \cdot (x - x_0)$ para $h = 3$, 2 y 1. Grafíquelas junto con f y la recta tangente en el intervalo señalado en el inciso *a)*.

49. $f(x) = x^3 + 2x, \quad x_0 = 0$

50. $f(x) = x + \dfrac{5}{x}, \quad x_0 = 1$

51. $f(x) = x + \operatorname{sen}(2x), \quad x_0 = \pi/2$

52. $f(x) = \cos x + 4 \operatorname{sen}(2x), \quad x_0 = \pi$

3.2 La derivada como una función

En la sección anterior definimos la derivada de $y = f(x)$ en el punto $x = x_0$ como el límite

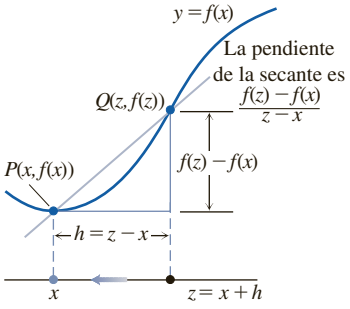
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ahora estudiaremos la derivada como una *función* obtenida a partir de f considerando el límite en cada punto x en el dominio de f.

DEFINICIÓN La **derivada** de la función $f(x)$ con respecto a la variable x es la función f' cuyo valor en x es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

siempre y cuando tal límite exista.



La derivada de f en x es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

FIGURA 3.4 Dos formas del cociente diferencial.

Usamos la notación $f(x)$ en la definición para enfatizar la variable independiente x con respecto a la cual se está definiendo la función derivada $f'(x)$. El dominio de f' es el conjunto de puntos en el dominio de f para los cuales existe el límite, lo que significa que el dominio puede ser el mismo o más pequeño que el dominio de f. Si f' existe en un punto particular x, decimos que f es **diferenciable (tiene una derivada) en *x***. Si f' existe en todos los puntos del dominio de f, decimos que f es **diferenciable.**

Si escribimos $z = x + h$, entonces, $h = z - x$, y h se aproxima a 0 si y sólo si z se aproxima a x. Por lo tanto, una definición equivalente de la derivada es como sigue (vea la figura 3.4). A veces es más conveniente emplear esta fórmula cuando se está obteniendo una función derivada, y se enfoca en el punto z que se aproxima a x.

Fórmula alternativa de la derivada

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

Cálculo de derivadas a partir de la definición

El proceso de cálculo de una derivada se llama **diferenciación**. Para enfatizar la idea de que la diferenciación es una operación que se realiza sobre una función $y = f(x)$, empleamos la notación

$$\frac{d}{dx} f(x)$$

como otra manera de denotar la derivada $f'(x)$. En el ejemplo 1 de la sección 3.1 se mostró el proceso de diferenciación para la función $y = 1/x$ cuando $x = a$. Considerando que x representa cualquier punto en el dominio, obtenemos la fórmula

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

A continuación se presentan dos ejemplos más en los que x es cualquier punto en el dominio de f.

Derivada de la función recíproco

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

EJEMPLO 1 Derive $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

Solución Usamos la definición de derivada que nos exige calcular $f(x+h)$ y luego restar $f(x)$, para obtener el numerador en el cociente diferencial. Tenemos

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad \text{y} \quad f(x+h) = \frac{(x+h)}{(x+h)-1}, \text{ por lo que}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{Definición}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x+h}{x+h-1} - \dfrac{x}{x-1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-cb}{bd}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x+h-1)(x-1)} \qquad \text{Simplifique.}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}. \qquad \text{Cancele } h \neq 0. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2

a) Obtenga la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ para $x > 0$.

b) Obtenga la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en $x = 4$.

Solución

a) Usamos la fórmula alternativa para calcular f':

$$f'(x) = \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

$$= \lim_{z\to x} \frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{z-x}$$

$$= \lim_{z\to x} \frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{z}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{z\to x} \frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Derivada de la función raíz cuadrada

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

b) La pendiente de la curva en $x = 4$ es

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

La tangente es la recta que pasa por el punto (4, 2) con pendiente de 1/4 (figura 3.5):

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x-4)$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1. \quad \blacksquare$$

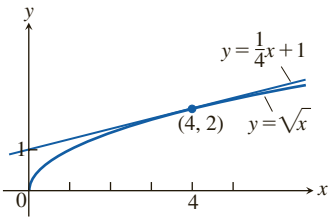


FIGURA 3.5 La curva $y = \sqrt{x}$ y su tangente en (4, 2). La pendiente de la tangente se obtiene evaluando la derivada en $x = 4$ (ejemplo 2).

Notaciones

Hay muchas maneras de denotar la derivada de una función $y = f(x)$, donde la variable independiente es x y la variable dependiente es y. Algunas de las notaciones alternativas de uso común para la derivada son

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D(f)(x) = D_x f(x).$$

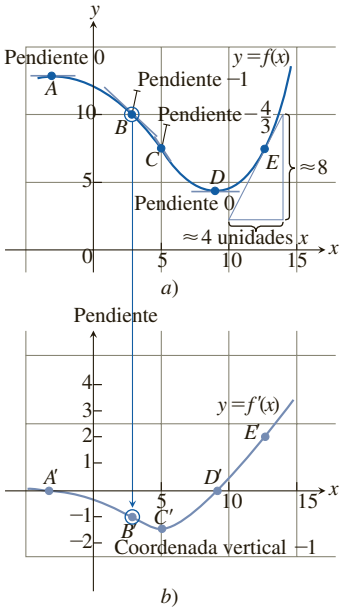


FIGURA 3.6 Construimos la gráfica de $y = f'(x)$ en *b*) trazando las pendientes a partir de la gráfica de $y = f(x)$ en *a*). La coordenada vertical de B' es la pendiente de B, y así sucesivamente. La pendiente en E es de aproximadamente $8/4 = 2$. En *b*) observamos que la razón de cambio de f es negativa para x entre A' y D'; la razón de cambio es positiva para x a la derecha de D'.

Los símbolos d/dx y D indican la operación de diferenciación. Leemos dy/dx como "la derivada de y con respecto a x", y df/dx y $(d/dx)f(x)$ como "la derivada de f con respecto a x". Las notaciones "prima" y' y f' provienen de la notación que usaba Newton para las derivadas. Las notaciones d/dx son similares a las que empleaba Leibniz. El símbolo dy/dx no debe interpretarse como una razón (hasta que presentemos la idea de "diferenciales" en la sección 3.9).

Para indicar el valor de una derivada en un número dado $x = a$, se usa la notación

$$f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}.$$

Así, en el ejemplo 2,

$$f'(4) = \left.\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right|_{x=4} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Gráfica de la derivada

A menudo es posible trazar una gráfica razonable de la derivada de $y = f(x)$ estimando las pendientes en la gráfica de f. Es decir, graficamos los puntos $(x, f'(x))$ en el plano xy y los unimos con una curva suave, la cual representa $y = f'(x)$.

EJEMPLO 3 Grafique la derivada de la función $y = f(x)$ de la figura 3.6*a*).

Solución Trazamos las tangentes a la gráfica de f en puntos a intervalos frecuentes y usamos sus pendientes para estimar los valores de $f'(x)$ en esos puntos. Graficamos los pares $(x, f'(x))$ correspondientes y los unimos mediante una curva suave como la de la figura 3.6*b*). ■

¿Qué podemos descubrir a partir de la gráfica de $y = f'(x)$? Con una mirada, podemos distinguir:

1. dónde la razón de cambio de f es positiva, negativa o cero;
2. la magnitud aproximada de la razón de crecimiento en cualquier x, y cómo es en relación con la magnitud de $f(x)$;
3. dónde es creciente o decreciente la razón de cambio.

Diferenciabilidad en un intervalo; derivadas laterales

Una función $y = f(x)$ es **diferenciable en un intervalo abierto** (finito o infinito), si tiene una derivada en cada punto del intervalo. Es **diferenciable en un intervalo cerrado** $[a, b]$, si es diferenciable en el intervalo abierto (a, b) y si los límites

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \textbf{Derivada en } a \textbf{ por la derecha}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \qquad \textbf{Derivada en } b \textbf{ por la izquierda}$$

existen en los extremos del intervalo (figura 3.7).

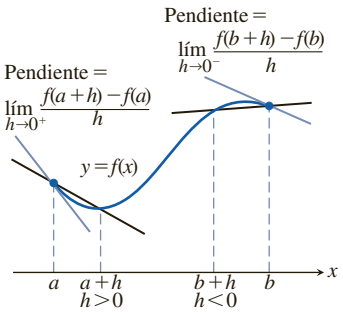


FIGURA 3.7 Las derivadas en los extremos de un intervalo cerrado son límites laterales.

Las derivadas por la derecha y por la izquierda pueden definirse en cualquier punto del dominio de la función. Según el teorema 6 de la sección 2.4, una función tiene una derivada en un punto si y sólo si tiene derivadas por la izquierda y por la derecha en ese punto, y si estas derivadas laterales son iguales.

EJEMPLO 4 Demuestre que la función $y = |x|$ es diferenciable en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$, pero no tiene derivada en $x = 0$.

Solución De acuerdo con la sección 3.1, la derivada de $y = mx + b$ es la pendiente m. Por lo tanto, a la derecha del origen,

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(1 \cdot x) = 1. \qquad \frac{d}{dx}(mx + b) = m,\ |x| = x$$

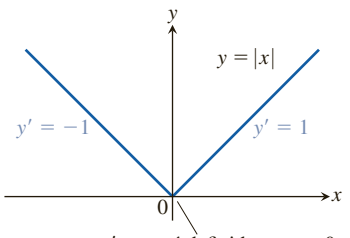


FIGURA 3.8 La función $y = |x|$ no es diferenciable en el origen, donde la gráfica tiene una "esquina" (ejemplo 4).

A la izquierda del origen,

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot x) = -1 \qquad |x| = -x$$

(figura 3.8). No hay derivada en el origen porque las derivadas laterales son distintas ahí:

$$\begin{aligned}
\text{Derivada por la derecha de } |x| \text{ en cero} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} \qquad |h| = h \text{ cuando } h > 0 \\
&= \lim_{h\to 0^+} 1 = 1 \\
\text{Derivada por la izquierda de } |x| \text{ en cero} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} \qquad |h| = -h \text{ cuando } h < 0 \\
&= \lim_{h\to 0^-} -1 = -1.
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 En el ejemplo 2 vimos que para $x > 0$,

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

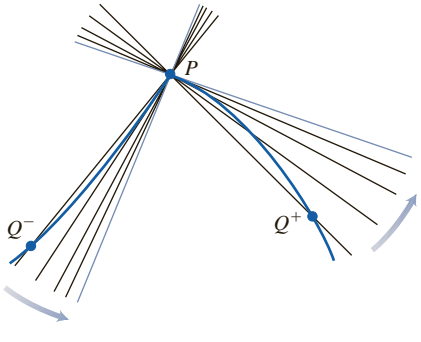
Aplicamos la definición para averiguar si la derivada existe en $x = 0$:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty.$$

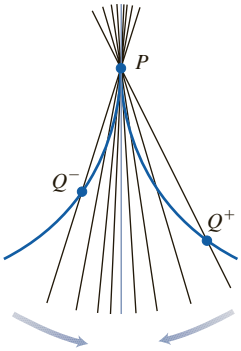
Como el límite (lateral derecho) no es finito, no hay derivada en $x = 0$. Puesto que las pendientes de las rectas secantes que unen el origen con los puntos $\left(h, \sqrt{h}\right)$ en la gráfica de $y = \sqrt{x}$ se aproximan a ∞, la gráfica tiene una *tangente vertical* en el origen. (Vea la figura 1.17 en la página 9). ■

¿Cuándo una función *no* tiene derivada en un punto?

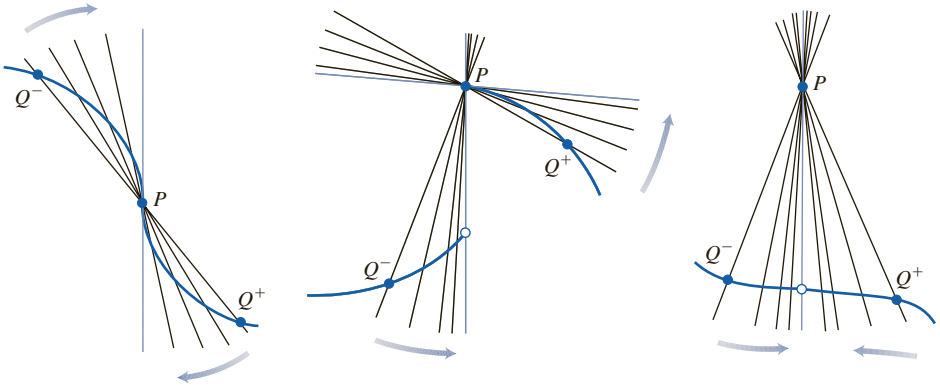
Una función tiene derivada en un punto x_0 si las pendientes de las rectas secantes que pasan por $P(x_0, f(x_0))$ y un punto cercano Q en la gráfica se aproximan a un límite finito, cuando Q se aproxima a P. Si las secantes no tienden a una posición límite o se vuelven verticales cuando Q se aproxima a P, la derivada no existe. Así, la diferenciabilidad es una condición de "suavidad" de la gráfica de f. Una función puede no tener derivada en un punto por muchas razones, incluyendo la existencia de puntos donde la gráfica tiene:



1. una *esquina*, donde las derivadas laterales son diferentes.



2. una *cúspide*, donde la pendiente de PQ se aproxima a ∞ por un lado y a $-\infty$ por el otro.



3. una *tangente vertical*, donde la pendiente de PQ se aproxima a ∞ por ambos lados, o se aproxima a $-\infty$ por ambos lados (aquí tiende a $-\infty$).

4. una *discontinuidad* (se muestra en dos ejemplos).

Otro caso en el que la derivada puede no existir se presenta cuando la pendiente de la función oscila rápidamente cerca de P, como en $f(x) = \text{sen}\,(1/x)$ cerca del origen, donde es discontinua (vea la figura 2.31).

Las funciones diferenciables son continuas

Una función es continua en todos los puntos donde tiene derivada.

TEOREMA 1: Diferenciabilidad implica continuidad Si f tiene una derivada en $x = c$, entonces, f es continua en $x = c$.

Demostración Puesto que $f'(c)$ existe, debemos demostrar que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ o, de manera equivalente, que $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$. Si $h \neq 0$, entonces,

$$\begin{aligned} f(c+h) &= f(c) + (f(c+h) - f(c)) \\ &= f(c) + \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot h. \end{aligned}$$

Ahora tomamos límites cuando $h \to 0$. Según el teorema 1 de la sección 2.2,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(c+h) &= \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\ &= f(c) + 0 \\ &= f(c). \end{aligned}$$

■

La aplicación de argumentos similares a los límites laterales indica que si f tiene derivada lateral (por la derecha o por la izquierda) en $x = c$, entonces, f es continua por ese lado en $x = c$.

El teorema 1 afirma que si una función tiene una discontinuidad en un punto (por ejemplo, una discontinuidad de salto), no puede ser diferenciable en dicho punto. La función mayor entero $y = \lfloor x \rfloor$ no es diferenciable en todo número entero $x = n$ (ejemplo 4, sección 2.5).

¡Cuidado! El recíproco del teorema 1 es falso. Una función no necesariamente tiene derivada en un punto donde es continua, como vimos en el ejemplo 4 con la función valor absoluto.

Ejercicios 3.2

Obtención de funciones derivadas y sus valores

Obtenga las derivadas de las funciones de los ejercicios 1 a 6, utilizando la definición. Después, obtenga los valores de las derivadas especificadas.

1. $f(x) = 4 - x^2$; $f'(-3), f'(0), f'(1)$

2. $F(x) = (x-1)^2 + 1$; $F'(-1), F'(0), F'(2)$

3. $g(t) = \dfrac{1}{t^2}$; $g'(-1), g'(2), g'\left(\sqrt{3}\right)$

4. $k(z) = \dfrac{1-z}{2z}$; $k'(-1), k'(1), k'\left(\sqrt{2}\right)$

5. $p(\theta) = \sqrt{3\theta}$; $p'(1), p'(3), p'(2/3)$

6. $r(s) = \sqrt{2s+1}$; $r'(0), r'(1), r'(1/2)$

En los ejercicios 7 a 12, obtenga las derivadas indicadas.

7. $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = 2x^3$

8. $\dfrac{dr}{ds}$ si $r = s^3 - 2s^2 + 3$

9. $\dfrac{ds}{dt}$ si $s = \dfrac{t}{2t+1}$

10. $\dfrac{dv}{dt}$ si $v = t - \dfrac{1}{t}$

11. $\dfrac{dp}{dq}$ si $p = q^{3/2}$

12. $\dfrac{dz}{dw}$ si $z = \dfrac{1}{\sqrt{w^2-1}}$

Pendientes y rectas tangentes

En los ejercicios 13 a 16, derive las funciones y obtenga la pendiente de la recta tangente en el valor dado de la variable independiente.

13. $f(x) = x + \dfrac{9}{x}, \quad x = -3$

14. $k(x) = \dfrac{1}{2+x}, \quad x = 2$

15. $s = t^3 - t^2, \quad t = -1$

16. $y = \dfrac{x+3}{1-x}, \quad x = -2$

En los ejercicios 17 a 18, derive las funciones. Después, obtenga una ecuación de la recta tangente en el punto indicado de la gráfica de la función.

17. $y = f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x-2}}, \quad (x, y) = (6, 4)$

18. $w = g(z) = 1 + \sqrt{4-z}, \quad (z, w) = (3, 2)$

En los ejercicios 19 a 22, obtenga los valores de las derivadas.

19. $\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=-1}$ si $s = 1 - 3t^2$

20. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\sqrt{3}}$ si $y = 1 - \dfrac{1}{x}$

21. $\left.\dfrac{dr}{d\theta}\right|_{\theta=0}$ si $r = \dfrac{2}{\sqrt{4-\theta}}$

22. $\left.\dfrac{dw}{dz}\right|_{z=4}$ si $w = z + \sqrt{z}$

Uso de la fórmula alternativa para derivadas

Use la fórmula

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

para obtener la derivada de las funciones de los ejercicios 23 a 26.

23. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

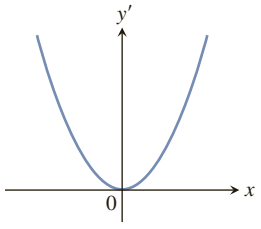
24. $f(x) = x^2 - 3x + 4$

25. $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$

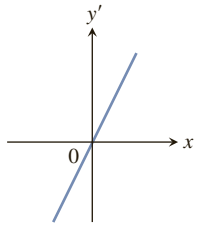
26. $g(x) = 1 + \sqrt{x}$

Gráficas

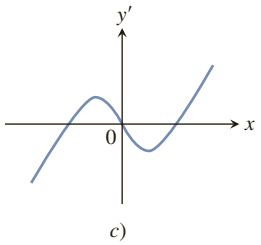
Relacione las funciones graficadas en los ejercicios 27 a 30 con las derivadas graficadas en las figuras *a*) a *d*).



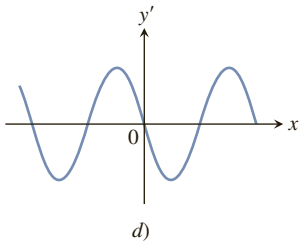
a)



b)

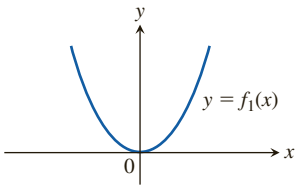


c)

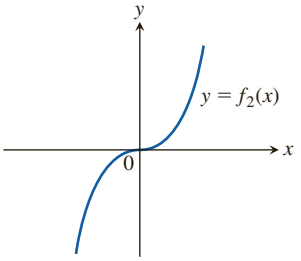


d)

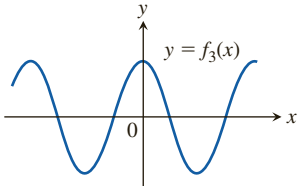
27.



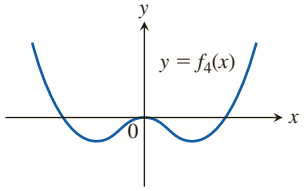
28.



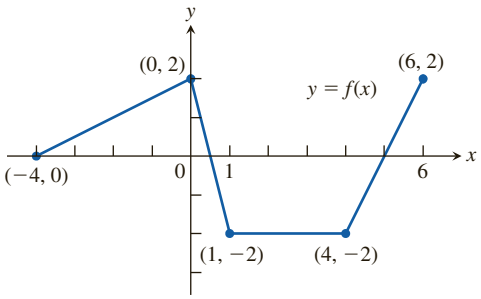
29.



30.



31. ***a***) La gráfica de la siguiente figura se compone de segmentos de recta unidos por sus extremos. ¿En qué puntos del intervalo $[-4, 6]$ no está definida f'? Justifique su respuesta.



b) Grafique la derivada de f.
La gráfica debe mostrar una función escalonada.

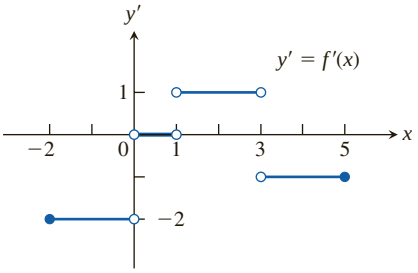
32. Recuperación de una función a partir de su derivada

a) Con base en la siguiente información, grafique la función f en el intervalo cerrado $[-2, 5]$.

i. La gráfica de f está formada con segmentos de recta unidos por sus extremos.

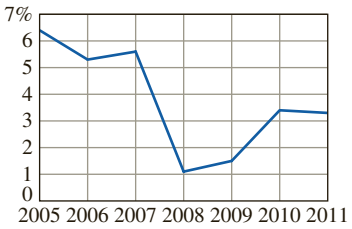
ii. La gráfica inicia en el punto $(-2, 3)$.

iii. La derivada de f es la función escalonada que se muestra en la siguiente figura.



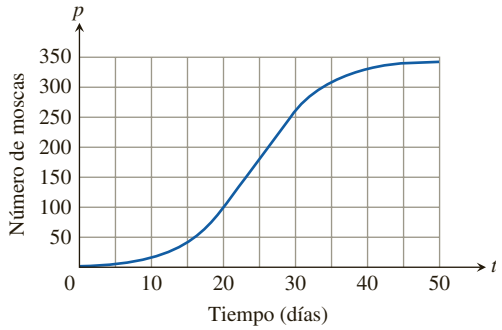
b) Repita el inciso *a*), suponiendo que la gráfica inicia en $(-2, 0)$ en lugar de $(-2, 3)$.

33. Crecimiento económico La siguiente gráfica muestra el cambio porcentual anual promedio $y = f(t)$ del producto interno bruto (PIB) de Estados Unidos durante los años 2005 a 2011. Grafique dy/dt (donde esté definida).



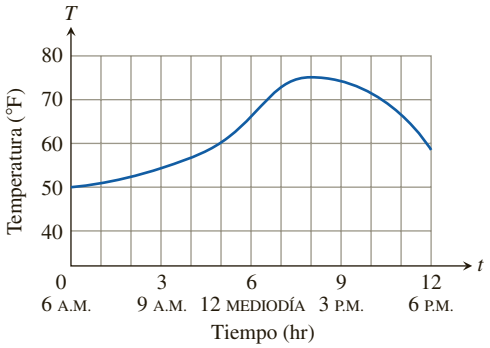
34. Moscas de la fruta (*Continuación del ejemplo 4, sección 2.1*). Al principio, en un ambiente cerrado con relativamente pocos ejemplares, la población inicial crece con lentitud; luego, crece con mayor rapidez, ya que el número de individuos reproductores ha aumentado y se cuenta todavía con recursos abundantes; por último, el crecimiento se vuelve lento nuevamente a medida que la población alcanza la capacidad de sustentación del ambiente.

a) Use el método gráfico del ejemplo 3 para graficar la derivada de la población de la mosca de la fruta. La gráfica de la población se reproduce aquí.



b) ¿En qué días parece que la población crece más rápido? ¿En qué días su crecimiento parece más lento?

35. Temperatura La siguiente gráfica muestra la temperatura T en ºF en Davis, California, el 18 de abril de 2008, entre las 6:00 a.m. y las 6:00 p.m.



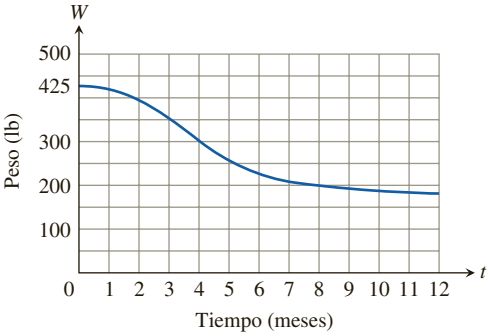
a) Estime la razón de cambio de la temperatura en los siguientes momentos.

i. 7 A.M. **ii.** 9 A.M. **iii.** 2 P.M. **iv.** 4 P.M.

b) ¿En qué momento la temperatura aumenta más rápidamente? ¿En qué momento la temperatura disminuye más rápidamente? ¿Cuál es la razón de cambio para cada uno de esos momentos?

c) Utilice el método gráfico del ejemplo 3 para graficar la derivada de la temperatura T contra el tiempo t.

36. Pérdida de peso Jared Fogle, también conocido como el "Subway Sandwich Guy", pesaba 425 lb en 1997, antes de perder más de 240 lb en 12 meses (http://en.wikipedia.org/wiki/Jared_Fogle). En la siguiente figura se presenta una posible gráfica que muestra su pérdida drástica de peso.



a) Estime la tasa de pérdida de peso de Jared cuando

i. $t = 1$ **ii.** $t = 4$ **iii.** $t = 11$

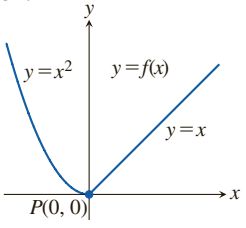
b) ¿Cuándo Jared perdió peso más rápidamente, y cuál es esa tasa de pérdida de peso?

c) Utilice el método gráfico del ejemplo 3 para graficar la derivada del peso W.

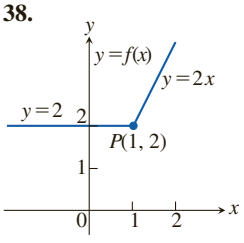
Derivadas laterales

Calcule como límites las derivadas por la derecha y por la izquierda, para demostrar que las funciones de los ejercicios 37 a 40 no son diferenciables en el punto P.

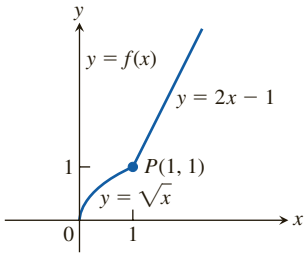
37.



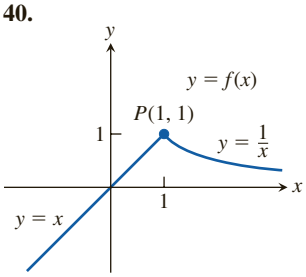
38.



39.



40.



En los ejercicios 41 y 42, determine si la función definida por partes es diferenciable en el origen.

41. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 7, & x < 0 \end{cases}$

42. $g(x) = \begin{cases} x^{2/3}, & x \geq 0 \\ x^{1/3}, & x < 0 \end{cases}$

Diferenciabilidad y continuidad en un intervalo

En los ejercicios 43 a 48, cada una de las figuras muestra la gráfica de una función sobre un intervalo cerrado D. ¿En qué puntos del dominio la función parece ser

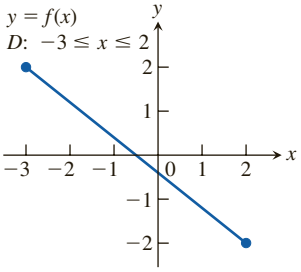
a) diferenciable?

b) continua, pero no diferenciable?

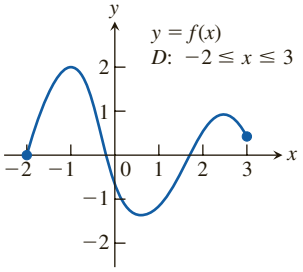
c) ni continua ni diferenciable?

Justifique sus respuestas.

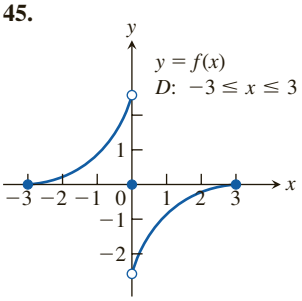
43.



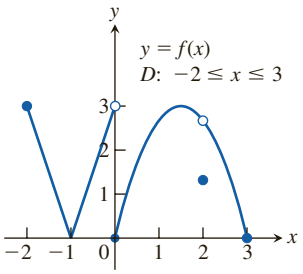
44.



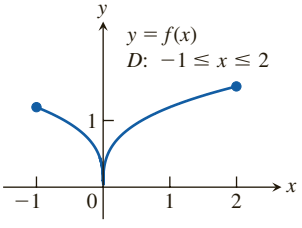
45.



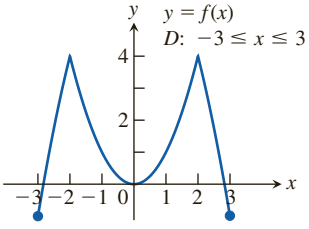
46.



47.



48.



Teoría y ejemplos

En los ejercicios 49 a 52,

a) Obtenga la derivada $f'(x)$ de la función dada $y = f(x)$.

b) Grafique $y = f(x)$ y $y = f'(x)$, una junto a la otra, usando sistemas de ejes coordenados separados y responda las siguientes preguntas.

c) ¿Para qué valores de x, si acaso, f' es positiva? ¿Para cuáles es igual a cero? ¿Para cuáles es negativa?

d) ¿En qué intervalos de valores de x, si acaso, la función $y = f(x)$ aumenta cuando x se incrementa? ¿En cuáles disminuye cuando x aumenta? ¿Cómo se relaciona esto con lo que encontró en el inciso *c*)? (Hablaremos más de esta relación en la sección 4.3).

49. $y = -x^2$ **50.** $y = -1/x$

51. $y = x^3/3$ **52.** $y = x^4/4$

53. Tangente a una parábola ¿La parábola $y = 2x^2 - 13x + 5$ tiene una tangente cuya pendiente es -1? Si es así, obtenga una ecuación de la recta y el punto de tangencia. Si no, explique por qué.

54. Tangente a $y = \sqrt{x}$ ¿Alguna tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ cruza el eje x en $x = -1$? De ser así, obtenga la ecuación de la recta y el punto de tangencia. De lo contrario, explique por qué no lo cruza.

55. Derivada de $-f$ ¿El hecho de saber que una función $f(x)$ es diferenciable en $x = x_0$ nos dice algo acerca de la diferenciabilidad de la función $-f$ en $x = x_0$? Justifique su respuesta.

56. Derivada de múltiplos ¿El hecho de saber que la función $g(t)$ es diferenciable en $t = 7$ nos dice algo acerca de la diferenciabilidad de la función $3g$ en $t = 7$? Justifique su respuesta.

57. Límite de un cociente Suponga que las funciones $g(t)$ y $h(t)$ están definidas para todos los valores de t, y que $g(0) = h(0) = 0$. ¿Puede existir $\lim_{t \to 0} (g(t))/(h(t))$? De ser así, ¿es igual a cero? Justifique sus respuestas.

58. ***a)*** Sea $f(x)$ una función que satisface $|f(x)| \leq x^2$ para $-1 \leq x \leq 1$. Demuestre que f es diferenciable en $x = 0$ y obtenga $f'(0)$.

b) Demuestre que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es diferenciable en $x = 0$ y obtenga $f'(0)$.

T **59.** Grafique $y = 1/(2\sqrt{x})$ en una ventana que tiene $0 \leq x \leq 2$. Luego, en la misma pantalla, grafique

$$y = \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$$

para $h = 1, 0.5, 0.1$. Después, intente con $h = -1, -0.5, -0.1$. Explique lo que ocurre.

T **60.** Grafique $y = 3x^2$ en una ventana que tiene $-2 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$. Luego, en la misma pantalla, grafique

$$y = \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$$

para $h = 2, 1, 0.2$. Después, intente con $h = -2, -1, -0.2$. Explique lo que ocurre.

61. Derivada de $y = |x|$ Grafique la derivada de $f(x) = |x|$. Después, grafique $y = (|x| - 0)/(x - 0) = |x|/x$. ¿Qué concluye?

T **62. La función de Weierstrass continua pero no diferenciable en punto alguno** La suma de los primeros ocho términos de la función de Weierstrass, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2/3)^n \cos(9^n \pi x)$ es

$$g(x) = \cos(\pi x) + (2/3)^1 \cos(9\pi x) + (2/3)^2 \cos(9^2 \pi x) + (2/3)^3 \cos(9^3 \pi x) + \cdots + (2/3)^7 \cos(9^7 \pi x).$$

Grafique esta suma. Realice varias amplificaciones de la gráfica. ¿Qué tan oscilante y dispareja es la gráfica? Especifique una escala para la ventana en la cual la parte de la gráfica observada sea suave.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Use un software matemático para realizar los siguientes pasos con las funciones de los ejercicios 63 a 68.

a) Grafique $y = f(x)$ para ver el comportamiento global de la función.

b) Defina el cociente diferencial q en un punto arbitrario x, con un incremento arbitrario h.

c) Tome el límite cuando $h \to 0$. ¿Qué fórmula se obtiene?

d) Sustituya el valor de $x = x_0$ y grafique la función $y = f(x)$ junto con su recta tangente en ese punto.

e) Sustituya varios valores de x, mayores y menores que x_0 en la fórmula obtenida en el inciso *c*). ¿Los números concuerdan con la figura?

f) Grafique la fórmula obtenida en el inciso *c*). ¿Qué significa el hecho de que sus valores sean negativos? ¿Qué significa que sean cero? ¿Qué significa que sean positivos? ¿El resultado concuerda con la gráfica del inciso *a*)? Justifique su respuesta.

63. $f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad x_0 = 1$

64. $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}, \quad x_0 = 1$

65. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}, \quad x_0 = 2$

66. $f(x) = \dfrac{x - 1}{3x^2 + 1}, \quad x_0 = -1$

67. $f(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad x_0 = \pi/2$

68. $f(x) = x^2 \cos x, \quad x_0 = \pi/4$

3.3 Reglas de diferenciación

En esta sección se presentan varias reglas que nos permiten derivar funciones constantes, funciones potencia, polinomios, funciones racionales y ciertas combinaciones de ellas, todo de manera sencilla y directa, sin tener que tomar límites cada vez.

Potencias, múltiplos, sumas y diferencias

Una regla sencilla de diferenciación es la que establece que la derivada de toda función constante es igual a cero.

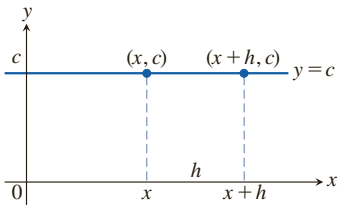


FIGURA 3.9 La regla $(d/dx)(c) = 0$ es otra manera de decir que los valores de las funciones constantes jamás cambian, y que la pendiente de una recta horizontal es cero en todos sus puntos.

Derivada de una función constante

Si f tiene el valor constante $f(x) = c$, entonces,

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0.$$

Demostración Aplicamos la definición de la derivada a $f(x) = c$, la función cuyos valores de salida tienen el valor constante c (figura 3.9). Para toda x, encontramos que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0. \quad \blacksquare$$

Por la sección 3.1, sabemos que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}, \quad \text{o} \quad \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-2}.$$

Por el ejemplo 2 de la última sección, también sabemos que

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \text{o} \quad \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

Estos dos ejemplos ilustran una regla general para derivar una potencia x^n. Primero, demostraremos la regla cuando n es un entero positivo.

Derivada de una potencia con exponente entero positivo
Si n es un entero positivo, entonces,

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

Demostración de la regla de la potencia para exponentes enteros positivos La fórmula

$$z^n - x^n = (z - x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \cdots + zx^{n-2} + x^{n-1})$$

se puede verificar multiplicando el lado derecho. Luego, usando la fórmula alternativa de la definición de la derivada,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z\to x}\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z\to x}\frac{z^n - x^n}{z - x} \\ &= \lim_{z\to x}(z^{n-1} + z^{n-2}x + \cdots + zx^{n-2} + x^{n-1}) \qquad n \text{ términos} \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

■

La regla de la potencia es válida para todos los números reales n. Hemos visto ejemplos de potencias enteras negativas y de potencias fraccionarias, pero n también podría ser un número irracional. Para aplicar la regla de la potencia, restamos 1 del exponente original n y multiplicamos el resultado por n. Aquí establecemos la versión general de la regla, pero su demostración se pospone hasta el capítulo 7.

Regla de la potencia (versión general)
Si n es cualquier número real, entonces,

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1},$$

para toda x donde las potencias x^n y x^{n-1} están definidas.

EJEMPLO 1 Diferencie las siguientes potencias de x.

a) x^3 ***b)*** $x^{2/3}$ ***c)*** $x^{\sqrt{2}}$ ***d)*** $\dfrac{1}{x^4}$ ***e)*** $x^{-4/3}$ ***f)*** $\sqrt{x^{2+\pi}}$

Solución

Aplicación de la regla de la potencia
Reste 1 del exponente y multiplique el resultado por el exponente original.

a) $\dfrac{d}{dx}(x^3) = 3x^{3-1} = 3x^2$

b) $\dfrac{d}{dx}(x^{2/3}) = \dfrac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \dfrac{2}{3}x^{-1/3}$

c) $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

d) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^4}\right) = \dfrac{d}{dx}(x^{-4}) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\dfrac{4}{x^5}$

e) $\dfrac{d}{dx}(x^{-4/3}) = -\dfrac{4}{3}x^{-(4/3)-1} = -\dfrac{4}{3}x^{-7/3}$

f) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x^{2+\pi}}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{1+(\pi/2)}\right) = \left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)x^{1+(\pi/2)-1} = \dfrac{1}{2}(2 + \pi)\sqrt{x^{\pi}}$

■

La siguiente regla establece que cuando una función diferenciable se multiplica por una constante, su derivada se multiplica por la misma constante.

Regla de la derivada del múltiplo constante
Si u es una función diferenciable de x, y c es una constante, entonces,

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}.$$

En particular, si n es cualquier número real, entonces,

$$\frac{d}{dx}(cx^n) = cnx^{n-1}.$$

Demostración

$$\frac{d}{dx}cu = \lim_{h\to 0}\frac{cu(x+h) - cu(x)}{h} \qquad \text{Definición de la derivada con } f(x) = cu(x)$$

$$= c\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \qquad \text{Propiedad del límite del múltiplo constante}$$

$$= c\frac{du}{dx} \qquad u \text{ es diferenciable.}$$

■

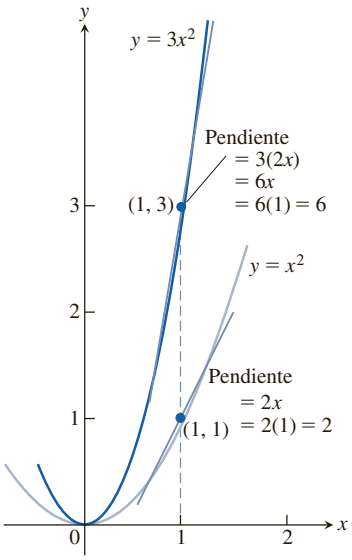


FIGURA 3.10 Gráficas de $y = x^2$ y $y = 3x^2$. Al triplicar la coordenada y se triplica la pendiente (ejemplo 2).

EJEMPLO 2

a) La fórmula de la derivada

$$\frac{d}{dx}(3x^2) = 3 \cdot 2x = 6x$$

afirma que si modificamos la escala de la gráfica de $y = x^2$ multiplicando cada coordenada y por 3, la pendiente en cada punto se multiplica también por 3 (figura 3.10).

b) **Negativo de una función**

La derivada del negativo de una función diferenciable u es el negativo de la derivada de la función. Al aplicar la regla del múltiplo constante con $c = -1$, se obtiene

$$\frac{d}{dx}(-u) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot u) = -1 \cdot \frac{d}{dx}(u) = -\frac{du}{dx}.$$

■

La siguiente regla establece que la derivada de la suma de dos funciones diferenciables es la suma de sus derivadas.

Notación de las funciones mediante u y v
Al buscar una fórmula de diferenciación, es probable que las funciones con las que se trabaja estén denotadas con letras como f y g. Por eso, no es conveniente utilizar esas mismas letras para establecer reglas de diferenciación general; lo mejor es emplear letras como u y v, las cuales tienen poca probabilidad de estarse usando.

Regla de la derivada de una suma
Si u y v son funciones diferenciables de x, entonces, su suma $u + v$ es diferenciable en todo punto donde tanto u como v sean diferenciables. En tales puntos,

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Por ejemplo, si $y = x^4 + 12x$, entonces, y es la suma de $u(x) = x^4$ y $v(x) = 12x$. Así, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(12x) = 4x^3 + 12.$$

Demostración Aplicamos la definición de la derivada a $f(x) = u(x) + v(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[u(x) + v(x)] &= \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h) - v(x)}{h} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.\end{aligned}$$

■

Al combinar las reglas de la suma y del múltiplo constante, obtenemos la **regla de la diferencia**, según la cual, la derivada de una *resta* de funciones diferenciables es la resta de sus derivadas:

$$\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{d}{dx}[u + (-1)v] = \frac{du}{dx} + (-1)\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}.$$

La regla de la suma se extiende a sumas finitas de más de dos funciones. Si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ son diferenciables en x, entonces, también lo es $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, y

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx}.$$

Por ejemplo, para ver que la regla es válida para tres funciones, se calcula:

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + u_3) = \frac{d}{dx}((u_1 + u_2) + u_3) = \frac{d}{dx}(u_1 + u_2) + \frac{du_3}{dx} = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \frac{du_3}{dx}.$$

En el apéndice 2 se incluye una prueba por inducción matemática para cualquier número finito de términos.

EJEMPLO 3 Obtenga la derivada del polinomio $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(1) \qquad \text{Reglas de suma y diferencia}\\ &= 3x^2 + \frac{4}{3}\cdot 2x - 5 + 0 = 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5\end{aligned}$$

■

Podemos derivar cualquier polinomio término por término, tal como lo hicimos con el polinomio del ejemplo 3. Todos los polinomios son diferenciables en todos los valores de x.

EJEMPLO 4 ¿La curva $y = x^4 - 2x^2 + 2$ tiene alguna tangente horizontal? Si es así, ¿dónde?

Solución Las tangentes horizontales, si las hay, se presentan donde la pendiente dy/dx es cero. Tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x.$$

Ahora resolvemos la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = 0$ para x:

$$\begin{aligned}4x^3 - 4x &= 0\\ 4x(x^2 - 1) &= 0\\ x &= 0, 1, -1.\end{aligned}$$

La curva $y = x^4 - 2x^2 + 2$ tiene tangentes horizontales en $x = 0$, 1 y -1. Los puntos correspondientes en la curva son (0, 2), (1, 1) y (−1, 1). Vea la figura 3.11. En el capítulo 4 veremos que la obtención de valores de x donde la derivada de una función es igual a cero constituye un procedimiento útil e importante. ■

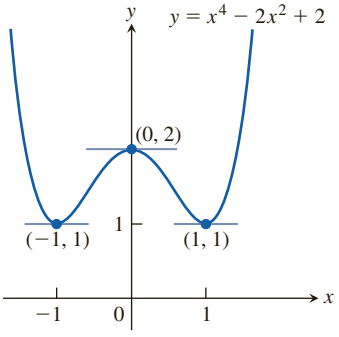


FIGURA 3.11 Curva del ejemplo 4 y sus tangentes horizontales.

Productos y cocientes

Mientras la derivada de la suma de dos funciones es la suma de sus derivadas, la derivada del producto de dos funciones *no* es el producto de sus derivadas. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}(x \cdot x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x, \qquad \text{mientras que} \qquad \frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(x) = 1 \cdot 1 = 1.$$

La derivada de un producto de dos funciones es la suma de *dos* productos, como se explica a continuación.

Regla de la derivada de un producto

Si u y v son diferenciables en x, entonces, también lo es su producto uv, y

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

La ecuación 3 equivale a decir que

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

es útil y se aplica a *productos punto* y *productos cruz* de las funciones *con valores vectoriales*, que se estudian en el capítulo 13.

La derivada del producto uv es u multiplicada por la derivada de v más v multiplicada por la derivada de u. En *notación prima*, $(uv)' = uv' + vu'$. En notación de funciones,

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \tag{3}$$

EJEMPLO 5 Obtenga la derivada de $y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$.

Solución

a) De acuerdo con la regla del producto, con $u = x^2 + 1$ y $v = x^3 + 3$, encontramos que

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2 + 1)(x^3 + 3)\right] = (x^2 + 1)(3x^2) + (x^3 + 3)(2x) \qquad \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$
$$= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 6x$$
$$= 5x^4 + 3x^2 + 6x.$$

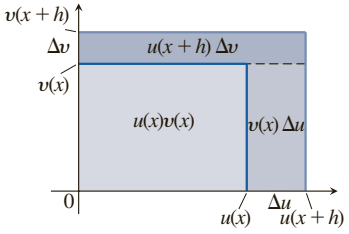
b) Este producto particular también puede diferenciarse (tal vez sea mejor) multiplicando la expresión original que define a y, y derivando el polinomio resultante:

$$y = (x^2 + 1)(x^3 + 3) = x^5 + x^3 + 3x^2 + 3$$
$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 3x^2 + 6x.$$

Esto concuerda con nuestro primer cálculo. ■

Ilustración de la regla del producto

Suponga que $u(x)$ y $v(x)$ son positivas y crecen cuando x se incrementa, y que $h > 0$.



Entonces, el cambio en el producto uv es la diferencia entre las áreas de los "cuadrados" mayor y menor, que a la vez es la suma de los rectángulos sombreados en las partes superior y derecha de la figura. Es decir,

$$\Delta(uv) = u(x + h)v(x + h) - u(x)v(x)$$
$$= u(x + h)\Delta v + v(x)\Delta u.$$

Al dividir entre h, se obtiene

$$\frac{\Delta(uv)}{h} = u(x + h)\frac{\Delta v}{h} + v(x)\frac{\Delta u}{h}.$$

El límite cuando $h \to 0^+$ da la regla del producto.

Demostración de la regla de la derivada de un producto

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h)v(x + h) - u(x)v(x)}{h}$$

Para convertir esta fracción en una equivalente que incluya los cocientes diferenciales de las derivadas de u y v, restamos y sumamos $u(x + h)v(x)$ en el numerador:

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h)v(x + h) - u(x + h)v(x) + u(x + h)v(x) - u(x)v(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0}\left[u(x + h)\frac{v(x + h) - v(x)}{h} + v(x)\frac{u(x + h) - u(x)}{h}\right]$$
$$= \lim_{h \to 0} u(x + h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{v(x + h) - v(x)}{h} + v(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h) - u(x)}{h}.$$

Cuando h tiende a cero, $u(x+h)$ tiende a $u(x)$, ya que u, al ser diferenciable en x, es continua en x. Las dos fracciones tienden a los valores de dv/dx en x y du/dx en x. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

■

La derivada del cociente de dos funciones está dada por la regla del cociente.

Regla de la derivada de un cociente

Si u y v son diferenciables en x, y si $v(x) \neq 0$, entonces, el cociente u/v es diferenciable en x, y

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

En notación de funciones

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

EJEMPLO 6 Obtenga la derivada de $y = \dfrac{t^2 - 1}{t^3 + 1}$.

Solución Aplicamos la regla del cociente con $u = t^2 - 1$ y $v = t^3 + 1$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(t^3 + 1)\cdot 2t - (t^2 - 1)\cdot 3t^2}{(t^3 + 1)^2} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dt) - u(dv/dt)}{v^2}$$

$$= \frac{2t^4 + 2t - 3t^4 + 3t^2}{(t^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{-t^4 + 3t^2 + 2t}{(t^3 + 1)^2}.$$

■

Demostración de la regla de la derivada de un cociente

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}$$

Para convertir la última fracción en una equivalente que incluya los cocientes diferenciales para las derivadas de u y v, restamos y sumamos $v(x)u(x)$ en el numerador. Entonces, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{v(x)u(x+h) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{v(x)\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h} - u(x)\dfrac{v(x+h) - v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}.$$

Tomando los límites en el numerador y en el denominador, obtenemos la regla del cociente. El ejercicio 74 esboza otra demostración. ■

La elección de qué reglas usar al resolver un problema de diferenciación puede determinar si se trabaja mucho o no. A continuación se presenta un ejemplo.

EJEMPLO 7 Obtenga la derivada de

$$y = \frac{(x - 1)(x^2 - 2x)}{x^4}.$$

Solución Si aplicamos aquí la regla del cociente, se obtendrá una expresión complicada con muchos términos. En vez de ello, usamos algo de álgebra para simplificar la expresión. Primero, desarrollamos el numerador y dividimos entre x^4.

$$y = \frac{(x - 1)(x^2 - 2x)}{x^4} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^4} = x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}.$$

Después, usamos las reglas de suma y potencia:

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4}$$
$$= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}.$$

■

Segundas derivadas y derivadas de orden superior

Si $y = f(x)$ es una función diferenciable, entonces, su derivada $f'(x)$ también es una función. Si f' también es diferenciable, podemos diferenciar f' para obtener una nueva función de x denotada con f''. Así, $f'' = (f')'$. La función f'' se conoce como la **segunda derivada** de f porque es la derivada de la primera derivada. Esto se representa de distintas maneras:

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = y'' = D^2(f)(x) = D_x^2 f(x).$$

El símbolo D^2 significa que la operación de diferenciación se realiza dos veces.

Si $y = x^6$, entonces $y' = 6x^5$ y tenemos

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}(6x^5) = 30x^4.$$

Por lo tanto, $D^2(x^6) = 30x^4$.

Si y'' es diferenciable, su derivada, $y''' = dy''/dx = d^3y/dx^3$, es la **tercera derivada** de y con respecto a x, y así sucesivamente. De esta forma,

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}y^{(n-1)} = \frac{d^ny}{dx^n} = D^n y$$

denota la ***n*-ésima derivada** de y con respecto a x para cualquier entero positivo x.

Podemos interpretar la segunda derivada como la razón de cambio de la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en cada punto. En el siguiente capítulo veremos que la segunda derivada revela si la gráfica se dobla hacia arriba o hacia abajo con respecto a la recta tangente, conforme movemos el punto de tangencia. En la siguiente sección, la segunda y la tercera derivadas se interpretan en términos del movimiento a lo largo de una recta.

Cómo leer los símbolos de las derivadas

y'	"y prima"
y''	"y biprima"
$\frac{d^2y}{dx^2}$	"d cuadrada y dx cuadrada"
y'''	"y triprima"
$y^{(n)}$	"y derivada n-ésima"
$\frac{d^ny}{dx^n}$	"d a la n de y entre dx a la n"
D^n	"D a la n"

EJEMPLO 8 Las primeras cuatro derivadas de $y = x^3 - 3x^2 + 2$ son

Primera derivada:	$y' = 3x^2 - 6x$
Segunda derivada:	$y'' = 6x - 6$
Tercera derivada:	$y''' = 6$
Cuarta derivada:	$y^{(4)} = 0.$

Todas las funciones polinomiales tienen derivadas de todos los órdenes. En este ejemplo, la quinta derivada y las subsiguientes son iguales a cero. ■

Ejercicios 3.3

Cálculo de derivadas

En los ejercicios 1 a 12, obtenga la primera y segunda derivadas.

1. $y = -x^2 + 3$

2. $y = x^2 + x + 8$

3. $s = 5t^3 - 3t^5$

4. $w = 3z^7 - 7z^3 + 21z^2$

5. $y = \dfrac{4x^3}{3} - x$

6. $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{4}$

7. $w = 3z^{-2} - \dfrac{1}{z}$

8. $s = -2t^{-1} + \dfrac{4}{t^2}$

9. $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$

10. $y = 4 - 2x - x^{-3}$

11. $r = \dfrac{1}{3s^2} - \dfrac{5}{2s}$

12. $r = \dfrac{12}{\theta} - \dfrac{4}{\theta^3} + \dfrac{1}{\theta^4}$

En los ejercicios 13 a 16, obtenga y' ***a)*** aplicando la regla del producto y ***b)*** multiplicando los factores para obtener una suma de términos más simples de derivar.

13. $y = (3 - x^2)(x^3 - x + 1)$

14. $y = (2x + 3)(5x^2 - 4x)$

15. $y = (x^2 + 1)\left(x + 5 + \dfrac{1}{x}\right)$

16. $y = (1 + x^2)(x^{3/4} - x^{-3})$

En los ejercicios 17 a 28, obtenga las derivadas de las funciones.

17. $y = \dfrac{2x + 5}{3x - 2}$

18. $z = \dfrac{4 - 3x}{3x^2 + x}$

19. $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 0.5}$

20. $f(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + t - 2}$

21. $v = (1 - t)(1 + t^2)^{-1}$

22. $w = (2x - 7)^{-1}(x + 5)$

23. $f(s) = \dfrac{\sqrt{s} - 1}{\sqrt{s} + 1}$

24. $u = \dfrac{5x + 1}{2\sqrt{x}}$

25. $v = \dfrac{1 + x - 4\sqrt{x}}{x}$

26. $r = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$

27. $y = \dfrac{1}{(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)}$

28. $y = \dfrac{(x + 1)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)}$

En los ejercicios 29 a 32, obtenga las derivadas de todos los órdenes de las funciones.

29. $y = \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{3}{2}x^2 - x$

30. $y = \dfrac{x^5}{120}$

31. $y = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$

32. $y = (4x^2 + 3)(2 - x)x$

En los ejercicios 33 a 40, obtenga la primera y segunda derivadas.

33. $y = \dfrac{x^3 + 7}{x}$

34. $s = \dfrac{t^2 + 5t - 1}{t^2}$

35. $r = \dfrac{(\theta - 1)(\theta^2 + \theta + 1)}{\theta^3}$

36. $u = \dfrac{(x^2 + x)(x^2 - x + 1)}{x^4}$

37. $w = \left(\dfrac{1 + 3z}{3z}\right)(3 - z)$

38. $w = (z + 1)(z - 1)(z^2 + 1)$

39. $p = \left(\dfrac{q^2 + 3}{12q}\right)\left(\dfrac{q^4 - 1}{q^3}\right)$

40. $p = \dfrac{q^2 + 3}{(q - 1)^3 + (q + 1)^3}$

41. Suponga que u y v son funciones de x que son diferenciables en $x = 0$ y que

$$u(0) = 5, \quad u'(0) = -3, \quad v(0) = -1, \quad v'(0) = 2.$$

Obtenga los valores de las siguientes derivadas en $x = 0$.

a) $\dfrac{d}{dx}(uv)$ ***b)*** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)$ ***c)*** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v}{u}\right)$ ***d)*** $\dfrac{d}{dx}(7v - 2u)$

42. Suponga que u y v son funciones diferenciables de x y que

$$u(1) = 2, \quad u'(1) = 0, \quad v(1) = 5, \quad v'(1) = -1.$$

Obtenga los valores de las siguientes derivadas en $x = 1$.

a) $\dfrac{d}{dx}(uv)$ ***b)*** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)$ ***c)*** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v}{u}\right)$ ***d)*** $\dfrac{d}{dx}(7v - 2u)$

Pendientes y tangentes

43. ***a)*** **Normal a una curva** Obtenga una ecuación para la recta perpendicular a la tangente a la curva $y = x^3 - 4x + 1$ en el punto (2, 1).

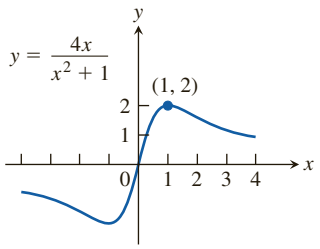
b) **Pendiente mínima** ¿Cuál es la pendiente mínima en la curva? ¿En qué punto la curva tiene dicha pendiente?

c) **Tangentes con pendiente específica** Obtenga las ecuaciones de las tangentes a la curva en los puntos donde la pendiente de la curva es 8.

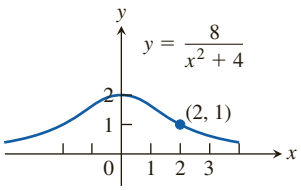
44. ***a)*** **Tangentes horizontales** Obtenga las ecuaciones de las tangentes horizontales a la curva $y = x^3 - 3x - 2$. También obtenga ecuaciones de las rectas perpendiculares a estas tangentes en los puntos de tangencia.

b) **Pendiente mínima** ¿Cuál es la pendiente mínima en la curva? ¿En qué punto la curva tiene dicha pendiente? Obtenga una ecuación para la recta perpendicular a la tangente de la curva en ese punto.

45. Obtenga las tangentes de la *serpentina de Newton* (graficada a continuación) en el origen y en el punto (1, 2).



46. Determine la tangente de la *bruja de Agnesi* (graficada a continuación) en el punto (2, 1).



47. Tangente cuadrática a la función identidad La curva $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el punto (1, 2) y es tangente a la recta $y = x$ en el origen. Obtenga a, b y c.

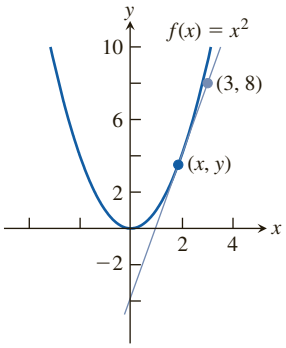
48. Funciones cuadráticas con una tangente común Las curvas $y = x^2 + ax + b$ y $y = cx - x^2$ tienen una recta tangente común en el punto (1, 0). Obtenga a, b y c.

49. Obtenga todos los puntos (x, y) de la gráfica de $f(x) = 3x^2 - 4x$ con rectas tangentes paralelas a la recta $y = 8x + 5$.

50. Obtenga todos los puntos (x, y) de la gráfica de $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$ con rectas tangentes paralelas a la recta $8x - 2y = 1$.

51. Obtenga todos los puntos (x, y) de la gráfica de $y = x/(x - 2)$ con rectas tangentes perpendiculares a la recta $y = 2x + 3$.

52. Obtenga todos los puntos (x, y) de la gráfica de $f(x) = x^2$ con rectas tangentes que pasan por el punto (3, 8).



53. ***a)*** Obtenga una ecuación para la recta que es tangente a la curva $y = x^3 - x$ en el punto $(-1, 0)$.

T ***b)*** Grafique juntas la curva y la tangente. La tangente interseca la curva en otro punto. Utilice las funciones Zoom y Trace de su calculadora graficadora para estimar las coordenadas del punto.

T ***c)*** Confirme su estimación de las coordenadas del segundo punto de intersección, resolviendo simultáneamente las ecuaciones de la curva y la tangente (utilice la tecla Solver).

54. ***a)*** Obtenga una ecuación para la recta que es tangente a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 5x$ en el origen.

T ***b)*** Grafique juntas la curva y la tangente. La tangente interseca a la curva en otro punto. Utilice las funciones Zoom y Trace de su calculadora graficadora para estimar las coordenadas del punto.

T ***c)*** Confirme su estimación de las coordenadas del segundo punto de intersección, resolviendo simultáneamente las ecuaciones de la curva y la tangente (utilice la tecla Solver).

Teoría y ejemplos

En los ejercicios 55 y 56, evalúe los límites convirtiendo primero cada uno en una derivada en un valor x particular.

55. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^{50} - 1}{x - 1}$ **56.** $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^{2/9} - 1}{x + 1}$

57. Obtenga el valor de a que hace diferenciable la siguiente función para todos los valores de x.

$$g(x) = \begin{cases} ax, & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

58. Obtenga los valores de a y b que hacen diferenciable la siguiente función para todos los valores de x.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > -1 \\ bx^2 - 3, & x \leq -1 \end{cases}$$

59. La función polinomial general de grado n tiene la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde $a_n \neq 0$. Obtenga $P'(x)$.

60. Reacción del cuerpo a un medicamento En ocasiones, la reacción del cuerpo a determinada dosis de un medicamento se representa con una ecuación de la forma

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right),$$

donde C es una constante positiva y M es la cantidad de medicamento absorbida en la sangre. Si la reacción es un cambio en la presión sanguínea, R se mide en milímetros de mercurio. Si la reacción es un cambio en la temperatura, R se mide en grados, etcétera.

Obtenga dR/dM. Esta derivada, como una función de M, se denomina sensibilidad del cuerpo al medicamento. En la sección 4.5 veremos cómo determinar la cantidad de medicamento a la que el cuerpo es más sensible.

61. Suponga que la función v en la regla de la derivada del producto tiene un valor constante c. ¿Qué indica la regla de la derivada del producto en ese caso? ¿Qué significa esto para la regla del múltiplo constante?

62. La regla de la función recíproca

a) La *regla de la función recíproca* afirma que en cualquier punto donde la función $v(x)$ es diferenciable y distinta de cero,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}.$$

Demuestre que la regla de la función recíproca es un caso especial de la regla del cociente.

b) Demuestre que juntas, la regla de la función recíproca y la del producto, implican la regla del cociente.

63. Generalización de la regla del producto La regla del producto da la fórmula

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

para la derivada del producto uv de dos funciones diferenciables de x.

a) ¿Cuál es la fórmula análoga para la derivada del producto uvw de *tres* funciones diferenciables de x?

b) ¿Cuál es la fórmula para la derivada del producto $u_1u_2u_3u_4$ de *cuatro* funciones diferenciables de x?

c) ¿Cuál es la fórmula para la derivada de un producto $u_1u_2u_3 \cdots u_n$ de un número finito n de funciones diferenciables de x?

64. Regla de la potencia para enteros negativos Con base en la regla del cociente, demuestre la regla de la potencia para enteros negativos, es decir,

$$\frac{d}{dx}(x^{-m}) = -mx^{-m-1}$$

donde m es un entero positivo.

65. Presión en un cilindro Si un gas en un cilindro se mantiene a temperatura constante T, la presión P se relaciona con el volumen V mediante la fórmula

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2},$$

donde a, b, n y R son constantes. Obtenga dP/dV. (Vea la siguiente figura).

66. El mejor número de pedidos Una de las fórmulas para la administración de inventarios indica que el costo semanal promedio de pedidos, pago de los mismos y manejo de mercancías es

$$A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2},$$

donde q es la cantidad de pedidos que se ordena al proveedor cuando quedan pocos productos (zapatos, televisores, escobas o cualquier otro artículo); k es el costo que implica realizar el pedido (es un costo fijo, sin importar la frecuencia de pedidos); c es el costo de un artículo (una constante); m es el número de artículos vendidos cada semana (una constante); y h es el costo de manejo semanal por artículo (una constante que toma en cuenta factores como el espacio de almacenamiento, instalaciones, el pago de seguros y vigilancia). Obtenga dA/dq y d^2A/dq^2.

3.4 La derivada como razón de cambio

En la sección 2.1 se presentaron las razones de cambio promedio e instantáneas. En esta sección estudiaremos más aplicaciones donde las derivadas permiten modelar la razón a la que cambia una situación. Es natural pensar en el cambio de una cantidad con respecto al tiempo, pero también pueden estar implicadas otras variables. Por ejemplo, un economista quizá desee investigar cómo varía el costo de producción del acero en relación con el número de toneladas que se fabrican, o un ingeniero tal vez quiera saber cómo varía la potencia de salida de un generador de acuerdo con su temperatura.

Razones de cambio instantáneas

Si interpretamos el cociente diferencial $(f(x+h) - f(x))/h$ como la razón promedio de cambio de f en el intervalo de x a $x + h$, podemos interpretar su límite cuando $h \to 0$ como la razón a la cual f cambia en el punto x.

DEFINICIÓN La **razón instantánea de cambio** de f con respecto a x en x_0 es la derivada

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre y cuando el límite exista.

Por lo tanto, las razones instantáneas de cambio son límites de las razones promedio de cambio.

Por convención, se utiliza la palabra *instantánea* aun cuando x no represente tiempo. Sin embargo, la palabra se omite a menudo. Cuando decimos *razón de cambio*, queremos decir *razón instantánea de cambio*.

EJEMPLO 1 El área A de un círculo se relaciona con su diámetro mediante la ecuación

$$A = \frac{\pi}{4} D^2.$$

¿Qué tan rápido cambia el área con respecto al diámetro cuando éste mide 10 m?

Solución La razón de cambio del área con respecto al diámetro es

$$\frac{dA}{dD} = \frac{\pi}{4} \cdot 2D = \frac{\pi D}{2}.$$

Cuando $D = 10$ m, el área cambia con respecto al diámetro a razón de $(\pi/2)10 = 5\pi$ m^2/m ≈ 15.71 m^2/m. ■

Movimiento a lo largo de una recta: Desplazamiento, velocidad, rapidez, aceleración y sacudida

Supongamos que un objeto (o cuerpo, considerado como una masa completa) se mueve a lo largo de una recta coordenada (un eje s), normalmente horizontal o vertical, de modo que conocemos su posición s en la recta como una función del tiempo t:

$$s = f(t).$$

El **desplazamiento** del objeto en el intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$ (figura 3.12) es

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t),$$

y la **velocidad promedio** del objeto en ese intervalo de tiempo es

$$v_{av} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo de recorrido}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Para obtener la velocidad de un cuerpo en el instante exacto t, tomamos el límite de la velocidad promedio en el intervalo de t a $t + \Delta t$ cuando Δt tiende a cero. Este límite es la derivada de f con respecto a t.

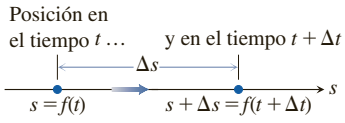
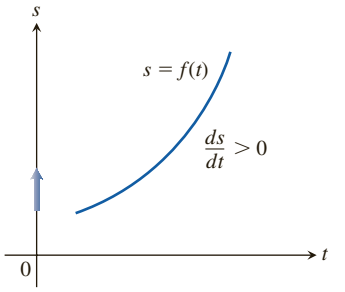
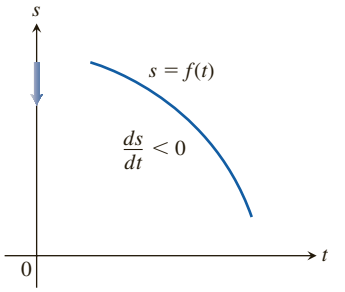


FIGURA 3.12 Posiciones de un cuerpo que se desplaza a lo largo de una recta coordenada en el tiempo t y, un breve lapso después, en $t + \Delta t$. Aquí, la recta coordenada es horizontal.



a) s aumenta: pendiente positiva, de manera que el movimiento es hacia arriba.



b) s disminuye: pendiente negativa, de manera que el movimiento es hacia abajo.

FIGURA 3.13 Para el movimiento $s = f(t)$ a lo largo de una recta (el eje vertical), $v = ds/dt$ es *a*) positiva cuando s aumenta, y *b*) negativa cuando s disminuye.

DEFINICIÓN La **velocidad (instantánea)** es la derivada de la posición con respecto al tiempo. Si la posición de un cuerpo en el momento t es $s = f(t)$, entonces, la velocidad del cuerpo en el momento t es

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

La velocidad, además de indicarnos qué tan rápido se desplaza el objeto a lo largo de la recta horizontal en la figura 3.12, nos permite conocer la dirección del movimiento. Cuando el objeto se mueve hacia delante (s aumenta), la velocidad es positiva; cuando el cuerpo se desplaza hacia atrás (s disminuye), la velocidad es negativa. Si la recta coordenada es vertical, el objeto se mueve hacia arriba cuando la velocidad es positiva, y hacia abajo cuando la velocidad es negativa. Las curvas en la figura 3.13 representan la posición a lo largo de la recta, con el paso del tiempo; no reflejan la trayectoria del movimiento, la cual está a lo largo del eje vertical s.

Si conducimos a la casa de un amigo y regresamos a 30 millas por hora (mph), por ejemplo, la aguja del velocímetro marcará 30 en el camino de ida, pero no señalará -30 en el camino de regreso, aun cuando la distancia hacia nuestra casa esté disminuyendo. El velocímetro siempre indica la *rapidez*, que es el valor absoluto de la velocidad. La rapidez mide la razón de avance, independientemente de la dirección.

DEFINICIÓN La **rapidez** es el valor absoluto de la velocidad.

$$\text{Rapidez} = |v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

EJEMPLO 2 La figura 3.14 muestra la gráfica de la velocidad $v = f'(t)$ de una partícula que se desplaza a lo largo de una recta horizontal [en lugar de mostrar la función de posición $s = f(t)$, como en la figura 3.13]. En la gráfica de la función velocidad, no es la pendiente de la curva la que nos indica si la partícula se mueve hacia delante o hacia atrás a lo largo de la

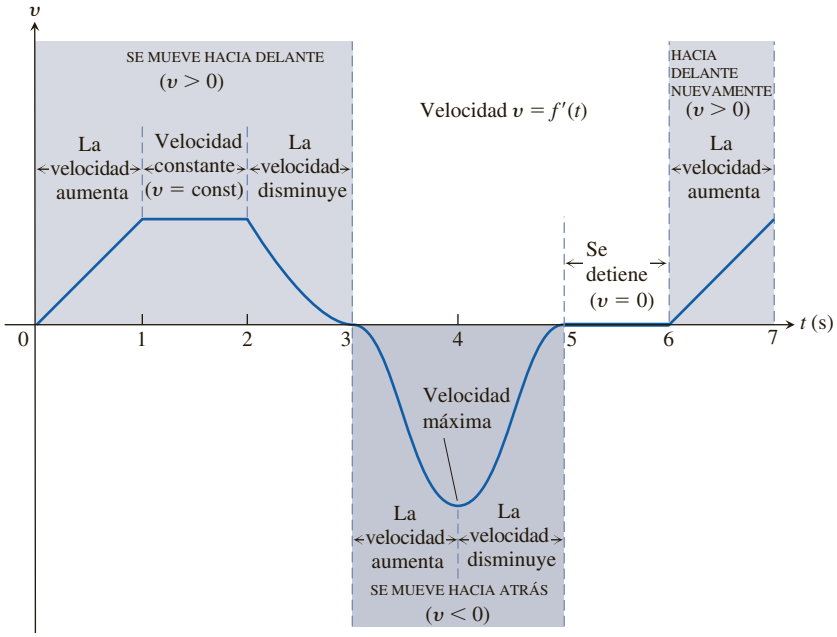


FIGURA 3.14 La gráfica de velocidad de una partícula que se desplaza a lo largo de una recta horizontal en el ejemplo 2.

recta, sino más bien el signo de la velocidad. En la figura 3.14 vemos que la partícula se desplaza hacia delante durante los primeros 3 segundos (cuando la velocidad es positiva), se mueve hacia atrás durante los siguientes 2 segundos (la velocidad es negativa), se detiene durante un segundo, y luego se desplaza de nuevo hacia delante. La partícula aumenta su rapidez cuando su velocidad positiva crece durante el primer segundo, se mueve a velocidad constante durante el siguiente segundo, y luego disminuye su rapidez cuando la velocidad se reduce a cero durante el tercer segundo. Se detiene por un instante en $t = 3$ s (cuando la velocidad es cero) e invierte su dirección cuando la velocidad comienza a ser negativa. Ahora la partícula se mueve hacia atrás y aumenta su velocidad hasta $t = 4$ s, cuando alcanza su velocidad máxima durante su movimiento de regreso. Continuando su movimiento de regreso en el tiempo $t = 4$, la partícula comienza a disminuir su velocidad nuevamente hasta que, finalmente, se detiene en $t = 5$ (cuando la velocidad es cero una vez más). La partícula ahora permanece inmóvil por un segundo completo, y luego se mueve hacia delante de nuevo en $t = 6$ s, aumentando su velocidad durante el segundo final del movimiento hacia delante, como se indica en la gráfica de velocidad. ■

La razón a la cual la velocidad del cuerpo cambia es su *aceleración*; esto es, la aceleración mide qué tan rápido gana o pierde velocidad un cuerpo. En el capítulo 13 estudiaremos el movimiento en el plano y en el espacio, donde la aceleración de un cuerpo también puede conducir a un cambio en la dirección.

Un cambio repentino en la aceleración es una *sacudida*. Las sacudidas que se presentan durante un paseo en automóvil o en autobús no necesariamente se deben a que la aceleración involucrada sea muy considerable, sino a que el cambio en la aceleración es abrupto.

DEFINICIONES La **aceleración** es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo. Si la posición de un objeto en el tiempo t es $s = f(t)$, entonces, la aceleración del objeto en el tiempo t es

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

La **sacudida** es la derivada de la aceleración con respecto al tiempo:

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}.$$

Cerca de la superficie de la Tierra, todos los cuerpos caen con la misma aceleración constante. Los experimentos de caída libre realizados por Galileo (vea la sección 2.1) nos conducen a la ecuación

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

donde s es la distancia recorrida y g es la aceleración debida a la gravedad de la Tierra. Esta ecuación se cumple en el vacío, donde no hay resistencia del aire; sin embargo, modela bastante bien la caída de objetos densos y pesados, como piedras o herramientas de acero, durante los primeros segundos de su caída, antes de que la resistencia del aire sea significativa.

El valor de g en la ecuación $s = (1/2)gt^2$ depende de las unidades empleadas para medir t y s. Con t en segundos (la unidad habitual), el valor de g, a nivel del mar, es aproximadamente de 32 ft/s^2 (pies por segundo al cuadrado) en unidades inglesas, y $g = 9.8$ m/s^2 (metros por segundo al cuadrado) en unidades métricas. (Estas constantes gravitacionales dependen de la distancia al centro de masa de la Tierra y son ligeramente menores en la cima del Monte Everest, por ejemplo).

La sacudida por la aceleración constante de la gravedad ($g = 32$ ft/s^2) es cero:

$$j = \frac{d}{dt}(g) = 0.$$

Un objeto no experimenta sacudidas durante la caída libre.

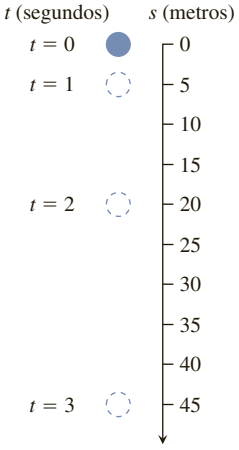


FIGURA 3.15 Una bola que cae a partir del reposo (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 La figura 3.15 muestra la caída libre de una bola pesada, que parte del reposo en el tiempo $t = 0$ s.

a) ¿Cuántos metros cae la bola en los primeros 3 s?

b) ¿Cuáles son su velocidad, rapidez y aceleración cuando $t = 3$?

Solución

a) La ecuación métrica de caída libre es $s = 4.9t^2$. Durante los primeros 3 segundos, la bola cae

$$s(3) = 4.9(3)^2 = 44.1 \text{ m}.$$

b) En cualquier tiempo t, la *velocidad* es la derivada de la posición:

$$v(t) = s'(t) = \frac{d}{dt}(4.9t^2) = 9.8t.$$

En $t = 3$, la velocidad es

$$v(3) = 29.4 \text{ m/s}$$

en la dirección de descenso (cuando s aumenta). La *rapidez* en $t = 3$ es

$$\text{rapidez} = |v(3)| = 29.4 \text{ m/s}.$$

La *aceleración* en cualquier momento t es

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 9.8 \text{ m/s}^2.$$

En $t = 3$, la aceleración es 9.8 m/s^2. ■

EJEMPLO 4 Una explosión de dinamita lanza una roca pesada directamente hacia arriba, con una velocidad de 160 ft/s (alrededor de 109 millas/hora) (figura 3.16*a*). La roca alcanza una altura $s = 160t - 16t^2$ ft después de t segundos.

a) ¿Qué altura alcanza la roca?

b) ¿Cuáles son la velocidad y la rapidez de la roca cuando se encuentra a 256 ft del suelo durante el ascenso? ¿Y durante el descenso?

c) ¿Cuál es la aceleración de la roca en cualquier momento t durante el vuelo (después de la explosión)?

d) ¿Cuándo toca la roca el suelo nuevamente?

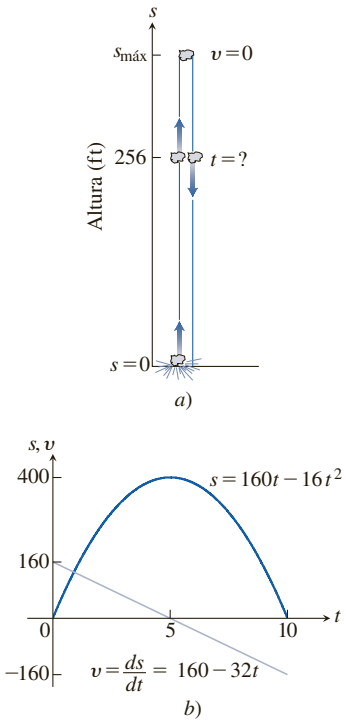


FIGURA 3.16 *a*) La roca del ejemplo 4. *b*) Las gráficas de s y v como funciones del tiempo; s alcanza su valor máximo cuando $v = ds/dt = 0$. La gráfica de s *no* es la trayectoria de la roca: es un diagrama de la altura contra el tiempo. La pendiente de la gráfica es la velocidad de la roca, graficada aquí como una línea recta.

Solución

a) En el sistema de coordenadas que hemos elegido, s mide la altura desde el suelo, de manera que la velocidad es positiva en el trayecto hacia arriba y negativa en el descenso. La roca se encuentra en su punto más alto en el instante del vuelo en el que la velocidad es 0. Para calcular la altura máxima, todo lo que necesitamos hacer es determinar en qué momento $v = 0$ y evaluar s en ese instante.

En cualquier momento t durante el movimiento de la roca, su velocidad es

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(160t - 16t^2) = 160 - 32t \text{ ft/s}.$$

La velocidad es cero cuando

$$160 - 32t = 0 \qquad \text{o} \qquad t = 5 \text{ s}.$$

La altura de la roca en $t = 5$ s es

$$s_{máx} = s(5) = 160(5) - 16(5)^2 = 800 - 400 = 400 \text{ ft}.$$

Vea la figura 3.16*b*).

b) Para conocer la velocidad de la roca a 256 ft durante el ascenso y nuevamente en el descenso, primero determinamos los dos valores de t para los cuales

$$s(t) = 160t - 16t^2 = 256.$$

Para resolver esta ecuación, escribimos

$$\begin{aligned} 16t^2 - 160t + 256 &= 0 \\ 16(t^2 - 10t + 16) &= 0 \\ (t - 2)(t - 8) &= 0 \\ t = 2\,\text{s}, \; t &= 8\,\text{s}. \end{aligned}$$

La roca se encuentra a 256 ft por encima del suelo 2 s después de la explosión y, nuevamente, a los 8 s después de la explosión. Las velocidades de la roca en esos instantes son

$$v(2) = 160 - 32(2) = 160 - 64 = 96 \text{ ft/s}.$$
$$v(8) = 160 - 32(8) = 160 - 256 = -96 \text{ ft/s}.$$

En ambos instantes, la rapidez de la roca es igual a 96 ft/s. Como $v(2) > 0$, la roca va en ascenso (s aumenta) en $t = 2$ s; y desciende (s disminuye) en $t = 8$, ya que $v(8) < 0$.

c) En cualquier momento durante el vuelo que sigue a la explosión, la aceleración de la roca es una constante

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(160 - 32t) = -32 \text{ ft/s}^2.$$

La aceleración siempre es hacia abajo y se debe al efecto de la gravedad sobre la roca. Conforme la roca se eleva, pierde rapidez; cuando cae, su rapidez aumenta.

d) La roca golpea el suelo en el tiempo positivo t para el cual $s = 0$. La ecuación $160t - 16t^2 = 0$ se factoriza para obtener $16t(10 - t) = 0$, de modo que tiene las soluciones $t = 0$ y $t = 10$. La explosión ocurrió en $t = 0$ y la roca se proyectó hacia arriba, para regresar al suelo 10 s después. ■

Derivadas en economía

Los ingenieros usan los términos *velocidad* y *aceleración* para referirse a las derivadas de las funciones que describen movimiento. Los economistas también tienen un vocabulario especial para denominar a las razones de cambio y sus derivadas; las llaman *marginales*.

En un proceso de manufactura, el *costo de producción* $c(x)$ es una función de x, el número de unidades producidas. El **costo marginal de producción** es la razón de cambio del costo con respecto al nivel de producción, de manera que es dc/dx.

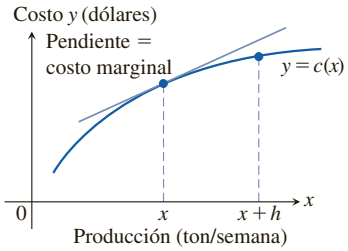


FIGURA 3.17 Producción semanal de acero: $c(x)$ es el costo de producir x toneladas por semana. El costo de producir h toneladas adicionales es $c(x + h) - c(x)$.

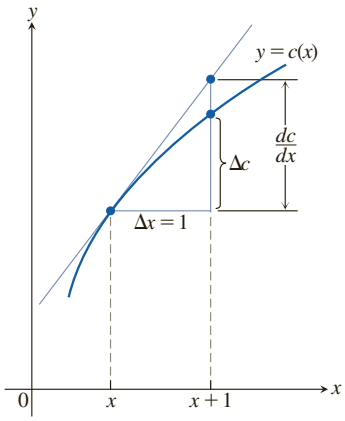


FIGURA 3.18 El costo marginal dc/dx es aproximadamente el costo adicional Δc de producir $\Delta x = 1$ más unidades.

Suponga que $c(x)$ representa la cantidad de dinero necesaria para producir x toneladas de acero en una semana. Producir $x + h$ toneladas por semana cuesta más, y la diferencia de los costos, dividida entre h, es el costo promedio de producción de cada tonelada adicional.

$$\frac{c(x + h) - c(x)}{h} = \begin{array}{l}\text{costo promedio de cada tonelada}\\ \text{adicional, } h\text{, de acero producido.}\end{array}$$

El límite de esta razón cuando $h \to 0$ es el *costo marginal* de fabricar más acero por semana cuando la producción semanal es de x toneladas (figura 3.17):

$$\frac{dc}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{c(x + h) - c(x)}{h} = \text{costo marginal de producción.}$$

Algunas veces el costo marginal de producción se define de manera general como el costo de producir una unidad adicional:

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x + 1) - c(x)}{1},$$

lo cual es aproximadamente el valor de dc/dx en x. Esta aproximación es aceptable si la pendiente de la gráfica de c no cambia rápidamente cerca de x. Entonces, el cociente diferencial está cerca de su límite dc/dx, que es la elevación de la recta tangente si $\Delta x = 1$ (figura 3.18). La aproximación funciona mejor para valores grandes de x.

A menudo los economistas representan la función de costo total con un polinomio cúbico

$$c(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

donde δ representa los *costos fijos*, como el alquiler, la calefacción, la amortización del equipo y los costos de administración. Los otros términos representan los *costos variables*, como los costos de las materias primas y la mano de obra, y los impuestos. Los costos fijos son independientes del número de unidades producidas, mientras que los costos variables dependen de la cantidad que se produce. Por lo general, un polinomio cúbico es adecuado para reflejar el comportamiento del costo en un intervalo de producción realista.

EJEMPLO 5 Suponga que

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

es el costo de producción en dólares de x radiadores cuando se producen entre 8 y 30 unidades, y que

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

da el ingreso en dólares por vender x radiadores. Suponga que, en su taller, se producen actualmente 10 radiadores al día. ¿Aproximadamente cuánto más costará producir un radiador adicional cada día y cuál es su incremento estimado de ingresos por la venta de 11 radiadores al día?

Solución El costo de fabricar un radiador más al día cuando se producen 10, es aproximadamente $c'(10)$:

$$c'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 6x^2 + 15x\right) = 3x^2 - 12x + 15$$

$$c'(10) = 3(100) - 12(10) + 15 = 195.$$

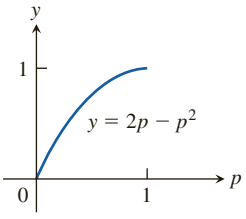
El costo adicional será aproximadamente de \$195. El ingreso marginal es

$$r'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 12x) = 3x^2 - 6x + 12.$$

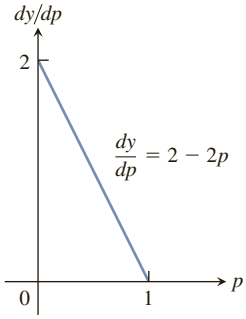
La función del ingreso marginal estima el incremento del ingreso que se generará al vender una unidad más. Si actualmente usted vende 10 radiadores al día, puede esperar que su ingreso se incremente en aproximadamente

$$r'(10) = 3(100) - 6(10) + 12 = \$252$$

si usted aumenta sus ventas a 11 radiadores al día. ■



a)



b)

FIGURA 3.19 *a*) La gráfica de $y = 2p - p^2$ describe la porción de guisantes con cáscara lisa en la siguiente generación. *b*) La gráfica de dy/dp (ejemplo 7).

EJEMPLO 6 Para entender mejor el lenguaje de las tasas marginales, consideremos las tasas marginales de los impuestos. Si su tasa marginal de impuesto sobre la renta es de 28% y su ingreso se incrementa \$1000, usted esperaría pagar \$280 adicionales de impuestos. Esto no significa que deberá pagar por concepto de impuestos el 28% de su ingreso total, sino que, en su nivel de ingresos actual, I, la razón del aumento de impuestos T con respecto al ingreso es $dT/dI = 0.28$. Usted pagaría \$0.28 más de impuestos por cada unidad monetaria adicional que gane. Desde luego, si sus ingresos se elevan mucho, podría caer en un rango de contribución más alto, lo cual ocasionaría que su tasa marginal se elevara. ■

Sensibilidad al cambio

Cuando un cambio pequeño en x origina un gran cambio en el valor de una función $f(x)$, decimos que la función es relativamente **sensible** al cambio en x. La derivada $f'(x)$ es una medida de esa sensibilidad.

EJEMPLO 7 Datos genéticos y sensibilidad al cambio

Al trabajar en su jardín con guisantes y otras plantas, el monje austriaco Gregor Johann Mendel (1822-1824) brindó la primera explicación científica de la hibridación.

Sus minuciosos registros mostraron que si p (un número entre 0 y 1) es la frecuencia del gen (dominante) de los guisantes que determina que tengan la cáscara lisa, y $(1 - p)$ es la frecuencia del gen que determina que tengan la cáscara rugosa, entonces, la proporción de guisantes con cáscara lisa en la siguiente generación será

$$y = 2p(1 - p) + p^2 = 2p - p^2.$$

La gráfica de y contra p de la figura 3.19*a*) sugiere que el valor de y es más sensible a un cambio en p cuando p es pequeña que cuando es grande. Este hecho está avalado por la gráfica de la derivada en la figura 3.19*b*), la cual muestra que dy/dp se encuentra cerca de 2 cuando p está cerca de 0, y se encuentra cerca de 0 cuando p está cerca de 1.

La implicación en genética es que el hecho de introducir unos cuantos genes más de guisantes con cáscara lisa en una población donde la frecuencia de guisantes con cáscara rugosa es grande tendrá un efecto más notable en generaciones posteriores que el que tendría un incremento similar en poblaciones con una gran proporción de guisantes con cáscara lisa. ■

Ejercicios 3.4

Movimiento a lo largo de una recta coordenada

En los ejercicios 1 a 6, determine las posiciones $s = f(t)$ de un cuerpo que se mueve en una recta coordenada, con s en metros y t en segundos.

a) Calcule el desplazamiento del cuerpo y la velocidad promedio para el intervalo de tiempo dado.

b) Determine la velocidad y aceleración del cuerpo en los extremos del intervalo.

c) ¿En qué momento durante el intervalo, si acaso, cambia la dirección del cuerpo?

1. $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \le t \le 2$

2. $s = 6t - t^2, \quad 0 \le t \le 6$

3. $s = -t^3 + 3t^2 - 3t, \quad 0 \le t \le 3$

4. $s = (t^4/4) - t^3 + t^2, \quad 0 \le t \le 3$

5. $s = \dfrac{25}{t^2} - \dfrac{5}{t}, \quad 1 \le t \le 5$

6. $s = \dfrac{25}{t + 5}, \quad -4 \le t \le 0$

7. Movimiento de una partícula En el tiempo t, la posición de un cuerpo que se mueve a lo largo del eje s es $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ m.

a) Obtenga la aceleración del cuerpo cada vez que la velocidad es cero.

b) Obtenga la rapidez del cuerpo cada vez que la aceleración es cero.

c) Obtenga la distancia total recorrida por el cuerpo de $t = 0$ a $t = 2$.

8. Movimiento de una partícula En el tiempo $t \ge 0$, la velocidad de un cuerpo que se desplaza a lo largo del eje horizontal s es $v = t^2 - 4t + 3$.

a) Obtenga la aceleración del cuerpo cada vez que la velocidad es cero.

b) ¿En qué momento el cuerpo se mueve hacia delante? ¿Y hacia atrás?

c) ¿En qué momento la velocidad aumenta? ¿Y en qué momento disminuye?

Aplicaciones de caída libre

9. Caída libre en Marte y Júpiter Las ecuaciones de caída libre (s en metros, t en segundos) son $s = 1.86t^2$ en Marte y $s = 11.44t^2$ en Júpiter. ¿Cuánto tiempo tardará una piedra que cae,

partiendo del reposo, en alcanzar una velocidad de 27.8 m/s (alrededor de 100 km/h) en cada planeta?

10. Movimiento de un proyectil en la Luna Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba desde la superficie lunar, a una velocidad de 24 m/s (alrededor de 86 km/h); el proyectil alcanza una altura $s = 24t - 0.8t^2$ metros en t segundos.

a) Obtenga la velocidad y la aceleración de la piedra en el tiempo t. (En este caso, la aceleración es la de la gravedad en la Luna).

b) ¿Cuánto tarda la piedra en alcanzar el punto más alto?

c) ¿Qué altura alcanza la piedra?

d) ¿Cuánto tarda la piedra en alcanzar la mitad de su altura máxima?

e) ¿Cuánto tiempo está la piedra en el aire?

11. Obtención de g en un pequeño planeta sin atmósfera En un planeta sin atmósfera, unos exploradores usaron una pistola de resorte para lanzar verticalmente hacia arriba una pelota desde la superficie, con una velocidad de lanzamiento de 15 m/s. Debido a que la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta es de g_s m/s^2, los exploradores esperaban que la pelota alcanzara una altura de $s = 15t - (1/2)g_s t^2$ m, t segundos después. La pelota alcanzó su máxima altura 20 segundos después del lanzamiento. ¿Cuál es el valor de g_s?

12. Bala rápida Una bala calibre 45 disparada hacia arriba desde la superficie lunar, alcanzaría una altura de $s = 832t - 2.6t^2$ ft después de t segundos. En la Tierra, en ausencia de aire, su altura sería $s = 832t - 16t^2$ ft, después de t segundos. ¿Cuánto tiempo estaría la bala en el aire en cada caso? ¿Qué altura máxima alcanzaría la bala en cada caso?

13. Caída libre desde la torre de Pisa Si Galileo hubiera dejado caer una bala de cañón desde la torre de Pisa, a 179 ft sobre el nivel del suelo, la altura de la bala a t segundos de la caída habría sido $s = 179 - 16t^2$.

a) ¿Cuáles habrían sido la velocidad, la rapidez y la aceleración de la bala en el tiempo t?

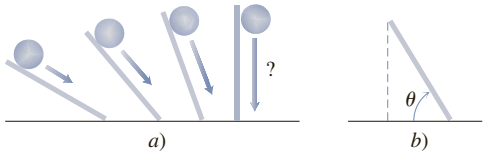
b) ¿Cuánto habría tardado la bala en llegar al suelo?

c) ¿Cuál habría sido la velocidad de la bala en el momento del impacto?

14. Fórmula de la caída libre de Galileo Galileo desarrolló una fórmula para determinar la velocidad de un cuerpo durante la caída libre, haciendo rodar hacia abajo pelotas desde el reposo por tablones inclinados, y buscando una fórmula límite que pronosticara el comportamiento de la bola cuando el tablón estuviera en posición vertical y la bola cayera libremente [vea el inciso *a)* de la siguiente figura]. Galileo descubrió que, para cualquier ángulo dado del tablón, la velocidad de la pelota durante t segundos de movimiento era un múltiplo constante de t. Esto es, la velocidad estaba dada por una fórmula del tipo $v = kt$. El valor de la constante k dependía de la inclinación del tablón.

En notación moderna, inciso *b)* de la figura, con la distancia en metros y el tiempo en segundos, lo que Galileo determinó experimentalmente fue que, para cualquier ángulo θ, la velocidad de la pelota, a t segundos de comenzar a rodar, era

$v = 9.8(\text{sen}\,\theta)t$ m/s. Posición en caída libre



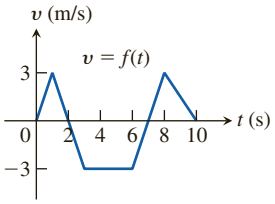
a) *b)*

a) ¿Cuál es la ecuación para la velocidad de la pelota en caída libre?

b) A partir del trabajo realizado en el inciso *a)*, ¿cuál es la aceleración constante que experimenta un cuerpo en caída libre cerca de la superficie terrestre?

Comprensión del movimiento a partir de gráficas

15. La siguiente figura muestra la velocidad $v = ds/dt = f(t)$ (m/s) de un cuerpo que se desplaza a lo largo de una recta coordenada.



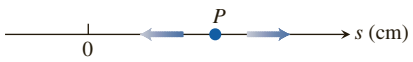
a) ¿Cuándo invierte su dirección el cuerpo?

b) ¿Cuándo (aproximadamente) el cuerpo se desplaza con rapidez constante?

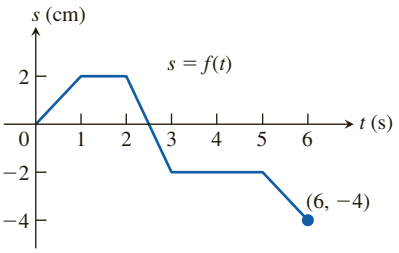
c) Grafique la rapidez del cuerpo para $0 \le t \le 10$.

d) Grafique la aceleración, donde esté definida.

16. Una partícula P se desplaza sobre la recta numérica que se muestra en la parte *a)* de la figura. El inciso *b)* muestra la posición de P como una función del tiempo t.



a)



b)

a) ¿Cuándo se mueve P hacia la izquierda? ¿Y hacia la derecha? ¿Cuándo está inmóvil?

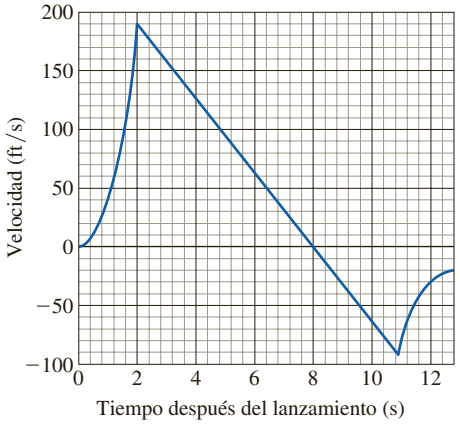
b) Grafique la velocidad y la rapidez de la partícula (donde estén definidas).

17. Lanzamiento de un cohete Cuando se lanza un modelo de cohete, la carga propulsora se quema durante algunos segundos, acelerando el cohete hacia arriba. Al agotarse el combustible, el cohete sigue subiendo durante algún tiempo y, luego, comienza a caer. Inmediatamente después de iniciar el descenso, una pequeña carga explosiva abre un paracaídas que frena la caída del cohete para evitar que éste se destruya al aterrizar.

La figura muestra los datos de la velocidad del vuelo del cohete. Use los datos para contestar las siguientes preguntas.

a) ¿Qué tan rápido estaba subiendo el cohete cuando el motor se detuvo?

b) ¿Durante cuántos segundos se quemó el combustible?



c) ¿Cuándo alcanzó el cohete el punto más alto? ¿Cuál era su velocidad en ese momento?

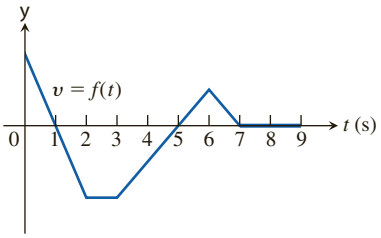
d) ¿Cuándo se abrió el paracaídas? ¿Qué tan rápido caía el cohete en ese momento?

e) ¿Durante cuánto tiempo estuvo en descenso el cohete antes de que se abriera el paracaídas?

f) ¿Cuándo alcanzó el cohete la máxima aceleración?

g) ¿En qué momento la aceleración era constante? ¿Cuál era su valor en ese momento (redondee al entero más cercano)?

18. La gráfica de la siguiente figura representa la velocidad $v = f(t)$ de una partícula que se desplaza sobre una recta coordenada horizontal.



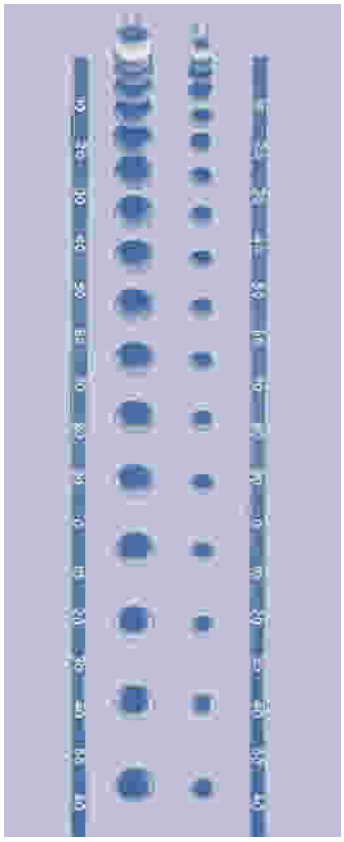
a) ¿Cuándo se mueve la partícula hacia delante? ¿Y hacia atrás? ¿Cuándo aumenta la rapidez y cuándo se reduce?

b) ¿Cuándo es positiva la aceleración de la partícula? ¿Cuándo es negativa? ¿Cuándo es igual a cero?

c) ¿Cuándo se registra la rapidez máxima de la partícula?

d) ¿En qué momento la partícula queda inmóvil durante más de un instante?

19. Caída de dos pelotas En la siguiente figura se muestra una fotografía, tomada con flash múltiple, de dos pelotas que caen a partir del reposo. Las reglas verticales tienen escala en centímetros. Emplee la ecuación $s = 490t^2$ (la ecuación de caída libre con s en centímetros y t en segundos) para responder las siguientes preguntas. (*Fuente: PSSC Physics*, 2a. ed., reimpresa con permiso de Education Development Center, Inc.)



a) ¿Cuánto tiempo tardan en caer las pelotas los primeros 160 cm? ¿Cuál fue su velocidad promedio en ese periodo?

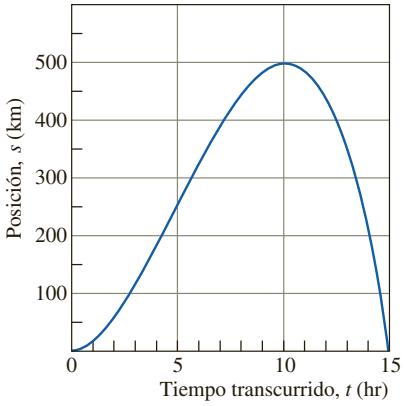
b) ¿Qué tan rápido caían las pelotas al alcanzar la marca de 160 cm? ¿Cuál era su aceleración en ese momento?

c) ¿Qué tan rápido se disparaba el flash de la cámara (en disparos por segundo)?

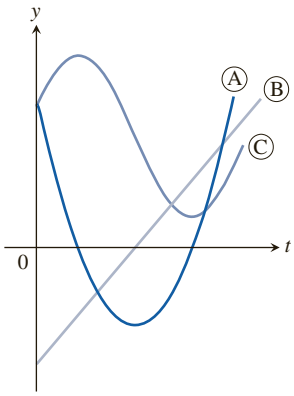
20. Viaje en camión La siguiente gráfica muestra la posición s de un camión que viaja por una carretera. El vehículo inició su trayecto en $t = 0$ y regresó 15 horas después, en $t = 15$.

a) Empleando la técnica descrita en el ejemplo 3 de la sección 3.2, grafique la velocidad del camión, $v = ds/dt$ para $0 \le t \le 15$. Después, repita el procedimiento con la curva de la velocidad para graficar la aceleración del camión, dv/dt.

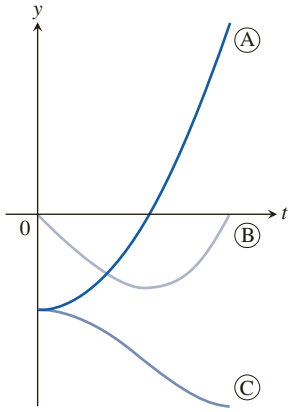
b) Suponga que $s = 15t^2 - t^3$. Grafique ds/dt y d^2s/dt^2, y compare sus gráficas con las del inciso *a*).



21. Las gráficas de la siguiente figura representan la posición s, la velocidad $v = ds/dt$ y la aceleración $a = d^2s/dt^2$, como funciones del tiempo t, de un cuerpo que se desplaza a lo largo de una recta coordenada. ¿Cuál gráfica es cuál? Justifique sus respuestas.



22. Las gráficas de la siguiente figura representan la posición s, la velocidad $v = ds/dt$ y la aceleración $a = d^2s/dt^2$, como funciones del tiempo t, de un cuerpo que se mueve a lo largo de una recta coordenada. ¿Cuál gráfica es cuál? Justifique sus respuestas.



Economía

23. Costo marginal Suponga que el costo, en dólares, de producir x lavadoras es $c(x) = 2000 + 100x - 0.1x^2$.

a) Obtenga el costo promedio por lavadora al fabricar las primeras 100 unidades.

b) Obtenga el costo marginal cuando se producen 100 unidades.

c) Demuestre que el costo marginal cuando se producen 100 lavadoras es casi igual al costo de producir una lavadora más después de haber producido las 100 primeras, calculando este costo directamente.

24. Ingreso marginal Suponga que el ingreso obtenido al vender x lavadoras es

$$r(x) = 20{,}000\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

dólares.

a) Determine el ingreso marginal cuando se producen 100 lavadoras.

b) Use la función $r'(x)$ para estimar el incremento en el ingreso como resultado del aumento en la producción, de 100 a 101 lavadoras a la semana.

c) Obtenga el límite de $r'(x)$ cuando $x \to \infty$. ¿Cómo interpreta este número?

Aplicaciones adicionales

25. Población de bacterias Cuando se aplicó un bactericida a un cultivo de nutrientes donde estaban creciendo bacterias, la población de éstas continuó aumentando por algún tiempo, pero poco después, el crecimiento se detuvo y la población comenzó a declinar. El tamaño de la población en el tiempo t (horas) era $b = 10^6 + 10^4t - 10^3t^2$. Obtenga la razón de crecimiento en

a) $t = 0$ horas.

b) $t = 5$ horas.

c) $t = 10$ horas.

26. Área superficial del cuerpo El área superficial S típica del cuerpo de un hombre, en metros cuadrados, a menudo se modela con la fórmula $S = \frac{1}{60}\sqrt{wh}$, donde h es la altura en cm, y w el peso en kg. Obtenga la razón de cambio del área superficial del cuerpo con respecto al peso en el caso de hombres de altura constante $h = 180$ cm (aproximadamente 5′9″). ¿S aumenta más rápidamente en relación con el peso cuando los individuos registran pesos más bajos o más altos? Explique.

T **27. Drenado de un tanque** Para drenar un tanque de almacenamiento, se necesitan 12 horas; el fluido del tanque sale al abrir una válvula ubicada en la parte baja del tanque. La profundidad y del fluido en el tanque t horas después de abrir la válvula está dada por la fórmula

$$y = 6\left(1 - \frac{t}{12}\right)^2 \text{ m}.$$

a) Obtenga la razón dy/dt (m/h) a la que el tanque está drenando en el tiempo t.

b) ¿En qué momento desciende más rápido el nivel del fluido en el tanque? ¿En qué momento lo hace más lentamente? ¿Cuáles son los valores de dy/dt en esos momentos?

c) Grafique juntas y y dy/dt, y explique el comportamiento de y en relación con los signos y valores de dy/dt.

28. Drenado de un tanque El número de galones de agua que hay en un tanque t minutos después de que éste se comenzó a vaciar es $Q(t) = 200(30 - t)^2$. ¿Qué tan rápido sale el agua al cabo de 10 min? ¿Cuál es la razón promedio a la que el agua fluye durante los primeros 10 min?

29. Distancia para detener un vehículo Con base en datos de la Oficina de Caminos Públicos de Estados Unidos, un modelo para determinar la distancia de alto total de un automóvil en movimiento en términos de su rapidez es

$$s = 1.1v + 0.054v^2,$$

donde s se mide en pies y v en millas/hora. El término lineal $1.1v$ modela la distancia que el automóvil recorre durante el tiempo desde que el conductor se da cuenta de que debe de frenar hasta que aplica los frenos, y el término cuadrático $0.054v^2$ modela la distancia adicional de frenado una vez que se aplican los frenos. Obtenga ds/dv en $v = 35$ y $v = 70$ mph, e interprete el significado de la derivada.

30. Inflado de un globo El volumen $V = (4/3)\pi r^3$ de un globo esférico cambia de acuerdo con su radio.

a) ¿A qué razón (ft^3/ft) cambia el volumen con respecto al radio cuando $r = 2$ ft?

b) ¿Cuánto aumenta aproximadamente el volumen cuando el radio cambia de 2 a 2.2 ft?

31. Despegue de un avión Suponga que la distancia recorrida por un avión a lo largo de una pista antes del despegue está dada por $D = (10/9)t^2$, donde D se mide en metros desde el punto de inicio, y t se mide en segundos desde el momento en que se liberan los frenos. El avión despegará en el momento en que alcance 200 km/h. ¿Cuánto tiempo tarda en despegar y qué distancia habrá recorrido en ese tiempo?

32. Brotes de lava volcánica A pesar de que la erupción del volcán hawaiano Kilauea Iki, en noviembre de 1959, inició con una línea de brotes de lava a lo largo de la pared del cráter, más tarde la actividad se concentró en un solo orificio ubicado en el piso del cráter, el cual, en un momento dado, lanzó lava a una altura de 1900 ft (un récord mundial). ¿Cuál fue la velocidad de salida de la lava en ft/s? ¿En millas por hora? (*Sugerencia:* Si v_0 es la velocidad de salida de una partícula de lava, su altura t segundos más tarde será $s = v_0 t - 16t^2$ ft. Comience por determinar el tiempo en el cual $ds/dt = 0$. Desprecie la resistencia del aire).

Análisis del movimiento usando gráficas

T En los ejercicios 33 a 36, obtenga la función de posición $s = f(t)$ de un objeto que se desplaza a lo largo del eje s como una función del tiempo t. Grafique f junto con la función de velocidad $v(t) = ds/dt = f'(t)$ y la función de aceleración $a(t) = d^2s/dt^2 = f''(t)$. Explique el comportamiento del objeto en relación con el signo y los valores de v y a. Incluya en sus comentarios información como la siguiente:

a) ¿Cuándo se encuentra el objeto momentáneamente en reposo?

b) ¿Cuándo se mueve a la izquierda (o hacia abajo) o a la derecha (o hacia arriba)?

c) ¿Cuándo cambia de dirección?

d) ¿Cuándo aumenta o disminuye su rapidez?

e) ¿Cuándo se mueve a máxima velocidad? ¿Cuándo lo hace a la mínima velocidad?

f) ¿Cuándo está más lejos del origen del eje?

33. $s = 200t - 16t^2$, $0 \le t \le 12.5$ (un objeto pesado lanzado verticalmente desde la superficie terrestre, a 200 ft/s).

34. $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \le t \le 5$

35. $s = t^3 - 6t^2 + 7t, \quad 0 \le t \le 4$

36. $s = 4 - 7t + 6t^2 - t^3, \quad 0 \le t \le 4$

3.5 Derivadas de funciones trigonométricas

Muchos de los fenómenos naturales son aproximadamente periódicos (campos electromagnéticos, ritmos cardiacos, mareas, estado del tiempo). Las derivadas de senos y cosenos desempeñan un papel clave en la descripción de cambios periódicos. En esta sección se mostrará cómo derivar las seis funciones trigonométricas básicas.

Derivada de la función seno

Para calcular la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$, para x medida en radianes, combinamos los límites del ejemplo 5*a*) y el teorema 7 de la sección 2.4, con la identidad para la suma de ángulos de la función seno:

$$\operatorname{sen}(x + h) = \operatorname{sen}x \cos h + \cos x \operatorname{sen}h.$$

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}x}{h} && \text{Definición de derivada} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\operatorname{sen}x \cos h + \cos x \operatorname{sen}h) - \operatorname{sen}x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}x(\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen}h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\operatorname{sen}x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h\to 0} \left(\cos x \cdot \frac{\operatorname{sen}h}{h} \right) \\
&= \operatorname{sen}x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{\text{límite 0}} + \cos x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}h}{h}}_{\text{límite 1}} = \operatorname{sen}x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x. && \text{Ejemplo 5a y teorema 7, sección 2.4}
\end{aligned}$$

La derivada de la función seno es la función coseno:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}x) = \cos x.$$

EJEMPLO 1 Obtenga las derivadas de la función seno en diferencias, productos y cocientes.

a) $y = x^2 - \operatorname{sen} x$:

$$\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) \qquad \text{Regla de la diferencia}$$
$$= 2x - \cos x$$

b) $y = x^2 \operatorname{sen} x$:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + 2x \operatorname{sen} x \qquad \text{Regla del producto}$$
$$= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x.$$

c) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \cdot 1}{x^2} \qquad \text{Regla del cociente}$$
$$= \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$$

■

Derivada de la función coseno

Con la ayuda de la fórmula de la suma de ángulos para la función coseno,

$$\cos(x + h) = \cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h,$$

calculamos el límite del cociente diferencial:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} \qquad \text{Definición de derivada}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h) - \cos x}{h} \qquad \text{Identidad de la suma de ángulos del coseno}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$
$$= \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \qquad \text{Ejemplo 5a y teorema 7, sección 2.4}$$
$$= \cos x \cdot 0 - \operatorname{sen} x \cdot 1$$
$$= -\operatorname{sen} x.$$

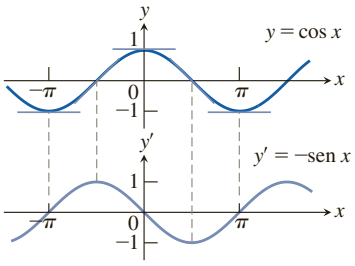


FIGURA 3.20 La curva $y' = -\operatorname{sen} x$ como la gráfica de las pendientes de las tangentes a la curva $y = \cos x$.

La derivada de la función coseno es el negativo de la función seno:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x.$$

La figura 3.20 muestra una manera de visualizar este resultado del mismo modo que lo hicimos en la graficación de derivadas en la figura 3.6 de la sección 3.2.

EJEMPLO 2 Obtenga las derivadas de la función coseno combinada con otras funciones.

a) $y = 5x + \cos x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(\cos x) \qquad \text{Regla de la suma}$$
$$= 5 - \operatorname{sen} x.$$

b) $y = \operatorname{sen} x \cos x$:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) \qquad \text{Regla del producto}$$
$$= \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x) + \cos x(\cos x)$$
$$= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

c) $y = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - \operatorname{sen} x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(1 - \operatorname{sen} x)}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} \qquad \text{Regla del cociente}$$
$$= \frac{(1 - \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) - \cos x(0 - \cos x)}{(1 - \operatorname{sen} x)^2}$$
$$= \frac{1 - \operatorname{sen} x}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} \qquad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$= \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x}$$

■

Movimiento armónico simple

El movimiento de un objeto o peso en el extremo de un resorte que oscila libremente hacia arriba y hacia abajo, sin resistencia, es un ejemplo del *movimiento armónico simple*. El movimiento es periódico y se repite indefinidamente, de modo que se puede representar mediante funciones trigonométricas. El siguiente ejemplo describe un caso en el que no hay fuerzas opositoras, como la fricción, que desaceleren el movimiento.

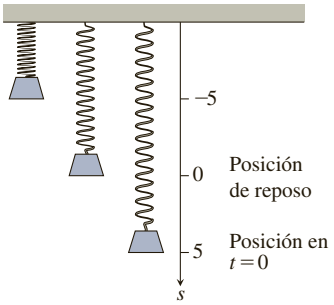


FIGURA 3.21 Un peso que cuelga de un resorte vertical, y después se desplaza, oscila hacia arriba y hacia abajo de la posición de reposo (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Un peso que cuelga de un resorte (figura 3.21) se estira hacia abajo 5 unidades más allá de su posición de reposo y se libera en el tiempo $t = 0$, de manera que el peso inicia un movimiento de vaivén. Su posición en cualquier momento posterior t es

$$s = 5 \cos t.$$

¿Cuáles son la velocidad y la aceleración en el tiempo t?

Solución Tenemos

Posición: $s = 5 \cos t$

Velocidad: $v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d}{dt}(5 \cos t) = -5 \operatorname{sen} t$

Aceleración: $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(-5 \operatorname{sen} t) = -5 \cos t.$

Observe cuánto podemos aprender de estas ecuaciones:

1. Conforme pasa el tiempo, el cuerpo se mueve hacia arriba y hacia abajo entre $s = -5$ y $s = 5$ en el eje s. La amplitud del movimiento es 5. El periodo del movimiento es 2π, el periodo de la función coseno.
2. La velocidad $v = -5 \operatorname{sen} t$ alcanza su mayor magnitud, 5, cuando $\cos t = 0$, como muestran las gráficas de la figura 3.22. Ahora bien, la rapidez del cuerpo, $|v| = 5|\operatorname{sen} t|$, es máxima cuando $\cos t = 0$, es decir, cuando $s = 0$ (la posición en reposo). La rapidez del peso es 0 cuando $\operatorname{sen} t = 0$. Esto ocurre cuando $s = 5 \cos t = \pm 5$, en los extremos del intervalo del movimiento.
3. El peso se ve afectado por el resorte y por la gravedad. Cuando el cuerpo está por debajo de la posición de reposo, las fuerzas combinadas tiran de él hacia arriba, y cuando está por encima de la posición de reposo, tiran de él hacia abajo. La aceleración del peso siempre es proporcional al negativo de su desplazamiento. Esta propiedad del resorte se conoce como *ley de Hooke*, y se estudiará con detalle en la sección 6.5.

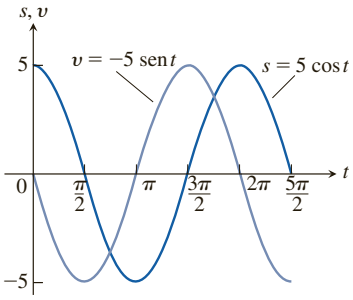


FIGURA 3.22 Gráficas de posición y velocidad del peso del ejemplo 3.

4. La aceleración, $a = -5 \cos t$, es cero sólo en la posición de reposo, donde $\cos t = 0$ y se equilibran la fuerza de gravedad y la fuerza del resorte. Cuando el peso está en cualquier otro lado, las dos fuerzas son desiguales y la aceleración es diferente de cero. La aceleración tiene su magnitud máxima en los puntos más alejados de la posición de reposo, donde $\cos t = \pm 1$. ■

EJEMPLO 4 La sacudida asociada con el movimiento armónico simple en el ejemplo 3 es

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 \cos t) = 5 \operatorname{sen} t.$$

Alcanza su mayor magnitud cuando $\operatorname{sen} t = \pm 1$, no en los extremos del desplazamiento, sino en la posición de reposo, donde la aceleración cambia de dirección y signo. ■

Derivadas de las demás funciones trigonométricas básicas

Como sen x y cos x son funciones diferenciables de x, las funciones relacionadas

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \text{y} \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

son diferenciables en todos los valores de x en los que están definidas. Sus derivadas, calculadas a partir de la regla del cociente, están dadas por las siguientes fórmulas. Observe los signos negativos en las fórmulas de derivadas para las cofunciones.

Derivadas de las demás funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

Para mostrar los cálculos habituales, obtendremos la derivada de la función tangente. Las demás derivadas se dejan para el ejercicio 60.

EJEMPLO 5 Obtenga $d(\tan x)/dx$.

Solución Usamos la regla del cociente para calcular la derivada:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \qquad \text{Regla del cociente}$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

■

EJEMPLO 6 Obtenga y'' si $y = \sec x$.

Solución La obtención de la segunda derivada implica una combinación de derivadas trigonométricas.

$$y = \sec x$$

$$y' = \sec x \tan x \qquad \text{Regla de la derivada para la función secante}$$

$$
\begin{aligned}
y'' &= \frac{d}{dx}(\sec x \tan x) \\
&= \sec x \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x \frac{d}{dx}(\sec x) && \text{Regla de la derivada del producto} \\
&= \sec x(\sec^2 x) + \tan x(\sec x \tan x) && \text{Reglas de las derivadas} \\
&= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x
\end{aligned}
$$

■

La diferenciabilidad de las funciones trigonométricas en sus dominios es otra prueba de su continuidad en todos los puntos de su dominio (teorema 1, sección 3.2). Así, podemos calcular límites de combinaciones algebraicas y composiciones de funciones trigonométricas por sustitución directa.

EJEMPLO 7 Podemos usar sustitución directa en el cálculo de límites siempre que no se divida entre cero, lo cual es una indefinición algebraica.

$$
\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2 + \sec x}}{\cos(\pi - \tan x)} = \frac{\sqrt{2 + \sec 0}}{\cos(\pi - \tan 0)} = \frac{\sqrt{2 + 1}}{\cos(\pi - 0)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}
$$

■

Ejercicios 3.5

Derivadas

En los ejercicios 1 a 18, obtenga dy/dx.

1. $y = -10x + 3\cos x$

2. $y = \frac{3}{x} + 5\operatorname{sen} x$

3. $y = x^2 \cos x$

4. $y = \sqrt{x}\sec x + 3$

5. $y = \csc x - 4\sqrt{x} + 7$

6. $y = x^2 \cot x - \frac{1}{x^2}$

7. $f(x) = \operatorname{sen} x \tan x$

8. $g(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

9. $y = x\sec x + \frac{1}{x}$

10. $y = (\operatorname{sen} x + \cos x)\sec x$

11. $y = \frac{\cot x}{1 + \cot x}$

12. $y = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$

13. $y = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\tan x}$

14. $y = \frac{\cos x}{x} + \frac{x}{\cos x}$

15. $y = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$

16. $y = x^2 \cos x - 2x \operatorname{sen} x - 2\cos x$

17. $f(x) = x^3 \operatorname{sen} x \cos x$

18. $g(x) = (2 - x)\tan^2 x$

En los ejercicios 19 a 22, obtenga ds/dt.

19. $s = \tan t - t$

20. $s = t^2 - \sec t + 1$

21. $s = \frac{1 + \csc t}{1 - \csc t}$

22. $s = \frac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t}$

En los ejercicios 23 a 26, obtenga $dr/d\theta$.

23. $r = 4 - \theta^2 \operatorname{sen}\theta$

24. $r = \theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$

25. $r = \sec\theta \csc\theta$

26. $r = (1 + \sec\theta)\operatorname{sen}\theta$

En los ejercicios 27 a 32, obtenga dp/dq.

27. $p = 5 + \frac{1}{\cot q}$

28. $p = (1 + \csc q)\cos q$

29. $p = \frac{\operatorname{sen} q + \cos q}{\cos q}$

30. $p = \frac{\tan q}{1 + \tan q}$

31. $p = \frac{q \operatorname{sen} q}{q^2 - 1}$

32. $p = \frac{3q + \tan q}{q\sec q}$

33. Obtenga y'' si

a) $y = \csc x$.

b) $y = \sec x$.

34. Obtenga $y^{(4)} = d^4y/dx^4$ si

a) $y = -2\operatorname{sen} x$.

b) $y = 9\cos x$.

Rectas tangentes

En los ejercicios 35 a 38, grafique las curvas en los intervalos indicados, junto con sus tangentes en los valores de x. Identifique cada curva y cada tangente con su ecuación correspondiente.

35. $y = \operatorname{sen} x, \quad -3\pi/2 \le x \le 2\pi$
$x = -\pi, 0, 3\pi/2$

36. $y = \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
$x = -\pi/3, 0, \pi/3$

37. $y = \sec x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
$x = -\pi/3, \pi/4$

38. $y = 1 + \cos x, \quad -3\pi/2 \le x \le 2\pi$
$x = -\pi/3, 3\pi/2$

T ¿Las gráficas de las funciones de los ejercicios 39 a 42 tienen alguna tangente horizontal en el intervalo $0 \le x \le 2\pi$? Si es así, ¿dónde? Si no es así, ¿por qué? Visualice sus hallazgos graficando las funciones con una graficadora.

39. $y = x + \operatorname{sen} x$

40. $y = 2x + \operatorname{sen} x$

41. $y = x - \cot x$

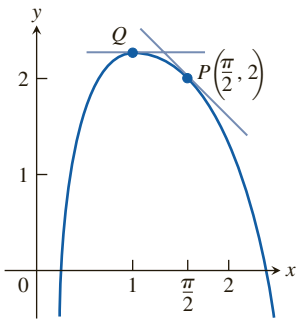
42. $y = x + 2\cos x$

43. Obtenga todos los puntos de la curva $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, donde la recta tangente es paralela a la recta $y = 2x$. Trace juntas la curva y la tangente (o tangentes), identificando cada una con su ecuación correspondiente.

44. Obtenga todos los puntos de la curva $y = \cot x$, $0 < x < \pi$, donde la recta tangente es paralela a la recta $y = -x$. Trace juntas la curva y la tangente (o tangentes), identificando cada una con su ecuación correspondiente.

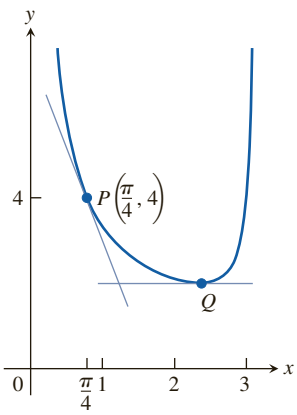
En los ejercicios 45 y 46, obtenga una ecuación para ***a)*** la tangente a la curva en P, y ***b)*** la tangente horizontal a la curva en Q.

45.



$y = 4 + \cot x - 2\csc x$

46.



$y = 1 + \sqrt{2}\csc x + \cot x$

Límites trigonométricos

Obtenga los límites en los ejercicios 47 a 54.

47. $\lim_{x\to 2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)$

48. $\lim_{x\to -\pi/6} \sqrt{1 + \cos(\pi \csc x)}$

49. $\lim_{\theta\to\pi/6} \dfrac{\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}}{\theta - \frac{\pi}{6}}$

50. $\lim_{\theta\to\pi/4} \dfrac{\tan\theta - 1}{\theta - \frac{\pi}{4}}$

51. $\lim_{x\to 0} \sec\left[\cos x + \pi \tan\left(\dfrac{\pi}{4\sec x}\right) - 1\right]$

52. $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi + \tan x}{\tan x - 2\sec x}\right)$

53. $\lim_{t\to 0} \tan\left(1 - \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\right)$

54. $\lim_{\theta\to 0} \cos\left(\dfrac{\pi\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)$

Teoría y ejemplos

Las ecuaciones en los ejercicios 55 y 56 indican la posición $s = f(t)$ de un cuerpo que se mueve en una recta coordenada (s en metros, t en segundos). Obtenga la velocidad, rapidez, aceleración y sacudida del cuerpo en el tiempo $t = \pi/4$ s.

55. $s = 2 - 2\operatorname{sen} t$

56. $s = \operatorname{sen} t + \cos t$

57. ¿Hay algún valor de c que haga que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2 3x}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$? Justifique su respuesta.

58. ¿Hay algún valor de b que haga que

$$g(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$? ¿Y alguno que la haga diferenciable en $x = 0$? Justifique su respuesta.

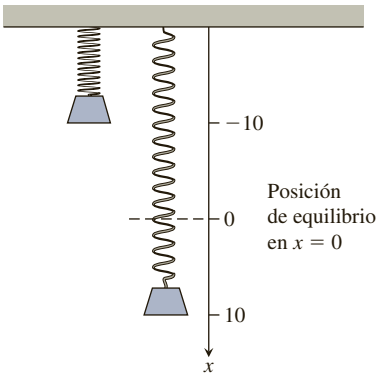
59. Calcule unas cuantas derivadas y busque un patrón, para obtener $d^{999}/dx^{999}\,(\cos x)$.

60. Deduzca las fórmulas para la derivada, con respecto a x, de ***a)*** $\sec x$. ***b)*** $\csc x$. ***c)*** $\cot x$.

61. Un peso sujeto a un resorte alcanza su posición de equilibrio ($x = 0$). Después, se pone en movimiento con un desplazamiento de

$$x = 10\cos t,$$

donde x se mide en centímetros y t en segundos. Vea la siguiente figura.



a) Obtenga el desplazamiento del resorte cuando $t = 0$, $t = \pi/3$, y $t = 3\pi/4$.

b) Obtenga la velocidad del resorte cuando $t = 0$, $t = \pi/3$, y $t = 3\pi/4$.

62. Suponga que la posición de una partícula en el eje x está dada por

$$x = 3\cos t + 4\operatorname{sen} t,$$

donde x se mide en pies y t en segundos.

a) Obtenga la posición de la partícula cuando $t = 0$, $t = \pi/2$, y $t = \pi$.

b) Obtenga la velocidad de la partícula cuando $t = 0$, $t = \pi/2$, y $t = \pi$.

T **63.** Grafique $y = \cos x$ para $-\pi \leq x \leq 2\pi$. En la misma pantalla, grafique

$$y = \frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

para $h = 1, 0.5, 0.3$ y 0.1. Después, intente hacerlo en una nueva ventana para $h = -1, -0.5$ y -0.3. ¿Qué sucede cuando $h \to 0^+$? ¿Y cuando $h \to 0^-$? ¿Qué fenómeno se ilustra aquí?

T 64. Grafique $y = -\text{sen } x$ para $-\pi \le x \le 2\pi$. En la misma pantalla, grafique

$$y = \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h}$$

para $h = 1$, 0.5, 0.3 y 0.1. Después, intente hacerlo en una nueva ventana para $h = -1$, -0.5 y -0.3. ¿Qué sucede cuando $h \to 0^+$? ¿Y cuando $h \to 0^-$? ¿Qué fenómeno se ilustra aquí?

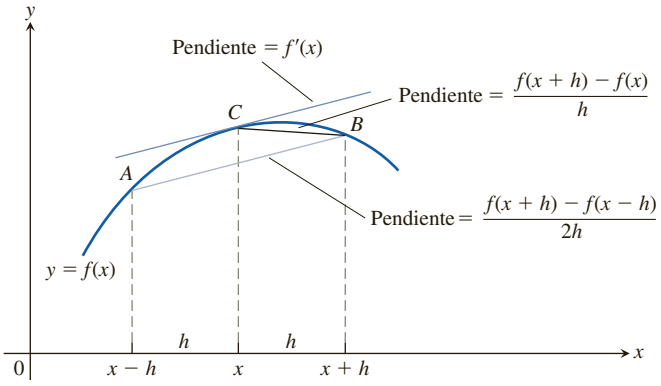
T 65. Cociente diferencial centrado El *cociente diferencial centrado*

$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$$

se utiliza para aproximar $f'(x)$ en cálculo numérico, porque **1.** su límite cuando $h \to 0$ es igual a $f'(x)$ si $f'(x)$ existe, y **2.** por lo general, da una mejor aproximación de $f'(x)$ para un valor dado de h que el cociente diferencial

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Vea la siguiente figura.



a) Para ver qué tan rápidamente converge el cociente diferencial centrado de $f(x) = \text{sen } x$ a $f'(x) = \cos x$, grafique $y = \cos x$ junto con

$$y = \frac{\text{sen}(x + h) - \text{sen}(x - h)}{2h}$$

en el intervalo $[-\pi, 2\pi]$ para $h = 1$, 0.5 y 0.3. Compare los resultados con los que obtuvo en el ejercicio 63 para los mismos valores de h.

b) Para ver qué tan rápidamente converge el cociente diferencial centrado de $f(x) = \cos x$ a $f'(x) = -\text{sen } x$, grafique $y = -\text{sen } x$ junto con

$$y = \frac{\cos(x + h) - \cos(x - h)}{2h}$$

en el intervalo $[-\pi, 2\pi]$ para $h = 1$, 0.5 y 0.3. Compare los resultados con los que obtuvo en el ejercicio 64 para los mismos valores de h.

66. Una advertencia acerca de los cocientes diferenciales centrados (*Continuación del ejercicio 65*). El cociente

$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$$

puede tener límite cuando $h \to 0$ aunque f no tenga derivada en x. Como ejemplo de ello, tomemos $f(x) = |x|$ y calculemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0 - h|}{2h}.$$

Como verá, el límite existe aun cuando $f(x) = |x|$ no tiene derivada en $x = 0$. *Moraleja:* Antes de usar el cociente diferencial centrado, asegúrese de que la derivada existe.

T 67. Pendientes en la gráfica de la función tangente Grafique juntas $y = \tan x$ y su derivada en $(-\pi/2, \pi/2)$. ¿La gráfica de la función tangente parece tener una pendiente menor o mayor? ¿La pendiente siempre es negativa? Justifique sus respuestas.

T 68. Pendientes en la gráfica de la función cotangente Grafique juntas $y = \cot x$ y su derivada para $0 < x < \pi$. ¿La gráfica de la función cotangente parece tener una pendiente menor o mayor? ¿La pendiente siempre es positiva? Justifique sus respuestas.

T 69. Exploración de (sen *kx*)/*x* Grafique juntas $y = (\text{sen } x)/x$, $y = (\text{sen } 2x)/x$ y $y = (\text{sen } 4x)/x$ en el intervalo $-2 \le x \le 2$. ¿Dónde parece que cada gráfica corta el eje y? ¿Realmente las gráficas cortan el eje? ¿Cómo cree que se comportarían las gráficas de $y = (\text{sen } 5x)/x$ y $y = (\text{sen } (-3x))/x$ cuando $x \to 0$? ¿Por qué? ¿Qué pasaría con la gráfica de $y = (\text{sen } kx)/x$ para otros valores de k? Justifique sus respuestas.

T 70. Radianes contra grados: derivadas en modo de grados ¿Qué sucede con las derivadas de sen x y cos x si x se mide en grados, y no en radianes? Para averiguarlo, siga estos pasos.

a) Con su calculadora o computadora graficadora en el *modo de grados*, grafique

$$f(h) = \frac{\text{sen } h}{h}$$

y estime $\lim_{h \to 0} f(h)$. Compare su estimación con $\pi/180$. ¿Hay alguna razón para creer que el límite *debería ser* $\pi/180$?

b) Con su calculadora todavía en el modo de grados, estime

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}.$$

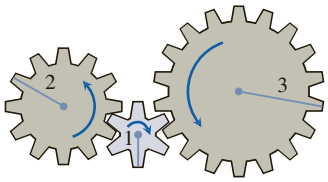
c) Ahora regrese a la deducción de la fórmula para la derivada de sen x que se comentó en el texto, y lleve a cabo los pasos de la deducción usando los límites en el modo de grados. ¿Qué fórmula obtuvo para la derivada?

d) Deduzca la fórmula de la derivada de cos x usando los límites en el modo de grados. ¿Qué fórmula obtuvo para la derivada?

e) Las desventajas de las fórmulas en modo de grados se hacen evidentes cuando se calculan derivadas de orden superior. Inténtelo. ¿Cuáles son la segunda y tercera derivadas, en modo de grados, de sen x y cos x?

3.6 Regla de la cadena

¿Cómo se obtiene la derivada de la función $F(x) = \text{sen}(x^2 - 4)$? Esta función es la composición $f \circ g$ de dos funciones: $y = f(u) = \text{sen}\, u$ y $u = g(x) = x^2 - 4$ que sí sabemos diferenciar. La respuesta se encuentra en la *regla de la cadena*, la cual afirma que la derivada es el producto de las derivadas de f y g. En esta sección desarrollaremos esta regla.



C: y vueltas B: u vueltas A: x vueltas

FIGURA 3.23 Cuando el engrane A da x vueltas, el engrane B da u vueltas y el engrane C da y vueltas. Si comparamos las circunferencias o contamos los dientes de los engranes, vemos que $y = u/2$ (C gira media vuelta por cada vuelta de B), y $u = 3x$ (B gira 3 veces por una de A), de manera que $y = 3x/2$. Así, $dy/dx = 3/2 = (1/2)(3) = (dy/du)(du/dx)$.

Derivada de una función compuesta

La función $y = \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}(3x)$ es la composición de las funciones $y = \frac{1}{2}u$ y $u = 3x$. Entonces, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{dy}{du} = \frac{1}{2}, \qquad \text{y} \qquad \frac{du}{dx} = 3.$$

Como $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3$, vemos que en este caso

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Si consideramos a la derivada como una razón de cambio, nuestra intuición nos permitirá ver que esta relación es razonable. Si $y = f(u)$ cambia la mitad de rápido que u, y $u = g(x)$ cambia tres veces más rápido que x, esperaríamos que y cambiara $3/2$ veces más rápido que x. Este efecto se parece mucho a un tren de engranes múltiples (figura 3.23). Veamos otro ejemplo.

EJEMPLO 1 La función

$$y = (3x^2 + 1)^2$$

es la composición de $y = f(u) = u^2$ y $u = g(x) = 3x^2 + 1$. Al calcular las derivadas, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} &= 2u \cdot 6x \\ &= 2(3x^2 + 1) \cdot 6x \qquad \text{Se sustituye } u \\ &= 36x^3 + 12x. \end{aligned}$$

Al calcular la derivada de la fórmula desarrollada $(3x^2 + 1)^2 = 9x^4 + 6x^2 + 1$, obtenemos el mismo resultado:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(9x^4 + 6x^2 + 1) \\ &= 36x^3 + 12x. \end{aligned}$$

■

La derivada de la función compuesta $f(g(x))$ en x es la derivada de f en $g(x)$, multiplicada por la derivada de g en x. Esto se conoce como la regla de la cadena (figura 3.24).

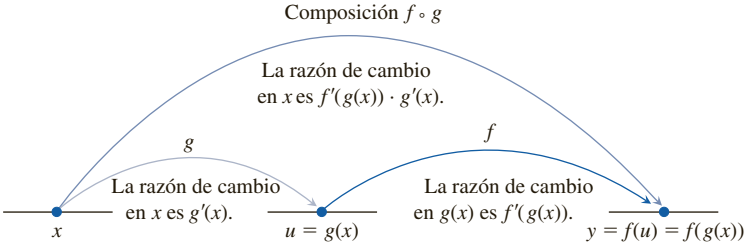


FIGURA 3.24 Multiplicación de razones de cambio: la derivada de $f \circ g$ en x es la derivada de f en $g(x)$ por la derivada de g en x.

TEOREMA 2: La regla de la cadena Si $f(u)$ es diferenciable en el punto $u = g(x)$, y $g(x)$ es diferenciable en x, entonces, la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es diferenciable en x y

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

En la notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

donde dy/du se evalúa en $u = g(x)$.

Demostración de un caso de la regla de la cadena:

Sea Δu el cambio en u cuando x cambia por Δx, de modo que

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x).$$

Entonces, el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u).$$

Si $\Delta u \neq 0$, podemos escribir la fracción $\Delta y/\Delta x$ como el producto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{1}$$

y tomamos el límite cuando $\Delta x \to 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} && \text{(Observe que } \Delta u \to 0 \text{ cuando } \Delta x \to 0 \text{ puesto que } g \text{ es continua.)} \\
&= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.
\end{aligned}$$

El problema con este argumento es que si la función $g(x)$ oscila rápidamente cerca de x, entonces, Δu puede ser cero incluso cuando $\Delta x \neq 0$, de modo que la eliminación de Δu en la ecuación (1) sería inválida. La demostración necesita un enfoque diferente para evitar esta falla, y lo aplicaremos en la sección 3.9. ■

EJEMPLO 2 Un objeto se desplaza a lo largo del eje x de manera que su posición en cualquier tiempo $t \geq 0$ está dada por $x(t) = \cos(t^2 + 1)$. Obtenga la velocidad del objeto como una función de t.

Solución Sabemos que la velocidad es dx/dt. En este caso, x es una función compuesta: $x = \cos(u)$ y $u = t^2 + 1$. Entonces, tenemos

$$\frac{dx}{du} = -\operatorname{sen}(u) \qquad x = \cos(u)$$

$$\frac{du}{dt} = 2t. \qquad u = t^2 + 1$$

Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{du}\cdot\frac{du}{dt}\\ &= -\operatorname{sen}(u)\cdot 2t \qquad \frac{dx}{du} \text{ evaluada en } u\\ &= -\operatorname{sen}(t^2+1)\cdot 2t\\ &= -2t\operatorname{sen}(t^2+1).\end{aligned}$$

■

Maneras de escribir la regla de la cadena

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}f(u) = f'(u)\frac{du}{dx}$$

Regla de "afuera hacia adentro"

Una dificultad con la notación de Leibniz es que no especifica dónde se supone que deben evaluarse las derivadas en la regla de la cadena. Por eso, algunas veces ayuda pensar en la regla de la cadena usando notación funcional. Si $y = f(g(x))$, entonces,

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))\cdot g'(x).$$

En palabras, derive la función f de "afuera" y evalúe la derivada en la función $g(x)$ de "adentro"; después, multiplique por la derivada de la "función de adentro".

EJEMPLO 3 Calcule la derivada $\operatorname{sen}(x^2+x)$ con respecto a x.

Solución Aplicamos directamente la regla de la cadena y obtenemos

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}\underbrace{(x^2+x)}_{\text{lo de adentro}} = \cos\underbrace{(x^2+x)}_{\substack{\text{lo de adentro}\\ \text{se deja igual}}}\cdot\underbrace{(2x+1)}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{lo de adentro}}}.$$

■

Uso repetido de la regla de la cadena

En ocasiones tenemos que usar la regla de la cadena dos o más veces para obtener una derivada.

EJEMPLO 4 Obtenga la derivada de $g(t) = \tan(5 - \operatorname{sen} 2t)$.

Solución Observe que aquí la tangente es una función de $5 - \operatorname{sen} 2t$, mientras que el seno es una función de $2t$, lo cual, a la vez, es una función de t. Por lo tanto, de acuerdo con la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}g'(t) &= \frac{d}{dt}(\tan(5-\operatorname{sen}2t))\\ &= \sec^2(5-\operatorname{sen}2t)\cdot\frac{d}{dt}(5-\operatorname{sen}2t) \qquad \text{Derivada de } \tan u \text{ con } u = 5-\operatorname{sen}2t\\ &= \sec^2(5-\operatorname{sen}2t)\cdot\left(0-\cos 2t\cdot\frac{d}{dt}(2t)\right) \qquad \text{Derivada de } 5-\operatorname{sen}u \text{ con } u = 2t\\ &= \sec^2(5-\operatorname{sen}2t)\cdot(-\cos 2t)\cdot 2\\ &= -2(\cos 2t)\sec^2(5-\operatorname{sen}2t).\end{aligned}$$

■

La regla de la cadena para potencias en una función

Si f es una función diferenciable de u, y u es una función diferenciable de x, entonces, el hecho de sustituir $y = f(u)$ en la fórmula de la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

nos conduce a la fórmula

$$\frac{d}{dx}f(u) = f'(u)\frac{du}{dx}.$$

Si n es cualquier número real y f es una función potencia, $f(u) = u^n$, la regla de la potencia nos indica que $f'(u) = nu^{n-1}$. Si u es una función diferenciable de x, entonces, podemos usar la regla de la cadena para extenderla a la **regla de la cadena para potencias**:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}. \qquad \frac{d}{du}(u^n) = nu^{n-1}$$

EJEMPLO 5 La regla de la cadena para potencias simplifica el cálculo de la derivada de una potencia en una expresión.

a) $\dfrac{d}{dx}(5x^3 - x^4)^7 = 7(5x^3 - x^4)^6\dfrac{d}{dx}(5x^3 - x^4)$ Regla de la cadena para potencias con $u = 5x^3 - x^4$, $n = 7$

$= 7(5x^3 - x^4)^6(5 \cdot 3x^2 - 4x^3)$

$= 7(5x^3 - x^4)^6(15x^2 - 4x^3)$

b) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{3x-2}\right) = \dfrac{d}{dx}(3x-2)^{-1}$

$= -1(3x-2)^{-2}\dfrac{d}{dx}(3x-2)$ Regla de la cadena para potencias con $u = 3x - 2$, $n = -1$

$= -1(3x-2)^{-2}(3)$

$= -\dfrac{3}{(3x-2)^2}$

En el inciso *b*) también podríamos haber obtenido la derivada con la regla del cociente.

c) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen}^5 x) = 5\operatorname{sen}^4 x \cdot \dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x$ Regla de la cadena para potencias con $u = \operatorname{sen} x$, $n = 5$, porque $\operatorname{sen}^n x$ significa $(\operatorname{sen} x)^n$, $n \neq -1$.

$= 5\operatorname{sen}^4 x \cos x$ ■

EJEMPLO 6 En la sección 3.2, vimos que la función valor absoluto $y = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$. Sin embargo, la función es diferenciable en todos los demás números reales, como lo demostraremos ahora. Como $|x| = \sqrt{x^2}$, podemos deducir la siguiente fórmula:

Derivada de la función valor absoluto

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0$$

$$= \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$\dfrac{d}{dx}(|x|) = \dfrac{d}{dx}\sqrt{x^2}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{x^2}} \cdot \dfrac{d}{dx}(x^2)$ Regla de la cadena para potencias con $u = x^2$, $n = 1/2$, $x \neq 0$

$= \dfrac{1}{2|x|} \cdot 2x$ $\sqrt{x^2} = |x|$

$= \dfrac{x}{|x|}, \quad x \neq 0.$ ■

EJEMPLO 7 Demuestre que la pendiente de toda recta tangente a la curva $y = 1/(1-2x)^3$ es positiva.

Solución Obtenemos la derivada:

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(1-2x)^{-3}$

$= -3(1-2x)^{-4} \cdot \dfrac{d}{dx}(1-2x)$ Regla de la cadena para potencias con $u = (1-2x)$, $n = -3$

$= -3(1-2x)^{-4} \cdot (-2)$

$= \dfrac{6}{(1-2x)^4}.$

En cualquier punto (x, y) de la curva, la coordenada x no es igual a $1/2$ y la pendiente de la recta tangente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{(1 - 2x)^4},$$

que es el cociente de dos números positivos. ■

EJEMPLO 8 Las fórmulas de las derivadas de sen x y de cos x se obtuvieron suponiendo que x se mide en radianes, *no* en grados. La regla de la cadena nos da una nueva interpretación de la diferencia entre ambas unidades de medida. Como $180° = \pi$ radianes, $x° = \pi x/180$ radianes, donde $x°$ se refiere al tamaño del ángulo medido en grados.

Según la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}\text{sen}(x°) = \frac{d}{dx}\text{sen}\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos(x°).$$

Vea la figura 3.25. De forma similar, la derivada de $\cos(x°)$ es $-(\pi/180)\text{sen}(x°)$.

Al derivar varias veces aparecerá una potencia del factor $\pi/180$, lo que muestra la ventaja del uso de radianes en los cálculos. ■

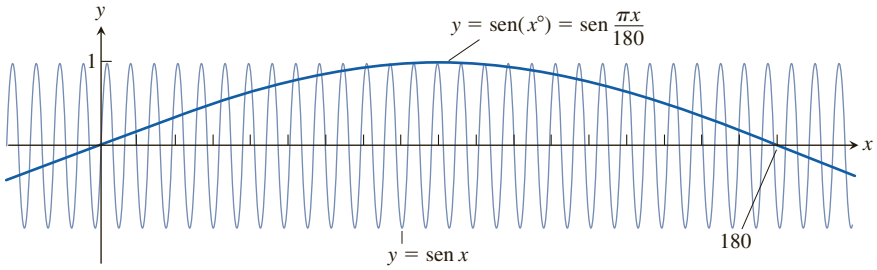


FIGURA 3.25 La función $\text{sen}(x°)$ oscila solamente $\pi/180$ veces de lo que oscila sen x. Su pendiente máxima es $\pi/180$ en $x = 0$ (ejemplo 8).

Ejercicios 3.6

Cálculos de derivadas

En los ejercicios 1 a 8, dadas $y = f(u)$ y $u = g(x)$, obtenga $dy/dx = f'(g(x))g'(x)$.

1. $y = 6u - 9, \quad u = (1/2)x^4$

2. $y = 2u^3, \quad u = 8x - 1$

3. $y = \text{sen}\, u, \quad u = 3x + 1$

4. $y = \cos u, \quad u = -x/3$

5. $y = \sqrt{u}, \quad u = \text{sen}\, x$

6. $y = \text{sen}\, u, \quad u = x - \cos x$

7. $y = \tan u, \quad u = \pi x^2$

8. $y = -\sec u, \quad u = \frac{1}{x} + 7x$

En los ejercicios 9 a 18, escriba la función en la forma $y = f(u)$ y $u = g(x)$. Después, obtenga dy/dx como una función de x.

9. $y = (2x + 1)^5$

10. $y = (4 - 3x)^9$

11. $y = \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{-7}$

12. $y = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^{-10}$

13. $y = \left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^4$

14. $y = \sqrt{3x^2 - 4x + 6}$

15. $y = \sec(\tan x)$

16. $y = \cot\left(\pi - \frac{1}{x}\right)$

17. $y = \tan^3 x$

18. $y = 5\cos^{-4} x$

Determine las derivadas de las funciones en los ejercicios 19 a 40.

19. $p = \sqrt{3 - t}$

20. $q = \sqrt[3]{2r - r^2}$

21. $s = \frac{4}{3\pi}\text{sen}\,3t + \frac{4}{5\pi}\cos 5t$

22. $s = \text{sen}\left(\frac{3\pi t}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$

23. $r = (\csc\theta + \cot\theta)^{-1}$

24. $r = 6(\sec\theta - \tan\theta)^{3/2}$

25. $y = x^2\,\text{sen}^4 x + x\cos^{-2} x$

26. $y = \frac{1}{x}\text{sen}^{-5} x - \frac{x}{3}\cos^3 x$

27. $y = \frac{1}{18}(3x - 2)^6 + \left(4 - \frac{1}{2x^2}\right)^{-1}$

28. $y = (5 - 2x)^{-3} + \frac{1}{8}\left(\frac{2}{x} + 1\right)^4$

29. $y = (4x + 3)^4(x + 1)^{-3}$

30. $y = (2x - 5)^{-1}(x^2 - 5x)^6$

31. $h(x) = x\tan\left(2\sqrt{x}\right) + 7$

32. $k(x) = x^2\sec\left(\frac{1}{x}\right)$

33. $f(x) = \sqrt{7 + x\sec x}$

34. $g(x) = \frac{\tan 3x}{(x + 7)^4}$

35. $f(\theta) = \left(\frac{\text{sen}\,\theta}{1 + \cos\theta}\right)^2$

36. $g(t) = \left(\frac{1 + \text{sen}\,3t}{3 - 2t}\right)^{-1}$

37. $r = \operatorname{sen}(\theta^2)\cos(2\theta)$ **38.** $r = \sec\sqrt{\theta}\tan\left(\frac{1}{\theta}\right)$

39. $q = \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{t+1}}\right)$ **40.** $q = \cot\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)$

En los ejercicios 41 a 58, obtenga dy/dt.

41. $y = \operatorname{sen}^2(\pi t - 2)$ **42.** $y = \sec^2 \pi t$

43. $y = (1 + \cos 2t)^{-4}$ **44.** $y = (1 + \cot(t/2))^{-2}$

45. $y = (t \tan t)^{10}$ **46.** $y = (t^{-3/4} \operatorname{sen} t)^{4/3}$

47. $y = \left(\frac{t^2}{t^3 - 4t}\right)^3$ **48.** $y = \left(\frac{3t-4}{5t+2}\right)^{-5}$

49. $y = \operatorname{sen}(\cos(2t - 5))$ **50.** $y = \cos\left(5\operatorname{sen}\left(\frac{t}{3}\right)\right)$

51. $y = \left(1 + \tan^4\left(\frac{t}{12}\right)\right)^3$ **52.** $y = \frac{1}{6}\left(1 + \cos^2(7t)\right)^3$

53. $y = \sqrt{1 + \cos(t^2)}$ **54.** $y = 4\operatorname{sen}\left(\sqrt{1 + \sqrt{t}}\right)$

55. $y = \tan^2(\operatorname{sen}^3 t)$ **56.** $y = \cos^4(\sec^2 3t)$

57. $y = 3t(2t^2 - 5)^4$ **58.** $y = \sqrt{3t + \sqrt{2 + \sqrt{1 - t}}}$

Segundas derivadas

Obtenga y'' en los ejercicios 59 a 64.

59. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$ **60.** $y = \left(1 - \sqrt{x}\right)^{-1}$

61. $y = \frac{1}{9}\cot(3x - 1)$ **62.** $y = 9\tan\left(\frac{x}{3}\right)$

63. $y = x(2x + 1)^4$ **64.** $y = x^2(x^3 - 1)^5$

Determinación de valores numéricos de las derivadas

En los ejercicios 65 a 70, obtenga el valor de $(f \circ g)'$ en el valor dado de x.

65. $f(u) = u^5 + 1, \quad u = g(x) = \sqrt{x}, \quad x = 1$

66. $f(u) = 1 - \frac{1}{u}, \quad u = g(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x = -1$

67. $f(u) = \cot\frac{\pi u}{10}, \quad u = g(x) = 5\sqrt{x}, \quad x = 1$

68. $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}, \quad u = g(x) = \pi x, \quad x = 1/4$

69. $f(u) = \frac{2u}{u^2 + 1}, \quad u = g(x) = 10x^2 + x + 1, \quad x = 0$

70. $f(u) = \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^2, \quad u = g(x) = \frac{1}{x^2} - 1, \quad x = -1$

71. Suponga que $f'(3) = -1$, $g'(2) = 5$, $g(2) = 3$, y $y = f(g(x))$. Obtenga y' en $x = 2$.

72. Si $r = \operatorname{sen}(f(t))$, $f(0) = \pi/3$, y $f'(0) = 4$, obtenga dr/dt en $t = 0$.

73. Suponga que las funciones f y g y sus derivadas con respecto a x tienen los siguientes valores en $x = 2$ y $x = 3$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	1/3	−3
3	3	−4	2π	5

Obtenga las derivadas con respecto a x de las siguientes combinaciones en el valor dado de x.

a) $2f(x), \quad x = 2$ ***b)*** $f(x) + g(x), \quad x = 3$

c) $f(x) \cdot g(x), \quad x = 3$ ***d)*** $f(x)/g(x), \quad x = 2$

e) $f(g(x)), \quad x = 2$ ***f)*** $\sqrt{f(x)}, \quad x = 2$

g) $1/g^2(x), \quad x = 3$ ***h)*** $\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}, \quad x = 2$

74. Suponga que las funciones f y g y sus derivadas con respecto a x tienen los siguientes valores en $x = 0$ y $x = 1$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	1/3
1	3	−4	−1/3	−8/3

Obtenga las derivadas con respecto a x de las siguientes combinaciones en el valor dado de x.

a) $5f(x) - g(x), \quad x = 1$ ***b)*** $f(x)g^3(x), \quad x = 0$

c) $\frac{f(x)}{g(x) + 1}, \quad x = 1$ ***d)*** $f(g(x)), \quad x = 0$

e) $g(f(x)), \quad x = 0$ ***f)*** $(x^{11} + f(x))^{-2}, \quad x = 1$

g) $f(x + g(x)), \quad x = 0$

75. Obtenga ds/dt cuando $\theta = 3\pi/2$ si $s = \cos\theta$ y $d\theta/dt = 5$.

76. Obtenga dy/dt cuando $x = 1$ si $y = x^2 + 7x - 5$ y $dx/dt = 1/3$.

Teoría y ejemplos

¿Qué sucede si se escribe una función compuesta de diferentes maneras? ¿Se obtiene siempre la misma derivada? La regla de la cadena sostiene que así debería ser. Inténtelo con las funciones de los ejercicios 77 y 78.

77. Obtenga dy/dx, si $y = x$, usando la regla de la cadena con y como una composición de

a) $y = (u/5) + 7$ y $u = 5x - 35$

b) $y = 1 + (1/u)$ y $u = 1/(x - 1)$.

78. Obtenga dy/dx, si $y = x^{3/2}$, usando la regla de la cadena con y como una composición de

a) $y = u^3$ y $u = \sqrt{x}$

b) $y = \sqrt{u}$ y $u = x^3$.

79. Obtenga la tangente a $y = ((x-1)/(x+1))^2$ en $x = 0$.

80. Obtenga la tangente a $y = \sqrt{x^2 - x + 7}$ en $x = 2$.

81. ***a)*** Obtenga la tangente a la curva $y = 2\tan(\pi x/4)$ en $x = 1$.

b) **Pendientes en la curva tangente** ¿Cuál es el valor mínimo que puede tener la pendiente de la curva en el intervalo $-2 < x < 2$? Justifique su respuesta.

82. Pendientes en las curvas del seno

a) Determine las ecuaciones de las tangentes a las curvas $y = \operatorname{sen} 2x$ y $y = -\operatorname{sen}(x/2)$ en el origen. ¿Hay algo especial en la manera como se relacionan las tangentes? Justifique su respuesta.

b) ¿Qué puede decirse acerca de las tangentes de las curvas $y = \operatorname{sen} mx$ y $y = -\operatorname{sen}(x/m)$ en el origen (m es una constante $\neq 0$)? Justifique su respuesta.

c) Para una m dada, ¿cuáles son los valores máximos que pueden tener las pendientes de las curvas $y = \operatorname{sen} mx$ y $y = -\operatorname{sen}(x/m)$? Justifique su respuesta.

d) La función $y = \text{sen } x$ completa un periodo en el intervalo $[0, 2\pi]$, la función $y = \text{sen } 2x$ completa dos periodos, la función $y = \text{sen}(x/2)$ completa medio periodo, y así sucesivamente. ¿Hay alguna relación entre el número de periodos que completa $y = \text{sen } mx$ en $[0, 2\pi]$ y la pendiente de la curva $y = \text{sen } mx$ en el origen? Justifique su respuesta.

83. Maquinaria que funciona muy rápido Suponga que un pistón se mueve hacia arriba y hacia abajo en línea recta y que su posición en el instante t s es

$$s = A\cos(2\pi bt),$$

con A y b positivas. El valor de A es la amplitud del movimiento, y el de b es la frecuencia (número de veces que el pistón se mueve hacia arriba y hacia abajo en un segundo). Si se duplica la frecuencia, ¿qué efecto tendrá esto sobre la velocidad, la aceleración y la sacudida del pistón? (Una vez que lo descubra, sabrá por qué algunas máquinas se descomponen cuando funcionan demasiado rápido).

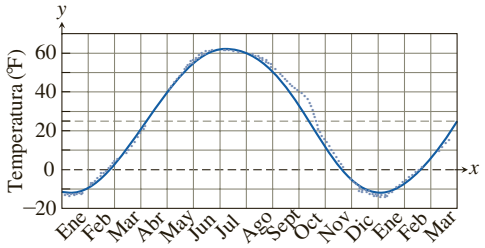
84. Temperaturas en Fairbanks, Alaska La gráfica de la figura muestra la temperatura promedio en ºF en Fairbanks, Alaska, durante un año típico de 365 días. La ecuación que aproxima la temperatura del día x es

$$y = 37\,\text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right] + 25$$

y está graficada en la figura.

a) ¿En qué día la temperatura se incrementa más rápido?

b) ¿Alrededor de cuántos grados por día aumenta la temperatura cuando el incremento de la misma es el más rápido?



85. Movimiento de una partícula La posición de una partícula que se desplaza a lo largo de una recta coordenada es $s = \sqrt{1 + 4t}$, con s en metros y t en segundos. Determine la velocidad y la aceleración de la partícula en $t = 6$ seg.

86. Aceleración constante Suponga que la velocidad de un cuerpo que cae es $v = k\sqrt{s}$ m/sec (k es una constante) en el instante en que el cuerpo ha caído s metros desde el punto de partida. Demuestre que la aceleración del cuerpo es constante.

87. Caída de un meteorito La velocidad de un meteorito pesado que entra en la atmósfera terrestre es inversamente proporcional a $\sqrt{s}$ cuando se encuentra a s kilómetros del centro de la Tierra. Demuestre que la aceleración del meteorito es inversamente proporcional a s^2.

88. Aceleración de una partícula Una partícula se desplaza a lo largo del eje x con una velocidad $dx/dt = f(x)$. Demuestre que la aceleración de la partícula es $f(x)f'(x)$.

89. Temperatura y periodo de un péndulo En el caso de oscilaciones de amplitud pequeña (balanceos cortos), podemos modelar sin problema la relación entre el periodo T y la longitud L de un péndulo simple con la ecuación

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

donde g es la aceleración constante de la gravedad en el lugar donde se encuentra el péndulo. Si medimos g en centímetros por segundo al cuadrado, mediremos L en centímetros y T en segundos. Si el péndulo es metálico, su longitud variará con la temperatura, aumentando o disminuyendo a una razón aproximadamente proporcional a L. En símbolos, si u es la temperatura y k la constante de proporcionalidad,

$$\frac{dL}{du} = kL.$$

Suponiendo que éste es el caso, demuestre que la razón a la que cambia el periodo del péndulo con respecto a la temperatura es $kT/2$.

90. Regla de la cadena Suponga que $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$. Entonces, las composiciones

$$(f \circ g)(x) = |x|^2 = x^2 \quad \text{y} \quad (g \circ f)(x) = |x^2| = x^2$$

son diferenciables en $x = 0$ aun cuando g no sea diferenciable en $x = 0$. ¿Esto contradice la regla de la cadena? Explique.

T **91. La derivada de sen $2x$** Grafique la función de $y = 2\cos 2x$ para $-2 \le x \le 3.5$. Después, en la misma pantalla, grafique

$$y = \frac{\text{sen } 2(x + h) - \text{sen } 2x}{h}$$

para $h = 1.0$, 0.5 y 0.2. Experimente con otros valores de h, incluyendo valores negativos. ¿Qué sucede cuando $h \to 0$? Explique este comportamiento.

92. La derivada de cos(x^2) Grafique $y = -2x\,\text{sen}(x^2)$ para $-2 \le x \le 3$. Después, en la misma pantalla, grafique

$$y = \frac{\cos((x + h)^2) - \cos(x^2)}{h}$$

para $h = 1.0$, 0.7 y 0.3. Experimente con otros valores de h. ¿Qué sucede cuando $h \to 0$? Explique este comportamiento.

Con base en la regla de la cadena, demuestre que la regla de la potencia $(d/dx)x^n = nx^{n-1}$ es válida para las funciones x^n en los ejercicios 93 y 94.

93. $x^{1/4} = \sqrt{\sqrt{x}}$ **94.** $x^{3/4} = \sqrt{x\sqrt{x}}$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Polinomios trigonométricos

95. Como muestra la siguiente figura, el "polinomio" trigonométrico

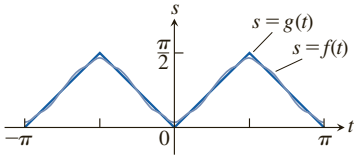
$$s = f(t) = 0.78540 - 0.63662\cos 2t - 0.07074\cos 6t - 0.02546\cos 10t - 0.01299\cos 14t$$

da una buena aproximación de la función diente de sierra, $s = g(t)$, en el intervalo $[-\pi, \pi]$. ¿Qué tan bien aproxima la derivada de f a la derivada de g en los puntos donde dg/dt está definida? Para averiguarlo, ejecute los siguientes pasos.

a) Grafique dg/dt (donde esté definida) en $[-\pi, \pi]$.

b) Obtenga df/dt.

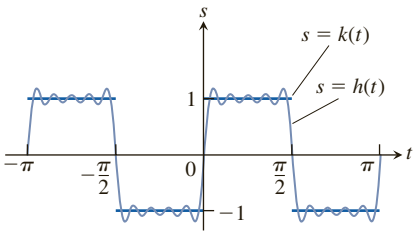
c) Grafique df/dt. ¿Dónde parece ser mejor la aproximación de dg/dt por df/dt? ¿Dónde parece menos buena? Las aproximaciones con polinomios trigonométricos son importantes en la teoría del calor y de la oscilación, pero, como veremos en el siguiente ejercicio, no debemos esperar mucho de ellas.



96. (*Continuación del ejercicio 95*). En el ejercicio 95, el polinomio trigonométrico $f(t)$ que aproxima a la función diente de sierra $g(t)$ en $[-\pi, \pi]$ tiene derivada que aproxima a la derivada de la función diente de sierra. Sin embargo, es posible que un polinomio trigonométrico aproxime una función de manera razonable y que, al mismo tiempo, su derivada no aproxime tan bien a la derivada de la función. Por ejemplo, el "polinomio" trigonométrico

$$s = h(t) = 1.2732 \operatorname{sen} 2t + 0.4244 \operatorname{sen} 6t + 0.25465 \operatorname{sen} 10t + 0.18189 \operatorname{sen} 14t + 0.14147 \operatorname{sen} 18t$$

(graficado en la figura) aproxima la función escalonada $s = kt$. No obstante, la derivada de h no se parece a la derivada de k.



a) Grafique dk/dt (donde esté definida) en $[-\pi, \pi]$.

b) Obtenga dh/dt.

c) Grafique dh/dt para ver lo mal que se ajusta a la gráfica de dk/dt. Comente lo que observa.

3.7 Diferenciación implícita

La mayoría de las funciones que hemos visto hasta ahora se han definido mediante una ecuación de la forma $y = f(x)$, que expresa y explícitamente en términos de la variable x. Hemos aprendido reglas para derivar funciones definidas de esta manera. Sin embargo, se presenta otra situación cuando nos encontramos con ecuaciones como

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0, \qquad y^2 - x = 0, \qquad \text{o} \qquad x^2 + y^2 - 25 = 0.$$

(Vea las figuras 3.26, 3.27 y 3.28). Estas ecuaciones definen una relación *implícita* entre las variables x y y. En algunos casos, podremos despejar y de tales ecuaciones como una función explícita (o incluso como varias funciones) de x. Cuando no es posible dar a la ecuación $F(x, y) = 0$ la forma $y = f(x)$ para derivarla de la manera usual, podemos encontrar dy/dx mediante *diferenciación implícita*. En esta sección se describe dicha técnica.

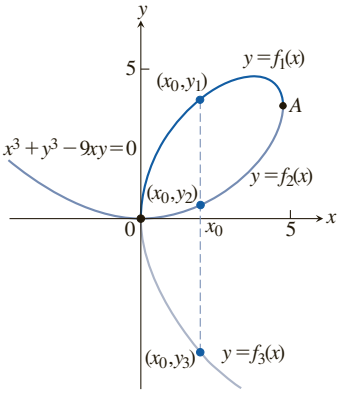


FIGURA 3.26 La curva $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ no es la gráfica de ninguna función de x. Sin embargo, la curva se puede dividir en arcos separados que *son* gráficas de funciones de x. Esta curva en particular, llamada *folium*, fue descrita por Descartes en 1638.

Funciones definidas implícitamente

Iniciamos con ejemplos que involucran ecuaciones conocidas en las que podemos despejar y como una función de x, para calcular dy/dx de la manera usual. Después, diferenciamos las ecuaciones implícitamente y obtenemos la derivada para comparar los dos métodos. Siguiendo los ejemplos, resumimos los pasos implicados en el nuevo método. En los ejemplos y ejercicios, siempre se supondrá que la ecuación dada determina y implícitamente como una función diferenciable de x de modo que dy/dx existe.

EJEMPLO 1 Obtenga dy/dx si $y^2 = x$.

Solución La ecuación $y^2 = x$ define dos funciones diferenciables de x que podemos obtener, a saber, $y_1 = \sqrt{x}$ y $y_2 = -\sqrt{x}$ (figura 3.27). Sabemos cómo calcular la derivada de cada una de ellas para $x > 0$:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{y} \qquad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Pero supongamos que sólo sabemos que la ecuación $y^2 = x$ define a y como una o más funciones diferenciables de x para $x > 0$, sin saber exactamente cómo son estas funciones. ¿Es posible obtener dy/dx?

La respuesta es sí. Para obtener dy/dx, simplemente derivamos ambos lados de la ecuación $y^2 = x$ con respecto a x, tratando a $y = f(x)$ como una función diferenciable de x.

$$y^2 = x$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}.$$

La regla de la cadena da como resultado $\dfrac{d}{dx}(y^2) = \dfrac{d}{dx}[f(x)]^2 = 2f(x)f'(x) = 2y\dfrac{dy}{dx}$.

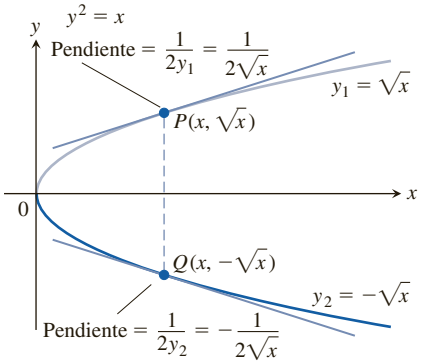


FIGURA 3.27 La ecuación $y^2 - x = 0$, o $y^2 = x$ como se escribe normalmente, define dos funciones diferenciables de x en el intervalo $x > 0$. El ejemplo 1 muestra cómo calcular las derivadas de estas funciones sin resolver la ecuación $y^2 = x$ para despejar y.

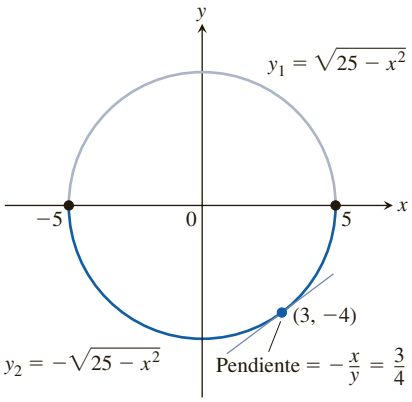


FIGURA 3.28 La circunferencia combina las gráficas de dos funciones. La gráfica de y_2 es el semicírculo inferior, y pasa por (3, −4).

Esta fórmula proporciona las derivadas que calculamos para *ambas* soluciones explícitas, $y_1 = \sqrt{x}$ y $y_2 = -\sqrt{x}$:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{y} \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = \frac{1}{2(-\sqrt{x})} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$ ■

EJEMPLO 2 Obtenga la pendiente de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (3, −4).

Solución La circunferencia no es la gráfica de una sola función de x. Más bien, es la gráfica combinada de dos funciones diferenciables, $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ y $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ (figura 3.28). El punto (3, −4) se encuentra en la gráfica de y_2, de manera que podemos obtener la pendiente calculando la derivada directamente, mediante la regla de la cadena para potencias:

$$\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=3} = -\left.\frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}\right|_{x=3} = -\frac{-6}{2\sqrt{25 - 9}} = \frac{3}{4}.$$

$\frac{d}{dx}\left(-(25 - x^2)^{1/2}\right) = -\frac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x)$

Podemos resolver este problema más fácilmente diferenciando implícitamente la ecuación dada la circunferencia con respecto a x:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{Vea el ejemplo 1.}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

La pendiente en (3, −4) es $\left.-\frac{x}{y}\right|_{(3,\,-4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$.

Observe que, a diferencia de la fórmula de la pendiente para dy_2/dx, que sólo se aplica a los puntos que están debajo del eje x, la fórmula $dy/dx = -x/y$ se aplica a todos los puntos donde la circunferencia tiene una pendiente; es decir, en los puntos (x, y) de la circunferencia donde $y \neq 0$. Observe también que la derivada implica *ambas* variables, x y y, no sólo a la variable independiente x. ■

Para calcular las derivadas de otras funciones definidas implícitamente, procedemos como en los ejemplos 1 y 2: tratamos a y como una función implícita diferenciable de x y aplicamos las reglas habituales de diferenciación a ambos lados de la ecuación definida.

Diferenciación implícita

1. Se diferencian ambos lados con respecto a x, tratando a y como una función diferenciable de x.
2. Se agrupan en un lado de la ecuación los términos que contengan dy/dx, y se despeja dy/dx.

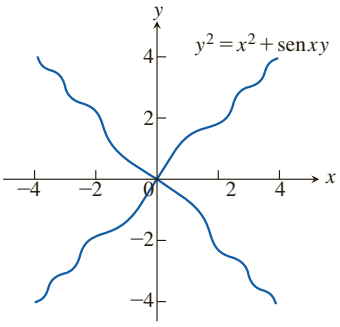


FIGURA 3.29 Gráfica de la ecuación del ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Obtenga dy/dx si $y^2 = x^2 + \operatorname{sen} xy$ (figura 3.29).

Solución Diferenciamos la ecuación implícitamente.

$$y^2 = x^2 + \operatorname{sen} xy$$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} xy)$$ Se diferencian ambos lados con respecto a x . . .

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\frac{d}{dx}(xy)$$ . . . se trata a y como una función de x y se usa la regla de la cadena.

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)$$ Se trata xy como un producto.

$$2y\frac{dy}{dx} - (\cos xy)\left(x\frac{dy}{dx}\right) = 2x + (\cos xy)y$$ Se agrupan los términos que contengan dy/dx.

$$(2y - x\cos xy)\frac{dy}{dx} = 2x + y\cos xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\cos xy}{2y - x\cos xy}$$ Se despeja dy/dx.

Observe que la fórmula para dy/dx se aplica dondequiera que la curva, definida implícitamente, tenga una pendiente. Observe asimismo que la derivada no sólo implica la variable independiente x, sino *ambas* variables, x y y. ■

Derivadas de orden superior

También se puede usar la diferenciación implícita para obtener derivadas de orden superior.

EJEMPLO 4 Obtenga d^2y/dx^2 si $2x^3 - 3y^2 = 8$.

Solución Para iniciar, derivamos ambos lados de la ecuación con respecto a x para obtener $y' = dy/dx$.

$$\frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) = \frac{d}{dx}(8)$$

$$6x^2 - 6yy' = 0$$ Se trata a y como una función de x.

$$y' = \frac{x^2}{y}, \quad \text{cuando } y \neq 0$$ Se despeja y'.

Ahora se aplica la regla del cociente para obtener y''.

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2xy - x^2y'}{y^2} = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\cdot y'$$

Finalmente, se sustituye $y' = x^2/y$ para expresar y'' en términos de x y y.

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3}, \quad \text{cuando } y \neq 0$$ ■

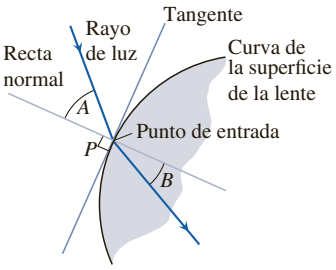


FIGURA 3.30 Perfil de una lente que muestra la refracción de un rayo de luz cuando pasa a través de la superficie de la lente.

Lentes, tangentes y rectas normales

En la ley que describe cómo cambia la dirección de la luz cuando entra en una lente, los ángulos importantes son aquellos que la luz forma con la recta perpendicular a la superficie de la lente en el punto de entrada (ángulos A y B en la figura 3.30). Esta recta se conoce como *normal* a la superficie en el punto de entrada. Si vemos la lente de perfil, como en la figura 3.30, la **normal** es la recta perpendicular (u *ortogonal*) a la tangente a la curva del perfil en el punto de entrada.

EJEMPLO 5 Demuestre que el punto (2, 4) se encuentra sobre la curva $x^3 + y^3 - 9xy = 0$. Después, obtenga la tangente y la normal a la curva en ese punto (figura 3.31).

Solución El punto (2, 4) se encuentra sobre la curva porque sus coordenadas satisfacen la ecuación dada de la curva: $2^3 + 4^3 - 9(2)(4) = 8 + 64 - 72 = 0$.

Para obtener la pendiente de la curva en (2, 4), realizamos primero diferenciación implícita con la finalidad de determinar una fórmula para dy/dx:

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(9xy) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 9\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) = 0 \qquad \text{Se diferencian ambos lados con respecto a } x.$$

$$(3y^2 - 9x)\frac{dy}{dx} + 3x^2 - 9y = 0 \qquad \text{Se trata a } xy \text{ como un producto, y a } y \text{ como una función de } x.$$

$$3(y^2 - 3x)\frac{dy}{dx} = 9y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}. \qquad \text{Se despeja } dy/dx.$$

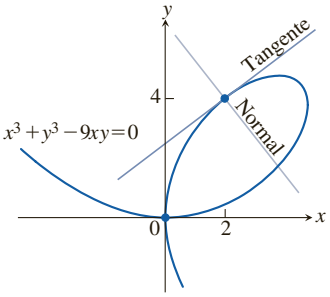


FIGURA 3.31 El ejemplo 5 muestra cómo obtener las ecuaciones de la tangente y normal del folium de Descartes en (2, 4).

Después, evaluamos la derivada en $(x, y) = (2, 4)$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,\,4)} = \left.\frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}\right|_{(2,\,4)} = \frac{3(4) - 2^2}{4^2 - 3(2)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

La tangente en (2, 4) es la recta que pasa por (2, 4) con pendiente igual a $4/5$:

$$y = 4 + \frac{4}{5}(x - 2)$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}.$$

La normal a la curva en (2, 4) es la recta perpendicular a la tangente en ese punto, la recta que pasa por (2, 4) con pendiente igual a $-5/4$:

$$y = 4 - \frac{5}{4}(x - 2)$$

$$y = -\frac{5}{4}x + \frac{13}{2}.$$

■

Ejercicios 3.7

Diferenciación implícita

Utilice diferenciación implícita para obtener dy/dx en los ejercicios 1 a 14.

1. $x^2y + xy^2 = 6$

2. $x^3 + y^3 = 18xy$

3. $2xy + y^2 = x + y$

4. $x^3 - xy + y^3 = 1$

5. $x^2(x - y)^2 = x^2 - y^2$

6. $(3xy + 7)^2 = 6y$

7. $y^2 = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

8. $x^3 = \dfrac{2x - y}{x + 3y}$

9. $x = \sec y$

10. $xy = \cot(xy)$

11. $x + \tan(xy) = 0$

12. $x^4 + \operatorname{sen} y = x^3y^2$

13. $y \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{y}\right) = 1 - xy$

14. $x \cos(2x + 3y) = y \operatorname{sen} x$

Obtenga $dr/d\theta$ en los ejercicios 15 a 18.

15. $\theta^{1/2} + r^{1/2} = 1$

16. $r - 2\sqrt{\theta} = \dfrac{3}{2}\theta^{2/3} + \dfrac{4}{3}\theta^{3/4}$

17. $\operatorname{sen}(r\theta) = \dfrac{1}{2}$

18. $\cos r + \cot\theta = r\theta$

Segundas derivadas

En los ejercicios 19 a 24, utilice diferenciación implícita para obtener dy/dx y, luego, d^2y/dx^2.

19. $x^2 + y^2 = 1$

20. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

21. $y^2 = x^2 + 2x$

22. $y^2 - 2x = 1 - 2y$

23. $2\sqrt{y} = x - y$

24. $xy + y^2 = 1$

25. Si $x^3 + y^3 = 16$, obtenga el valor de d^2y/dx^2 en el punto $(2, 2)$.

26. Si $xy + y^2 = 1$, obtenga el valor de d^2y/dx^2 en el punto $(0, -1)$.

En los ejercicios 27 y 28, obtenga la pendiente de la curva en los puntos dados.

27. $y^2 + x^2 = y^4 - 2x$ en $(-2, 1)$ y $(-2, -1)$

28. $(x^2 + y^2)^2 = (x - y)^2$ en $(1, 0)$ y $(1, -1)$

Pendientes, tangentes y normales

En los ejercicios 29 a 38, verifique que el punto dado se encuentre sobre la curva y obtenga las rectas que son ***a)*** tangentes y ***b)*** normales a la curva en el punto dado.

29. $x^2 + xy - y^2 = 1, \quad (2, 3)$

30. $x^2 + y^2 = 25, \quad (3, -4)$

31. $x^2y^2 = 9, \quad (-1, 3)$

32. $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0, \quad (-2, 1)$

33. $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0, \quad (-1, 0)$

34. $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 5, \quad \left(\sqrt{3}, 2\right)$

35. $2xy + \pi \operatorname{sen} y = 2\pi, \quad (1, \pi/2)$

36. $x \operatorname{sen} 2y = y \cos 2x, \quad (\pi/4, \pi/2)$

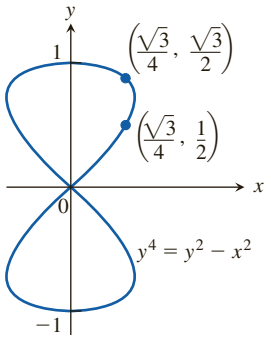
37. $y = 2\operatorname{sen}(\pi x - y), \quad (1, 0)$

38. $x^2 \cos^2 y - \operatorname{sen} y = 0, \quad (0, \pi)$

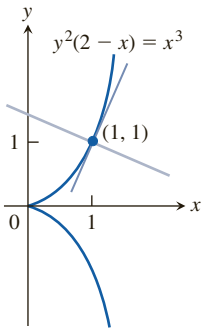
39. Tangentes paralelas Obtenga los dos puntos donde la curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ cruza el eje x, y demuestre que las tangentes a la curva en esos puntos son paralelas. ¿Cuál es la pendiente común de esas tangentes?

40. Normales paralelas a una recta Obtenga las normales a la curva $xy + 2x - y = 0$ que son paralelas a la recta $2x + y = 0$.

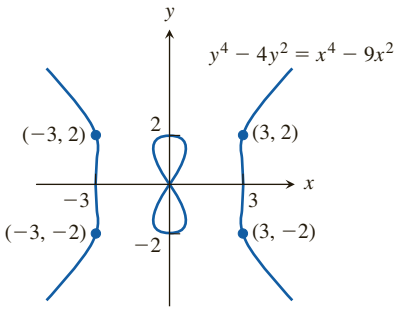
41. La curva en forma de ocho Determine las pendientes de la curva $y^4 = y^2 - x^2$ en los dos puntos mostrados.



42. La cisoide de Diocles (200 a. C. aproximadamente) Obtenga las ecuaciones de la tangente y la normal a la cisoide de Diocles $y^2(2 - x) = x^3$ en $(1, 1)$.



43. La curva del diablo (Gabriel Cramer, 1750) Obtenga las pendientes de la curva del diablo $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$ en los cuatro puntos que se indican.



44. El folium de Descartes (Vea la figura 3.26).

a) Obtenga la pendiente del folium de Descartes $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ en los puntos (4, 2) y (2, 4).

b) ¿En qué otro punto, distinto del origen, el folium tiene una tangente horizontal?

c) Obtenga las coordenadas del punto A en la figura 3.26 donde el folium tiene una tangente vertical.

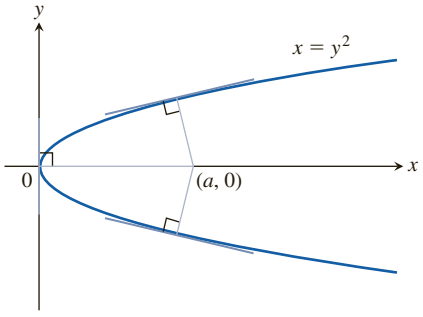
Teoría y ejemplos

45. Normal que interseca Considere la recta que es normal a la curva $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ en (1, 1). ¿En qué otro punto esa recta interseca la curva?

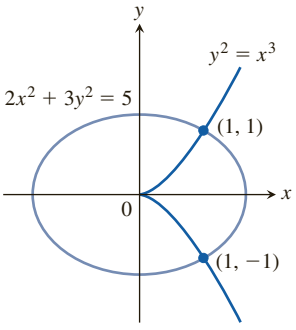
46. Regla de la potencia para exponentes racionales Sean p y q enteros con $q > 0$. Si $y = x^{p/q}$, diferencie implícitamente la ecuación equivalente $y^q = x^p$ y demuestre que, para $y \neq 0$,

$$\frac{d}{dx}x^{p/q} = \frac{p}{q}x^{(p/q)-1}.$$

47. Normales a una parábola Demuestre que si es posible dibujar tres normales, desde el punto $(a, 0)$, a la parábola $x = y^2$ que se muestra aquí, entonces, a debe ser mayor que $1/2$. Una de las normales es el eje x. ¿Para qué valor de a son perpendiculares las otras dos normales?



48. ¿Qué tienen de especial las tangentes a las curvas $y^2 = x^3$ y $2x^2 + 3y^2 = 5$ en los puntos $(1, \pm 1)$? Justifique su respuesta.

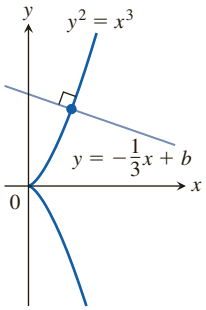


49. Verifique que los siguientes pares de curvas sean ortogonales entre sí.

a) $x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 = 3y^2$

b) $x = 1 - y^2, \quad x = \frac{1}{3}y^2$

50. La gráfica de $y^2 = x^3$ se llama **parábola semicúbica** y se muestra en la siguiente figura. Determine la constante b de modo que la recta $y = -\frac{1}{3}x + b$ sea ortogonal a la gráfica.



T En los ejercicios 51 y 52, obtenga tanto dy/dx (tratando a y como una función diferenciable de x) como dx/dy (considerando a x como una función diferenciable de y). ¿Cómo parecen estar relacionadas dy/dx y dx/dy? Explique la relación geométricamente, en términos de las gráficas.

51. $xy^3 + x^2y = 6$ **52.** $x^3 + y^2 = \operatorname{sen}^2 y$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Use un software matemático para ejecutar los siguientes pasos en los ejercicios 53 a 60.

a) Trace la ecuación con el graficador para funciones implícitas del software. Verifique que el punto dado P satisfaga la ecuación.

b) Mediante diferenciación implícita, obtenga una fórmula para la derivada dy/dx y evalúela en el punto dado P.

c) Use la pendiente determinada en el inciso *b*) para obtener una ecuación de la recta tangente a la curva en P. Después, trace en una sola gráfica la curva implícita y la recta tangente.

53. $x^3 - xy + y^3 = 7, \quad P(2, 1)$

54. $x^5 + y^3x + yx^2 + y^4 = 4, \quad P(1, 1)$

55. $y^2 + y = \dfrac{2 + x}{1 - x}, \quad P(0, 1)$

56. $y^3 + \cos xy = x^2, \quad P(1, 0)$

57. $x + \tan\left(\dfrac{y}{x}\right) = 2, \quad P\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$

58. $xy^3 + \tan(x + y) = 1, \quad P\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$

59. $2y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 2, \quad P(1, 1)$

60. $x\sqrt{1 + 2y} + y = x^2, \quad P(1, 0)$

3.8 Tasas relacionadas

En esta sección veremos problemas cuya incógnita es la razón a la que cambia cierta variable cuando se conoce la razón de cambio de otra variable relacionada (o tal vez de diversas variables). El cálculo de la razón de cambio a partir de otras razones de cambio conocidas se llama *problema de tasas relacionadas*.

Ecuaciones de tasas relacionadas

Suponga que estamos bombeando aire en un globo esférico. Tanto el volumen como el radio del globo aumentan con el tiempo. Si V es el volumen y r es el radio del globo en un instante determinado, entonces,

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Usando la regla de la cadena, derivamos ambos lados con respecto a t, para obtener la ecuación que relaciona las razones de cambio de V y r,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

De esta manera, si conocemos el radio r del globo y la razón dV/dt a la cual aumenta el volumen en un instante determinado, podemos resolver esta última ecuación para conocer dr/dt y obtener la rapidez con la que el radio se incrementa en ese instante. Observe que es más fácil medir directamente la razón de aumento del volumen (la razón a la cual se bombea el aire hacia el interior del globo), que medir el aumento del radio. La ecuación de tasas relacionadas nos permite calcular dr/dt a partir de dV/dt.

Con mucha frecuencia, la clave para relacionar variables en problemas de razones es elaborar un dibujo que muestre las relaciones geométricas entre ellas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

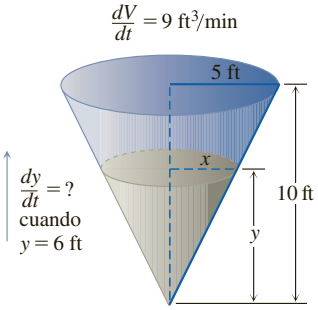


FIGURA 3.32 La geometría del tanque cónico y la razón a la que el agua llena el tanque determinan la rapidez con que se eleva el nivel del agua (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 En un tanque cónico, el agua entra a una razón de 9 ft^3/min. El tanque permanece con el vértice hacia abajo, tiene una altura de 10 ft, y el radio de su base mide 5 ft. ¿Qué tan rápido se eleva el nivel del agua cuando ésta tiene 6 ft de profundidad?

Solución La figura 3.32 muestra el tanque cónico parcialmente lleno. Las variables del problema son

V = volumen (ft^3) del agua en el tanque en el instante t (min)
x = radio (ft) de la superficie del agua en el instante t
y = profundidad (ft) del agua del tanque en el instante t.

Suponemos que V, x y y son funciones diferenciables de t. Las constantes son las dimensiones del tanque. Debemos determinar dy/dt cuando

$$y = 6 \text{ ft} \qquad \text{y} \qquad \frac{dV}{dt} = 9\ \text{ft}^3/\text{min}.$$

El agua forma un cono con volumen

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y.$$

Esta ecuación involucra a x, V y y. Como no hay información sobre x y dx/dt en el instante en cuestión, necesitamos eliminar x. Los triángulos semejantes de la figura 3.32 nos permiten expresar x en términos de y:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \qquad \text{o} \qquad x = \frac{y}{2}.$$

Por lo tanto, obtenemos

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 y = \frac{\pi}{12}y^3$$

para determinar la derivada

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12}\cdot 3y^2\frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}y^2\frac{dy}{dt}.$$

Finalmente, usamos $y = 6$ y $dV/dt = 9$ para despejar dy/dt.

$$9 = \frac{\pi}{4}(6)^2 \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\pi} \approx 0.32$$

En el momento en cuestión, el nivel del agua se eleva a razón de 0.32 ft/min aproximadamente. ■

Estrategia para resolver problemas de tasas relacionadas

1. *Dibuje un diagrama y nombre a las variables y a las constantes*. Use t para denotar el tiempo. Suponga que todas las variables son funciones diferenciables de t.
2. *Escriba la información numérica* (en términos de los símbolos que haya elegido).
3. *Escriba lo que desea determinar* (normalmente una razón, expresada como una derivada).
4. *Escriba una ecuación que relacione las variables*. Quizá tenga que combinar dos o más ecuaciones para obtener una sola ecuación que relacione las variables cuya razón desea averiguar con las variables cuyas razones conoce.
5. *Derive con respecto a t*. Exprese la razón que le interesa determinar en términos de las razones y las variables cuyos valores conoce.
6. *Evalúe*. Emplee los valores que conoce para obtener la razón desconocida.

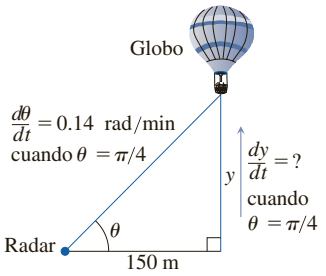


FIGURA 3.33 La razón de cambio de la altura del globo está relacionada con la razón de cambio del ángulo que forman el radar y el suelo (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Un globo de aire caliente, que asciende en línea recta desde el nivel del suelo, es rastreado por un radar (medidor láser) ubicado a 150 m del punto de elevación. En el momento en que el ángulo de elevación con respecto al radar es $\pi/4$, el ángulo aumenta a razón de 0.14 rad/min. ¿Qué tan rápido se está elevando el globo en ese momento?

Solución Para responder la pregunta anterior, ejecutamos los seis pasos de la estrategia anterior.

1. *Elaboramos un diagrama y damos nombre a las variables y a las constantes* (figura 3.33). Las variables en el diagrama son

   θ = el ángulo en radianes que forma el radar con respecto al suelo.
   y = altura del globo con respecto al suelo, en metros.

Sea t el tiempo en minutos, y supongamos que θ y y son funciones diferenciables de t.

En el dibujo, la constante es la distancia entre el radar y el punto de despegue del globo (150 m). No es necesario identificarla con un símbolo especial.

2. *Escribimos la información numérica adicional.*

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.14 \text{ rad/min} \qquad \text{cuando} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

3. *Escribimos lo que se pide encontrar.* Se desea obtener dy/dt cuando $\theta = \pi/4$.
4. *Escribimos una ecuación que relacione las variables y y θ.*

$$\frac{y}{150} = \tan\theta \qquad \text{o} \qquad y = 150\tan\theta$$

5. *Derivamos con respecto a t usando la regla de la cadena.* El resultado nos indica cómo se relaciona dy/dt (la incógnita que queremos determinar) con $d\theta/dt$ (el dato que conocemos).

$$\frac{dy}{dt} = 150\,(\sec^2\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

6. *Evaluamos con $\theta = \pi/4$ y $d\theta/dt = 0.14$ para encontrar dy/dt.*

$$\frac{dy}{dt} = 150\left(\sqrt{2}\right)^2(0.14) = 42 \qquad \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

En el momento en cuestión, el globo se eleva a razón de 42 m/min. ■

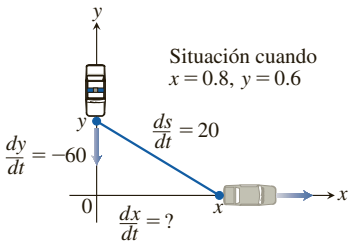


FIGURA 3.34 La rapidez del automóvil se relaciona con la rapidez de la patrulla y la razón de cambio de la distancia s entre ambos (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Una patrulla se aproxima a una intersección en ángulo recto desde el norte, persiguiendo a un automóvil que va a exceso de velocidad, y da vuelta en la esquina hacia el este. Cuando la patrulla se encuentra a 0.6 millas al norte de la intersección y el automóvil está a 0.8 millas al este, los policías determinan con radar que la distancia entre ellos y el automóvil está aumentando a 20 millas por hora (mph). Si la patrulla se desplaza a 60 millas por hora en el instante de la medición, ¿cuál es la rapidez del automóvil?

Solución Dibujamos un diagrama del automóvil y la patrulla en el plano de coordenadas, usando el eje x positivo para representar la autopista con rumbo al este, y el eje y positivo para la autopista que conduce hacia el sur (figura 3.34). Denotamos el tiempo con t y consideramos que

$$\begin{aligned} x &= \text{posición del automóvil en el tiempo } t \\ y &= \text{posición de la patrulla en el tiempo } t \\ s &= \text{distancia entre el automóvil y la patrulla en el tiempo } t. \end{aligned}$$

Suponemos que x, y y s son funciones diferenciables de t.

Deseamos obtener dx/dt cuando

$$x = 0.8 \text{ mi}, \qquad y = 0.6 \text{ mi}, \qquad \frac{dy}{dt} = -60 \text{ mph}, \qquad \frac{ds}{dt} = 20 \text{ mph}.$$

Observe que dy/dt es negativa porque y está decreciendo.

Derivamos la ecuación de la distancia entre el automóvil y la patrulla,

$$s^2 = x^2 + y^2$$

(también podríamos considerar $s = \sqrt{x^2 + y^2}$), para obtener

$$\begin{aligned} 2s\frac{ds}{dt} &= 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{s}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right). \end{aligned}$$

Finalmente, consideramos $x = 0.8$, $y = 0.6$, $dy/dt = -60$, $ds/dt = 20$, y despejamos dx/dt.

$$\begin{aligned} 20 &= \frac{1}{\sqrt{(0.8)^2 + (0.6)^2}}\left(0.8\frac{dx}{dt} + (0.6)(-60)\right) \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{20\sqrt{(0.8)^2 + (0.6)^2} + (0.6)(60)}{0.8} = 70 \end{aligned}$$

En el instante en cuestión, la rapidez del automóvil es de 70 mph. ■

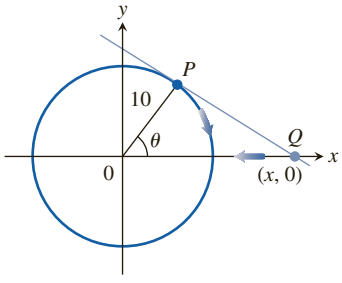


FIGURA 3.35 La partícula P viaja en el sentido de las manecillas del reloj a lo largo de la circunferencia (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Una partícula P se mueve en el sentido de las manecillas del reloj a una razón constante a lo largo de una circunferencia con centro en el origen y radio de 10 m. La posición inicial de la partícula es (0, 10) sobre el eje y, su destino final es el punto (10, 0) en el eje x. Una vez que la partícula está en movimiento, la recta tangente en P interseca el eje x en el punto Q (que se mueve con el tiempo). Si la partícula tarda 30 segundos en recorrer la trayectoria de principio a fin, ¿qué tan rápido se mueve el punto Q a lo largo del eje x cuando está a 20 m del centro de la circunferencia?

Solución Dibujamos la situación en el plano de coordenadas colocando el centro de la circunferencia en el origen (vea la figura 3.35). Sea t el tiempo y θ el ángulo del eje x a la recta radial que une el origen con P. Como la partícula recorre la trayectoria de principio a fin en 30 s, viaja a lo largo de la circunferencia a una razón constante de $\pi/2$ radianes en 1/2 min, o π rad/min. En otras palabras, $d\theta/dt = -\pi$, con t medido en minutos. El signo negativo se debe a que θ disminuye con el tiempo.

Considerando que $x(t)$ es la distancia en el instante t del punto Q al origen, se desea obtener dx/dt cuando

$$x = 20 \text{ m} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\theta}{dt} = -\pi \text{ rad/min}.$$

Para relacionar las variables x y θ, en la figura 3.35 vemos que $x \cos \theta = 10$, o $x = 10 \sec \theta$. La diferenciación de esta última ecuación da

$$\frac{dx}{dt} = 10 \sec \theta \tan \theta \frac{d\theta}{dt} = -10\pi \sec \theta \tan \theta.$$

Observe que dx/dt es negativa porque x disminuye (Q se mueve hacia el origen).

Cuando $x = 20$, $\cos \theta = 1/2$ y $\sec \theta = 2$. Además, $\tan \theta = \sqrt{\sec^2 \theta - 1} = \sqrt{3}$. Se deduce que

$$\frac{dx}{dt} = (-10\pi)(2)\left(\sqrt{3}\right) = -20\sqrt{3}\pi.$$

En el momento en cuestión, el punto Q se mueve hacia el origen con una velocidad de $20\sqrt{3}\pi \approx 109$ m/min. ■

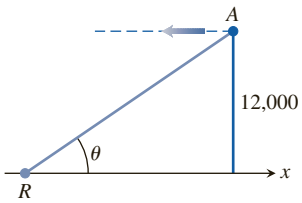


FIGURA 3.36 Avión A que viaja con altitud constante hacia la estación de radar R (ejemplo 5).

EJEMPLO 5 Un avión vuela a una altitud constante de 12,000 ft por encima del nivel del mar conforme se aproxima a una isla del Pacífico. El avión entra en el campo visual de una estación de radar ubicada en la isla, y el radar indica que el ángulo inicial entre el nivel del mar y la recta de avistamiento hacia el avión es de 30º. ¿Con qué rapidez se aproxima el avión a la isla (en millas por hora) cuando es detectado por el radar, si éste gira hacia arriba (en sentido contrario al de las manecillas del reloj) a razón de 2/3 grado/s para mantener al avión dentro de su línea de visión?

Solución Se dibujan el avión A y la estación de radar R en un plano de coordenadas, usando el eje positivo x como la distancia horizontal a nivel del mar de R a A, y el eje positivo y como la altitud vertical con respecto al nivel del mar. Sea t el tiempo y observe que $y = 12{,}000$ es una constante. La situación general y el ángulo θ de la recta de avistamiento se dibujan en la figura 3.36. Se desea obtener dx/dt cuando $\theta = \pi/6$ rad y $d\theta/dt = 2/3$ grado/s.

En la figura 3.36, vemos que

$$\frac{12{,}000}{x} = \tan \theta \qquad \text{o} \qquad x = 12{,}000 \cot \theta.$$

Si usamos millas en lugar de pies como unidades de distancia, la última ecuación se convierte en

$$x = \frac{12{,}000}{5280} \cot \theta.$$

Al derivar con respecto a t nos da

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1200}{528} \csc^2 \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

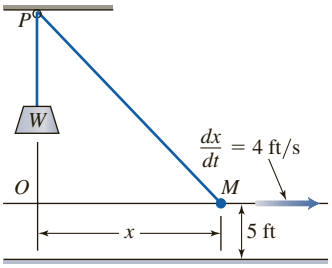
Cuando $\theta = \pi/6$, $\text{sen}^2\, \theta = 1/4$, de modo que $\csc^2 \theta = 4$. Al convertir $d\theta/dt = 2/3$ grado/s a radianes por hora, tenemos

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{180}\right)(3600) \text{ rad/hr}. \qquad 1 \text{ hr} = 3600 \text{ s}, \; 1 \text{ grado} = \pi/180 \text{ rad}$$

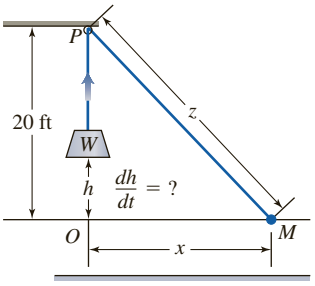
Al sustituir en la ecuación de dx/dt, se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = \left(-\frac{1200}{528}\right)(4)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right)(3600) \approx -380.$$

El signo negativo se debe a que la distancia x está disminuyendo, de modo que el avión se aproxima a la isla a una velocidad de 380 millas/hora aproximadamente, cuando es detectado por primera vez por el radar. ■



a)



b)

FIGURA 3.37 Un operador en M camina hacia la derecha tirando del peso W para elevarlo, conforme la cuerda pasa por la polea P (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 La figura 3.37*a*) muestra una cuerda que se desliza por una polea en P y sostiene un peso W en un extremo. El otro extremo se mantiene a 5 ft arriba del suelo en la mano M de un operador. Suponga que la polea se encuentra a 25 ft por encima del suelo, la cuerda mide 45 ft de largo, y el operador se aleja rápidamente de la recta vertical PW a una razón de 4 ft/s. ¿Con qué rapidez se eleva el peso cuando la mano del operador se encuentra a 21 ft de PW?

Solución Sea OM la recta horizontal de longitud igual a x ft desde un punto O, situado directamente debajo de la polea, a la mano M del operador en cualquier instante (figura 3.37). Sea h la altura del peso W arriba de O, y sea z la longitud de la cuerda de la polea P a la mano del operador. Se desea conocer dh/dt cuando $x = 21$ dada $dx/dt = 4$. Observe que la altura de P arriba de O es de 20 ft porque O está 5 ft arriba del suelo. Se supone que el ángulo en O es recto.

En cualquier instante t, se establecen las siguientes relaciones (vea la figura 3.37*b*):

$$20 - h + z = 45 \qquad \text{La longitud total de la cuerda es de 45 ft.}$$
$$20^2 + x^2 = z^2. \qquad \text{El ángulo en } O \text{ es recto.}$$

Si despejamos $z = 25 + h$ de la primera ecuación, y sustituimos en la segunda ecuación, tenemos

$$20^2 + x^2 = (25 + h)^2. \tag{1}$$

Al diferenciar ambos lados con respecto a t, se obtiene

$$2x\frac{dx}{dt} = 2(25 + h)\frac{dh}{dt},$$

y al despejar dh/dt de esta última ecuación, obtenemos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{x}{25 + h}\frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

Como conocemos dx/dt, sólo queda obtener $25 + h$ en el instante en que $x = 21$. De la ecuación (1),

$$20^2 + 21^2 = (25 + h)^2$$

de manera que

$$(25 + h)^2 = 841, \qquad \text{o} \qquad 25 + h = 29.$$

Ahora, la ecuación 2 nos da

$$\frac{dh}{dt} = \frac{21}{29} \cdot 4 = \frac{84}{29} \approx 2.9 \text{ ft/s}$$

como la razón a la cual el peso se eleva cuando $x = 21$ ft. ■

Ejercicios 3.8

1. **Área** Suponga que el radio r y el área $A = \pi r^2$ de una circunferencia son funciones diferenciables de t. Escriba una ecuación que relacione dA/dt con dr/dt.
2. **Área de la superficie** Suponga que el radio r y el área superficial $S = 4\pi r^2$ de una esfera son funciones diferenciales de t. Escriba una ecuación que relacione dS/dt con dr/dt.
3. Suponga que $y = 5x$ y $dx/dt = 2$. Obtenga dy/dt.
4. Suponga que $2x + 3y = 12$ y $dy/dt = -2$. Obtenga dx/dt.
5. Si $y = x^2$ y $dx/dt = 3$, ¿cuál es dy/dt cuando $x = -1$?
6. Si $x = y^3 - y$ y $dy/dt = 5$, ¿cuál es dx/dt cuando $y = 2$?
7. Si $x^2 + y^2 = 25$ y $dx/dt = -2$, ¿cuál es dy/dt cuando $x = 3$ y $y = -4$?
8. Si $x^2y^3 = 4/27$ y $dy/dt = 1/2$, ¿cuál es dx/dt cuando $x = 2$?
9. Si $L = \sqrt{x^2 + y^2}$, $dx/dt = -1$, y $dy/dt = 3$, obtenga dL/dt cuando $x = 5$ y $y = 12$.
10. Si $r + s^2 + v^3 = 12$, $dr/dt = 4$, y $ds/dt = -3$, obtenga dv/dt cuando $r = 3$ y $s = 1$.

11. Un cubo tiene arista x con longitud inicial de 24 m. La longitud de la arista disminuye a una razón de 5 m/min. Cuando $x = 3$ m, ¿cuál es la razón a la que cambia

a) el área superficial del cubo?

b) el volumen del cubo?

12. El área superficial de un cubo se incrementa a una razón de 72 in^2/s. ¿Con qué razón cambia el volumen del cubo cuando la longitud de su arista es $x = 3$ in?

13. Volumen El radio r y la altura h de un cilindro circular recto se relacionan con el volumen V del cilindro mediante la fórmula $V = \pi r^2 h$.

a) ¿Cómo se relaciona dV/dt con dh/dt si r es constante?

b) ¿Cómo se relaciona dV/dt con dr/dt si h es constante?

c) ¿Cómo se relaciona dV/dt con dr/dt y dh/dt si r y h no son constantes?

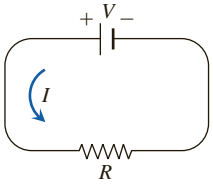
14. Volumen El radio r y la altura h de un cono circular recto se relacionan con el volumen V del cono mediante la fórmula $V = (1/3)\pi r^2 h$.

a) ¿Cómo se relaciona dV/dt con dh/dt si r es constante?

b) ¿Cómo se relaciona dV/dt con dr/dt si h es constante?

c) ¿Cómo se relaciona dV/dt con dr/dt y dh/dt si r y h no son constantes?

15. Cambio de voltaje El voltaje V (en volts), la corriente I (en amperes) y la resistencia R (en ohms) de un circuito eléctrico como el que se ilustra aquí se relacionan mediante la ecuación $V = IR$. Suponga que V aumenta a una razón de 1 volt/s, mientras que I disminuye a una razón de 1/3 amp/s. Sea t el tiempo en segundos.



a) ¿Cuál es el valor de dV/dt?

b) ¿Cuál es el valor de dI/dt?

c) ¿Qué ecuación relaciona a dR/dt con dV/dt y dI/dt?

d) Obtenga la razón a la que cambia R cuando $V = 12$ volts e $I = 2$ amperes. ¿R está aumentando o disminuyendo?

16. Potencia eléctrica La potencia P (en watts) de un circuito eléctrico se relaciona con la resistencia eléctrica R (en ohms) y la corriente I (en amperes) del circuito mediante la ecuación $P = RI^2$.

a) ¿Cómo se relacionan dP/dt, dR/dt y dI/dt si P, R e I no son constantes?

b) ¿Cómo se relaciona dR/dt con dI/dt si P es constante?

17. Distancia Sean x y y funciones diferenciables de t y sea $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distancia entre los puntos $(x, 0)$ y $(0, y)$ en el plano xy.

a) ¿Cómo se relaciona ds/dt con dx/dt si y es constante?

b) ¿Cómo se relaciona ds/dt con dx/dt y dy/dt si x y y no son constantes?

c) ¿Cómo se relaciona dx/dt con dy/dt si s es constante?

18. Diagonales Si x, y y z son las longitudes de los lados de una caja rectangular, la longitud de las diagonales de la caja es $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

a) Suponiendo que x, y y z son funciones diferenciables de t, ¿cómo se relaciona ds/dt con dx/dt, dy/dt y dz/dt?

b) ¿Cómo se relaciona ds/dt con dy/dt y dz/dt si x es constante?

c) ¿Cómo se relacionan dx/dt, dy/dt y dz/dt si s es constante?

19. Área El área A de un triángulo con lados de longitudes a y b que subtienden un ángulo θ es

$$A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta.$$

a) ¿Cómo se relaciona dA/dt con $d\theta/dt$, si a y b son constantes?

b) ¿Cómo se relaciona dA/dt con $d\theta/dt$ y da/dt si sólo b es constante?

c) ¿Cómo se relaciona dA/dt con $d\theta/dt$, da/dt y db/dt si a, b y θ no son constantes?

20. Calentamiento de una placa Cuando una placa metálica circular se calienta en un horno, su radio aumenta a razón de 0.01 cm/min. ¿A qué razón aumenta el área de la placa cuando su radio mide 50 cm?

21. Cambio de dimensiones de un rectángulo La longitud l de un rectángulo disminuye a una razón de 2 cm/s, mientras que el ancho w se incrementa a una razón de 2 cm/s. Si $l = 12$ cm y $w = 5$ cm, obtenga las razones de cambio de ***a)*** el área, ***b)*** el perímetro y ***c)*** las longitudes de las diagonales del rectángulo. ¿Cuáles de estas magnitudes aumentan y cuáles disminuyen?

22. Cambio de dimensiones de una caja rectangular Supongamos que los lados x, y y z de una caja rectangular cerrada están cambiando de acuerdo con las siguientes razones:

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ m/s}, \quad \frac{dy}{dt} = -2 \text{ m/s}, \quad \frac{dz}{dt} = 1 \text{ m/s}$$

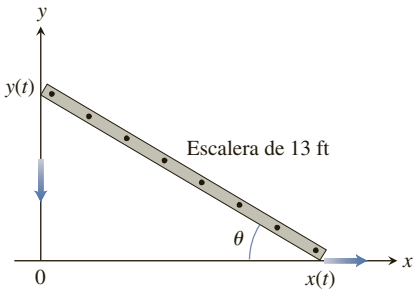
Obtenga las razones a las que cambia ***a)*** el volumen, ***b)*** el área superficial, y ***c)*** la longitud de la diagonal $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en el instante en que $x = 4$, $y = 3$, y $z = 2$.

23. Escalera que se desliza Una escalera de 13 ft está apoyada contra una casa, cuando su base comienza a deslizarse (vea la siguiente figura). En el momento en que la base se encuentra a 12 ft de la casa, la base se está moviendo a una razón de 5 ft/s.

a) ¿Qué tan rápido se desliza por la pared la parte superior de la escalera en ese momento?

b) ¿A qué razón está cambiando el área del triángulo formado por la escalera, la pared y el suelo en ese momento?

c) ¿A qué tasa está cambiando el ángulo θ entre la escalera y el suelo en ese momento?



24. Tráfico aéreo comercial Dos aviones comerciales están volando a 40,000 ft de altitud a lo largo de trayectorias en línea recta que se cortan en ángulos rectos. El avión A se aproxima al punto de intersección a una velocidad de 442 nudos (millas náuticas por hora; una milla náutica equivale a 2000 yardas). El avión B se aproxima a la intersección a 481 nudos. ¿A qué razón

está cambiando la distancia entre los aviones cuando A se encuentra a 5 millas náuticas del punto de intersección y B está a 12 millas náuticas del mismo?

25. Vuelo de una cometa Una niña vuela una cometa que se encuentra a 300 ft de altura. El viento aleja la cometa horizontalmente a razón de 25 ft/s. ¿Qué tan rápido debe soltar la cuerda la niña cuando la cometa se encuentra a 500 ft de ella?

26. Rectificación de un cilindro Los mecánicos de la Automotriz Lincoln están rectificando un cilindro de 6 in de profundidad para ajustar un nuevo pistón. La máquina que usan incrementa el radio del cilindro una milésima de pulgada cada 3 minutos. ¿Qué tan rápido aumenta el volumen del cilindro cuando el rectificado (diámetro) es de 3.800 in?

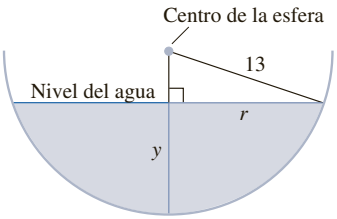
27. Crecimiento de un montón de arena Cae arena en la parte superior de un montón cónico de arena, desde una banda transportadora, a una razón de 10 m^3/min. La altura del montón siempre es de tres octavos del diámetro de la base. ¿Qué tan rápido cambian ***a)*** la altura y ***b)*** el radio cuando el montón mide 4 m de altura? Dé su respuesta en centímetros por minuto.

28. Drenado de un depósito cónico Se extrae agua de un depósito cónico de concreto (con el vértice hacia abajo), a una razón de 50 m^3/min; el depósito tiene 45 m de radio en la base y altura de 6 m.

a) ¿Qué tan rápido baja el nivel del líquido (en centímetros por minuto), cuando el agua tiene 5 m de profundidad?

b) ¿Qué tan rápido cambia el radio de la superficie del agua en ese momento? Dé su respuesta en centímetros por minuto.

29. Drenado de un depósito hemisférico Se extrae agua de un depósito hemisférico, de radio igual a 13 m, a una razón de 6 m^3/min, como se muestra en el diagrama. Conteste las siguientes preguntas, considerando que el volumen de agua en un depósito hemisférico de radio R es $V = (\pi/3)y^2(3R - y)$ cuando el agua tiene y m de profundidad.



a) ¿A qué razón cambia el nivel del agua cuando ésta tiene 8 m de profundidad?

b) ¿Cuál es el radio r de la superficie del agua cuando ésta tiene y m de profundidad?

c) ¿A qué razón cambia el radio r cuando el agua tiene 8 m de profundidad?

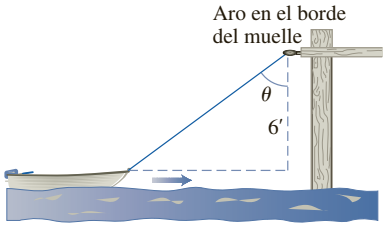
30. Gota de lluvia creciente Suponga que una gota de lluvia es una esfera perfecta y que, al condensarse, recoge humedad a una razón proporcional a su área superficial. Demuestre que, en estas circunstancias, el radio de la gota aumenta a una razón constante.

31. Radio de un globo inflado Se utiliza helio para inflar un globo esférico a una razón de 100π ft^3/min. ¿Qué tan rápido aumenta el radio del globo en el instante en que el radio mide 5 ft? ¿Qué tan rápido aumenta el área superficial?

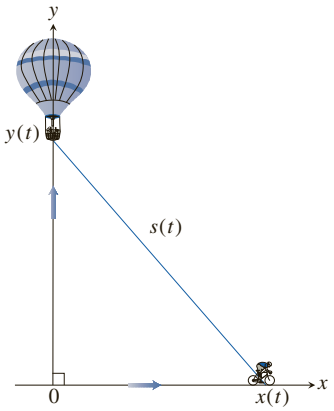
32. Arrastre de un bote Se utiliza una cuerda para arrastrar un bote hacia el muelle; un extremo de la cuerda está atado a la proa de la embarcación, y el otro a un aro ubicado en el muelle, en un punto situado a 6 ft arriba de la proa. Se tira de la cuerda a una razón de 2 ft/s.

a) ¿Qué tan rápido se aproxima el bote al muelle si la cuerda mide 10 ft?

b) ¿A qué razón cambia el ángulo θ en ese momento (vea la figura)?



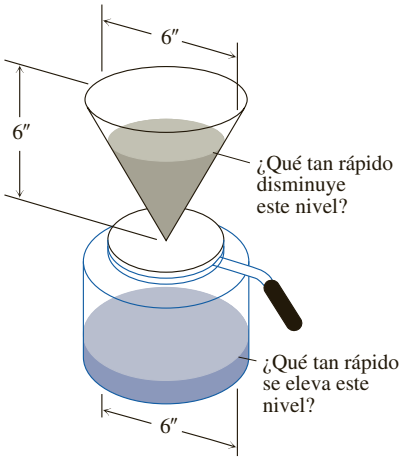
33. Un globo y una bicicleta Un globo se eleva verticalmente desde una superficie plana, a una razón constante de 1 ft/s. Justo cuando el globo está a 65 ft de esa superficie, una bicicleta que se desplaza en línea recta a una velocidad constante de 17 ft/s pasa debajo de él. ¿Qué tan rápido aumenta la distancia $s(t)$ entre la bicicleta y el globo 3 segundos después?



34. Preparación de café El café se vierte a través de un filtro cónico a una cafetera cilíndrica, a una razón de 10 in^3/min.

a) ¿Qué tan rápido sube el nivel de líquido en la cafetera cuando el café del cono tiene 5 in de profundidad?

b) ¿Qué tan rápido disminuye el nivel del cono en ese momento?



35. Bombeo cardiaco A finales de la década de 1860, Adolf Fick, profesor de fisiología de la Facultad de Medicina de Würzberg, Alemania, desarrolló uno de los métodos que se emplean actualmente para medir la cantidad de sangre que bombea el corazón por minuto. El bombeo cardiaco que realiza su organismo al momento de leer esta frase es probablemente de unos 7 L/min. En reposo, el bombeo puede ser un poco menor: 6 L/min aproximadamente. Si usted fuera un corredor de maratón, su bombeo cardiaco durante la competencia podría llegar a 30 L/min.

El bombeo cardiaco se calcula mediante la fórmula

$$y = \frac{Q}{D},$$

donde Q representa los milímetros de CO_2 que se exhalan en un minuto y D es la diferencia entre la concentración de CO_2 (mL/L) de la sangre bombeada a los pulmones y la concentración de CO_2 de la sangre que regresa de los pulmones. Con $Q = 233$ mL/min y $D = 97 - 56 = 41$ mL/L,

$$y = \frac{233 \text{ ml/min}}{41 \text{ ml/L}} \approx 5.68 \text{ L/min},$$

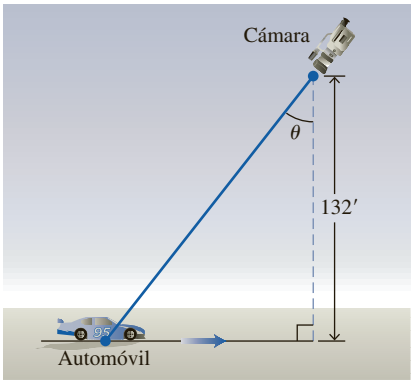
bastante cerca de los 6 L/min que casi todas las personas tienen en condición basal (es decir, en reposo). (Datos por cortesía del Dr. J. Kenneth Herd, del Quillan College of Medicine, East Tennessee State University).

Suponga que cuando $Q = 233$ y $D = 41$, sabemos también que D está decreciendo a una razón de 2 unidades por minuto, pero Q permanece sin cambios. ¿Qué está sucediendo con el bombeo cardiaco?

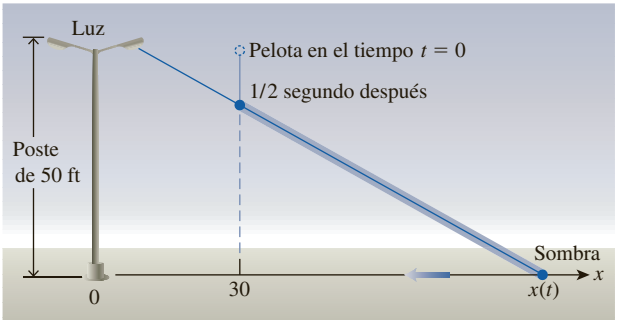
36. Movimiento a lo largo de una parábola Una partícula se desplaza a lo largo de la parábola $y = x^2$ en el primer cuadrante, de manera que su coordenada x (medida en metros) aumenta a una razón constante de 10 m/s. ¿Qué tan rápido cambia el ángulo de inclinación θ de la recta que une la partícula con el origen cuando $x = 3$ m?

37. Movimiento en el plano Las coordenadas de una partícula en el plano métrico xy son funciones diferenciables del tiempo t con $dx/dt = -1$ m/s y $dy/dt = -5$ m/s. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre la partícula y el origen cuando pasa por el punto (5, 12)?

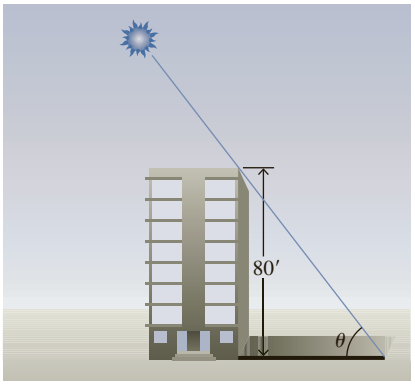
38. Videograbación de un automóvil en movimiento Imagine que está videograbando una carrera de automóviles desde una tribuna ubicada a 132 ft de la pista; su lente está siguiendo a un automóvil que se desplaza a 180 millas/hora (264 ft/s), como se muestra en la figura. ¿Qué tan rápido cambiará el ángulo θ de su cámara cuando el automóvil esté justo enfrente de usted? ¿Qué tan rápido cambiará medio segundo después?



39. Movimiento de una sombra Una luz brilla desde la parte superior de un poste de 50 ft de altura. Se lanza una pelota a la misma altura desde un punto ubicado a 30 ft de distancia del poste. (Vea la figura). ¿Qué tan rápido se mueve la sombra de la pelota a lo largo del suelo 1/2 segundo después? (Suponga que la pelota cae una distancia $s = 16t^2$ ft en t segundos).



40. Sombra de un edificio En la mañana, a la hora en que el sol pasa exactamente por encima de un edificio, la sombra de este último, que mide 80 ft de altura, es de 60 ft de largo al nivel del suelo. En ese momento, el ángulo θ que el sol forma con el suelo aumenta a una razón de 0.27°/min. ¿A qué razón está decreciendo la sombra? (Recuerde usar radianes. Exprese su respuesta en pulgadas por minuto, redondeando a la décima más cercana).



41. Capa de hielo que se derrite Una bola de hierro esférica, con un diámetro de 8 in, se cubre con una capa de hielo de espesor uniforme. Si el hielo se derrite a una razón de 10 in^3/min, ¿qué tan rápido disminuye el grosor de la capa de hielo cuando tiene 2 in de espesor? ¿Qué tan rápido decrece el área superficial exterior del hielo?

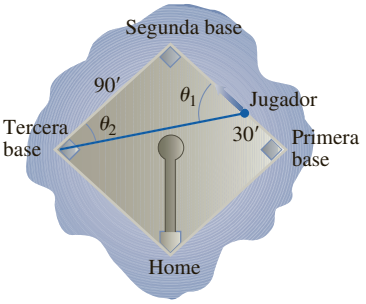
42. Patrulla de caminos Un avión de la policía vuela a 3 millas de altura, con una velocidad constante de 120 millas/hora. El piloto ve venir un automóvil y, utilizando un radar, determina que en el instante en que la distancia entre el automóvil y el avión es de 5 millas, ésta decrece a razón de 160 millas/hora. Determine la rapidez a la que se desplaza el automóvil por la carretera.

43. Jugadores de béisbol Un diamante de béisbol es un cuadrado de 90 ft por lado. Un jugador corre de la primera base a la segunda base a una razón de 16 ft/s.

a) ¿A qué razón cambia la distancia entre el jugador y la tercera base cuando aquél se encuentra a 30 ft de la primera base?

b) ¿A qué razón cambian los ángulos θ_1 y θ_2 (vea la figura) en ese instante?

c) El jugador se desliza hacia la segunda base a una razón de 15 ft/s. ¿A qué razón cambian los ángulos θ_1 y θ_2 cuando el jugador toca la base?



44. Barcos Dos barcos navegan en línea recta desde un punto O a lo largo de rutas que forman un ángulo de 120°. El barco A navega a 14 nudos (millas náuticas por hora; una milla náutica equivale a 2000 yardas). El barco B se desplaza a 21 nudos. ¿Qué tan rápido se alejan los buques entre sí cuando $OA = 5$ y $OB = 3$ millas náuticas?

45. Movimiento de las manecillas de un reloj ¿A qué razón cambia el ángulo entre el minutero y el horario de un reloj a las 4 en punto de la tarde?

46. Derrame de petróleo Una explosión en una plataforma petrolera ubicada en aguas del golfo provoca una mancha de petróleo elíptica que se extiende en la superficie desde la plataforma. La mancha tiene un grosor constante de 9 in. Después de varios días, cuando el eje mayor de la mancha (es decir, el largo) mide 2 millas, y el eje menor (el ancho) mide 3/4 de milla, se determinó que su longitud aumentaba a una razón de 30 ft/hr y su ancho aumentaba a una razón de 10 ft/hr. ¿A qué razón (en ft^3/h) fluye el petróleo desde la plataforma en ese instante?

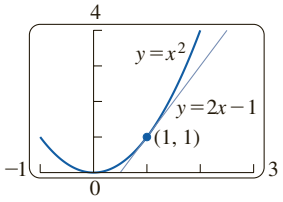
3.9 Linealización y diferenciales

En ocasiones podemos aproximar funciones complicadas mediante otras más sencillas que brindan la precisión que queremos para aplicaciones específicas, además de que son más fáciles de trabajar. Las funciones de aproximación que se analizan en esta sección se llaman *linealizaciones*, y se basan en las rectas tangentes. En el capítulo 10 se analizarán otras funciones de aproximación, como las funciones polinomiales.

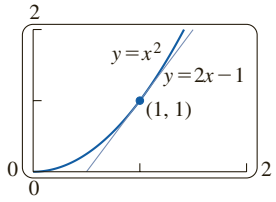
Introduciremos nuevas variables dx y dy, llamadas *diferenciales*, y las definiremos de manera que la notación de Leibniz para la derivada dy/dx sea en verdad un cociente. Usaremos dy para estimar el error en mediciones, lo cual permitirá una demostración precisa de la regla de la cadena (sección 3.6).

Linealización

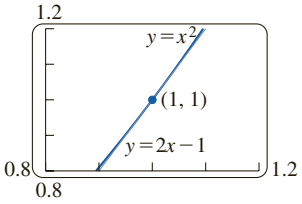
Como se observa en la figura 3.38, la tangente a la curva $y = x^2$ queda muy cerca de ésta en la cercanía del punto de tangencia. Para un pequeño intervalo a uno y otro lados del punto, los valores de y a lo largo de la recta tangente son una buena aproximación de los valores y



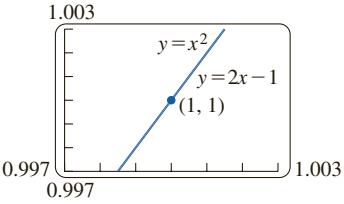
$y = x^2$ y su tangente $y = 2x - 1$ en (1, 1).



Tangente y curva muy juntas cerca de (1, 1).



Tangente y curva muy juntas dentro de todo el intervalo x que se muestra.



Tangente y curva todavía más juntas. La pantalla de la computadora no permite distinguir la tangente de la curva en este intervalo de x.

FIGURA 3.38 Cuanto más amplificamos la gráfica de una función cerca de un punto donde la función es diferenciable, la gráfica se vuelve más plana y se parece más a su tangente.

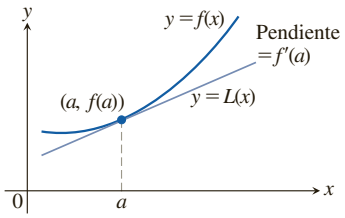


FIGURA 3.39 La tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = a$ es la recta $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

de la curva. Para observar este fenómeno, realice un acercamiento de ambas gráficas en el punto de tangencia, o busque en tablas de valores la diferencia entre $f(x)$ y su recta tangente cerca de la coordenada x del punto de tangencia. El fenómeno es válido no sólo en el caso de parábolas; toda curva diferenciable se comporta localmente como su recta tangente.

En general, la tangente a $y = f(x)$ en $x = a$, donde f es diferenciable (figura 3.39), pasa por el punto $(a, f(a))$, de manera que su ecuación punto-pendiente es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Por lo tanto, esta recta tangente es la gráfica de la función lineal

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Mientras esta recta permanezca cerca de la gráfica de f, conforme nos movemos del punto de tangencia, $L(x)$ da una buena aproximación de $f(x)$.

DEFINICIONES Si f es diferenciable en $x = a$, entonces, la función que aproxima

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

es la **linealización** de f en a. La aproximación

$$f(x) \approx L(x)$$

de f por L es la **aproximación lineal estándar** de f en a. El punto $x = a$ es el **centro** de la aproximación.

EJEMPLO 1 Obtenga la linealización de $f(x) = \sqrt{1 + x}$ en $x = 0$ (figura 3.40).

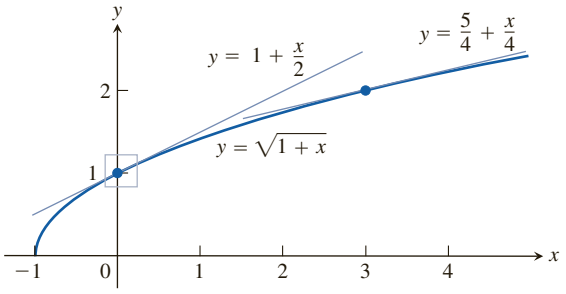


FIGURA 3.40 Gráfica de $y = \sqrt{1 + x}$ y sus linealizaciones en $x = 0$ y $x = 3$. La figura 3.41 muestra una vista amplificada de una ventana pequeña alrededor de 1 en el eje x.

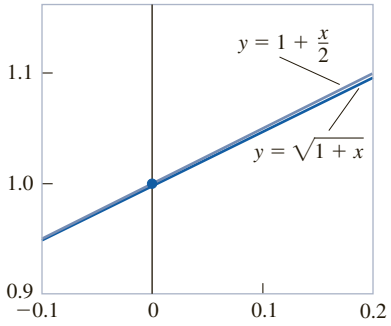


FIGURA 3.41 Vista amplificada de la ventana de la figura 3.40.

Solución Como

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + x)^{-1/2},$$

tenemos que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1/2$, por lo que la linealización es

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}(x - 0) = 1 + \frac{x}{2}.$$

Vea la figura 3.41. ■

La siguiente tabla muestra qué tan precisa es la aproximación $\sqrt{1 + x} \approx 1 + (x/2)$ del ejemplo 1 para algunos valores de x, cerca de 0. Conforme nos alejamos de cero, perdemos

precisión. Por ejemplo, para $x = 2$, la linealización da 2 como la aproximación de $\sqrt{3}$, que ni siquiera es una aproximación exacta a una cifra decimal.

Aproximación	Valor real	$\lvert$Valor real − aproximación$\rvert$
$\sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.10$	1.095445	$0.004555 < 10^{-2}$
$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$	1.024695	$0.000305 < 10^{-3}$
$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.00250$	1.002497	$0.000003 < 10^{-5}$

No se deje engañar por los cálculos anteriores, pensando que cualquier cosa que hagamos con una linealización se logra mejor con una calculadora. En la práctica, nunca usaremos linealización para obtener una raíz cuadrada. La utilidad de la linealización radica en su capacidad para reemplazar una fórmula complicada por una más sencilla en todo un intervalo de valores. Si tenemos que trabajar con $\sqrt{1 + x}$ para x cercanas a cero y podemos tolerar el pequeño error implicado, podemos trabajar en vez de ello con $1 + (x/2)$. Desde luego, es preciso que conozcamos la magnitud del error. Hablaremos más de la estimación del error en el capítulo 10.

Una aproximación lineal normalmente pierde exactitud lejos de su centro. Como sugiere la figura 3.40, la aproximación $\sqrt{1 + x} \approx 1 + (x/2)$ probablemente será demasiado burda para ser útil cerca de $x = 3$. Ahí, necesitamos una linealización en $x = 3$.

EJEMPLO 2 Obtenga la linealización de $f(x) = \sqrt{1 + x}$ en $x = 3$.

Solución Evaluamos la ecuación definiendo $L(x)$ en $a = 3$. Con

$$f(3) = 2, \qquad f'(3) = \frac{1}{2}(1 + x)^{-1/2}\Big|_{x=3} = \frac{1}{4},$$

tenemos

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}.$$

■

En $x = 3.2$, la linealización del ejemplo 2 da

$$\sqrt{1 + x} = \sqrt{1 + 3.2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3.2}{4} = 1.250 + 0.800 = 2.050,$$

lo cual difiere del valor real $\sqrt{4.2} \approx 2.04939$ en menos de una milésima. La linealización del ejemplo 1 da

$$\sqrt{1 + x} = \sqrt{1 + 3.2} \approx 1 + \frac{3.2}{2} = 1 + 1.6 = 2.6,$$

un resultado que se aleja en más del 25%.

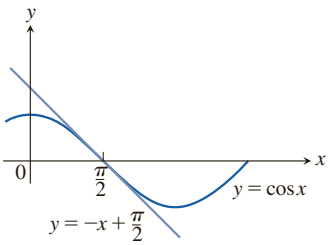


FIGURA 3.42 Gráfica de $f(x) = \cos x$ y su linealización en $x = \pi/2$. Cerca de $x = \pi/2$, $\cos x \approx -x + (\pi/2)$ (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Obtenga la linealización de $f(x) = \cos x$ en $x = \pi/2$ (figura 3.42).

Solución Como $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, $f'(x) = -\text{sen } x$, y $f'(\pi/2) = -\text{sen}(\pi/2) = -1$, encontramos que la linealización en $a = \pi/2$ es

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) \\ &= 0 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -x + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

■

Una aproximación lineal importante para raíces y potencias es

$$(1 + x)^k \approx 1 + kx \qquad (x \text{ cerca de } 0; \text{ cualquier número } k)$$

(Ejercicio 15). Esta aproximación, buena para valores de x lo suficientemente cercanos a cero, tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, cuando x es pequeña,

$$\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \qquad k = 1/2$$

$$\frac{1}{1 - x} = (1 - x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1 + x \qquad k = -1;\ \text{reemplace } x \text{ por } -x$$

$$\sqrt[3]{1 + 5x^4} = (1 + 5x^4)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}(5x^4) = 1 + \frac{5}{3}x^4 \qquad k = 1/3;\ \text{reemplace } x \text{ por } 5x^4.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-1/2} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 \qquad k = -1/2;\ \text{reemplace } x \text{ por } -x^2.$$

Aproximación cerca de $x = 0$

$$\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{1 - x} \approx 1 + x$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \approx 1 + \frac{x^2}{2}$$

Diferenciales

Algunas veces utilizamos la notación de Leibniz, dy/dx, para representar la derivada de y con respecto a x. A pesar de su apariencia, ésta no es una fracción. A continuación introduciremos dos variables nuevas, dx y dy, con la propiedad de que si su razón existe, ésta será igual a la derivada.

DEFINICIÓN Sea $y = f(x)$ una función diferenciable. La **diferencial *dx*** es una variable independiente. La **diferencial *dy*** es

$$dy = f'(x)\,dx.$$

A diferencia de la variable independiente dx, la variable dy siempre es una variable dependiente. Depende tanto de x como de dx. Si se otorga un valor específico a dx, y x es un número particular en el dominio de la función f, entonces estos valores determinan el valor numérico de dy. A menudo la variable dx se representa con Δx, el cambio en x.

EJEMPLO 4

a) Obtenga dy si $y = x^5 + 37x$.

b) Obtenga el valor de dy cuando $x = 1$ y $dx = 0.2$.

Solución

a) $dy = (5x^4 + 37)\,dx$

b) Al sustituir $x = 1$ y $dx = 0.2$ en la expresión de dy, tenemos

$$dy = (5 \cdot 1^4 + 37)0.2 = 8.4.$$ ■

En la figura 3.43 se muestra el significado geométrico de las diferenciales. Sean $x = a$ y $dx = \Delta x$. El cambio correspondiente en $y = f(x)$ es

$$\Delta y = f(a + dx) - f(a).$$

El cambio correspondiente en la recta tangente L es

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(a + dx) - L(a)\\ &= \underbrace{f(a) + f'(a)[(a + dx) - a]}_{L(a\,+\,dx)} - \underbrace{f(a)}_{L(a)}\\ &= f'(a)\,dx.\end{aligned}$$

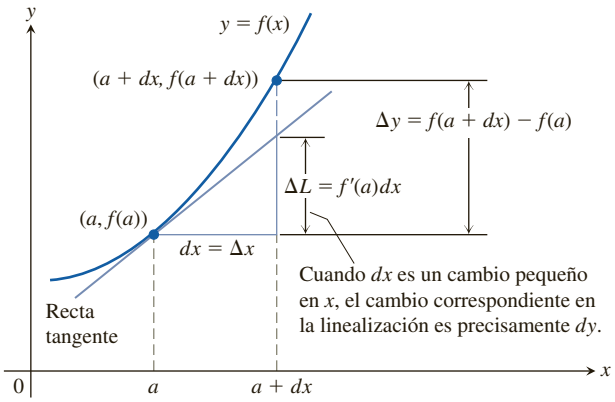


FIGURA 3.43 Geométricamente, la diferencial dy es el cambio ΔL en la linealización de f cuando $x = a$ cambia en una cantidad $dx = \Delta x$.

Es decir, el cambio en la linealización de f es precisamente el valor de la diferencial dy cuando $x = a$ y $dx = \Delta x$. Por lo tanto, dy representa la magnitud que la recta tangente aumenta o disminuye cuando x cambia en una cantidad $dx = \Delta x$.

Si $dx \neq 0$, entonces, el cociente de la diferencial dy entre la diferencial dx es igual a la derivada $f'(x)$, ya que

$$dy \div dx = \frac{f'(x)\,dx}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Algunas veces se escribe

$$df = f'(x)\,dx$$

en lugar de $dy = f'(x)\,dx$, y llamamos a df la **diferencial de f**. Por ejemplo, si $f(x) = 3x^2 - 6$, entonces,

$$df = d(3x^2 - 6) = 6x\,dx.$$

Toda fórmula de diferenciación como

$$\frac{d(u + v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \qquad \text{o} \qquad \frac{d(\operatorname{sen} u)}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

tiene una forma diferencial correspondiente como

$$d(u + v) = du + dv \qquad \text{o} \qquad d(\operatorname{sen} u) = \cos u\,du.$$

EJEMPLO 5 Podemos usar la regla de la cadena y otras reglas de diferenciación para determinar diferenciales de las funciones.

a) $d(\tan 2x) = \sec^2(2x)\,d(2x) = 2\sec^2 2x\,dx$

b) $d\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \dfrac{(x+1)\,dx - x\,d(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x\,dx + dx - x\,dx}{(x+1)^2} = \dfrac{dx}{(x+1)^2}$ ■

Estimación con diferenciales

Suponga que conocemos el valor de una función diferenciable $f(x)$ en el punto a y deseamos estimar cuánto cambiará este valor si nos movemos a un punto cercano $a + dx$. Si $dx = \Delta x$ es pequeño, entonces, en la figura 3.43 se puede ver que Δy es aproximadamente igual a dy. Como

$$f(a + dx) = f(a) + \Delta y, \qquad \Delta x = dx$$

la aproximación diferencial nos da

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

cuando $dx = \Delta x$. Por lo tanto, la aproximación $\Delta y \approx dy$ se puede usar para estimar $f(a + dx)$ cuando se conoce $f(a)$, dx es pequeño y $dy = f'(a)\,dx$.

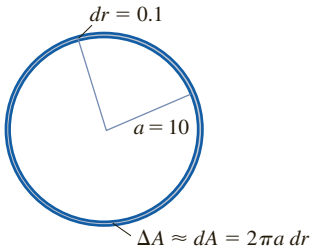


FIGURA 3.44 Cuando dr es pequeña en comparación con a, la diferencial dA brinda la estimación $A(a + dr) = \pi a^2 + dA$ (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 El radio r de un círculo aumenta de $a = 10$ m a 10.1 m (figura 3.44). Emplee dA para estimar el incremento en el área A del círculo. Estime el área del círculo agrandado y compare su estimación con el área real obtenida con un cálculo directo.

Solución Como $A = \pi r^2$, el aumento estimado es

$$dA = A'(a)\,dr = 2\pi a\,dr = 2\pi(10)(0.1) = 2\pi \text{ m}^2.$$

Por lo tanto, como $A(r + \Delta r) \approx A(r) + dA$, tenemos

$$\begin{aligned} A(10 + 0.1) &\approx A(10) + 2\pi \\ &= \pi(10)^2 + 2\pi = 102\pi. \end{aligned}$$

El área de un círculo de radio 10.1 m es aproximadamente 102π m^2.

El área real es

$$\begin{aligned} A(10.1) &= \pi(10.1)^2 \\ &= 102.01\pi \text{ m}^2. \end{aligned}$$

El error en nuestra estimación es de 0.01π m^2, que es la diferencia $\Delta A - dA$. ■

EJEMPLO 7 Use diferenciales para estimar

a) $7.97^{1/3}$

b) $\text{sen}(\pi/6 + 0.01)$.

Solución

a) La diferencial asociada con la función raíz cúbica $y = x^{1/3}$ es

$$dy = \frac{1}{3x^{2/3}}dx.$$

Consideremos $a = 8$, el número más cercano a 7.97 donde fácilmente se puede calcular $f(a)$ y $f'(a)$. Para hacer que $a + dx = 7.97$, elegimos $dx = -0.03$. Al aproximar con la diferencial, se obtiene

$$\begin{aligned} f(7.97) = f(a + dx) &\approx f(a) + dy \\ &= 8^{1/3} + \frac{1}{3(8)^{2/3}}(-0.03) \\ &= 2 + \frac{1}{12}(-0.03) = 1.9975 \end{aligned}$$

Esto da una aproximación al valor real de $7.97^{1/3}$, que es 1.997497 con 6 decimales.

b) La diferencial asociada con $y = \text{sen } x$ es

$$dy = \cos x\,dx.$$

Para estimar sen $(\pi/6 + 0.01)$, establecemos $a = \pi/6$ y $dx = 0.01$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(\pi/6 + 0.01) = f(a + dx) &\approx f(a) + dy \\ &= \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \left(\cos\frac{\pi}{6}\right)(0.01) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(0.01) \approx 0.5087 \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(a + dx) \approx \operatorname{sen} a + (\cos a)\,dx}$$

Para establecer una comparación, el valor real de $(\pi/6 + 0.01)$ con 6 decimales es 0.508635. ■

El método del inciso *b*) en el ejemplo 7 se usa en los algoritmos de algunas computadoras y calculadoras para obtener valores de las funciones trigonométricas. Los algoritmos almacenan una tabla grande de valores del seno y coseno entre 0 y $\pi/4$. Los valores entre estos datos almacenados se calculan utilizando diferenciales como en el ejemplo 7*b*). Los valores afuera de $[0, \pi/4]$ se calculan a partir de datos contenidos en ese intervalo usando identidades trigonométricas.

Error en la aproximación diferencial

Sea $f(x)$ diferenciable en $x = a$, y supongamos que $dx = \Delta x$ es un incremento de x. Tenemos dos maneras de describir el cambio de f cuando x cambia de a a $a + \Delta x$:

$$\begin{aligned} &\text{El cambio real:} && \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) \\ &\text{El estimado diferencial:} && df = f'(a)\,\Delta x. \end{aligned}$$

¿Qué tan bien aproxima df a Δf?

El error de aproximación se mide restando df de Δf:

$$\begin{aligned} \text{Error de aproximación} &= \Delta f - df \\ &= \Delta f - f'(a)\Delta x \\ &= \underbrace{f(a + \Delta x) - f(a)}_{\Delta f} - f'(a)\Delta x \\ &= \underbrace{\left(\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a)\right)}_{\text{Llamemos a esta parte } \epsilon.} \cdot \Delta x \\ &= \epsilon \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

Cuando $\Delta x \to 0$, el cociente diferencial

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

se aproxima a $f'(a)$ [recuerde la definición de $f'(a)$], de manera que la cantidad entre paréntesis se convierte en un número muy pequeño (por eso lo llamamos ϵ). De hecho, $\epsilon \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$. Cuando Δx es pequeño, el error de aproximación $\epsilon\,\Delta x$ es aún más pequeño.

$$\underbrace{\Delta f}_{\substack{\text{cambio} \\ \text{real}}} = \underbrace{f'(a)\Delta x}_{\substack{\text{cambio} \\ \text{estimado}}} + \underbrace{\epsilon\,\Delta x}_{\text{error}}$$

Aunque no conocemos la magnitud exacta del error, sabemos que es el producto $\epsilon \cdot \Delta x$ de dos cantidades pequeñas que se aproximan a cero cuando $\Delta x \to 0$. En muchas funciones comunes, siempre que Δx es pequeño, el error es todavía menor.

Cambio en $y = f(x)$ cerca de $x = a$
Si $y = f(x)$ es diferenciable en $x = a$, y x cambia de a a $a + \Delta x$, el cambio Δy en f se obtiene mediante la ecuación

$$\Delta y = f'(a)\,\Delta x + \epsilon\,\Delta x \tag{1}$$

en la cual $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

En el ejemplo 6 tenemos que

$$\Delta A = \pi(10.1)^2 - \pi(10)^2 = (102.01 - 100)\pi = (\underbrace{2\pi}_{dA} + \underbrace{0.01\pi}_{\text{error}})\ \text{m}^2$$

de modo que el error de aproximación es $\Delta A - dA = \epsilon\,\Delta r = 0.01\pi$ y $\epsilon = 0.01\pi/\Delta r = 0.01\pi/0.1 = 0.1\pi$ m.

Demostración de la regla de la cadena

La ecuación (1) nos permite demostrar correctamente la regla de la cadena. Nuestro objetivo es demostrar que si $f(u)$ es una función diferenciable de u, y $u = g(x)$ es una función diferenciable de x, entonces, la composición $y = f(g(x))$ es una función diferenciable de x. En vista de que una función es diferenciable si y sólo si tiene una derivada en cada punto de su dominio, debemos demostrar que siempre que g es diferenciable en x_0 y f es diferenciable en $g(x_0)$, entonces, la composición es diferenciable en x_0 y la derivada de la composición satisface la ecuación

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Sea Δx un incremento en x y Δu y Δy los incrementos correspondientes en u y y. Al aplicar la ecuación 1, tenemos

$$\Delta u = g'(x_0)\Delta x + \epsilon_1\,\Delta x = (g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x,$$

donde $\epsilon_1 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. De forma análoga,

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \epsilon_2\,\Delta u = (f'(u_0) + \epsilon_2)\Delta u,$$

donde $\epsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta u \to 0$. Observe también que $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. Al combinar las ecuaciones de Δu y Δy, tenemos

$$\Delta y = (f'(u_0) + \epsilon_2)(g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x,$$

por lo que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) + \epsilon_2 g'(x_0) + f'(u_0)\epsilon_1 + \epsilon_2\epsilon_1.$$

Como ϵ_1 y ϵ_2 tienden a cero cuando Δx tiende a cero, los últimos tres términos de la derecha desaparecen en el límite, dejando

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

■

Sensibilidad al cambio

La ecuación $df = f'(x)\,dx$ indica qué tan *sensible* es el valor de f con respecto a un cambio en los valores de x. Cuanto mayor es el valor de f' en x, mayor será el efecto del cambio dado dx. Cuando nos movemos de a hacia un punto cercano $a + dx$, podemos describir el cambio en f de tres maneras:

	Real	Estimado
Cambio absoluto	$\Delta f = f(a + dx) - f(a)$	$df = f'(a)\,dx$
Cambio relativo	$\dfrac{\Delta f}{f(a)}$	$\dfrac{df}{f(a)}$
Cambio porcentual	$\dfrac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\dfrac{df}{f(a)} \times 100$

EJEMPLO 8 Se desea calcular la profundidad de un pozo a partir de la ecuación $s = 16t^2$, midiendo el tiempo que tarda una piedra pesada en golpear el agua en el fondo del pozo. ¿Qué tan sensibles serán sus cálculos si se comete un error de 0.1 s en la medida del tiempo?

Solución El tamaño de ds en la ecuación

$$ds = 32t\,dt$$

depende de qué tan grande sea t. Si $t = 2$ s, el cambio ocasionado por $dt = 0.1$ es aproximadamente

$$ds = 32(2)(0.1) = 6.4 \text{ ft.}$$

Tres segundos después, en $t = 5$ s, el cambio provocado por el mismo dt es

$$ds = 32(5)(0.1) = 16 \text{ ft.}$$

Para un error fijo en la medición del tiempo, el error al usar ds para estimar la profundidad es mayor cuando pasa más tiempo antes de que la piedra choque con el agua. Es decir, la estimación es más sensible al error en el caso de valores grandes de t. ■

EJEMPLO 9 La segunda ley de Newton

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} = ma,$$

está enunciada con el supuesto de que la masa es constante; sin embargo, sabemos que esto no es estrictamente cierto, porque la masa de un objeto se incrementa con la velocidad. En la fórmula corregida de Einstein, la masa tiene el valor

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

donde la "masa en reposo" m_0 representa la masa de un objeto que no se mueve y c es la rapidez de la luz, que tiene un valor de 300,000 km/s. Use la aproximación

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 \tag{2}$$

para estimar el incremento Δm en la masa que resulta del incremento en velocidad v.

Solución Cuando v es muy pequeña en comparación con c, v^2/c^2 está cerca de cero y es seguro utilizar la aproximación

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad \text{Ec. (2) con } x = \frac{v}{c}$$

para obtener

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx m_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

o

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right). \tag{3}$$

La ecuación (3) expresa el aumento de masa que resulta del incremento en velocidad v. ■

Conversión de masa en energía

La ecuación (3) obtenida en el ejemplo 9 tiene una interpretación importante. En la física newtoniana, $(1/2)m_0v^2$ es la energía cinética (EC) de un cuerpo, y si rescribimos la ecuación 3 en la forma

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0v^2,$$

vemos que

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{2}m_0v^2 - \frac{1}{2}m_0(0)^2 = \Delta(\text{EC}),$$

o

$$(\Delta m)c^2 \approx \Delta(\text{EC}).$$

De esta manera, el cambio en la energía cinética Δ(EC) al ir de la velocidad 0 a la velocidad v es aproximadamente igual a $(\Delta m)c^2$, es decir, el cambio en la masa multiplicado por el cuadrado de la rapidez de la luz. Usando $c \approx 3 \times 10^8$ m/s, vemos que un cambio pequeño en la masa puede generar un cambio grande en la energía.

Ejercicios 3.9

Obtención de linealizaciones

En los ejercicios 1 a 5, obtenga la linealización $L(x)$ de $f(x)$ en $x = a$.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad a = 2$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}, \quad a = -4$
3. $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad a = 1$
4. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = -8$
5. $f(x) = \tan x, \quad a = \pi$
6. **Aproximación lineal común en $x = 0$** Obtenga las linealizaciones de las siguientes funciones en $x = 0$.
   a) sen x ***b)*** cos x ***c)*** tan x

Linealización por aproximación

En los ejercicios 7 a 12, obtenga una linealización en un entero elegido adecuadamente cerca de a, en el cual la función dada y su derivada sean fáciles de evaluar.

7. $f(x) = x^2 + 2x, \quad a = 0.1$
8. $f(x) = x^{-1}, \quad a = 0.9$
9. $f(x) = 2x^2 + 3x - 3, \quad a = -0.9$
10. $f(x) = 1 + x, \quad a = 8.1$
11. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = 8.5$
12. $f(x) = \frac{x}{x + 1}, \quad a = 1.3$
13. Demuestre que la linealización de $f(x) = (1 + x)^k$ en $x = 0$ es $L(x) = 1 + kx$.
14. Use la aproximación lineal $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ con la finalidad de obtener una aproximación a la función $f(x)$ para valores de x cercanos a cero.
    a) $f(x) = (1 - x)^6$ ***b)*** $f(x) = \frac{2}{1 - x}$
    c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x}}$ ***d)*** $f(x) = \sqrt{2 + x^2}$
    e) $f(x) = (4 + 3x)^{1/3}$ ***f)*** $f(x) = \sqrt[3]{\left(1 - \frac{x}{2 + x}\right)^2}$
15. **Más rápido que una calculadora** Use la aproximación $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ para estimar lo siguiente.
    a) $(1.0002)^{50}$ ***b)*** $\sqrt[3]{1.009}$
16. Obtenga la linealización de $f(x) = \sqrt{x + 1} + \text{sen } x$ en $x = 0$. ¿Cómo se relaciona con las linealizaciones individuales de $\sqrt{x + 1}$ y sen x en $x = 0$?

Derivadas en forma diferencial

En los ejercicios 17 a 28, obtenga dy.

17. $y = x^3 - 3\sqrt{x}$

18. $y = x\sqrt{1 - x^2}$

19. $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

20. $y = \dfrac{2\sqrt{x}}{3(1 + \sqrt{x})}$

21. $2y^{3/2} + xy - x = 0$

22. $xy^2 - 4x^{3/2} - y = 0$

23. $y = \operatorname{sen}(5\sqrt{x})$

24. $y = \cos(x^2)$

25. $y = 4\tan(x^3/3)$

26. $y = \sec(x^2 - 1)$

27. $y = 3\csc\left(1 - 2\sqrt{x}\right)$

28. $y = 2\cot\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

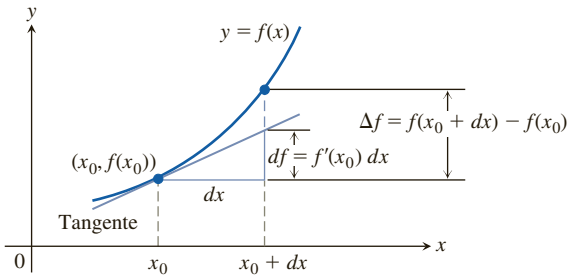
Error de aproximación

En los ejercicios 29 a 34, cada función $f(x)$ cambia su valor cuando x cambia de x_0 a $x_0 + dx$. Obtenga

a) el cambio $\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$;

b) el valor de la estimación $df = f'(x_0)\,dx$; y

c) el error de aproximación $|\Delta f - df|$.



29. $f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 1, \quad dx = 0.1$

30. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -1, \quad dx = 0.1$

31. $f(x) = x^3 - x, \quad x_0 = 1, \quad dx = 0.1$

32. $f(x) = x^4, \quad x_0 = 1, \quad dx = 0.1$

33. $f(x) = x^{-1}, \quad x_0 = 0.5, \quad dx = 0.1$

34. $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad x_0 = 2, \quad dx = 0.1$

Estimaciones diferenciales del cambio

En los ejercicios 35 a 40, escriba una fórmula diferencial que estime el cambio dado en el volumen o en el área superficial.

35. El cambio en el volumen $V = (4/3)\pi r^3$ de una esfera cuando el radio cambia de r_0 a $r_0 + dr$.

36. El cambio en el volumen $V = x^3$ de un cubo cuando la longitud del lado cambia de x_0 a $x_0 + dx$.

37. El cambio en el área superficial $S = 6x^2$ de un cubo cuando la longitud del lado cambia de x_0 a $x_0 + dx$.

38. El cambio en el área de la superficie lateral $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ de un cono circular recto cuando el radio cambia de r_0 a $r_0 + dr$, mientras la altura permanece igual.

39. El cambio en el volumen $V = \pi r^2 h$ de un cilindro circular recto cuando el radio cambia de r_0 a $r_0 + dr$, mientras la altura permanece igual.

40. El cambio en el área superficial lateral $S = 2\pi rh$ de un cilindro circular recto cuando la altura cambia de h_0 a $h_0 + dh$, mientras el radio permanece igual.

Aplicaciones

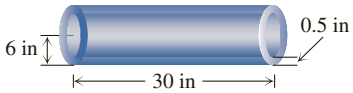
41. El radio de un círculo aumenta de 2.00 a 2.02 m.

a) Estime el cambio resultante del área.

b) Exprese la estimación como un porcentaje del área del círculo original.

42. El diámetro de un árbol era de 10 pulgadas. Durante el año siguiente, la circunferencia aumentó 2 pulgadas. ¿Aproximadamente cuánto aumentó el diámetro del árbol? ¿Cuánto se incrementó el área de la sección transversal?

43. Estimación de volumen Estime el volumen de material en un casquillo cilíndrico con longitud de 30 in, radio de 6 in y espesor de 0.5 in.



44. Estimación de la altura de un edificio Un topógrafo, ubicado a 30 ft de la base de un edificio, mide el ángulo de elevación a la parte superior del edificio y concluye que es de 75°. ¿Con qué exactitud debe medirse el ángulo para que el porcentaje de error al estimar la altura del edificio sea menor que un 4%?

45. Se mide el radio r de un círculo, con un error de, a lo más, un 2%. ¿Cuál es el porcentaje máximo de error correspondiente en el cálculo de

a) el perímetro del círculo?

b) el área del círculo?

46. Se mide la arista x de un cubo, con un error del 0.5% cuando mucho. ¿Cuál es el porcentaje máximo de error correspondiente en el cálculo de

a) el área superficial del cubo?

b) el volumen del cubo?

47. Tolerancia La altura y el radio de un cilindro circular recto son iguales, de manera que el volumen del cilindro es $V = \pi h^3$. El volumen debe calcularse con un error de no más del 1% del valor real. Obtenga aproximadamente el máximo error que se puede tolerar en la medición de h, expresado como un porcentaje de h.

48. Tolerancia

a) ¿Con qué exactitud debe medirse el diámetro interior de un tanque cilíndrico de almacenamiento, de 10 m de altura, para calcular el volumen dentro del 1% de su valor real?

b) ¿Con qué exactitud debe medirse el diámetro exterior para calcular la cantidad de pintura que se necesita para cubrir la pared del tanque, dentro del 5% de la cantidad real?

49. El diámetro de una esfera se mide como 100 ± 1 cm, y el volumen se calcula a partir de esta medición. Estime el porcentaje de error en el cálculo del volumen.

50. Estime el porcentaje de error aceptable en la medición del diámetro D de una esfera, si el volumen debe calculase correctamente dentro del 3%.

51. Efecto que tienen las maniobras de vuelo en el corazón La cantidad de trabajo realizada por la principal cámara de bombeo del corazón, el ventrículo izquierdo, está dada por la ecuación

$$W = PV + \frac{V\delta v^2}{2g},$$

donde W es el trabajo por unidad de tiempo, P es la presión sanguínea promedio, V es el volumen de sangre bombeada hacia fuera por unidad de tiempo, δ ("delta") es la densidad de la san-

gre, v es la velocidad promedio de la sangre que sale y g es la aceleración de la gravedad.

Cuando P, V, δ y v permanecen constantes, W se convierte en una función de g y la ecuación toma la forma simplificada

$$W = a + \frac{b}{g} \quad (a, b \text{ son constantes}).$$

Como miembro del equipo médico de la NASA, usted quiere saber qué tan sensible es W a los cambios en g causados por las maniobras de vuelo, y esto depende del valor inicial de g. Como parte de su investigación, decide comparar los efectos que tiene en W un cambio dado dg, en la Luna, donde $g = 5.2$ ft/s^2, con el efecto que el mismo cambio dado dg tendría en la Tierra, donde $g = 32$ ft/s^2. Utilice la ecuación simplificada que se mencionó antes para obtener la razón de dW_{Luna} con respecto a dW_{Tierra}.

52. Concentración de un medicamento La concentración C en miligramos por mililitro (mg/ml) de cierto medicamento en el torrente sanguíneo de una persona t horas después de haber ingerido la píldora se modela con la aproximación

$$C(t) = \frac{4t}{1 + t^3} + 0.06t.$$

Estime el cambio en la concentración cuando t cambia de 20 a 30 minutos.

53. Arterias obstruidas La fórmula $V = kr^4$, descubierta por el fisiólogo Jean Poiseuille (1797-1869), nos permite predecir cuánto debe expandirse el radio de una arteria parcialmente obstruida para restablecer el flujo sanguíneo normal. La fórmula indica que el volumen V de sangre que fluye por la arteria por unidad de tiempo con presión fija es una constante k veces el radio de la arteria a la cuarta potencia. ¿Cómo afecta a V un 10% de incremento en r?

54. Medición de la aceleración de la gravedad Cuando la longitud L del péndulo de un reloj se mantiene constante, controlando su temperatura, el periodo T del péndulo depende de la aceleración de la gravedad g. Así, el periodo variará ligeramente al trasladar el reloj de un lugar a otro en la superficie de la Tierra, dependiendo del cambio en g. Sin perder de vista a Δt, podemos estimar la variación en g a partir de la ecuación $T = 2\pi(L/g)^{1/2}$ que relaciona T, g y L.

a) Con L constante y g como la variable independiente, calcule dT y considérela para contestar los incisos *b)* y *c)*.

b) Cuando g se incrementa, ¿T aumenta o disminuye? ¿El péndulo de un reloj registrará aumento o disminución en su velocidad? Explique.

c) Un reloj con un péndulo de 100 cm es trasladado de una localidad donde $g = 980$ cm/s^2 a una nueva ubicación. Esto aumenta el periodo en $dT = 0.001$ s. Obtenga dg y estime el valor de g en la nueva ubicación.

55. Aproximaciones cuadráticas

a) Sea $Q(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2$ una aproximación cuadrática a $f(x)$ en $x = a$, con las siguientes propiedades:

i. $Q(a) = f(a)$

ii. $Q'(a) = f'(a)$

iii. $Q''(a) = f''(a)$.

Determine los coeficientes b_0, b_1 y b_2.

b) Obtenga la aproximación cuadrática a $f(x) = 1/(1 - x)$ en $x = 0$.

T ***c)*** Grafique $f(x) = 1/(1 - x)$ y su aproximación cuadrática en $x = 0$. Después, realice un acercamiento a las dos gráficas en el punto (0, 1). Comente lo que observa.

T ***d)*** Obtenga la aproximación cuadrática a $g(x) = 1/x$ en $x = 1$. Grafique g y su aproximación cuadrática juntas. Comente lo que observa.

T ***e)*** Obtenga la aproximación cuadrática a $h(x) = \sqrt{1 + x}$ en $x = 0$. Grafique h y su aproximación cuadrática juntas. Comente lo que observa.

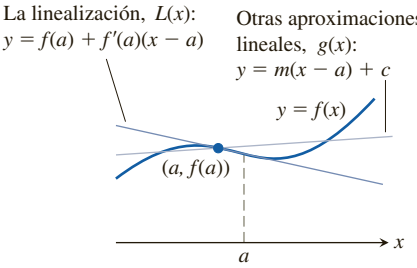
f) ¿Cuáles son las linealizaciones de f, g y h en los puntos respectivos de los incisos *b)*, *d)* y *e)*?

56. La linealización es la mejor aproximación lineal Suponga que $y = f(x)$ es diferenciable en $x = a$, y que $g(x) = m(x - a) + c$ es una función lineal donde m y c son constantes. Si el error $E(x) = f(x) - g(x)$ es suficientemente pequeño cerca de $x = a$, podríamos pensar en usar a g como una aproximación lineal de f en lugar de la linealización $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Demuestre que si imponemos a g las condiciones

1. $E(a) = 0$ El error de aproximación es cero en $x = a$.

2. $\lim_{x \to a} \dfrac{E(x)}{x - a} = 0$ El error es despreciable cuando se le compara con $x - a$.

entonces, $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. De esta manera, la linealización $L(x)$ da la única aproximación lineal cuyo error es cero en $x = a$ y despreciable cuando lo comparamos con $x - a$.



EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 57 a 60, use un software matemático para estimar la magnitud del error usando la linealización en lugar de la función en un intervalo I dado. Ejecute los siguientes pasos:

a) Grafique la función f en I.

b) Obtenga la linealización L de la función en el punto a.

c) Grafique juntas f y L en una gráfica.

d) Grafique el error absoluto $|f(x) - L(x)|$ en el intervalo I y obtenga su valor máximo.

e) A partir de la gráfica del inciso *d)*, estime $\delta > 0$ tan grande como sea posible de manera que satisfaga

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L(x)| < \epsilon$$

para $\epsilon = 0.5$, 0.1 y 0.01. Después, verifique gráficamente para ver si su estimación de δ sigue siendo válida.

57. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$, $[-1, 2]$, $a = 1$

58. $f(x) = \dfrac{x - 1}{4x^2 + 1}$, $\left[-\dfrac{3}{4}, 1\right]$, $a = \dfrac{1}{2}$

59. $f(x) = x^{2/3}(x - 2)$, $[-2, 3]$, $a = 2$

60. $f(x) = \sqrt{x} - \operatorname{sen} x$, $[0, 2\pi]$, $a = 2$

Capítulo 3 Preguntas de repaso

1. ¿Qué es la derivada de una función? ¿Cómo se relaciona su dominio con el dominio de f? Dé ejemplos.
2. ¿Qué papel desempeña la derivada en la definición de pendientes, tangentes y razones de cambio?
3. ¿Cómo se puede graficar la derivada de una función cuando sólo se cuenta con una tabla de los valores de la función?
4. ¿Qué significa que una función sea diferenciable en un intervalo abierto? ¿Qué significa que sea diferenciable en un intervalo cerrado?
5. ¿Cómo se relacionan las derivadas y las derivadas laterales?
6. Describa geométricamente cuándo una función normalmente *no* tiene una derivada en un punto.
7. ¿Cómo se relacionan la diferenciabilidad de una función en un punto y su continuidad en dicho punto, si la hay?
8. ¿Qué reglas conoce para calcular derivadas? Mencione algunos ejemplos.
9. Explique cómo las tres fórmulas

   ***a*)** $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ ***b*)** $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$

   ***c*)** $\dfrac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \dfrac{du_1}{dx} + \dfrac{du_2}{dx} + \cdots + \dfrac{du_n}{dx}$

   nos permiten diferenciar una función polinomial.
10. Además de las tres fórmulas consideradas en la pregunta 9, ¿qué otra fórmula necesitamos para derivar funciones racionales?
11. ¿Qué es la segunda derivada? ¿Qué es la tercera derivada? ¿Cuántas derivadas tienen las funciones que conoce? Dé ejemplos.
12. ¿Cuál es la relación entre las razones promedio y las razones instantáneas de cambio de una función? Dé un ejemplo.
13. ¿Cómo se aplican las derivadas en el estudio del movimiento? ¿Qué se puede aprender acerca del movimiento de un cuerpo a lo largo de una recta a partir del análisis de las derivadas de la función de posición del cuerpo? Dé ejemplos.
14. ¿Cómo se aplican las derivadas en economía?
15. Dé ejemplos de otras aplicaciones de las derivadas.
16. ¿Qué tienen que ver los límites $\lim_{h\to 0}((\operatorname{sen} h)/h)$ y $\lim_{h\to 0}((\cos h - 1)/h)$ con las derivadas de las funciones seno y coseno? ¿Cuáles *son* las derivadas de estas funciones?
17. Una vez que se conocen las derivadas de sen x y cos x, ¿cómo se pueden obtener las derivadas de tan x, cot x, sec x y csc x? ¿Cuáles son las derivadas de estas funciones?
18. ¿En qué puntos las seis funciones trigonométricas básicas son continuas? ¿Cómo lo sabe?
19. ¿Cuál es la regla para calcular la derivada de la composición de dos funciones diferenciables? ¿Cómo se evalúa dicha derivada? Dé ejemplos.
20. Si u es una función diferenciable de x, ¿cómo se obtiene $(d/dx)(u^n)$ si n es un entero? ¿Cómo se obtiene si n es un número racional? Dé ejemplos.
21. ¿Qué es la diferenciación implícita? ¿Cuándo es necesaria? Dé ejemplos.
22. ¿Cómo surgen los problemas de las tasas relacionadas? Dé ejemplos.
23. Esboce una estrategia para resolver problemas de tasas relacionadas. Ilustre con un ejemplo.
24. ¿Qué es la linealización $L(x)$ de una función $f(x)$ en el punto $x = a$? ¿Qué se requiere de f en a para que exista linealización? ¿Para qué se usan las linealizaciones? Dé ejemplos.
25. Si x se mueve de a a un valor cercano $a + dx$, ¿cómo se puede estimar el cambio correspondiente en el valor de una función diferenciable $f(x)$? ¿Cómo se estima el cambio relativo? ¿Cómo se estima el cambio porcentual? Dé un ejemplo.

Capítulo 3 Ejercicios de práctica

Derivadas de funciones

Obtenga las derivadas de las funciones en los ejercicios 1 a 40.

1. $y = x^5 - 0.125x^2 + 0.25x$
2. $y = 3 - 0.7x^3 + 0.3x^7$
3. $y = x^3 - 3(x^2 + \pi^2)$
4. $y = x^7 + \sqrt{7}x - \dfrac{1}{\pi + 1}$
5. $y = (x + 1)^2(x^2 + 2x)$
6. $y = (2x - 5)(4 - x)^{-1}$
7. $y = (\theta^2 + \sec\theta + 1)^3$
8. $y = \left(-1 - \dfrac{\csc\theta}{2} - \dfrac{\theta^2}{4}\right)^2$
9. $s = \dfrac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}$
10. $s = \dfrac{1}{\sqrt{t} - 1}$
11. $y = 2\tan^2 x - \sec^2 x$
12. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{2}{\operatorname{sen} x}$
13. $s = \cos^4(1 - 2t)$
14. $s = \cot^3\left(\dfrac{2}{t}\right)$
15. $s = (\sec t + \tan t)^5$
16. $s = \csc^5(1 - t + 3t^2)$
17. $r = \sqrt{2\theta \operatorname{sen}\theta}$
18. $r = 2\theta\sqrt{\cos\theta}$
19. $r = \operatorname{sen}\sqrt{2\theta}$
20. $r = \operatorname{sen}\left(\theta + \sqrt{\theta + 1}\right)$
21. $y = \dfrac{1}{2}x^2 \csc\dfrac{2}{x}$
22. $y = 2\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x}$
23. $y = x^{-1/2}\sec(2x)^2$
24. $y = \sqrt{x}\csc(x + 1)^3$
25. $y = 5\cot x^2$
26. $y = x^2\cot 5x$
27. $y = x^2\operatorname{sen}^2(2x^2)$
28. $y = x^{-2}\operatorname{sen}^2(x^3)$
29. $s = \left(\dfrac{4t}{t + 1}\right)^{-2}$
30. $s = \dfrac{-1}{15(15t - 1)^3}$
31. $y = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{1 + x}\right)^2$
32. $y = \left(\dfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}\right)^2$

33. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + x}{x^2}}$ **34.** $y = 4x\sqrt{x + \sqrt{x}}$

35. $r = \left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - 1}\right)^2$ **36.** $r = \left(\dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}\right)^2$

37. $y = (2x + 1)\sqrt{2x + 1}$ **38.** $y = 20(3x - 4)^{1/4}(3x - 4)^{-1/5}$

39. $y = \dfrac{3}{(5x^2 + \operatorname{sen} 2x)^{3/2}}$ **40.** $y = (3 + \cos^3 3x)^{-1/3}$

Diferenciación implícita

En los ejercicios 41 a 48, obtenga dy/dx por diferenciación implícita.

41. $xy + 2x + 3y = 1$ **42.** $x^2 + xy + y^2 - 5x = 2$

43. $x^3 + 4xy - 3y^{4/3} = 2x$ **44.** $5x^{4/5} + 10y^{6/5} = 15$

45. $\sqrt{xy} = 1$ **46.** $x^2y^2 = 1$

47. $y^2 = \dfrac{x}{x + 1}$ **48.** $y^2 = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$

En los ejercicios 49 y 50, obtenga dp/dq.

49. $p^3 + 4pq - 3q^2 = 2$ **50.** $q = (5p^2 + 2p)^{-3/2}$

En los ejercicios 51 y 52, obtenga dr/ds.

51. $r\cos 2s + \operatorname{sen}^2 s = \pi$ **52.** $2rs - r - s + s^2 = -3$

53. Obtenga d^2y/dx^2 por diferenciación implícita:

a) $x^3 + y^3 = 1$ ***b)*** $y^2 = 1 - \dfrac{2}{x}$

54. ***a)*** Por diferenciación implícita de $x^2 - y^2 = 1$, demuestre que $dy/dx = x/y$.

b) Después, demuestre que $d^2y/dx^2 = -1/y^3$.

Valores numéricos de derivadas

55. Suponga que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ y sus primeras derivadas tienen los siguientes valores en $x = 0$ y $x = 1$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	−3	1/2
1	3	5	1/2	−4

Obtenga la primera derivada de las siguientes combinaciones en el valor dado de x.

a) $6f(x) - g(x), \quad x = 1$ ***b)*** $f(x)g^2(x), \quad x = 0$

c) $\dfrac{f(x)}{g(x) + 1}, \quad x = 1$ ***d)*** $f(g(x)), \quad x = 0$

e) $g(f(x)), \quad x = 0$ ***f)*** $(x + f(x))^{3/2}, \quad x = 1$

g) $f(x + g(x)), \quad x = 0$

56. Suponga que la función $f(x)$ y su primera derivada tienen los siguientes valores en $x = 0$ y $x = 1$.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	9	−2
1	−3	1/5

Obtenga las primeras derivadas de las siguientes combinaciones en el valor dado de x.

a) $\sqrt{x}\,f(x), \quad x = 1$ ***b)*** $\sqrt{f(x)}, \quad x = 0$

c) $f(\sqrt{x}), \quad x = 1$ ***d)*** $f(1 - 5\tan x), \quad x = 0$

e) $\dfrac{f(x)}{2 + \cos x}, \quad x = 0$ ***f)*** $10\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) f^2(x), \quad x = 1$

57. Obtenga el valor de dy/dt en $t = 0$, si $y = 3\operatorname{sen} 2x$ y $x = t^2 + \pi$.

58. Obtenga el valor de ds/du en $u = 2$, si $s = t^2 + 5t$ y $t = (u^2 + 2u)^{1/3}$.

59. Obtenga el valor de dw/ds en $s = 0$, si $w = \operatorname{sen}(\sqrt{r} - 2)$ y $r = 8\operatorname{sen}(s + \pi/6)$.

60. Obtenga el valor de dr/dt en $t = 0$, si $r = (\theta^2 + 7)^{1/3}$ y $\theta^2 t + \theta = 1$.

61. Si $y^3 + y = 2\cos x$, obtenga el valor de d^2y/dx^2 en el punto $(0, 1)$.

62. Si $x^{1/3} + y^{1/3} = 4$, obtenga d^2y/dx^2 en el punto $(8, 8)$.

Aplicación de la definición de derivada

En los ejercicios 63 y 64, obtenga la derivada usando la definición.

63. $f(t) = \dfrac{1}{2t + 1}$

64. $g(x) = 2x^2 + 1$

65. ***a)*** Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x < 0 \\ -x^2, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

b) Es f continua en $x = 0$?

c) Es f diferenciable en $x = 0$?

Justifique sus respuestas.

66. ***a)*** Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0 \\ \tan x, & 0 \le x \le \pi/4. \end{cases}$$

b) Es f continua en $x = 0$?

c) Es f diferenciable en $x = 0$?

Justifique sus respuestas.

67. ***a)*** Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

b) Es f continua en $x = 1$?

c) Es f diferenciable en $x = 1$?

Justifique sus respuestas.

68. ¿Para qué valor o valores de la constante m, si acaso,

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} 2x, & x \le 0 \\ mx, & x > 0 \end{cases}$$

a) es continua en $x = 0$?

b) es diferenciable en $x = 0$?

Justifique sus respuestas.

Pendientes, tangentes y normales

69. Tangentes con pendiente específica ¿Hay puntos en la curva $y = (x/2) + 1/(2x - 4)$ donde la pendiente sea $-3/2$? Si es así, determínelos.

70. Tangentes con pendiente específica ¿Hay puntos en la curva $y = x - 1/2x$ donde la pendiente sea -2? Si es así, determínelos.

71. Tangentes horizontales Obtenga los puntos de la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ donde la tangente es paralela al eje x.

72. Intersección de tangentes Obtenga las intersecciones con los ejes x y y de la recta tangente a la curva $y = x^3$ en el punto $(-2, -8)$.

73. Tangentes perpendiculares o paralelas a rectas Obtenga los puntos de la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ donde la tangente es

a) perpendicular a la recta $y = 1 - (x/24)$.

b) paralela a la recta $y = \sqrt{2} - 12x$.

74. Intersección de tangentes Demuestre que las tangentes a la curva $y = (\pi \operatorname{sen} x)/x$ en $x = \pi$ y $x = -\pi$ se intersecan en ángulos rectos.

75. Normales paralelas a una recta Obtenga los puntos de la curva $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, donde la normal es paralela a la recta $y = -x/2$. Trace juntas la curva y las normales, e identifique cada una con su ecuación.

76. Rectas tangente y normal Obtenga las ecuaciones para la tangente y la normal a la curva $y = 1 + \cos x$ en el punto $(\pi/2, 1)$. Grafique juntas la curva, la tangente y la normal, e identifique cada una con su ecuación.

77. Parábola tangente La parábola $y = x^2 + C$ debe ser tangente a la recta $y = x$. Obtenga C.

78. Pendiente de la tangente Demuestre que la tangente a la curva $y = x^3$ en cualquier punto (a, a^3) corta a la curva nuevamente en un punto donde la pendiente es cuatro veces la pendiente en (a, a^3).

79. Curva tangente ¿Para qué valor de c la curva $y = c/(x + 1)$ es tangente a la recta que pasa por los puntos $(0, 3)$ y $(5, -2)$?

80. Normal a un círculo Demuestre que la recta normal en cualquier punto del círculo $x^2 + y^2 = a^2$ pasa por el origen.

En los ejercicios 81 a 86, obtenga las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva en el punto dado.

81. $x^2 + 2y^2 = 9, \quad (1, 2)$

82. $x^3 + y^2 = 2, \quad (1, 1)$

83. $xy + 2x - 5y = 2, \quad (3, 2)$

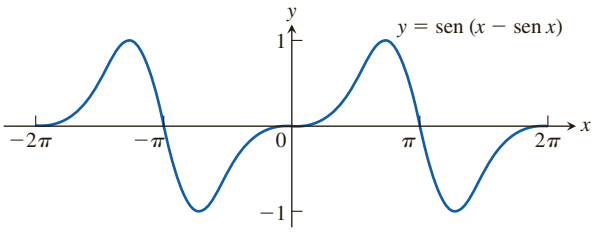
84. $(y - x)^2 = 2x + 4, \quad (6, 2)$

85. $x + \sqrt{xy} = 6, \quad (4, 1)$

86. $x^{3/2} + 2y^{3/2} = 17, \quad (1, 4)$

87. Obtenga la pendiente de la curva $x^3y^3 + y^2 = x + y$ en los puntos $(1, 1)$ y $(1, -1)$.

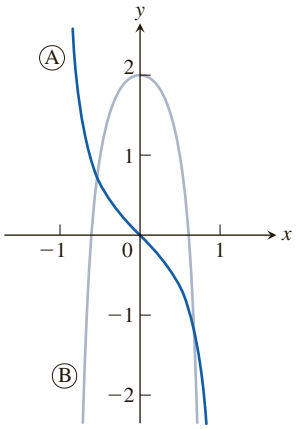
88. La gráfica que se muestra sugiere que la curva $y = \operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x)$ podría tener tangentes horizontales al eje x. ¿Es así? Justifique su respuesta.



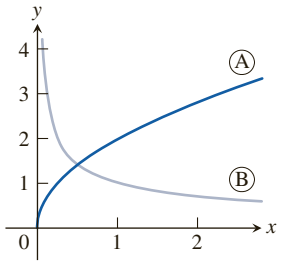
Análisis de gráficas

Cada una de las figuras en los ejercicios 89 y 90 muestra dos gráficas: la de una función $y = f(x)$ y la de su derivada $f'(x)$. ¿Cuál gráfica es cuál? ¿Cómo lo sabe?

89.



90.

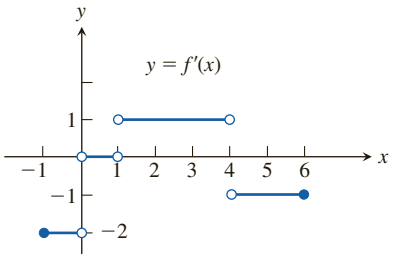


91. Con base en la siguiente información, grafique la función $y = f(x)$ para $-1 \le x \le 6$.

i. La gráfica f está formada por segmentos de recta unidos por sus extremos.

ii. La gráfica inicia en el punto $(-1, 2)$.

iii. La derivada de f, donde está definida, coincide con la función escalonada que aquí se muestra.



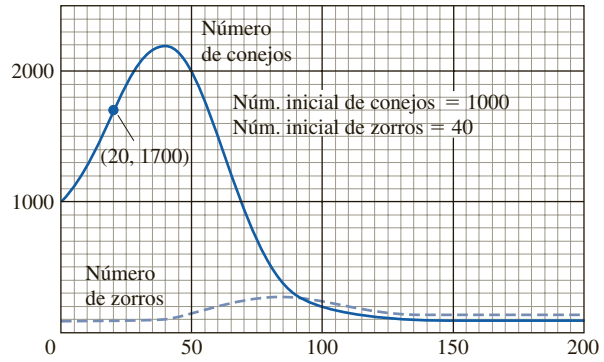
92. Repita el ejercicio 91, suponiendo que la gráfica inicia en $(-1, 0)$ en lugar de hacerlo en $(-1, 2)$.

Los ejercicios 93 y 94 se refieren a las figuras que los acompañan. Las gráficas del inciso *a*) muestran los números de conejos y zorros en una población ártica pequeña; están trazadas como funciones del tiempo durante 200 días. Al principio, el número de conejos aumenta al irse reproduciendo; sin embargo, los zorros se alimentan de conejos, de manera que conforme el número de zorros se incrementa, el nivel de la población de conejos se nivela y después declina. El inciso *b*) muestra la gráfica de la derivada de la población de conejos, que se construyó graficando las pendientes.

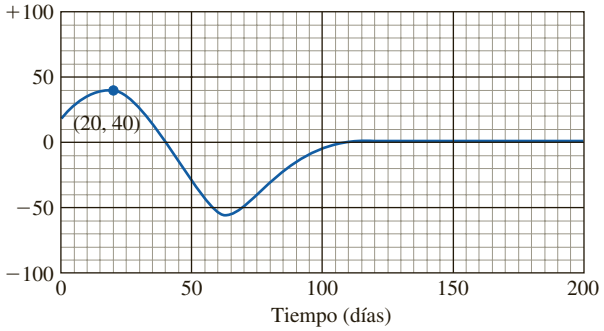
93. ***a***) ¿Cuál es el valor de la derivada de la población de conejos cuando el número de conejos es el máximo? ¿Y cuando el número de conejos es el mínimo?

b) ¿Cuál es el tamaño de la población de conejos cuando su derivada alcanza su máximo valor? ¿Y cuando alcanza su mínimo valor (valor negativo)?

94. ¿En qué unidades deben medirse las pendientes de las curvas de las poblaciones de conejos y zorros?



a)



Derivada de la población de conejos

b)

Fuente: NCPMF "Differenciation" por W.U. Walton *et al.* Proyecto CALC. Reimpresas con permiso de Educational Development Center, Inc.

Límites trigonométricos

Obtenga los límites en los ejercicios 95 a 102.

95. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x^2 - x}$

96. $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x - \tan 7x}{2x}$

97. $\lim_{r\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} r}{\tan 2r}$

98. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}\theta)}{\theta}$

99. $\lim_{\theta\to(\pi/2)^-} \dfrac{4\tan^2\theta + \tan\theta + 1}{\tan^2\theta + 5}$

100. $\lim_{\theta\to 0^+} \dfrac{1 - 2\cot^2\theta}{5\cot^2\theta - 7\cot\theta - 8}$

101. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{2 - 2\cos x}$

102. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{1 - \cos\theta}{\theta^2}$

Muestre cómo se extienden las funciones de los ejercicios 103 y 104 para que sean continuas en el origen.

103. $g(x) = \dfrac{\tan(\tan x)}{\tan x}$

104. $f(x) = \dfrac{\tan(\tan x)}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}$

Tasas relacionadas

105. Cilindro circular recto El área total de la superficie S de un cilindro circular recto está relacionada con el radio r de la base y la altura h mediante la ecuación $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

a) ¿Cómo se relaciona dS/dt con dr/dt si h es constante?

b) ¿Cómo se relaciona dS/dt con dh/dt si r es constante?

c) ¿Cómo se relaciona dS/dt con dr/dt y dh/dt si r y h no son constantes?

d) ¿Cómo se relaciona dr/dt con dh/dt si S es constante?

106. Cono circular recto El área lateral de la superficie S de un cono circular recto está relacionada con el radio r de la base y la altura h mediante la ecuación $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$.

a) ¿Cómo se relaciona dS/dt con dr/dt si h es constante?

b) ¿Cómo se relaciona dS/dt con dh/dt si r es constante?

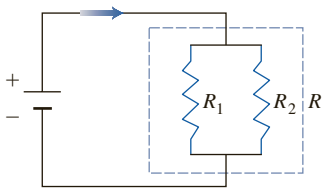
c) ¿Cómo se relaciona dS/dt con dr/dt y dh/dt si r y h no son constantes?

107. Cambio en el área de un círculo El radio de un círculo cambia a una razón de $-2/\pi$ m/s. ¿A qué razón cambia el área del círculo cuando $r = 10$ m?

108. Cambio en la arista de un cubo El volumen de un cubo aumenta a razón de 1200 cm^3/min en el instante en que sus aristas tienen una longitud de 20 cm. ¿A qué razón cambian las longitudes de las aristas en ese instante?

109. Resistencias conectadas en paralelo Si dos resistencias de R_1 y R_2 ohms están conectadas en paralelo en un circuito eléctrico para formar una resistencia de R ohms, el valor de R se obtiene con la ecuación

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$



Si R_1 decrece a razón de 1 ohm/s y R_2 aumenta a razón de 0.5 ohms/s, ¿a qué razón cambia R cuando $R_1 = 75$ ohms y $R_2 = 50$ ohms?

110. Impedancia en un circuito en serie La impedancia Z (ohms) en un circuito en serie está relacionada con la resistencia R (ohms) y la reactancia X (ohms) mediante la ecuación $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$. Si R aumenta a razón de 3 ohms/s y X disminuye a razón de 2 ohms/s, ¿a qué razón cambia Z cuando $R = 10$ ohms y $X = 20$ ohms?

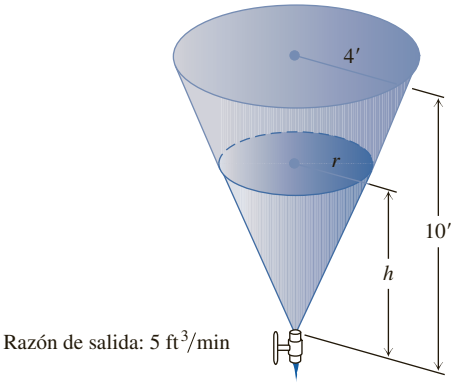
111. Velocidad de una partícula en movimiento Las coordenadas de una partícula en movimiento en el plano xy son funciones diferenciables del tiempo t con $dx/dt = 10$ m/s y $dy/dt = 5$ m/s. ¿Qué tan rápido se aleja la partícula del origen cuando pasa por el punto $(3, -4)$?

112. Movimiento de una partícula Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $y = x^{3/2}$ en el primer cuadrante, de tal manera que su distancia al origen aumenta a razón de 11 unidades por segundo. Calcule dx/dt cuando $x = 3$.

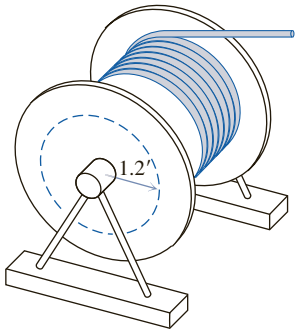
113. Drenado de un tanque El agua fluye del tanque cónico que se ilustra en la siguiente figura a razón de 5 ft^3/min.

a) ¿Cuál es la relación entre las variables h y r de la figura?

b) ¿Qué tan rápido disminuye el nivel del agua cuando $h = 6$ ft?



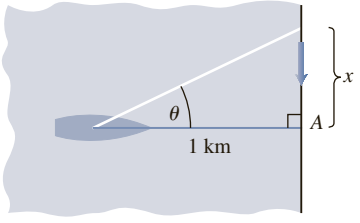
114. Carrete rodante Conforme se tira de un cable de televisión de un enorme carrete para atarlo a los postes ubicados a lo largo de una calle, el carrete se desenrolla en capas de radio constante (vea la figura). Si el camión que tira del cable se desplaza a 6 ft/s (ligeramente arriba de 4 millas/hr), use la ecuación $s = r\theta$ para determinar qué tan rápido gira el carrete (radianes por segundo) cuando se desenrolla la capa de radio igual a 1.2 ft.



115. Movimiento del haz de un faro La figura muestra un bote ubicado a 1 km de la costa, que ilumina esta última con un faro buscador. La luz da vuelta a una razón constante, $d\theta/dt = -0.6$ rad/s.

a) ¿Qué tan rápido se mueve la luz a lo largo de la costa cuando alcanza el punto A?

b) ¿Cuántas revoluciones por minuto son 0.6 rad/s?



116. Puntos que se mueven sobre los ejes de coordenadas Los puntos A y B se mueven a lo largo de los ejes x y y, respectivamente, de manera que la distancia r (en metros) de la perpendicular del origen a la recta AB permanece constante. ¿Qué tan rápido cambia OA? ¿OA está aumentando o disminuyendo cuando $OB = 2r$ y B se mueve hacia O a una razón de $0.3r$ m/s?

Linealización

117. Obtenga las linealizaciones de

a) $\tan x$ en $x = -\pi/4$ ***b)*** $\sec x$ en $x = -\pi/4$.

Grafique juntas las curvas y las linealizaciones.

118. Se puede obtener una aproximación lineal útil de la función $f(x) = 1/(1 + \tan x)$ en $x = 0$ combinando las aproximaciones

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x \qquad \text{y} \qquad \tan x \approx x$$

para obtener

$$\frac{1}{1+\tan x} \approx 1 - x.$$

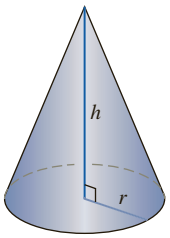
Demuestre que este resultado es la aproximación lineal estándar de $1/(1 + \tan x)$ en $x = 0$.

119. Obtenga la linealización de $f(x) = \sqrt{1+x} + \operatorname{sen} x - 0.5$ en $x = 0$.

120. Obtenga la linealización de $f(x) = 2/(1-x) + \sqrt{1+x} - 3.1$ en $x = 0$.

Estimaciones diferenciales del cambio

121. Área superficial de un cono Escriba una fórmula que permita estimar el cambio que ocurre en el área de la superficie lateral de un cono circular recto cuando la altura cambia de h_0 a $h_0 + dh$, mientras el radio permanece igual.



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

(Área de la superficie lateral)

122. Control del error

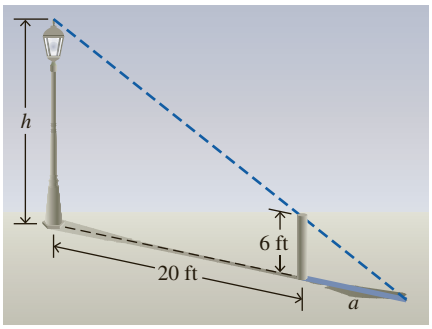
a) ¿Con qué precisión se debe medir la arista de un cubo para estar razonablemente seguros de calcular el área superficial del cubo con un error de no más del 2%?

b) Suponga que la arista se mide con la precisión requerida en el inciso *a*). ¿Con cuánta precisión puede calcularse el volumen del cubo a partir de la medición de la arista? Para saberlo, estime el porcentaje de error en el cálculo del volumen que podría resultar al usar la medición de la arista.

123. Error compuesto La circunferencia del ecuador de una esfera mide 10 cm con un error posible de 0.4 cm. Esta medición se utiliza para calcular el radio. Luego, se usa el radio para calcular la superficie y el volumen de la esfera. Estime los porcentajes de error en los valores calculados de

a) el radio.
b) el área superficial.
c) el volumen.

124. Medición de una altura Para obtener la altura de un poste de luz (vea la figura), se coloca una estaca de 6 ft a 20 ft del poste y se mide la longitud a de su sombra, la cual resulta ser de 15 ft, con una pulgada de más o de menos. Calcule la altura del poste usando el valor $a = 15$ y estimando el error posible del resultado.



Capítulo 3 Ejercicios adicionales avanzados

1. Una ecuación como $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$ se conoce como **identidad** porque se satisface para todos los valores de θ. Una ecuación como $\text{sen}\,\theta = 0.5$ no es una identidad porque sólo se satisface para ciertos valores de θ, no para todos. Si diferenciamos ambos lados de una identidad trigonométrica en θ con respecto a θ, el resultado será una ecuación nueva que también es una identidad.

Derive lo siguiente para demostrar que las ecuaciones resultantes se satisfacen para toda θ.

a) $\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$

b) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$

2. Si se deriva la identidad $\text{sen}(x + a) = \text{sen}\,x\cos a + \cos x\,\text{sen}\,a$ con respecto a x, ¿la ecuación resultante también es una identidad? ¿Se aplica este principio a la ecuación $x^2 - 2x - 8 = 0$? Explique.

3. ***a***) Obtenga los valores de las constantes a, b y c que harán que

$$f(x) = \cos x \quad \text{y} \quad g(x) = a + bx + cx^2$$

satisfagan las condiciones

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = g'(0), \quad \text{y} \quad f''(0) = g''(0).$$

b) Obtenga los valores de b y c que harán que

$$f(x) = \text{sen}\,(x + a) \quad \text{y} \quad g(x) = b\,\text{sen}\,x + c\cos x$$

satisfagan las condiciones

$$f(0) = g(0) \quad \text{y} \quad f'(0) = g'(0).$$

c) Para los valores determinados de a, b y c, ¿qué sucede con la tercera y cuarta derivadas de f y g en cada uno de los incisos *a*) y *b*)?

4. Soluciones de ecuaciones diferenciales

a) Demuestre que $y = \text{sen}\,x$, $y = \cos x$, y $y = a\cos x + b\,\text{sen}\,x$ (a y b son constantes) satisfacen la ecuación

$$y'' + y = 0.$$

b) ¿Cómo modificaría las funciones del inciso *a*) para que satisfagan la ecuación

$$y'' + 4y = 0?$$

Generalice este resultado.

5. Círculo osculador Obtenga los valores de h, k y a que hacen que el círculo $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$ sea tangente a la parábola $y = x^2 + 1$ en el punto $(1, 2)$, y que las segundas derivadas d^2y/dx^2 tengan el mismo valor en ambas curvas en ese punto. Círculos como éste, que son tangentes a una curva y tienen la misma segunda derivada que la curva en el punto de tangencia, se llaman *círculos osculadores*. Nos referiremos a ellos nuevamente en el capítulo 13.

6. Ingreso marginal Un autobús tiene capacidad para 60 pasajeros. El número x de personas por viaje que acostumbran transportarse en él está relacionado con el costo del pasaje (p dólares), de acuerdo con la ley $p = [3 - (x/40)]^2$. Escriba una expresión para el ingreso total $r(x)$ por viaje que recibe la empresa de autobuses. ¿Qué número de pasajeros por viaje hará que el ingreso marginal dr/dx sea igual a cero? ¿Cuál es el precio del pasaje correspondiente? (Este precio es el que maximiza el ingreso).

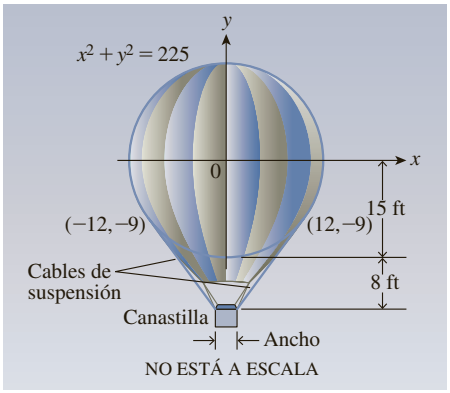
7. Producción industrial

a) Los economistas suelen usar la expresión "tasa de crecimiento" en términos relativos en lugar de absolutos. Por ejemplo, sea $u = f(t)$ el número de personas en la fuerza laboral en el tiempo t en una industria determinada. (Tratamos esta función como si fuera diferenciable, a pesar de que es una función escalonada de valores enteros).

Sea $v = g(t)$ la producción promedio per cápita de la fuerza laboral en el tiempo t. Entonces, la producción total es $y = uv$. Si la fuerza laboral crece a razón de 4% anual ($du/dt = 0.04u$) y la producción por trabajador aumenta a razón de 5% anual ($dv/dt = 0.05v$), obtenga la razón de crecimiento de la producción total, y.

b) Suponga que la fuerza laboral en el inciso *a*) decrece a razón de 2% por año, mientras que la producción per cápita aumenta a razón de 3% anual. ¿La producción total aumenta o disminuye, y a qué razón?

8. Diseño de una canastilla El diseñador de un globo esférico de aire caliente que mide 30 ft de diámetro quiere colgar la canastilla a 8 ft debajo del globo, utilizando cables tangentes a la superficie del globo, como se ilustra en la figura. Se muestran dos cables que van de las aristas superiores de la canastilla a sus puntos de tangencia, $(-12, -9)$ y $(12, -9)$. ¿Qué ancho debe tener la canastilla?



9. Pisa en paracaídas El 5 de agosto de 1988, Mike McCarthy, de la ciudad de Londres, saltó desde la parte superior de la Torre de Pisa. Abrió su paracaídas para saltar 179 ft y así establecer el récord mundial de salto más corto en paracaídas. Elabore un diagrama aproximado para mostrar la forma de la gráfica de su velocidad durante el salto. (*Fuente: Boston Globe*, 6 de agosto de 1988).

10. Movimiento de una partícula La posición en el tiempo $t \geq 0$ de una partícula que se desplaza a lo largo de una recta coordenada es

$$s = 10\cos(t + \pi/4).$$

a) ¿Cuál es la posición inicial de la partícula ($t = 0$)?

b) ¿Cuáles son los puntos más lejanos a la izquierda y a la derecha del origen, alcanzados por la partícula?

c) Obtenga la velocidad y aceleración de la partícula en los puntos del inciso *b*).

d) ¿Cuándo alcanza la partícula el origen por primera vez? ¿Cuáles son su velocidad, rapidez y aceleración en ese instante?

11. Disparo de un sujetador de papel En la Tierra, fácilmente se puede disparar un sujetador de papel 64 ft hacia arriba con ayuda de una liga. El sujetador, t segundos después del disparo, se encuentra a $s = 64t - 16t^2$ ft arriba de la mano que lo lanzó.

a) ¿Cuánto tiempo tarda el sujetador de papel en alcanzar su máxima altura? ¿Con qué velocidad deja la mano que lo lanza?

b) En la Luna, la misma aceleración mandaría al sujetador de papel a una altura de $s = 64t - 2.6t^2$ ft en t segundos. ¿Aproximadamente cuánto tardaría el sujetador de papel en alcanzar su altura máxima y qué tan alto llegaría?

12. Velocidades de dos partículas En el tiempo t s, las posiciones de dos partículas sobre una recta coordenada son $s_1 = 3t^3 - 12t^2 + 18t + 5$ m y $s_2 = -t^3 + 9t^2 - 12t$ m. ¿Cuándo tienen las partículas las mismas velocidades?

13. Velocidad de una partícula Una partícula de masa constante m se desplaza a lo largo del eje x. Su velocidad v y su posición x satisfacen la ecuación

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0{}^2) = \frac{1}{2}k(x_0{}^2 - x^2),$$

donde k, v_0 y x_0 son constantes. Demuestre que siempre que $v \neq 0$,

$$m\frac{dv}{dt} = -kx.$$

14. Velocidades promedio e instantánea

a) Demuestre que si la posición x de un punto en movimiento está dada por una función cuadrática de t, $x = At^2 + Bt + C$, entonces la velocidad promedio en cualquier intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es igual a la velocidad instantánea en el punto medio del intervalo de tiempo.

b) ¿Cuál es el significado geométrico del resultado que obtuvo en el inciso *a*)?

15. Obtenga los valores de las constantes m y b para los cuales la función

$$y = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & x < \pi \\ mx + b, & x \geq \pi \end{cases}$$

es

a) continua en $x = \pi$.

b) diferenciable en $x = \pi$.

16. ¿La función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

tiene una derivada en $x = 0$? Explique.

17. ***a)*** ¿Con qué valores de a y b, la función

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

será diferenciable para todos los valores de x?

b) Explique la geometría de la gráfica resultante de f.

18. ***a)*** ¿Con qué valores de a y b, la función

$$g(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq -1 \\ ax^3 + x + 2b, & x > -1 \end{cases}$$

será diferenciable para todos los valores de x?

b) Explique la geometría de la gráfica resultante de g.

19. Funciones diferenciables impares ¿Hay algo especial en la derivada de una función diferenciable e impar de x? Justifique su respuesta.

20. Funciones diferenciables pares ¿Hay algo especial en la derivada de una función diferenciable y par de x? Justifique su respuesta.

21. Suponga que las funciones f y g están definidas en un intervalo abierto que contiene el punto x_0, que f es diferenciable en x_0, que $f(x_0) = 0$, y que g es continua en x_0. Demuestre que el producto fg es diferenciable en x_0. Este procedimiento muestra, por ejemplo, que aun cuando $|x|$ no sea diferenciable en $x = 0$, el producto $x|x|$ *sí lo es* en ese punto.

22. (*Continuación del ejercicio 21*). Con base en el resultado del ejercicio 21, demuestre que las siguientes funciones son diferenciables en $x = 0$.

a) $|x| \operatorname{sen} x$ ***b)*** $x^{2/3} \operatorname{sen} x$ ***c)*** $\sqrt[3]{x}(1 - \cos x)$

d) $h(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

23. ¿La derivada de

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es continua en $x = 0$? ¿La derivada de $k(x) = xh(x)$ lo es? Justifique sus respuestas.

24. Suponga que una función f satisface las siguientes condiciones para todos los valores reales de x y y:

i. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

ii. $f(x) = 1 + xg(x)$, donde $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$.

Demuestre que la derivada $f'(x)$ existe en todo valor de x y que $f'(x) = f(x)$.

25. Generalización de la regla del producto Use inducción matemática para demostrar que si $y = u_1 u_2 \cdots u_n$ es un producto finito de funciones diferenciables, entonces, y es diferenciable en su dominio común y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du_1}{dx} u_2 \cdots u_n + u_1 \frac{du_2}{dx} \cdots u_n + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_{n-1} \frac{du_n}{dx}.$$

26. Regla de Leibniz para derivadas de orden superior de productos La regla de Leibniz para derivadas de orden superior de productos de funciones diferenciables afirma que

a) $$\frac{d^2(uv)}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2} v + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + u\frac{d^2v}{dx^2}.$$

b) $$\frac{d^3(uv)}{dx^3} = \frac{d^3u}{dx^3} v + 3\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dv}{dx} + 3\frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} + u\frac{d^3v}{dx^3}.$$

c) $$\frac{d^n(uv)}{dx^n} = \frac{d^nu}{dx^n} v + n\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{dv}{dx} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}}\frac{d^kv}{dx^k} + \cdots + u\frac{d^nv}{dx^n}.$$

Las ecuaciones de los incisos *a)* y *b)* son casos especiales de la ecuación del inciso *c)*. Obtenga la ecuación del inciso *c)* por inducción matemática, empleando

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \frac{m!}{k!(m-k)!} + \frac{m!}{(k+1)!(m-k-1)!}.$$

27. Periodo del péndulo de un reloj El periodo T (el tiempo para realizar una oscilación completa) de un péndulo de reloj está dado por la fórmula $T^2 = 4\pi^2 L/g$, donde T se mide en segundos, $g = 32.2$ ft/s^2, y L (la longitud del péndulo) se mide en pies. Obtenga aproximadamente

a) la longitud del péndulo de un reloj cuyo periodo es $T = 1$ s.

b) el cambio dT en T si el péndulo del inciso *a)* se alarga a 0.01 ft.

c) el tiempo que se adelanta o atrasa el reloj en un día como resultado del cambio de periodo por la cantidad dT obtenida en el inciso *b)*.

28. Cubo de hielo que se derrite Suponga que un cubo de hielo conserva su forma cúbica conforme se derrite. Si llamamos s a la longitud de sus aristas, su volumen será $V = s^3$ y su área superficial será $6s^2$. Suponga que V y s son funciones diferenciables del tiempo t. También suponga que el volumen del cubo disminuye a una razón que es proporcional a su área superficial. (Esta última suposición parece bastante razonable cuando sabemos que el hielo se derrite en la superficie: al modificarse la extensión de la superficie, cambia la cantidad de hielo expuesto para derretirse). En términos matemáticos,

$$\frac{dV}{dt} = -k(6s^2), \qquad k > 0.$$

El signo menos significa que el volumen está disminuyendo. Suponga que el factor de proporcionalidad k es constante. (Probablemente depende de muchos factores, tales como la humedad relativa del aire circundante, la temperatura del aire y la incidencia o ausencia de luz solar, por nombrar sólo algunos). Suponga que hay un conjunto de condiciones particulares por las que el cubo pierde $1/4$ de su volumen durante la primera hora, y que el volumen es V_0 cuando $t = 0$. ¿Cuánto tardará en derretirse el cubo de hielo?

Capítulo 3 Proyectos de aplicación tecnológica

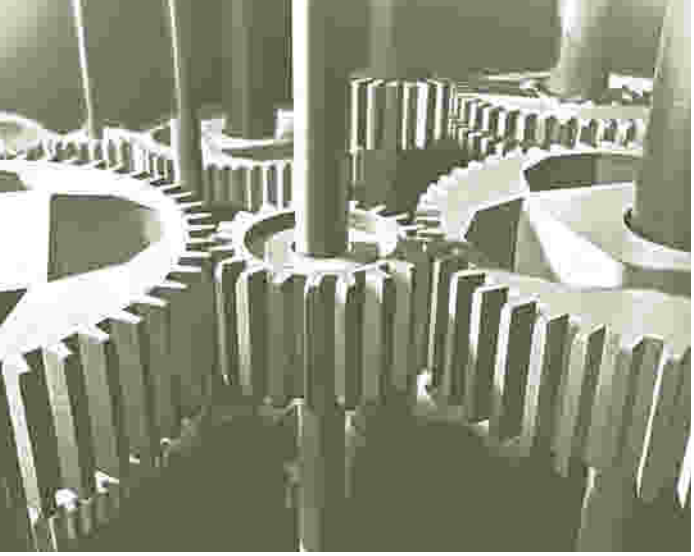
Módulos Mathematica/Maple

Convergencia de pendientes secantes a la función derivada
Visualizará la recta secante entre puntos consecutivos en una curva, y observará qué ocurre cuando la distancia entre ellos se reduce. La función, los puntos dados y las rectas secantes están trazados en una sola gráfica, mientras que una segunda gráfica compara las pendientes de las rectas secantes con la función derivada.

Derivadas, pendientes, rectas tangentes y animación
Partes I a III. Visualizará la derivada en un punto, la linealización de una función y la derivada de una función. Aprenderá cómo graficar la función y seleccionar tangentes en la misma gráfica.
Parte IV (Trazo de muchas tangentes)
Parte V (Animación). Las partes IV y V del módulo se pueden usar para animar rectas tangentes conforme uno se mueve a lo largo de la gráfica de una función.

Convergencia de pendientes secantes a la función derivada
Visualizará derivadas laterales por la derecha y por la izquierda.

Movimiento a lo largo de una recta: Posición → Velocidad → Aceleración
Observe imágenes animadas de las relaciones entre las funciones de posición, velocidad y aceleración como derivadas unas de otras. Las figuras del texto se pueden animar.



4 Aplicaciones de las derivadas

INTRODUCCIÓN Una de las aplicaciones más importantes de las derivadas es su uso como herramienta para la obtención de soluciones óptimas a problemas. En realidad, los problemas de optimización abundan en matemáticas, física, ingeniería, negocios, economía, biología y medicina. Por ejemplo, ¿cuál es la altura y el diámetro del cilindro con mayor volumen que se puede inscribir en una esfera determinada? ¿Cuáles son las dimensiones de la viga rectangular de madera más resistente que se puede cortar de un tronco cilíndrico con un determinado diámetro? Con base en los costos de producción y los ingresos por ventas, ¿cuántos artículos debería fabricar una manufacturera para maximizar las utilidades? ¿Cuánto se contrae la tráquea para expeler aire a velocidad máxima al toser? ¿Cuál es el ángulo de ramificación de los vasos sanguíneos con respecto al cual se minimiza la pérdida de energía debida a la fricción, cuando la sangre fluye por las ramificaciones?

En este capítulo usaremos las derivadas para obtener valores extremos de las funciones, para determinar y analizar la forma de las gráficas, y para resolver ecuaciones numéricamente. También presentaremos la idea de recuperar una función a partir de su derivada. La clave para muchas de estas aplicaciones es el teorema del valor medio, el cual prepara el camino de entrada al cálculo integral.

4.1 Valores extremos de las funciones

En esta sección se explica cómo localizar e identificar valores extremos (máximos o mínimos) de una función a partir de su derivada. Una vez que podamos hacerlo, estaremos en condiciones de resolver una gran variedad de problemas de optimización (vea la sección 4.5). Los dominios de las funciones consideradas son intervalos o uniones de intervalos ajenos.

DEFINICIONES Sea f una función con dominio D. Decimos que f tiene un valor máximo absoluto en un punto c en D si

$$f(x) \leq f(c) \qquad \text{para toda } x \text{ en } D$$

y un valor **mínimo absoluto** en un punto c en D si

$$f(x) \geq f(c) \qquad \text{para toda } x \text{ en } D$$

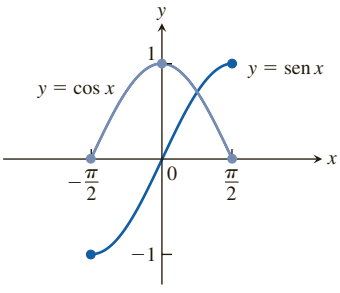


FIGURA 4.1 Extremos absolutos de las funciones seno y coseno en $[-\pi/2, \pi/2]$. Estos valores dependen del dominio de la función.

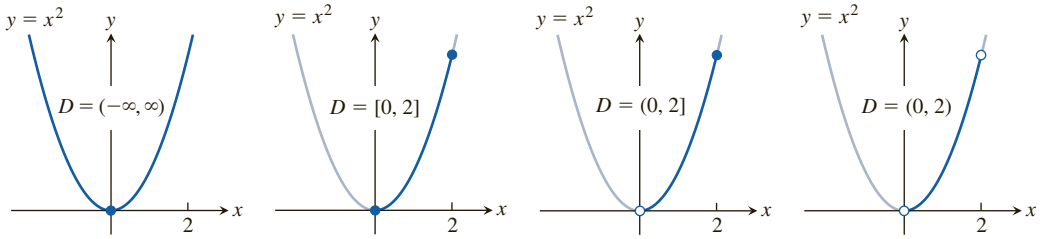
Los valores máximo y mínimo se llaman **valores extremos** de la función f. Los máximos y mínimos absolutos también se conocen como máximos o mínimos **globales**.

Por ejemplo, en el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$, la función $f(x) = \cos x$ tiene un valor máximo absoluto igual a 1 (una vez) y un valor mínimo absoluto de 0 (dos veces). En el mismo intervalo, la función $g(x) = \text{sen } x$ tiene un valor máximo de 1 y un valor mínimo de -1 (figura 4.1).

Funciones con la misma regla de correspondencia o fórmula pueden tener extremos diferentes (valores máximos o mínimos), dependiendo del dominio. Veremos esto en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Los extremos absolutos de las siguientes funciones en sus dominios pueden distinguirse en la figura 4.2. Cada función tiene la misma ecuación que la define, $y = x^2$, pero el dominio es diferente. Observe que una función podría no tener un máximo o un mínimo si el dominio no está acotado o no incluye un extremo.

Regla de la función	Dominio D	Extremos absolutos en D
a) $y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	Sin máximo absoluto Mínimo absoluto de 0 en $x = 0$
b) $y = x^2$	$[\,0, 2\,]$	Máximo absoluto de 4 en $x = 2$ Mínimo absoluto de 0 en $x = 0$
c) $y = x^2$	$(0, 2\,]$	Máximo absoluto de 4 en $x = 2$ Sin mínimo absoluto
d) $y = x^2$	$(0, 2)$	Sin extremos absolutos



a) sólo mínimo absoluto *b*) máximo y mínimo absolutos *c*) sólo máximo absoluto *d*) ni máximo ni mínimo

FIGURA 4.2 Gráficas del ejemplo 1.

Algunas de las funciones del ejemplo 1 no tuvieron un valor máximo o un valor mínimo. El siguiente teorema afirma que una función que es *continua* en un intervalo finito *cerrado* $[a, b]$ tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en el intervalo. Siempre buscamos estos valores extremos cuando graficamos una función.

TEOREMA 1: Teorema del valor extremo Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces, f alcanza tanto un valor máximo absoluto, M, como un valor mínimo absoluto, m, en $[a, b]$. Es decir, existen números x_1 y x_2 en $[a, b]$ con $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ y $m \le f(x) \le M$ para toda x en $[a, b]$.

La demostración del teorema del valor extremo requiere un conocimiento detallado del sistema de los números reales (vea el apéndice 6) y no la veremos aquí. La figura 4.3 ilustra posibles localizaciones de los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Como observamos en la función $y = \cos x$, es posible que un mínimo absoluto (o un máximo absoluto) se alcance en dos o más puntos distintos del intervalo.

Los requerimientos del teorema 1 en el sentido de que el intervalo sea cerrado y finito, y que la función sea continua, son ingredientes fundamentales. Sin ellos, la conclusión del teorema no necesariamente se cumple. El ejemplo 1 muestra que un valor extremo absoluto podría no existir si el intervalo no es cerrado y acotado. La función $y = x$ en $(-\infty, \infty)$ mues-

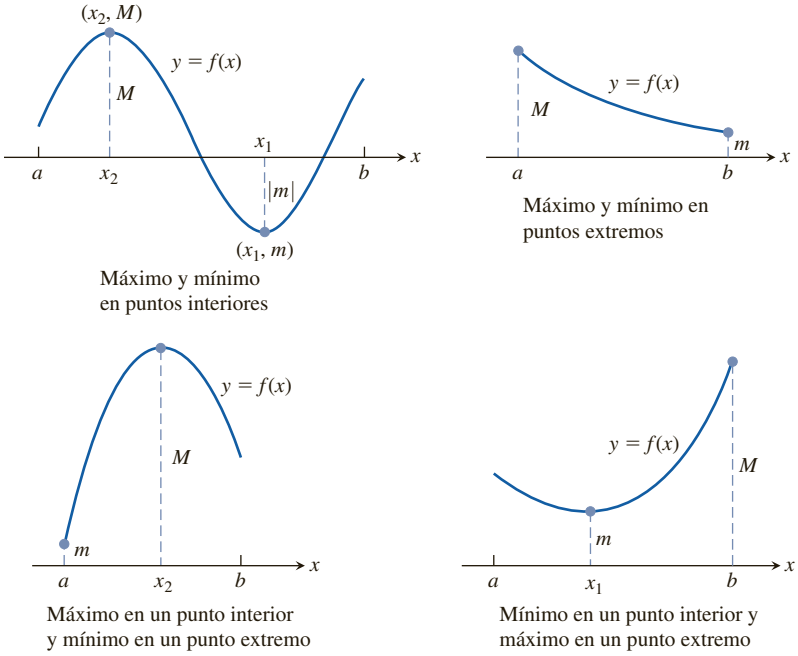


FIGURA 4.3 Algunas posibilidades de máximo y mínimo para una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$.

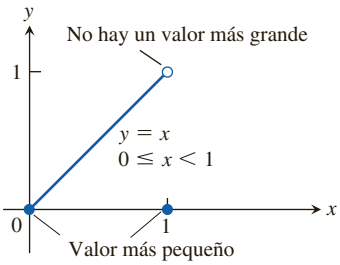


FIGURA 4.4 Un solo punto de discontinuidad puede impedir que una función tenga un valor máximo o mínimo en un intervalo cerrado. La función

$$y = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

es continua en todo punto de [0, 1], excepto en $x = 1$; sin embargo su gráfica en [0, 1] no tiene un punto más alto que los demás.

tra que ningún valor extremo existe en un intervalo no acotado. La figura 4.4 señala que el requerimiento de continuidad no puede omitirse.

Valores extremos locales (relativos)

La figura 4.5 presenta una gráfica con cinco puntos donde una función tiene valores extremos en su dominio $[a, b]$. El mínimo absoluto de la función se alcanza en a, aunque en e el valor de la función es menor que en cualquier otro punto *cercano*. La curva sube por la izquierda y baja por la derecha cerca de c, haciendo que $f(c)$ sea un máximo local. La función alcanza su máximo absoluto en d. A continuación definiremos lo que queremos decir con extremos locales.

DEFINICIONES Una función f tiene un **máximo local** en un punto c dentro de su dominio D si $f(x) \le f(c)$ para toda $x \in D$ que se encuentra en algún intervalo abierto que contiene a c.

Una función f tiene un valor **mínimo local** en un punto c dentro de su dominio D si $f(x) \ge f(c)$ para toda $x \in D$ que se encuentra en algún intervalo abierto que contiene a c.

Si el dominio de f es el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces, f tiene un máximo local en el extremo $x = a$, si $f(x) \le f(a)$ para toda x en algún intervalo semiabierto $[a, a + \delta)$, $\delta > 0$. Asimismo, f tiene un máximo local en un punto interior $x = c$ si $f(x) \le f(c)$ para toda x en un intervalo abierto $(c - \delta, c + \delta)$, $\delta > 0$, y un máximo local en el extremo $x = b$ si $f(x) \le f(b)$ para toda x en algún intervalo semiabierto $(b - \delta, b]$, $\delta > 0$. Las desigualdades se invierten para valores mínimos locales. En la figura 4.5, la función f tiene máximos locales en c y d, y mínimos locales en a, e y b. Los extremos locales también se llaman **extremos relativos**. Algunas funciones tienen un número infinito de extremos locales, incluso en un intervalo acotado. Un ejemplo es la función $f(x) = \text{sen}\,(1/x)$ en el intervalo $(0, 1]$. (Esta función está graficada en la figura 2.40).

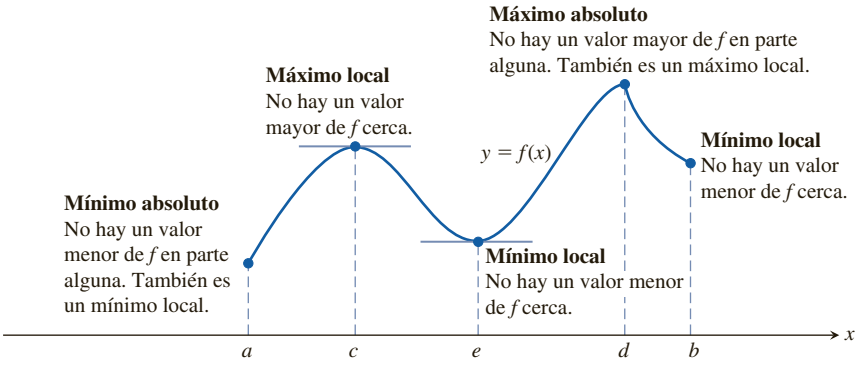


FIGURA 4.5 Cómo identificar los tipos de máximos y mínimos de una función con dominio $a \le x \le b$.

Un máximo absoluto también es un máximo local. Al ser el valor más grande de todos, también es el valor más grande en sus inmediaciones. Por lo tanto, *una lista de todos los máximos locales incluirá automáticamente el máximo absoluto, si hay alguno*. De forma similar, *una lista de todos los mínimos locales incluirá el mínimo absoluto, si lo hay*.

Obtención de los extremos

El siguiente teorema explica por qué usualmente es necesario investigar sólo algunos valores para obtener los extremos de una función.

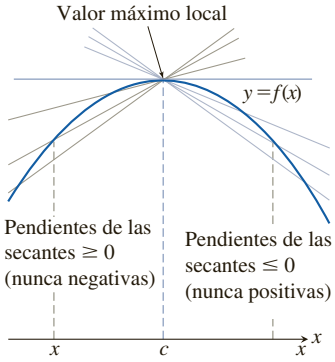


FIGURA 4.6 Curva con un valor máximo local. La pendiente en c, al ser simultáneamente el límite de números menores o iguales que cero y números mayores o iguales que cero, es cero.

TEOREMA 2: Teorema de la primera derivada para valores extremos locales Si f tiene un valor máximo o mínimo local en un punto interior c de su dominio, y si f' está definida en c, entonces,

$$f'(c) = 0.$$

Demostración Para demostrar que $f'(c)$ es cero en un extremo local, primero demostraremos que $f'(c)$ no puede ser positiva, y luego que $f'(c)$ no puede ser negativa. El único número que no es ni positivo ni negativo es el cero, de manera que ése debe ser el valor de $f'(c)$.

Para comenzar, supongamos que f tiene un valor máximo local en $x = c$ (figura 4.6), de modo que $f(x) - f(c) \le 0$ para todos los valores de x suficientemente cercanos a c. Como c es un punto interior del dominio de f, $f'(c)$ está definida por el límite bilateral

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Esto significa que ambos límites laterales, derecho e izquierdo, existen en $x = c$ y que son iguales a $f'(c)$. Cuando examinamos estos límites por separado, encontramos que

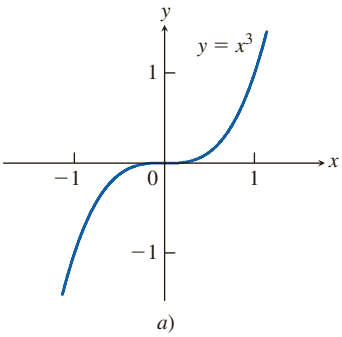
$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0. \qquad \text{Porque } (x - c) > 0 \text{ y } f(x) \le f(c) \qquad (1)$$

De manera similar,

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0. \qquad \text{Porque } (x - c) < 0 \text{ y } f(x) \le f(c) \qquad (2)$$

Así, las ecuaciones (1) y (2) implican que $f'(c) = 0$.

Esto demuestra el teorema para valores máximos locales. Para comprobarlo para valores mínimos locales, simplemente consideramos $f(x) \ge f(c)$, lo que invierte las desigualdades en las ecuaciones (1) y (2). ■



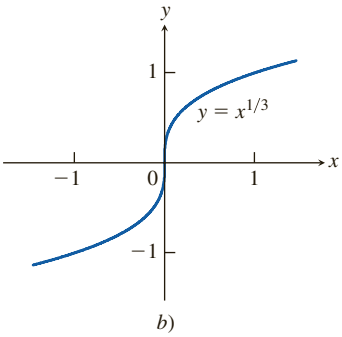


FIGURA 4.7 Puntos críticos sin valores extremos. *a)* $y' = 3x^2$ es 0 en $x = 0$, pero $y = x^3$ no tiene extremos ahí. *b)* $y' = (1/3)x^{-2/3}$ no está definida en $x = 0$, pero $y = x^{1/3}$ no tiene extremos ahí.

El teorema 2 afirma que la primera derivada de una función siempre es cero en un punto interior donde la función tiene un valor extremo local, y la derivada está definida. Si recordamos que todos los dominios que tomamos en cuenta son intervalos o uniones de intervalos ajenos, los únicos lugares donde una función f puede tener un valor extremo (ya sea local o global) son

1. puntos interiores donde $f' = 0$, En $x = c$ y $x = e$ en la fig. 4.5
2. puntos interiores donde f' es indefinida, En $x = d$ en la fig. 4.5
3. puntos extremos del dominio de f. En $x = a$ y $x = b$ en la fig. 4.5

La siguiente definición nos ayuda a resumir estos resultados.

DEFINICIÓN Un punto interior del dominio de una función f donde f' es cero o no está definida es un **punto crítico** de f.

Por lo tanto, los únicos puntos del dominio donde una función puede tener valores extremos son los puntos críticos o los puntos extremos del dominio. Sin embargo, hay que tener cuidado de no malinterpretar lo que se está diciendo. Una función puede tener un punto crítico en $x = c$ sin tener ahí un valor extremo local. Por ejemplo, las funciones $y = x^3$ y $y = x^{1/3}$ tienen puntos críticos en el origen, pero ninguna de ellas tiene un valor extremo local en el origen. En cambio, cada una de estas funciones tiene un *punto de inflexión* ahí (vea la figura 4.7). Los puntos de inflexión se definirán y analizarán en la sección 4.4.

La mayoría de los problemas relacionados con valores extremos piden obtener los valores extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado y acotado. El teorema 1 asegura que tales valores existen; el teorema 2 nos dice que se alcanzan sólo en los puntos críticos o en los puntos extremos. A menudo basta con elaborar una lista de tales puntos y calcular los valores correspondientes de la función para determinar cuáles son los valores más grandes y más pequeños, y dónde se localizan. Desde luego, si el intervalo no es cerrado o no es acotado (como $a < x < b$ o $a < x < \infty$), los extremos absolutos no necesariamente existen, tal como hemos visto. Si un valor máximo o mínimo absoluto existe, debe presentarse en un punto crítico o en un extremo derecho o izquierdo que pertenezca al intervalo.

Cómo obtener los extremos absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado y acotado

1. Evalúe f en todos los puntos críticos y en los puntos extremos del intervalo (o intervalos) dominio.
2. Tome el mayor y el menor de estos valores.

EJEMPLO 2 Obtenga los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = x^2$ en $[-2, 1]$.

Solución La función es diferenciable en todo su dominio, de modo que el único punto crítico es donde $f'(x) = 2x = 0$, a saber, $x = 0$. Necesitamos verificar los valores de la función en $x = 0$ y en los puntos extremos $x = -2$ y $x = 1$:

Valor en el punto crítico: $f(0) = 0$

Valores en los extremos: $f(-2) = 4$

$f(1) = 1.$

La función tiene un valor máximo absoluto de 4 en $x = -2$, y un valor mínimo absoluto de 0 en $x = 0$. ■

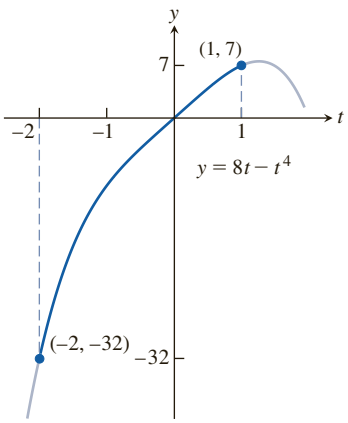


FIGURA 4.8 Valores extremos de $g(t) = 8t - t^4$ en $[-2, 1]$ (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Obtenga los valores máximo y mínimo absolutos de $g(t) = 8t - t^4$ en $[-2, 1]$.

Solución La función es diferenciable en todo su dominio, de manera que los únicos puntos críticos se presentan donde $g'(t) = 0$. Al resolver esta ecuación, se obtiene

$$8 - 4t^3 = 0 \qquad \text{o} \qquad t = \sqrt[3]{2} > 1,$$

un punto que no está en el dominio dado. Así, los extremos absolutos de la función se alcanzan en los extremos del intervalo, $g(-2) = -32$ (mínimo absoluto) y $g(1) = 7$ (máximo absoluto). Vea la figura 4.8. ■

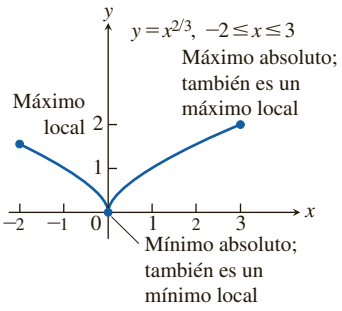


FIGURA 4.9 Los valores extremos de $f(x) = x^{2/3}$ en el intervalo $[-2, 3]$ ocurren en $x = 0$ y $x = 3$ (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Obtenga los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = x^{2/3}$ en el intervalo $[-2, 3]$.

Solución Evaluamos la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo, y tomamos el máximo y el mínimo de los valores resultantes.

La primera derivada

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

no tiene ceros, pero está indefinida en el punto interior $x = 0$. Los valores de f en este punto crítico y en los extremos son

$$\begin{aligned} &\text{Valor en el punto crítico:} && f(0) = 0 \\ &\text{Valores en los extremos:} && f(-2) = (-2)^{2/3} = \sqrt[3]{4} \\ & && f(3) = (3)^{2/3} = \sqrt[3]{9}. \end{aligned}$$

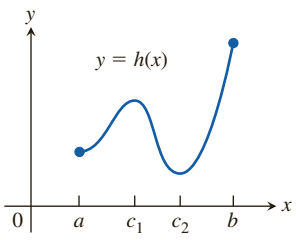
De acuerdo con esta lista, podemos ver que el valor máximo absoluto de la función es $\sqrt[3]{9} \approx 2.08$, y se alcanza en el extremo derecho del intervalo, en $x = 3$. El valor mínimo absoluto es 0, y se alcanza en el punto interior $x = 0$ donde la gráfica tiene una cúspide (figura 4.9). ■

Ejercicios 4.1

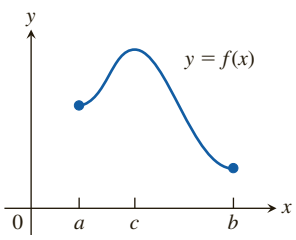
Obtención de los extremos a partir de gráficas

En los ejercicios 1 a 6, determine a partir de la gráfica si la función tiene valores extremos absolutos en $[a, b]$. Después, explique la congruencia de su respuesta con el teorema 1.

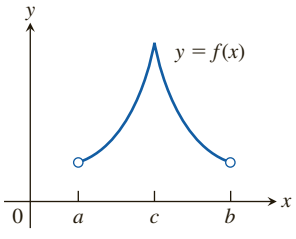
1.



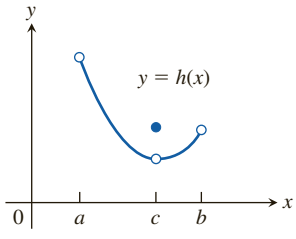
2.



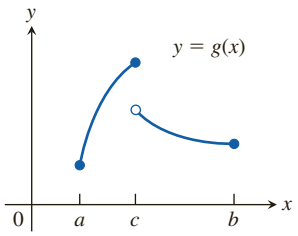
3.



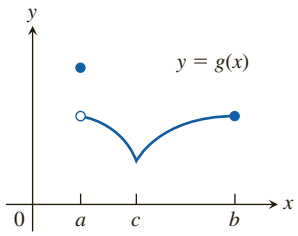
4.



5.

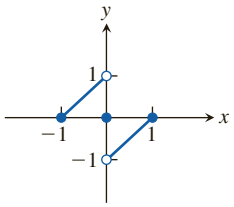


6.

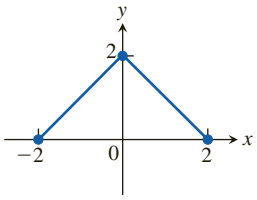


En los ejercicios 7 a 10, obtenga los extremos absolutos e indique dónde se alcanzan.

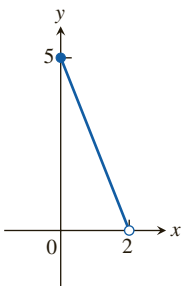
7.



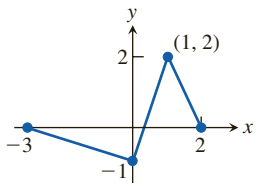
8.



9.



10.



En los ejercicios 11 a 14, relacione cada tabla con su gráfica.

11.

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	5

12.

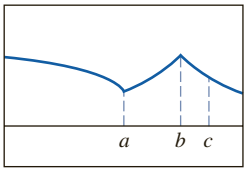
x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	−5

13.

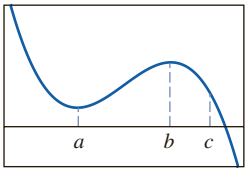
x	$f'(x)$
a	no existe
b	0
c	−2

14.

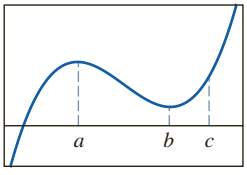
x	$f'(x)$
a	no existe
b	no existe
c	−1.7



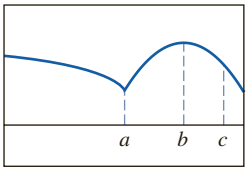
a)



b)



c)



d)

En los ejercicios 15 a 20, dibuje la gráfica de cada función y determine si la función tiene valores extremos absolutos en su dominio. Explique de qué manera su respuesta es congruente con el teorema 1.

15. $f(x) = |x|, \quad -1 < x < 2$

16. $y = \dfrac{6}{x^2 + 2}, \quad -1 < x < 1$

17. $g(x) = \begin{cases} -x, & 0 \le x < 1 \\ x - 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

18. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & -1 \le x < 0 \\ \sqrt{x}, & 0 \le x \le 4 \end{cases}$

19. $y = 3 \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < 2\pi$

20. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \le x < 0 \\ \cos x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Extremos absolutos en intervalos cerrados acotados

En los ejercicios 21 a 36, obtenga los valores máximos y mínimos absolutos de cada función en el intervalo dado. Después, grafique la función. Identifique los puntos de la gráfica donde se presentan los extremos absolutos e incluya sus coordenadas.

21. $f(x) = \dfrac{2}{3}x - 5, \quad -2 \le x \le 3$

22. $f(x) = -x - 4, \quad -4 \le x \le 1$

23. $f(x) = x^2 - 1, \quad -1 \le x \le 2$

24. $f(x) = 4 - x^3, \quad -2 \le x \le 1$

25. $F(x) = -\dfrac{1}{x^2}, \quad 0.5 \le x \le 2$

26. $F(x) = -\dfrac{1}{x}, \quad -2 \le x \le -1$

27. $h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad -1 \le x \le 8$

28. $h(x) = -3x^{2/3}, \quad -1 \le x \le 1$

29. $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \le x \le 1$

30. $g(x) = -\sqrt{5 - x^2}, \quad -\sqrt{5} \le x \le 0$

31. $f(\theta) = \operatorname{sen} \theta, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{5\pi}{6}$

32. $f(\theta) = \tan \theta, \quad -\dfrac{\pi}{3} \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$

33. $g(x) = \csc x, \quad \dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{2\pi}{3}$

34. $g(x) = \sec x, \quad -\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{6}$

35. $f(t) = 2 - |t|, \quad -1 \le t \le 3$

36. $f(t) = |t - 5|, \quad 4 \le t \le 7$

En los ejercicios 37 a 40, obtenga los valores máximos y mínimos absolutos e indique dónde se alcanzan.

37. $f(x) = x^{4/3}, \quad -1 \le x \le 8$

38. $f(x) = x^{5/3}, \quad -1 \le x \le 8$

39. $g(\theta) = \theta^{3/5}, \quad -32 \le \theta \le 1$

40. $h(\theta) = 3\theta^{2/3}, \quad -27 \le \theta \le 8$

Obtención de puntos críticos

En los ejercicios 41 a 48, obtenga todos los puntos críticos de cada función.

41. $y = x^2 - 6x + 7$

42. $f(x) = 6x^2 - x^3$

43. $f(x) = x(4 - x)^3$

44. $g(x) = (x - 1)^2(x - 3)^2$

45. $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$

46. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$

47. $y = x^2 - 32\sqrt{x}$

48. $g(x) = \sqrt{2x - x^2}$

Obtención de valores extremos

En los ejercicios 49 a 58, obtenga los valores extremos (absolutos y locales) de la función en su dominio natural, y especifique dónde se alcanzan.

49. $y = 2x^2 - 8x + 9$

50. $y = x^3 - 2x + 4$

51. $y = x^3 + x^2 - 8x + 5$

52. $y = x^3(x - 5)^2$

53. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

54. $y = x - 4\sqrt{x}$

55. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$

56. $y = \sqrt{3 + 2x - x^2}$

57. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

58. $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}$

Extremos locales y puntos críticos

En los ejercicios 59 a 66, obtenga los puntos críticos, los extremos del dominio y los valores extremos (absolutos y locales) de cada función.

59. $y = x^{2/3}(x + 2)$

60. $y = x^{2/3}(x^2 - 4)$

61. $y = x\sqrt{4 - x^2}$

62. $y = x^2\sqrt{3 - x}$

63. $y = \begin{cases} 4 - 2x, & x \le 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$

64. $y = \begin{cases} 3 - x, & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2, & x \ge 0 \end{cases}$

65. $y = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & x \le 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & x > 1 \end{cases}$

66. $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{15}{4}, & x \le 1 \\ x^3 - 6x^2 + 8x, & x > 1 \end{cases}$

En los ejercicios 67 y 68, justifique sus respuestas.

67. Sea $f(x) = (x - 2)^{2/3}$.

a) ¿Existe $f'(2)$?

b) Demuestre que el único valor extremo local de f se alcanza en $x = 2$.

c) ¿El resultado del inciso *b)* contradice el teorema del valor extremo?

d) Repita los incisos *a)* y *b)* para $f(x) = (x - a)^{2/3}$, reemplazando 2 por a.

68. Sea $f(x) = |x^3 - 9x|$.

a) ¿$f'(0)$ existe?

b) ¿$f'(3)$ existe?

c) ¿$f'(-3)$ existe?

d) Determine todos los extremos de f.

Teoría y ejemplos

69. Un mínimo sin derivada La función $f(x) = |x|$ tiene un valor mínimo absoluto en $x = 0$, a pesar de que la función f no es diferenciable en $x = 0$. ¿Esto es congruente con el teorema 2? Justifique su respuesta.

70. Funciones pares Si una función par $f(x)$ tiene un valor máximo local en $x = c$, ¿se puede decir algo acerca del valor de f en $x = -c$? Justifique su respuesta.

71. Funciones impares Si una función par $g(x)$ tiene un valor mínimo local en $x = c$, ¿se puede decir algo acerca del valor de g en $x = -c$? Justifique su respuesta.

72. No existen puntos críticos o extremos del intervalo (o intervalos) dominio Sabemos cómo obtener los valores extremos de una función continua $f(x)$ averiguando sus valores en los puntos críticos y en los extremos del intervalo. Pero, ¿qué ocurre si *no* hay puntos críticos ni extremos? ¿Existen realmente tales funciones? Justifique sus respuestas.

73. La función

$$V(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x), \qquad 0 < x < 5,$$

modela el volumen de una caja.

a) Obtenga los valores extremos de V.

b) Interprete los valores obtenidos en el inciso *a)* en términos del volumen de la caja.

74. Funciones cúbicas Considere la función cúbica

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

a) Demuestre que f puede tener 0, 1 o 2 puntos críticos. Dé ejemplos y dibuje gráficas para apoyar su argumento.

b) ¿Cuántos extremos locales puede tener f?

75. Altura máxima de un cuerpo que se mueve verticalmente La altura de un cuerpo que se mueve verticalmente está dada por

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0, \qquad g > 0,$$

con s en metros y t en segundos. Obtenga la altura máxima del cuerpo.

76. Pico de la corriente alterna Suponga que en cualquier instante t (en segundos) la corriente i (en amperes) en un circuito de corriente alterna es $i = 2\cos t + 2\operatorname{sen} t$. ¿Cuál es la corriente pico (la de mayor magnitud) de este circuito?

T Grafique las funciones de los ejercicios 77 a 80. Después, obtenga los valores extremos de la función en el intervalo e indique dónde se alcanzan.

77. $f(x) = |x - 2| + |x + 3|, \quad -5 \le x \le 5$

78. $g(x) = |x - 1| - |x - 5|, \quad -2 \le x \le 7$

79. $h(x) = |x + 2| - |x - 3|, \quad -\infty < x < \infty$

80. $k(x) = |x + 1| + |x - 3|, \quad -\infty < x < \infty$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 81 a 86, use un software matemático para obtener los extremos absolutos de la función dada en el intervalo cerrado que se especifica. Ejecute los siguientes pasos.

a) Grafique la función en el intervalo para conocer su comportamiento general ahí.

b) Obtenga los puntos interiores donde $f' = 0$. (En algunos ejercicios tendrá que usar un programa de soluciones de ecuaciones numéricas para aproximar el resultado). Tal vez también deba graficar f'.

c) Obtenga los puntos interiores donde f' no existe.

d) Evalúe la función en todos los puntos obtenidos en los incisos *b)* y *c)*, y en los puntos extremos del intervalo.

e) Obtenga los valores extremos absolutos de la función en el intervalo e identifique dónde se alcanzan.

81. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4x + 2, \quad [-20/25, 64/25]$

82. $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1, \quad [-3/4, 3]$

83. $f(x) = x^{2/3}(3 - x), \quad [-2, 2]$

84. $f(x) = 2 + 2x - 3x^{2/3}, \quad [-1, 10/3]$

85. $f(x) = \sqrt{x} + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

86. $f(x) = x^{3/4} - \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}, \quad [0, 2\pi]$

4.2 El teorema del valor medio

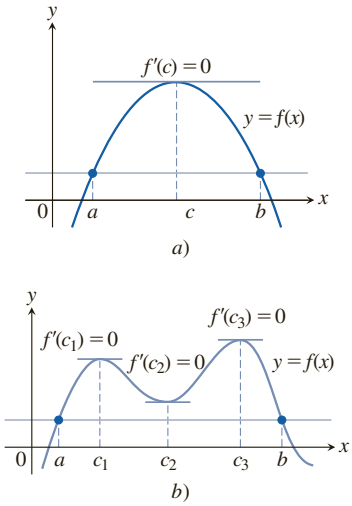


FIGURA 4.10 El teorema de Rolle afirma que una curva diferenciable tiene al menos una tangente horizontal entre dos puntos cualesquiera donde la cruce una recta horizontal. Puede tener sólo una, como en *a*), o más de una, como en *b*).

Sabemos que las funciones constantes tienen derivada cero, pero ¿puede haber una función más complicada cuya derivada sea siempre cero? ¿Cuál es la relación entre dos funciones que tienen derivadas idénticas en un intervalo? Éstas y otras preguntas se contestan en este capítulo vía el teorema del valor medio. Primero se presenta un caso especial, conocido como teorema de Rolle, el cual se utiliza para demostrar el teorema del valor medio.

Teorema de Rolle

Como lo sugiere su gráfica, si una función diferenciable cruza una recta horizontal en dos puntos diferentes, existe al menos un punto entre ellos donde la tangente a la gráfica es horizontal y la derivada es cero (figura 4.10). A continuación se enuncia y se demuestra este resultado.

TEOREMA 3: Teorema de Rolle Suponga que $y = f(x)$ es continua en todo punto del intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en todo punto de su interior (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces, existe al menos un número c en (a, b) en el que $f'(c) = 0$.

Demostración De acuerdo con el teorema 1, f, al ser continua, alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos en $[a, b]$. Éstos sólo se presentan en

1. puntos interiores donde f' es cero,
2. puntos interiores donde f' no existe,
3. los puntos extremos del dominio de la función, en este caso, a y b.

Por hipótesis, f tiene derivada en todo punto interior. Esto descarta la posibilidad (2), dejándonos con los puntos interiores donde $f' = 0$ y con los puntos extremos a y b.

Si el máximo o el mínimo se alcanzan en un punto c entre a y b, entonces, $f'(c) = 0$, de acuerdo con el teorema 2 de la sección 4.1; hemos encontrado un punto del teorema de Rolle.

Si tanto el máximo absoluto como el mínimo absoluto se alcanzan en los puntos extremos del intervalo, entonces, como $f(a) = f(b)$, f debe ser una función constante con $f(x) = f(a) = f(b)$ para toda $x \in [a, b]$. Por lo tanto, $f'(x) = 0$ y el punto c puede ser cualquier punto en el interior (a, b). ■

Las hipótesis del teorema 3 son necesarias. Si fallan, aunque sea en un solo punto, la gráfica podría no tener una tangente horizontal (figura 4.11).

El teorema de Rolle se puede combinar con el teorema del valor intermedio para mostrar cuándo sólo existe una solución real de la ecuación $f(x) = 0$, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Demuestre que la ecuación

$$x^3 + 3x + 1 = 0$$

tiene exactamente una solución real.

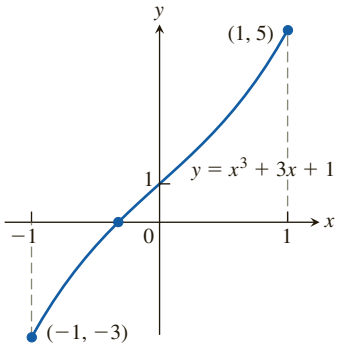
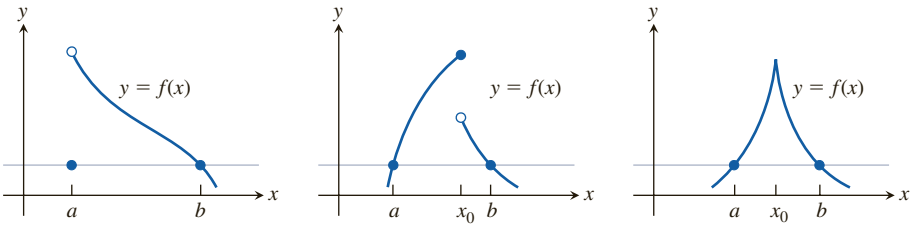


FIGURA 4.12 El único cero real del polinomio $y = x^3 + 3x + 1$ es el que se muestra aquí, donde la curva cruza el eje x entre -1 y 0 (ejemplo 1).



a) Discontinua en un punto extremo de $[a, b]$

b) Discontinua en un punto interior de $[a, b]$

c) Continua en $[a, b]$ pero no es diferenciable en un punto interior

FIGURA 4.11 Podría no haber tangente horizontal si las hipótesis del teorema de Rolle no se cumplen.

Solución Definimos la función continua

$$f(x) = x^3 + 3x + 1.$$

Como $f(-1) = -3$ y $f(0) = 1$, el teorema del valor intermedio afirma que la gráfica de f cruza el eje x en algún lugar del intervalo abierto $(-1, 0)$. (Vea la figura 4.12). Ahora, si hubiera tan sólo dos puntos $x = a$ y $x = b$ donde $f(x)$ fuera cero, el teorema de Rolle garantizaría la existencia de un punto $x = c$ entre ellos, donde f' fuera cero. Sin embargo, la derivada

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

nunca es cero (ya que siempre es positiva). Por lo tanto, f no tiene más de un cero. ■

El uso principal que daremos al teorema de Rolle es para demostrar el teorema del valor medio.

El teorema del valor medio

El teorema del valor medio, enunciado por primera vez por Joseph-Louis Lagrange, es una versión "inclinada" del teorema de Rolle (figura 4.13). El teorema del valor medio garantiza la existencia de un punto donde la recta tangente es paralela a la secante que une A y B.

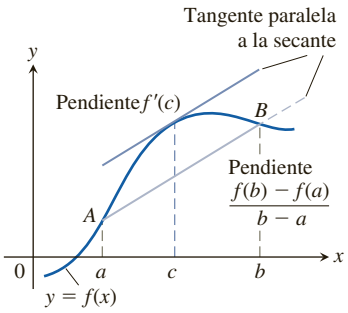


FIGURA 4.13 Geométricamente, el teorema del valor medio afirma que, en algún sitio entre a y b, la curva tiene al menos una tangente paralela a la secante que une A y B.

TEOREMA 4: Teorema del valor medio Suponga que $y = f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el interior del intervalo (a, b). Entonces, existe al menos un punto c en (a, b) en el cual

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{1}$$

Demostración Dibujamos la gráfica de f y trazamos una recta que pase por los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$. (Vea la figura 4.14). La recta secante es la gráfica de la función

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{2}$$

(ecuación punto-pendiente). La diferencia vertical entre las gráficas de f y g en x es

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \end{aligned} \tag{3}$$

La figura 4.15 muestra juntas las gráficas de f, g y h.

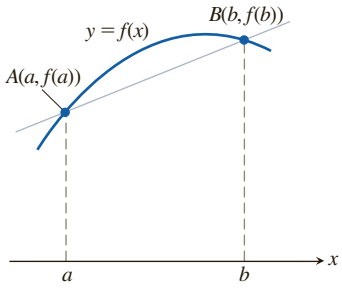


FIGURA 4.14 Gráfica de f y la secante AB en el intervalo $[a, b]$.

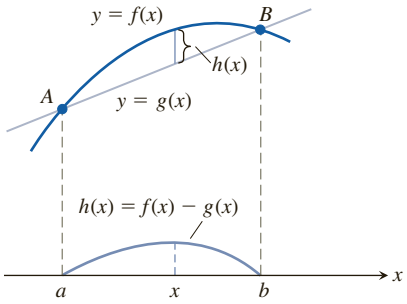


FIGURA 4.15 La secante AB es la gráfica de la función $g(x)$. La función $h(x) = f(x) - g(x)$ da la distancia vertical entre las gráficas de f y g en x.

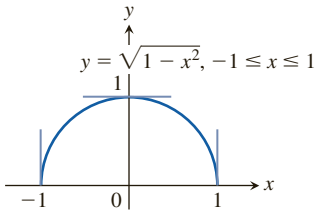


FIGURA 4.16 La función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ satisface las hipótesis (y la conclusión) del teorema del valor medio en $[-1, 1]$ aun cuando f no es diferenciable en -1 y 1.

La función h satisface las hipótesis del teorema de Rolle en $[a, b]$. Es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) porque tanto f como g lo son. Además, $h(a) = h(b) = 0$, porque tanto la gráfica de f como la de g pasan por A y B. Por lo tanto, $h'(c) = 0$ en algún punto $c \in (a, b)$. Éste es el punto que buscamos para la ecuación (1) del teorema.

Para verificar la ecuación 1, diferenciamos ambos lados de la ecuación (3) con respecto a x y, después, evaluamos en $x = c$:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{Derivada de la ecuación (3) . . .}$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{. . . con } x = c$$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad h'(c) = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad \text{Se despeja}$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

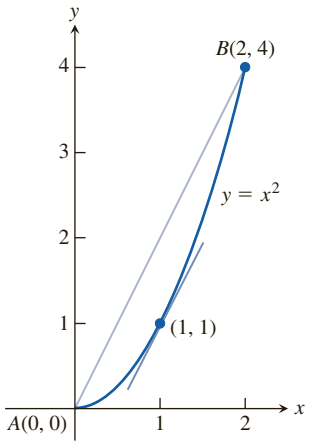


FIGURA 4.17 Como vimos en el ejemplo 2, $c = 1$ es el punto donde la tangente es paralela a la recta secante.

Las hipótesis del teorema del valor medio no requieren que f sea diferenciable en a o en b. La continuidad lateral en a o en b es suficiente (figura 4.16).

EJEMPLO 2 La función $f(x) = x^2$ (figura 4.17) es continua en $0 \le x \le 2$ y diferenciable en $0 < x < 2$. Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, el teorema del valor medio sostiene que en algún punto c del intervalo, la derivada $f'(x) = 2x$ debe tener el valor $(4 - 0)/(2 - 0) = 2$. En este caso, podemos obtener c resolviendo la ecuación $2c = 2$ para determinar que $c = 1$. Sin embargo, no siempre es fácil obtener c algebraicamente, aun cuando sepamos que siempre existe. ■

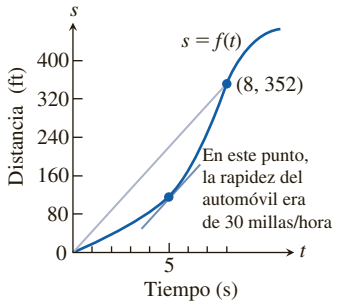


FIGURA 4.18 Distancia contra el tiempo transcurrido para el automóvil del ejemplo 3.

Una interpretación física

Podemos visualizar el número $(f(b) - f(a))/(b - a)$ como el cambio promedio en f en el intervalo $[a, b]$, y $f'(c)$ como el cambio instantáneo. Entonces, el teorema del valor medio afirma que, en algún punto interior, el cambio instantáneo debe ser igual al cambio promedio en todo el intervalo.

EJEMPLO 3 Si un automóvil que acelera desde cero tarda 8 s para recorrer 352 ft, su velocidad promedio en el intervalo de 8 s es de $352/8 = 44$ ft/s. El teorema del valor medio sostiene que, en algún momento durante la aceleración, el velocímetro debe marcar exactamente 30 millas/hora (44 ft/s) (figura 4.18). ■

Consecuencias matemáticas

Al principio de esta sección preguntamos qué clase de función tiene una derivada igual a cero en un intervalo. El primer corolario del teorema del valor medio brinda la respuesta de que sólo las funciones constantes tienen derivadas iguales a cero.

COROLARIO 1 Si $f'(x) = 0$ en todo punto x de un intervalo abierto (a, b), entonces, $f(x) = C$ para toda $x \in (a, b)$, donde C es una constante.

Demostración Queremos demostrar que f tiene un valor constante en el intervalo (a, b). Lo haremos mostrando que si x_1 y x_2 son dos puntos cualesquiera en (a, b) con $x_1 < x_2$, entonces, $f(x_1) = f(x_2)$. Ahora f satisface las hipótesis del teorema del valor medio en $[x_1, x_2]$: es diferenciable en cada punto de $[x_1, x_2]$ y, por lo tanto, también continua en cada punto. Por consiguiente,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

en algún punto c entre x_1 y x_2. Como $f' = 0$ en todo (a, b), esta ecuación implica, sucesivamente, que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0, \qquad f(x_2) - f(x_1) = 0, \qquad \text{y} \qquad f(x_1) = f(x_2). \qquad \blacksquare$$

Al principio de esta sección se preguntó también cuál es la relación entre dos funciones que tienen derivadas idénticas en un intervalo. El siguiente corolario nos dice que sus valores en el intervalo tienen una diferencia constante.

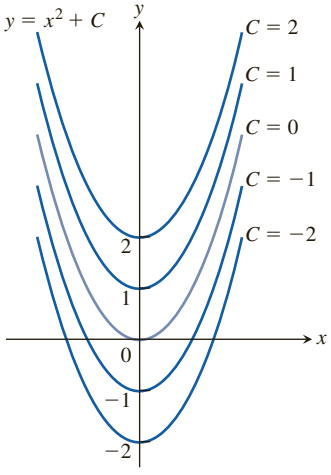


FIGURA 4.19 Desde un punto de vista geométrico, el corolario 2 del teorema del valor medio afirma que las gráficas de funciones con derivadas idénticas en un intervalo difieren sólo por un desplazamiento vertical. Las gráficas de las funciones con derivadas $2x$ son las parábolas $y = x^2 + C$, mostradas aquí para ciertos valores seleccionados de C.

COROLARIO 2 Si $f'(x) = g'(x)$ en cada punto x de un intervalo abierto (a, b), entonces, existe una constante C tal que $f(x) = g(x) + C$ para toda $x \in (a, b)$; es decir, $f - g$ es una función constante en (a, b).

Demostración En cada punto $x \in (a, b)$ la derivada de la función diferencia $h = f - g$ es

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Por lo tanto, $h(x) = C$ en (a, b) según el corolario 1; es decir, $f(x) - g(x) = C$ en (a, b), de modo que $f(x) = g(x) + C$. $\blacksquare$

Los corolarios 1 y 2 también son válidos si el intervalo abierto (a, b) no es acotado. Esto es, siguen siendo válidos si el intervalo es (a, ∞), $(-\infty, b)$ o $(-\infty, \infty)$.

El corolario 2 desempeñará un papel importante cuando se analicen las antiderivadas en la sección 4.7. Tal corolario nos dice, por ejemplo, que como la derivada de $f(x) = x^2$ en $(-\infty, \infty)$ es $2x$, cualquier otra función con derivada igual a $2x$ en $(-\infty, \infty)$ debe ser de la forma $x^2 + C$ para algún valor de C (figura 4.19).

EJEMPLO 4 Obtenga la función $f(x)$ cuya derivada es sen x y cuya gráfica pasa por el punto $(0, 2)$.

Solución Como la derivada de $g(x) = -\cos x$ es $g'(x) = \text{sen } x$, vemos que f y g tienen la misma derivada. Entonces, el corolario 2 afirma que $f(x) = -\cos x + C$ para alguna cons-

tante C. Como la gráfica de f pasa por el punto $(0, 2)$, el valor de C se determina a partir de la condición de que $f(0) = 2$:

$$f(0) = -\cos(0) + C = 2, \qquad \text{por lo que} \qquad C = 3.$$

La función es $f(x) = -\cos x + 3$. ■

Obtención de la velocidad y la posición a partir de la aceleración

Podemos usar el corolario 2 para obtener las funciones de velocidad y posición de un objeto que se desplaza a lo largo de una recta vertical. Suponga que el objeto cae libremente a partir del reposo, con aceleración de 9.8 m/s^2. Suponemos también que la posición $s(t)$ del cuerpo es positiva de arriba hacia abajo a partir de la posición de reposo (de modo que la recta coordenada vertical apunta *hacia abajo*, en la dirección del movimiento, con la posición de reposo en 0).

Sabemos que $v(t)$ es una función cuya derivada es 9.8. También sabemos que la derivada de $g(t) = 9.8t$ es 9.8. Según el corolario 2,

$$v(t) = 9.8t + C$$

para alguna constante C. Puesto que el cuerpo parte del reposo, $v(0) = 0$. Por lo tanto,

$$9.8(0) + C = 0, \qquad \text{y} \qquad C = 0.$$

La función velocidad debe ser $v(t) = 9.8t$. ¿Qué hay de la función de posición $s(t)$?

Sabemos que $s(t)$ es una función cuya derivada es $9.8t$. También sabemos que la derivada de $f(t) = 4.9t^2$ es $9.8t$. Según el corolario 2,

$$s(t) = 4.9t^2 + C$$

para alguna constante C. Como $s(0) = 0$,

$$4.9(0)^2 + C = 0, \qquad \text{y} \qquad C = 0.$$

La función de posición es $s(t) = 4.9t^2$ hasta que el cuerpo toca el suelo.

La habilidad para obtener funciones a partir de sus razones de cambio es una de las herramientas más poderosas del cálculo. Como veremos, esta capacidad es fundamental para los desarrollos matemáticos en el capítulo 5.

Ejercicios 4.2

Verificación del teorema del valor medio

Obtenga el valor o los valores de c que satisfacen la ecuación

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

en la conclusión del teorema del valor medio para las funciones y los intervalos de los ejercicios 1 a 6.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad [0, 1]$

2. $f(x) = x^{2/3}, \quad [0, 1]$

3. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad \left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$

4. $f(x) = \sqrt{x - 1}, \quad [1, 3]$

5. $f(x) = x^3 - x^2, \quad [-1, 2]$

6. $g(x) = \begin{cases} x^3, & -2 \le x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 2 \end{cases}$

¿Cuáles de las funciones en los ejercicios 7 a 12 satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo dado, y cuáles no? Justifique sus respuestas.

7. $f(x) = x^{2/3}, \quad [-1, 8]$

8. $f(x) = x^{4/5}, \quad [0, 1]$

9. $f(x) = \sqrt{x(1 - x)}, \quad [0, 1]$

10. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & -2 \le x \le -1 \\ 2x^2 - 3x - 3, & -1 < x \le 0 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & 0 \le x \le 2 \\ 6x - x^2 - 7, & 2 < x \le 3 \end{cases}$

13. La función

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

es cero en $x = 0$ y $x = 1$ y diferenciable en $(0, 1)$, pero su derivada en $(0, 1)$ nunca es cero. ¿Cómo es posible esto? ¿Acaso el teorema de Rolle no dice que la derivada tiene que ser cero en alguna parte del intervalo $(0, 1)$? Justifique su respuesta.

14. ¿Para qué valores de a, m y b la función

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1 \\ mx + b, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$?

Raíces (ceros)

15. ***a)*** Grafique, sobre una recta, los ceros de cada polinomio junto con los ceros de su primera derivada.

i) $y = x^2 - 4$

ii) $y = x^2 + 8x + 15$

iii) $y = x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2$

iv) $y = x^3 - 33x^2 + 216x = x(x - 9)(x - 24)$

b) Use el teorema de Rolle para demostrar que, entre cada dos ceros de $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, hay un cero de

$$nx^{n-1} + (n - 1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

16. Suponga que f'' es continua en $[a, b]$ y que f tiene tres ceros en el intervalo. Demuestre que f'' tiene al menos un cero en (a, b). Generalice este resultado.

17. Demuestre que si $f'' > 0$ en todo el intervalo $[a, b]$, entonces, f' tiene a lo más un cero en $[a, b]$. ¿Qué ocurre si $f'' < 0$ en todo el intervalo $[a, b]$?

18. Demuestre que un polinomio cúbico puede tener, a lo más, tres ceros reales.

Demuestre que las funciones de los ejercicios 19 a 26 tienen exactamente un cero en el intervalo dado.

19. $f(x) = x^4 + 3x + 1, \quad [-2, -1]$

20. $f(x) = x^3 + \dfrac{4}{x^2} + 7, \quad (-\infty, 0)$

21. $g(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1 + t} - 4, \quad (0, \infty)$

22. $g(t) = \dfrac{1}{1 - t} + \sqrt{1 + t} - 3.1, \quad (-1, 1)$

23. $r(\theta) = \theta + \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right) - 8, \quad (-\infty, \infty)$

24. $r(\theta) = 2\theta - \cos^2\theta + \sqrt{2}, \quad (-\infty, \infty)$

25. $r(\theta) = \sec\theta - \dfrac{1}{\theta^3} + 5, \quad (0, \pi/2)$

26. $r(\theta) = \tan\theta - \cot\theta - \theta, \quad (0, \pi/2)$

Obtención de funciones a partir de derivadas

27. Suponga que $f(-1) = 3$ y que $f'(x) = 0$ para toda x. ¿Debe ser $f(x) = 3$ para toda x? Justifique su respuesta.

28. Suponga que $f(0) = 5$ y que $f'(x) = 2$ para toda x. ¿Debe ser $f(x) = 2x + 5$ para toda x? Justifique su respuesta.

29. Suponga que $f'(x) = 2x$ para toda x. Obtenga $f(2)$ si

a) $f(0) = 0$ ***b)*** $f(1) = 0$ ***c)*** $f(-2) = 3$.

30. ¿Qué se puede decir de las funciones cuyas derivadas son constantes? Justifique su respuesta.

En los ejercicios 31 a 36, obtenga todas las funciones posibles con la derivada que se indica.

31. ***a)*** $y' = x$ ***b)*** $y' = x^2$ ***c)*** $y' = x^3$

32. ***a)*** $y' = 2x$ ***b)*** $y' = 2x - 1$ ***c)*** $y' = 3x^2 + 2x - 1$

33. ***a)*** $y' = -\dfrac{1}{x^2}$ ***b)*** $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ ***c)*** $y' = 5 + \dfrac{1}{x^2}$

34. ***a)*** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ***b)*** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ***c)*** $y' = 4x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

35. ***a)*** $y' = \operatorname{sen} 2t$ ***b)*** $y' = \cos\dfrac{t}{2}$ ***c)*** $y' = \operatorname{sen} 2t + \cos\dfrac{t}{2}$

36. ***a)*** $y' = \sec^2\theta$ ***b)*** $y' = \sqrt{\theta}$ ***c)*** $y' = \sqrt{\theta} - \sec^2\theta$

En los ejercicios 37 a 40, obtenga la función con la derivada que se indica, cuya gráfica pasa por el punto P.

37. $f'(x) = 2x - 1, \quad P(0, 0)$

38. $g'(x) = \dfrac{1}{x^2} + 2x, \quad P(-1, 1)$

39. $r'(\theta) = 8 - \csc^2\theta, \quad P\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$

40. $r'(t) = \sec t \tan t - 1, \quad P(0, 0)$

Obtención de la posición a partir de la velocidad o de la aceleración

En los ejercicios 41 a 44 se indican la velocidad $v = ds/dt$ y la posición inicial de un objeto que se desplaza a lo largo de una recta coordenada. Obtenga la posición del objeto en el tiempo t.

41. $v = 9.8t + 5, \quad s(0) = 10$

42. $v = 32t - 2, \quad s(0.5) = 4$

43. $v = \operatorname{sen}\pi t, \quad s(0) = 0$

44. $v = \dfrac{2}{\pi}\cos\dfrac{2t}{\pi}, \quad s(\pi^2) = 1$

En los ejercicios 45 a 48 se indica la aceleración $a = d^2s/dt^2$, la velocidad inicial y la posición inicial de un objeto que se desplaza en una recta coordenada. Obtenga la posición del objeto en el tiempo t.

45. $a = 32, \quad v(0) = 20, \quad s(0) = 5$

46. $a = 9.8, \quad v(0) = -3, \quad s(0) = 0$

47. $a = -4 \operatorname{sen} 2t, \quad v(0) = 2, \quad s(0) = -3$

48. $a = \dfrac{9}{\pi^2}\cos\dfrac{3t}{\pi}, \quad v(0) = 0, \quad s(0) = -1$

Aplicaciones

49. Cambio de temperatura El indicador de un termómetro de mercurio tardó 14 s en subir de −19°C a 100°C cuando se sacó de un congelador y se colocó en agua hirviendo. Demuestre que el mercurio, en algún momento, sube a una razón de 8.5°C/s

50. Un camionero recibió una multa en la caseta de cobro de una autopista, según la cual en 2 horas había recorrido 159 millas en una carretera con un límite de velocidad de 65 millas/hora. El camionero fue multado por exceso de velocidad. ¿Por qué?

51. Los relatos clásicos cuentan que una vez un trirreme (barco de guerra de la antigua Grecia y Roma) con 170 remos recorrió 184 millas náuticas en 24 horas. Explique por qué, en algún momento de esta hazaña, la rapidez del trirreme excedió los 7.5 nudos (millas náuticas por hora).

52. Un maratonista corrió en 2.2 horas la maratón de la ciudad de Nueva York, cuya ruta es de 26.2 millas. Demuestre que el maratonista corrió exactamente a 11 millas/hora al menos dos veces durante el recorrido, suponiendo que las velocidades inicial y final son cero.

53. Demuestre que en algún instante durante un viaje de 2 horas en automóvil, la lectura del velocímetro será igual a la rapidez promedio del viaje.

54. Caída libre en la Luna La aceleración de la gravedad en la Luna es de 1.6 m/s^2. Si se lanza una piedra al interior de un cráter, ¿qué tan rápido estará cayendo justo antes de tocar el fondo 30 s después?

Teoría y ejemplos

55. Media geométrica de *a* y *b* La *media geométrica* de dos números positivos a y b es $\sqrt{ab}$. Demuestre que el valor de c en la conclusión del teorema del valor medio para $f(x) = 1/x$ en un intervalo de números positivos $[a, b]$ es $c = \sqrt{ab}$.

56. Media aritmética de *a* y *b* La *media aritmética* de dos números a y b es $(a + b)/2$. Demuestre que el valor de c en la conclusión del teorema del valor medio para $f(x) = x^2$ en un intervalo $[a, b]$ es $c = (a + b)/2$.

T **57.** Grafique la función

$$f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x + 2) - \operatorname{sen}^2(x + 1).$$

¿Qué sucede con la gráfica? ¿Por qué se comporta así la función? Justifique sus respuestas.

58. Teorema de Rolle

a) Construya un polinomio $f(x)$ que tenga ceros en $x = -2, -1, 0, 1$ y 2.

b) Grafique juntas f y su derivada f'. ¿Cómo se relaciona lo que observa con el teorema de Rolle?

c) ¿Considera que $g(x) = \operatorname{sen} x$ y su derivada g' ilustran el mismo fenómeno que f y f'?

59. Solución única Suponga que f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Suponga también que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos y que $f' \neq 0$ entre a y b. Demuestre que $f(x) = 0$ solamente una vez entre a y b.

60. Tangentes paralelas Suponga que f y g son diferenciables en $[a, b]$ y que $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$. Demuestre que hay al menos un punto entre a y b donde las tangentes a las gráficas de f y g son paralelas o son la misma recta. Ilustre con un diagrama.

61. Suponga que $f'(x) \leq 1$ para $1 \leq x \leq 4$. Demuestre que $f(4) - f(1) \leq 3$.

62. Suponga que $0 < f'(x) < 1/2$ para todos los valores de x. Demuestre que $f(-1) < f(1) < 2 + f(-1)$.

63. Demuestre que $|\cos x - 1| \leq |x|$ para todos los valores de x. (*Sugerencia:* Considere $f(t) = \cos t$ en $[0, x]$).

64. Demuestre que para números a y b cualesquiera, la desigualdad $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$ es verdadera.

65. Suponga que las gráficas de dos funciones diferenciables, $f(x)$ y $g(x)$, inician en el mismo punto del plano y que las funciones tienen la misma razón de cambio en todos los puntos. ¿Esto significa que las gráficas son idénticas? Justifique su respuesta.

66. Si $|f(w) - f(x)| \leq |w - x|$ para todos los valores w y x, y f es una función diferenciable, demuestre que $-1 \leq f'(x) \leq 1$ para todos los valores de x.

67. Suponga que f es diferenciable en $a \leq x \leq b$ y que $f(b) < f(a)$. Demuestre que f' es negativa en algún punto entre a y b.

68. Sea f una función definida en un intervalo $[a, b]$. ¿Qué condiciones pueden imponerse a f para garantizar que

$$\text{mín } f' \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \text{máx } f',$$

donde mín f' y máx f' son los valores mínimo y máximo de f' en $[a, b]$? Justifique sus respuestas.

T **69.** Use las desigualdades del ejercicio 68 para estimar $f(0.1)$ si $f'(x) = 1/(1 + x^4 \cos x)$ para $0 \leq x \leq 0.1$ y $f(0) = 1$.

T **70.** Use las desigualdades del ejercicio 68 para estimar $f(0.1)$ si $f'(x) = 1/(1 - x^4)$ para $0 \leq x \leq 0.1$ y $f(0) = 2$.

71. Sea f diferenciable en todo valor de x, y suponga que $f(1) = 1$, que $f' < 0$ en $(-\infty, 1)$ y que $f' > 0$ en $(1, \infty)$.

a) Demuestre que $f(x) \geq 1$ para toda x.

b) ¿Debe ser $f'(1) = 0$? Explique.

72. Sea $f(x) = px^2 + qx + r$ una función cuadrática definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Demuestre que existe exactamente un punto c en (a, b) en el cual f satisface la conclusión del teorema del valor medio.

4.3 Funciones monótonas y el criterio de la primera derivada

Para graficar una función diferenciable, es importante saber dónde crece (asciende de izquierda a derecha), y dónde decrece (desciende de izquierda a derecha) en un intervalo. En esta sección se presenta un criterio para determinar dónde crece y dónde decrece una función. También se explica cómo diagnosticar si en los puntos críticos de una función hay o no valores extremos.

Funciones crecientes y decrecientes

Como otro corolario del teorema del valor medio, se demuestra que las funciones con derivadas positivas son funciones crecientes, y las funciones con derivadas negativas son funciones decrecientes. Una función que es creciente o decreciente en un intervalo se dice que es **monótona** en ese intervalo.

COROLARIO 3 Suponga que f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b).

Si $f'(x) > 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces, f es creciente en $[a, b]$.

Si $f'(x) < 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces, f es decreciente en $[a, b]$.

Demostración Sean x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera en $[a, b]$ con $x_1 < x_2$. El teorema del valor medio aplicado a f en $[x_1, x_2]$ afirma que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

para alguna c entre x_1 y x_2. El signo del lado derecho de esta ecuación es el mismo que el signo de $f'(c)$ porque $x_2 - x_1$ es positivo. Por lo tanto, $f(x_2) > f(x_1)$ si f' es positiva en (a, b), y $f(x_2) < f(x_1)$ si f' es negativa en (a, b). ■

El corolario 3 nos dice que $f(x) = \sqrt{x}$ es creciente en el intervalo $[0, b]$ para cualquier $b > 0$ porque $f'(x) = 1/\sqrt{x}$ es positiva en $(0, b)$. La derivada no existe en $x = 0$, pero el corolario 3 aún se aplica. El corolario es válido también en el infinito, así como para intervalos no acotados, de modo que $f(x) = \sqrt{x}$ es creciente en $[0, \infty)$.

Para determinar los intervalos donde una función f crece o decrece, primero obtenemos todos los puntos críticos de f. Si $a < b$ son dos puntos críticos de una función f, y si la derivada f' es continua pero nunca igual a cero en el intervalo (a, b), entonces, según el teorema del valor intermedio aplicado a f', la derivada debe ser positiva o negativa en cualquier lugar de (a, b). Una manera de determinar el signo de f' en (a, b) es simplemente evaluar la derivada en algún punto c de (a, b). Si $f'(c) > 0$, entonces, $f'(x) > 0$ para toda x en (a, b), de manera que f es creciente en $[a, b]$, de acuerdo con el corolario 3; si $f'(c) < 0$, entonces, f es decreciente en $[a, b]$. El siguiente ejemplo ilustra cómo usar este procedimiento.

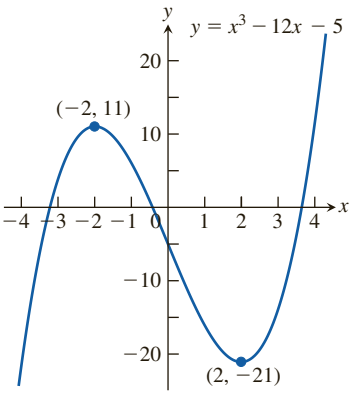


FIGURA 4.20 La función $f(x) = x^3 - 12x - 5$ es monótona en tres intervalos que no se traslapan (ejemplo 1).

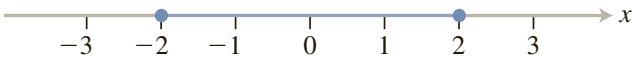
EJEMPLO 1 Obtenga los puntos críticos de $f(x) = x^3 - 12x - 5$ e identifique los intervalos abiertos en los que f es creciente y en los que es decreciente.

Solución La función f es continua y diferenciable en todas partes. La primera derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) \\ &= 3(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

es cero en $x = -2$ y $x = 2$. Estos puntos críticos subdividen el dominio de f para crear los intervalos abiertos que no se traslapan $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, \infty)$, en los cuales f' es positiva o negativa. Determinamos el signo de f' evaluando f' en un punto conveniente de cada subintervalo. A continuación, el comportamiento de f se identifica aplicando el corolario 3 a cada subintervalo. Los resultados se resumen en la siguiente tabla, y en la figura 4.20 se presenta la gráfica de f.

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
f' evaluada	$f'(-3) = 15$	$f'(0) = -12$	$f'(3) = 15$
Signo de f'	+	−	+
Comportamiento de f	creciente	decreciente	creciente



■

Usamos desigualdades "estrictas" basadas en el signo "menor que" ($<$) para identificar los intervalos en la tabla resumen del ejemplo 1, porque se especificaron intervalos abiertos. El corolario 3 afirma que podríamos usar también desigualdades $\leq$. Es decir, la función f del ejemplo es creciente en $-\infty < x \leq -2$, decreciente en $-2 \leq x \leq 2$, y creciente en $2 \leq x < \infty$. No hablamos de si la función es creciente o decreciente en un punto específico.

Prueba de la primera derivada para extremos locales

En la figura 4.21, en los puntos donde f tiene un valor mínimo, $f' < 0$ inmediatamente a la izquierda, y $f' > 0$ inmediatamente a la derecha. (Si el punto es un extremo del intervalo, sólo hay que considerar un lado). Así, la función es decreciente a la izquierda del valor

mínimo, y es creciente a su derecha. De manera similar, en los puntos donde f tiene un valor máximo, $f' > 0$ inmediatamente a la izquierda y $f' < 0$ inmediatamente a la derecha. Por lo tanto, la función es creciente a la izquierda del valor máximo y decreciente a su derecha. En resumen, en un punto extremo local, el signo de $f'(x)$ cambia.

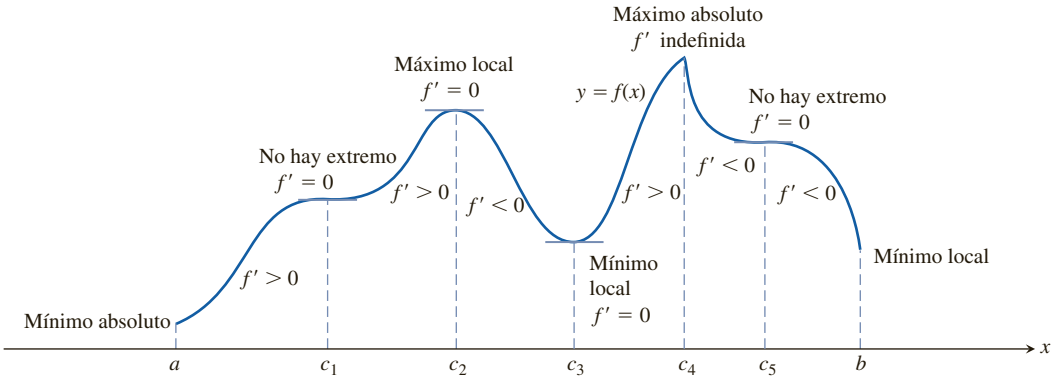


FIGURA 4.21 Los puntos críticos de una función determinan dónde es creciente y dónde es decreciente. La primera derivada cambia de signo en un punto crítico donde se localiza un extremo local.

Estas observaciones nos conducen a un criterio para determinar la presencia y naturaleza de valores extremos locales de las funciones diferenciables.

Criterio de la primera derivada para los extremos locales

Suponga que c es un punto crítico de una función continua f, y que f es diferenciable en todo punto de un intervalo que contiene a c, excepto, posiblemente, en c mismo. Al movernos a lo largo de este intervalo, de izquierda a derecha,

1. si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces, f tiene un mínimo local en c;
2. si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces, f tiene un máximo local en c;
3. si f' no cambia de signo en c (esto es, si f' es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados de c), entonces, f no tiene un extremo local en c.

El criterio para los extremos locales en los puntos extremos de un intervalo es similar, pero sólo hay que considerar un lado al determinar si f es creciente o decreciente, con base en el signo de f'.

Demostración del criterio de la primera derivada Parte (1). Como el signo de f' cambia de negativo a positivo en c, existen números a y b tales que $a < c < b$, $f' < 0$ en (a, c), y $f' > 0$ en (c, b). Si $x \in (a, c)$, entonces, $f(c) < f(x)$ porque $f' < 0$ implica que f es decreciente en $[a, c]$. Si $x \in (c, b)$, entonces, $f(c) < f(x)$ porque $f' > 0$ implica que f es creciente en $[c, b]$. Por lo tanto, $f(x) \geq f(c)$ para toda $x \in (a, b)$. Por definición, f tiene un mínimo local en c.

Las partes (2) y (3) se demuestran de manera similar. ■

EJEMPLO 2 Obtenga los puntos críticos de

$$f(x) = x^{1/3}(x - 4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}.$$

Identifique los intervalos abiertos en los cuales f es creciente o decreciente. Obtenga los valores extremos locales y absolutos de la función.

Solución La función f es continua en toda x, puesto que es el producto de dos funciones continuas, $x^{1/3}$ y $(x-4)$. La primera derivada

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{4/3} - 4x^{1/3}) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3}$$
$$= \frac{4}{3}x^{-2/3}(x-1) = \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}}$$

es cero en $x = 1$ e indefinida en $x = 0$. No hay puntos extremos en el dominio, de manera que los puntos críticos $x = 0$ y $x = 1$ son los únicos lugares donde f podría tener un valor extremo.

Los puntos críticos dividen el eje x en intervalos abiertos en los que f' es positiva o negativa. El patrón de los signos de f' revela el comportamiento de f en los puntos críticos y entre éstos, como se resume en la siguiente tabla.

Intervalo	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Signo de f'	$-$	$-$	$+$
Comportamiento de f	decreciente	decreciente	creciente

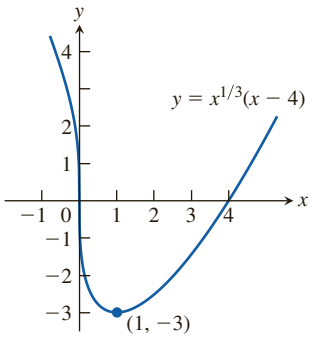


FIGURA 4.22 La función $f(x) = x^{1/3}(x-4)$ decrece cuando $x < 1$, y crece cuando $x > 1$ (ejemplo 2).

El corolario 3 del teorema del valor medio implica que f decrece en $(-\infty, 0)$, decrece en $(0, 1)$, y crece en $(1, \infty)$. El criterio de la primera derivada para extremos locales nos dice que f no tiene un valor extremo en $x = 0$ (f' no cambia de signo) y que f tiene un mínimo local en $x = 1$ (f' cambia de negativa a positiva).

El valor del mínimo local es $f(1) = 1^{1/3}(1-4) = -3$. Esto también es un mínimo absoluto porque f es decreciente en $(-\infty, 1)$ y creciente en $(1, \infty)$. La figura 4.22 muestra este valor en relación con la gráfica de la función.

Observe que $\lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty$, de modo que la gráfica de f tiene una tangente vertical en el origen. ■

EJEMPLO 3 Dentro del intervalo $0 \le x \le 2\pi$, obtenga los puntos críticos de

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1.$$

Identifique los intervalos abiertos en los que f es creciente y decreciente. Obtenga los valores extremos locales y absolutos de la función.

Solución La función f es continua en $[0, 2\pi]$ y diferenciable en $(0, 2\pi)$, de manera que los puntos críticos se presentan en los ceros de f' en $(0, 2\pi)$. Tenemos que

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos x = (2 \operatorname{sen} x - 1)(\cos x).$$

La primera derivada es cero si y sólo si $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ o $\cos x = 0$. Entonces, los puntos críticos de f en $(0, 2\pi)$ son $x = \pi/6$, $x = 5\pi/6$, $x = \pi/2$, y $x = 3\pi/2$. Los puntos críticos dividen a $[0, 2\pi]$ en intervalos abiertos como sigue.

Intervalo	$\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
Signo de f'	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
Comportamiento de f	dec	crec	dec	creciente	decreciente

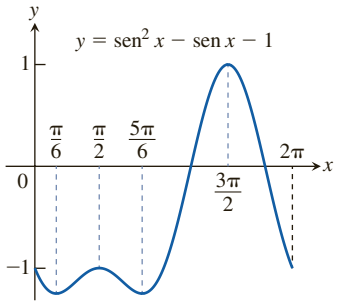


FIGURA 4.23 Gráfica de la función del ejemplo 3.

La tabla presenta los intervalos abiertos en los cuales f es creciente y decreciente. A partir de la tabla, podemos deducir que existe un valor mínimo local $f(\pi/6) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4}$, un valor máximo local $f(\pi/2) = 1 - 1 - 1 = -1$, otro valor mínimo local $f(5\pi/6) = -\frac{5}{4}$, y otro valor máximo local $f(3\pi/2) = 1 - (-1) - 1 = 1$. Los valores de puntos extremos son $f(0) = f(2\pi) = -1$. El mínimo absoluto en $[0, 2\pi]$ es $-\frac{5}{4}$ y se presenta en $x = \pi/6$ y $x = 5\pi/6$; el máximo absoluto es 1 y se presenta en $x = 3\pi/2$. La figura 4.23 muestra la gráfica. ■

Ejercicios 4.3

Análisis de funciones a partir de derivadas

Conteste las siguientes preguntas acerca de las funciones cuyas derivadas se presentan en los ejercicios 1 a 14:

a) ¿Cuáles son los puntos críticos de f?

b) ¿En qué intervalos abiertos, f es creciente o decreciente?

c) ¿En qué puntos, si acaso, f alcanza los valores máximo y mínimo locales?

1. $f'(x) = x(x - 1)$

2. $f'(x) = (x - 1)(x + 2)$

3. $f'(x) = (x - 1)^2(x + 2)$

4. $f'(x) = (x - 1)^2(x + 2)^2$

5. $f'(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$

6. $f'(x) = (x - 7)(x + 1)(x + 5)$

7. $f'(x) = \dfrac{x^2(x - 1)}{x + 2}, \quad x \neq -2$

8. $f'(x) = \dfrac{(x - 2)(x + 4)}{(x + 1)(x - 3)}, \quad x \neq -1, 3$

9. $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}, \quad x \neq 0$

10. $f'(x) = 3 - \dfrac{6}{\sqrt{x}}, \quad x \neq 0$

11. $f'(x) = x^{-1/3}(x + 2)$

12. $f'(x) = x^{-1/2}(x - 3)$

13. $f'(x) = (\operatorname{sen} x - 1)(2 \cos x + 1), \; 0 \leq x \leq 2\pi$

14. $f'(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen} x - \cos x), \; 0 \leq x \leq 2\pi$

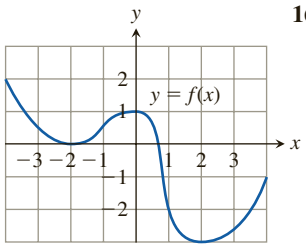
Identificación de los extremos

En los ejercicios 15 a 40:

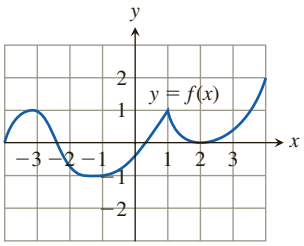
a) Obtenga los intervalos abiertos en los cuales la función es creciente y decreciente.

b) Identifique los valores extremos locales y absolutos, si existen, mencionando dónde se presentan.

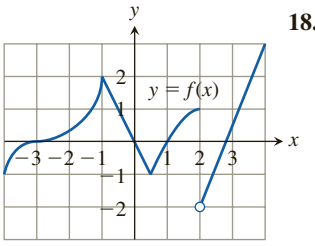
15.



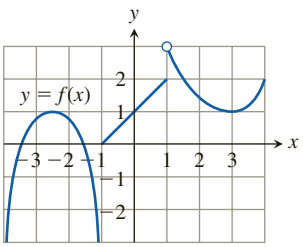
16.



17.



18.



19. $g(t) = -t^2 - 3t + 3$

20. $g(t) = -3t^2 + 9t + 5$

21. $h(x) = -x^3 + 2x^2$

22. $h(x) = 2x^3 - 18x$

23. $f(\theta) = 3\theta^2 - 4\theta^3$

24. $f(\theta) = 6\theta - \theta^3$

25. $f(r) = 3r^3 + 16r$

26. $h(r) = (r + 7)^3$

27. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

28. $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

29. $H(t) = \dfrac{3}{2}t^4 - t^6$

30. $K(t) = 15t^3 - t^5$

31. $f(x) = x - 6\sqrt{x - 1}$

32. $g(x) = 4\sqrt{x} - x^2 + 3$

33. $g(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

34. $g(x) = x^2\sqrt{5 - x}$

35. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}, \quad x \neq 2$

36. $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 + 1}$

37. $f(x) = x^{1/3}(x + 8)$

38. $g(x) = x^{2/3}(x + 5)$

39. $h(x) = x^{1/3}(x^2 - 4)$

40. $k(x) = x^{2/3}(x^2 - 4)$

En los ejercicios 41 a 52:

a) Identifique los valores extremos locales de la función en el dominio dado, y mencione dónde se presentan.

b) ¿Cuáles de los valores extremos, si los hay, son absolutos?

T ***c)*** Apoye sus resultados con una calculadora graficadora o con software para graficar.

41. $f(x) = 2x - x^2, \quad -\infty < x \leq 2$

42. $f(x) = (x + 1)^2, \quad -\infty < x \leq 0$

43. $g(x) = x^2 - 4x + 4, \quad 1 \leq x < \infty$

44. $g(x) = -x^2 - 6x - 9, \quad -4 \leq x < \infty$

45. $f(t) = 12t - t^3, \quad -3 \leq t < \infty$

46. $f(t) = t^3 - 3t^2, \quad -\infty < t \leq 3$

47. $h(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, \quad 0 \leq x < \infty$

48. $k(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \quad -\infty < x \leq 0$

49. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad -5 \leq x \leq 5$

50. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}, \quad 3 \leq x < \infty$

51. $g(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 1}, \quad 0 \leq x < 1$

52. $g(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}, \quad -2 < x \leq 1$

En los ejercicios 53 a 60:

a) Obtenga los extremos locales de cada función en el intervalo dado, y mencione dónde se presentan.

T ***b)*** Grafique juntas la función y su derivada. Explique el comportamiento de f en relación con los signos y valores de f'.

53. $f(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

54. $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

55. $f(x) = \sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

56. $f(x) = -2x + \tan x, \quad \dfrac{-\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

57. $f(x) = \dfrac{x}{2} - 2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

58. $f(x) = -2\cos x - \cos^2 x, \quad -\pi \leq x \leq \pi$

59. $f(x) = \csc^2 x - 2\cot x, \quad 0 < x < \pi$

60. $f(x) = \sec^2 x - 2\tan x, \quad \dfrac{-\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

Teoría y ejemplos

Demuestre que las funciones de los ejercicios 61 y 62 tienen extremos locales en los valores dados de θ, y mencione qué clase de extremos locales tiene la función.

61. $h(\theta) = 3\cos\dfrac{\theta}{2}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad$ en $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$

62. $h(\theta) = 5\,\text{sen}\,\dfrac{\theta}{2}, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad$ en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$

63. Grafique una función diferenciable $y = f(x)$ que pase por el punto $(1, 1)$ si $f'(1) = 0$ y

a) $f'(x) > 0$ para $x < 1$ y $f'(x) < 0$ para $x > 1$;

b) $f'(x) < 0$ para $x < 1$ y $f'(x) > 0$ para $x > 1$;

c) $f'(x) > 0$ para $x \neq 1$;

d) $f'(x) < 0$ para $x \neq 1$.

64. Grafique una función diferenciable $y = f(x)$ que tiene

a) un mínimo local en $(1, 1)$ y un máximo local en $(3, 3)$;

b) un máximo local en $(1, 1)$ y un mínimo local en $(3, 3)$;

c) máximos locales en $(1, 1)$ y $(3, 3)$;

d) mínimos locales en $(1, 1)$ y $(3, 3)$;

65. Grafique la función continua $y = g(x)$ tal que

a) $g(2) = 2$, $0 < g' < 1$ para $x < 2$, $g'(x) \to 1^-$ como $x \to 2^-$, $-1 < g' < 0$ para $x > 2$, y $g'(x) \to -1^+$ como $x \to 2^+$;

b) $g(2) = 2$, $g' < 0$ para $x < 2$, $g'(x) \to -\infty$ como $x \to 2^-$, $g' > 0$ para $x > 2$, y $g'(x) \to \infty$ como $x \to 2^+$.

66. Grafique una función continua $y = h(x)$ tal que

a) $h(0) = 0$, $-2 \le h(x) \le 2$ para toda x, $h'(x) \to \infty$ cuando $x \to 0^-$, y $h'(x) \to \infty$ cuando $x \to 0^+$;

b) $h(0) = 0$, $-2 \le h(x) \le 0$ para toda x, $h'(x) \to \infty$ cuando $x \to 0^-$, y $h'(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$.

67. Explique el comportamiento de los valores extremos de la función $f(x) = x$ sen $(1/x)$, $x \neq 0$. ¿Cuántos puntos críticos tiene esta función? ¿Dónde están ubicados en el eje x? ¿Tiene f un mínimo absoluto? ¿Y un máximo absoluto? (Vea el ejercicios 49 de la sección 2.3).

68. Obtenga los intervalos abiertos en los que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, es creciente y decreciente. Describa el razonamiento que apoya su respuesta.

69. Determine los valores de las constantes a y b de manera que $f(x) = ax^2 + bx$ tenga un máximo absoluto en el punto $(1, 2)$.

70. Determine los valores de las constantes a, b, c y d, de modo que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo local en el punto $(0, 0)$ y un mínimo local en el punto $(1, -1)$.

4.4 Concavidad y trazado de curvas

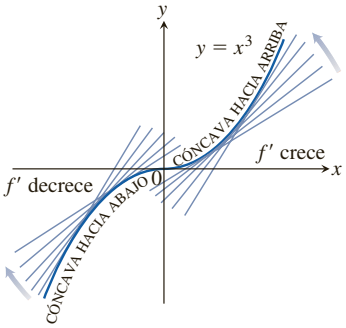


FIGURA 4.24 La gráfica de $f(x) = x^3$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$ (ejemplo 1*a*).

Hemos visto cómo la primera derivada nos indica dónde una función es creciente y dónde es decreciente, y si en un punto crítico se presenta en un máximo o mínimo local. En esta sección veremos cómo la segunda derivada nos da información acerca de la manera en que la gráfica de una función diferenciable se dobla o se curva. Con esta información de la primera y segunda derivadas, junto con el conocimiento de simetría y comportamiento asintótico adquirido en las secciones 1.1 y 2.6, ahora podemos dibujar en forma precisa la gráfica de una función. Organizando todas estas ideas en un procedimiento coherente, obtendremos un método para dibujar gráficas y visualizar características clave de funciones. La identificación y el conocimiento de la ubicación de estas características es de la mayor importancia en matemáticas y sus aplicaciones en ciencia e ingeniería, especialmente en el análisis de gráficas y la interpretación de datos.

Concavidad

Como se observa en la figura 4.24, la curva $y = x^3$ asciende cuando x crece, pero las porciones definidas en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ se curvan de manera diferente. Cuando nos aproximamos al origen desde la izquierda a lo largo de la curva, ésta se curva hacia la derecha y se ubica por debajo de sus tangentes. Las pendientes de las tangentes son decrecientes en el intervalo $(-\infty, 0)$. Cuando nos alejamos del origen hacia la derecha, a lo largo de la curva, ésta se curva hacia la izquierda y se ubica por arriba de sus tangentes. Las pendientes de las tangentes son crecientes en el intervalo $(0, \infty)$. Este comportamiento de curvarse define la *concavidad* de la curva.

DEFINICIÓN La gráfica de una función diferenciable $y = f(x)$ es

a) **cóncava hacia arriba** en un intervalo abierto I si f' es creciente en I;

b) **cóncava hacia abajo** en un intervalo abierto I si f' es decreciente en I.

Si $y = f(x)$ tiene segunda derivada, podemos aplicar el corolario 3 del teorema del valor medio a la primera derivada de la función para concluir que f' crece si $f'' > 0$ en I, y decrece si $f'' < 0$.

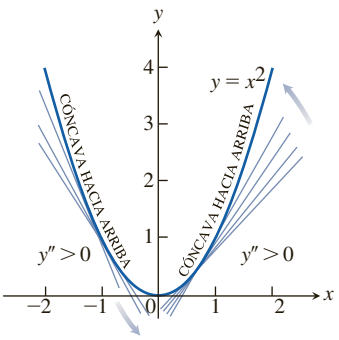


FIGURA 4.25 La gráfica de $f(x) = x^2$ es cóncava hacia arriba en todo intervalo (ejemplo 1*b*).

Prueba de la segunda derivada para la concavidad

Sea $y = f(x)$ dos veces diferenciable en un intervalo I.

1. Si $f'' > 0$ en I, la gráfica de f sobre I es cóncava hacia arriba.
2. Si $f'' < 0$ en I, la gráfica de f sobre I es cóncava hacia abajo.

Si $y = f(x)$ es dos veces diferenciable, usaremos indistintamente las notaciones f'' y y'' para denotar la segunda derivada.

EJEMPLO 1

a) La curva $y = x^3$ (figura 4.24) es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ donde $y'' = 6x < 0$, y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$ donde $y'' = 6x > 0$.

b) La curva $y = x^2$ (figura 4.25) es cóncava hacia arriba en $(-\infty, \infty)$ porque su segunda derivada $y'' = 2$ siempre es positiva. ■

EJEMPLO 2 Determine la concavidad de $y = 3 + \operatorname{sen} x$ en $[0, 2\pi]$.

Solución La primera derivada de $y = 3 + \operatorname{sen} x$ es $y' = \cos x$, y la segunda derivada es $y'' = -\operatorname{sen} x$. La gráfica de $y = 3 + \operatorname{sen} x$ es cóncava hacia abajo en $(0, \pi)$, donde $y'' = -\operatorname{sen} x$ es negativa. Es cóncava hacia arriba en $(\pi, 2\pi)$, donde $y'' = -\operatorname{sen} x$ es positiva (figura 4.26). ■

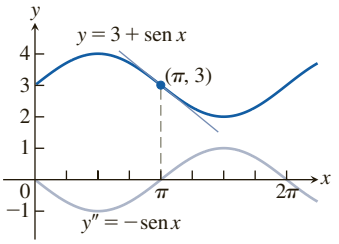


FIGURA 4.26 Uso del signo de y'' para determinar la concavidad de y (ejemplo 2).

Puntos de inflexión

La curva $y = 3 + \operatorname{sen} x$ en el ejemplo 2 cambia de concavidad en el punto $(\pi, 3)$. Como la primera derivada $y' = \cos x$ existe para toda x, vemos que la curva tiene una recta tangente con pendiente -1 en el punto $(\pi, 3)$. Este punto se llama *punto de inflexión* de la curva. En la figura 4.26 observe que la gráfica cruza su recta tangente en este punto y que la segunda derivada $y'' = -\operatorname{sen} x$ es igual a cero cuando $x = \pi$. En general, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN Un punto $(c, f(c))$, donde la gráfica de una función tiene una recta tangente y donde cambia la concavidad, es un **punto de inflexión**.

Observamos que la segunda derivada de $f(x) = 3 + \operatorname{sen} x$ es igual a cero en el punto de inflexión $(\pi, 3)$. En general, si la segunda derivada existe en un punto de inflexión $(c, f(c))$, entonces, $f''(c) = 0$. Esto se deduce inmediatamente del teorema del valor intermedio siempre que f'' sea continua en un intervalo que contenga a $x = c$, porque la segunda derivada cambia de signo al moverse a través del intervalo. Aun sin la hipótesis de continuidad, es cierto que $f''(c) = 0$, siempre y cuando la segunda derivada exista (aunque se requiere de un argumento más avanzado en este caso de discontinuidad). Como debe existir una recta tangente en el punto de inflexión, entonces, o la primera derivada $f'(c)$ existe (es finita), o bien, la gráfica tiene una tangente vertical en el punto. En el caso de una tangente vertical no existen ni la primera ni la segunda derivadas. En resumen, concluimos lo siguiente.

En un punto de inflexión $(c, f(c))$, o $f''(c) = 0$, o bien, $f''(c)$ no existe.

El siguiente ejemplo ilustra una función que tiene un punto de inflexión donde la primera derivada existe, pero la segunda derivada no existe.

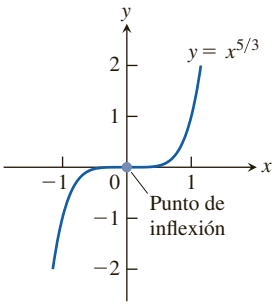


FIGURA 4.27 La gráfica de $f(x) = x^{5/3}$ tiene una tangente horizontal en el origen donde cambia la concavidad, aun cuando f'' no existe en $x = 0$ (ejemplo 3).

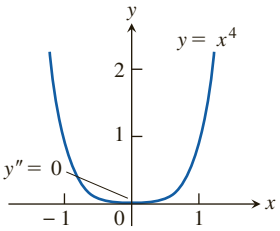


FIGURA 4.28 La gráfica de $y = x^4$ no tiene punto de inflexión en el origen, a pesar de que $y'' = 0$ ahí (ejemplo 4).

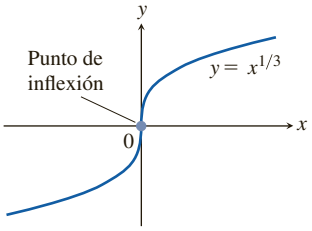


FIGURA 4.29 Punto de inflexión donde y' y y'' no existen (ejemplo 5).

EJEMPLO 3 La gráfica de $f(x) = x^{5/3}$ tiene una tangente horizontal en el origen porque $f'(x) = (5/3)x^{2/3} = 0$ cuando $x = 0$. Sin embargo, la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{3}x^{2/3}\right) = \frac{10}{9}x^{-1/3}$$

no existe en $x = 0$. No obstante, $f''(x) < 0$ para $x < 0$ y $f'' > 0$ para $x > 0$, de manera que la segunda derivada cambia de signo en $x = 0$ y, por lo mismo, existe un punto de inflexión en el origen. La gráfica se muestra en la figura 4.27. ■

A continuación se presenta un ejemplo que muestra que el punto de inflexión puede no existir aun cuando ambas derivadas existen y $f'' = 0$.

EJEMPLO 4 La curva $y = x^4$ no tiene punto de inflexión en $x = 0$ (figura 4.28). A pesar de que $y'' = 12x^2$ es cero en ese punto, no cambia de signo. ■

Por último, se describe una situación en la cual se presenta un punto de inflexión en una tangente vertical a la curva donde no existen ni la primera derivada ni la segunda.

EJEMPLO 5 La gráfica de $y = x^{1/3}$ tiene un punto de inflexión en el origen porque la segunda derivada es positiva para $x < 0$ y negativa para $x > 0$:

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{1/3}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}.$$

Sin embargo, tanto $y' = x^{-2/3}/3$ como y'' no existen en $x = 0$ y hay una tangente vertical ahí. Vea la figura 4.29. ■

¡Cuidado! El ejemplo 4 de la sección 4.1 (figura 4.9) muestra que la función $f(x) = x^{2/3}$ no tiene segunda derivada en $x = 0$ y no tiene un punto de inflexión ahí (no hay cambio en la concavidad en $x = 0$). Al combinar esto con el comportamiento de la función en el ejemplo 5 anterior, vemos que cuando la segunda derivada no existe en $x = c$, ahí puede presentarse o no un punto de inflexión. Así, necesitamos tener cuidado con la interpretación del comportamiento de la función siempre que la primera derivada o la segunda no existan en un punto. En tales puntos la gráfica puede tener tangentes verticales, esquinas, cúspides o discontinuidades.

Para estudiar el movimiento de un objeto que se desplaza a lo largo de una recta en función del tiempo, a menudo nos interesa conocer en qué momento la aceleración del cuerpo, dada por la segunda derivada, es positiva o negativa. Los puntos de inflexión en la gráfica de la función de posición del objeto revelan dónde cambia de signo la aceleración.

EJEMPLO 6 Una partícula se desplaza a lo largo de una recta coordenada horizontal (en sentido positivo hacia la derecha) de acuerdo con la función de posición

$$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5, \qquad t \geq 0.$$

Obtenga la velocidad y la aceleración, y describa el movimiento de la partícula.

Solución La velocidad es

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 28t + 22 = 2(t - 1)(3t - 11),$$

y la aceleración es

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 12t - 28 = 4(3t - 7).$$

Cuando la función $s(t)$ es creciente, la partícula se mueve hacia la derecha; cuando $s(t)$ es decreciente, la partícula se mueve hacia la izquierda.

Observe que la primera derivada ($v = s'$) es cero en los puntos críticos $t = 1$ y $t = 11/3$.

Intervalo	$0 < t < 1$	$1 < t < 11/3$	$11/3 < t$
Signo de $v = s'$	+	−	+
Comportamiento de s	creciente	decreciente	creciente
Movimiento de la partícula	a la derecha	a la izquierda	a la derecha

La partícula se mueve a la derecha en los intervalos de tiempo $[0, 1)$ y $(11/3, \infty)$, y se mueve a la izquierda en $(1, 11/3)$. Permanece estacionaria (esto es, en reposo) momentáneamente en $t = 1$ y $t = 11/3$.

La aceleración $a(t) = s''(t) = 4(3t - 7)$ es cero cuando $t = 7/3$.

Intervalo	$0 < t < 7/3$	$7/3 < t$
Signo de $a = s''$	−	+
Gráfica de s	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba

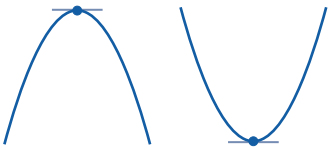
La partícula inicia su movimiento hacia la derecha mientras desacelera, y luego lo invierte y comienza a moverse hacia la izquierda en $t = 1$, bajo la influencia de la aceleración hacia la izquierda en el intervalo de tiempo $[0, 7/3)$. Entonces, la aceleración cambia de dirección en $t = 7/3$, pero la partícula continúa moviéndose hacia la izquierda, mientras desacelera con el efecto de la aceleración hacia la derecha. En $t = 11/3$ la partícula invierte nuevamente su dirección: se mueve a la derecha en la misma dirección que la aceleración, de modo que aumenta la velocidad. ■

Prueba de la segunda derivada para extremos locales

En lugar de buscar los cambios de signo en f' en los puntos críticos, algunas veces podemos usar la siguiente prueba para determinar la presencia y la naturaleza de los extremos locales.

TEOREMA 5: Prueba de la segunda derivada para extremos locales Suponga que f'' es continua en un intervalo abierto que contiene a $x = c$.

1. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces, f tiene un máximo local en $x = c$.
2. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces, f tiene un mínimo local en $x = c$.
3. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) = 0$, entonces, la prueba falla. La función f puede tener un máximo local, un mínimo local o ninguno de ellos.



Demostración Parte (1). Si $f''(c) < 0$, entonces $f''(x) < 0$ en algún intervalo abierto I que incluye al punto c, puesto que f'' es continua. Por lo tanto, f' decrece en I. Como $f'(c) = 0$, el signo de f' cambia de positivo a negativo en c, de modo que f tiene un máximo local en c según la prueba de la primera derivada.

La demostración de la parte (2) es similar.

Para la parte (3), considere las tres funciones $y = x^4$, $y = -x^4$, y $y = x^3$. Para cada una de estas funciones, la primera y la segunda derivadas son iguales a cero en $x = 0$. Aunque la función $y = x^4$ tiene un mínimo local ahí, $y = -x^4$ tiene un máximo local, y $y = x^3$ es creciente en cualquier intervalo abierto que contenga $x = 0$ (no tiene máximo ni mínimo ahí). Por lo tanto, la prueba falla. ■

Esta prueba requiere que conozcamos f'' *sólo en* c y no en un intervalo alrededor de c. Esto hace que la prueba sea fácil de aplicar. Ésta es la buena noticia; la mala es que la prueba no es concluyente si $f'' = 0$ o si f'' no existe en $x = c$. Cuando esto sucede, es preciso usar la prueba de la primera derivada para valores extremos locales.

Juntas, f' y f'' nos indican la forma de la gráfica de la función, es decir, dónde se localizan los puntos críticos y lo que ocurre en un punto crítico, dónde es creciente la función y dónde es decreciente, y cómo la curva se comba, según su concavidad. Utilizamos esta información para trazar una gráfica de la función que capte sus principales características.

EJEMPLO 7 Dibuje la gráfica de la función

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$$

siguiendo estos pasos:

a) Identifique dónde se alcanzan los extremos de f.

b) Obtenga los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente.

c) Identifique dónde la gráfica de f es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo.

d) Dibuje la forma general de la gráfica de f.

e) Grafique algunos puntos específicos, como los máximos y mínimos locales, los puntos de inflexión y las intersecciones con los ejes. Después, trace la curva.

Solución La función f es continua porque $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ existe. El dominio de f es $(-\infty, \infty)$, y el dominio de f' también es $(-\infty, \infty)$. Por lo tanto, los puntos críticos de f se presentan en los ceros de f'. Como

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3),$$

la primera derivada es cero en $x = 0$ y $x = 3$. Usamos estos puntos críticos para definir intervalos donde f es creciente o decreciente.

Intervalo	$x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
Signo de f'	$-$	$-$	$+$
Comportamiento de f	decreciente	decreciente	creciente

a) Usando la prueba de la primera derivada para extremos locales y la tabla anterior, vemos que no existe un extremo en $x = 0$, y hay un mínimo local en $x = 3$.

b) Usando la tabla anterior, vemos que f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y $[0, 3]$, y creciente en $[3, \infty)$.

c) $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$ es cero en $x = 0$ y $x = 2$. Usamos estos puntos para definir los intervalos donde f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

Intervalo	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
Signo de f''	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	cóncava hacia arriba	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba

Vemos que f es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$, y cóncava hacia abajo en $(0, 2)$.

d) Resumiendo la información de las dos tablas anteriores, obtenemos lo siguiente.

$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x$
decreciente cóncava hacia arriba	decreciente cóncava hacia abajo	decreciente cóncava hacia arriba	creciente cóncava hacia abajo

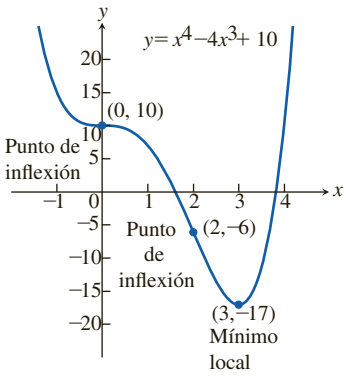
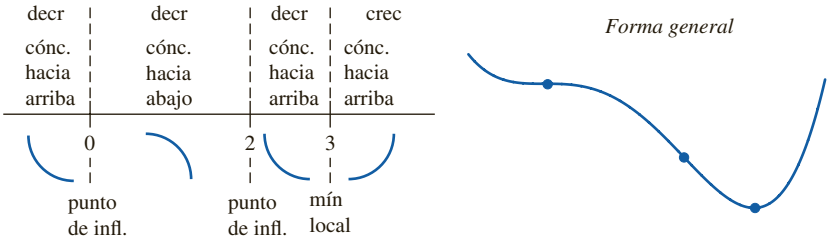


FIGURA 3.30 Gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ (ejemplo 7).

La forma general de la curva se muestra en la siguiente figura.



e) Dibuje (si es posible) las intersecciones de la curva con los ejes, y los puntos donde y' y y'' son cero. Indique todos los valores extremos locales y los puntos de inflexión. Use la forma general como guía para trazar la curva. (Grafique más puntos si es necesario). La figura 4.30 muestra la gráfica de f. ■

Los pasos del ejemplo 7 delinean un procedimiento para graficar las características principales de una función. Las asíntotas se definieron y analizaron en la sección 2.6. Podemos determinarlas para las funciones racionales, y los métodos de la siguiente sección brindan las herramientas para obtenerlas para funciones más generales.

Procedimiento para graficar $y = f(x)$

1. Identifique el dominio de f y cualquier simetría que pueda tener la curva.
2. Obtenga las derivadas y' y y''.
3. Obtenga los puntos críticos de f, si existen, e identifique el comportamiento de la función en cada uno.
4. Identifique dónde la curva es creciente y dónde es decreciente.
5. Obtenga los puntos de inflexión, si acaso existen, y determine la concavidad de la curva.
6. Identifique las asíntotas que puedan existir.
7. Trace los puntos clave, como las intersecciones con los ejes y los puntos obtenidos en los pasos 3 a 5, y dibuje la curva junto con cualquier asíntota que exista.

EJEMPLO 8 Dibuje la gráfica de $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$.

Solución

1. El dominio de f es $(-\infty, \infty)$ y no tiene simetría con respecto a los ejes o el origen (sección 1.1).
2. *Obtenga f' y f''.*

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$$

intersección con el eje x en $x = -1$, intersección con el eje y ($y = 1$) en $x = 0$

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)\cdot 2(x+1) - (x+1)^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

Puntos críticos: $x = -1, x = 1$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2 \cdot 2(-2x) - 2(1-x^2)[2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

Después de algo de álgebra

3. *Comportamiento en puntos críticos.* Los puntos críticos sólo se presentan en $x = \pm 1$, donde $f'(x) = 0$ (paso 2), puesto que f' existe en todo el dominio de f. En $x = -1$, $f''(-1) = 1 > 0$, lo cual corresponde a un mínimo relativo, según la prueba de la segunda derivada. En $x = 1$, $f''(1) = -1 < 0$, lo cual corresponde a un máximo relativo, según la prueba de la segunda derivada.

4. *Creciente y decreciente*. Vemos que en el intervalo $(-\infty, -1)$ la derivada $f'(x) < 0$, y la curva es decreciente. En el intervalo $(-1, 1)$, $f'(x) > 0$, y la curva es creciente; es decreciente en $(1, \infty)$, donde $f'(x) < 0$ nuevamente.

5. *Puntos de inflexión*. Observe que el denominador de la segunda derivada (paso 2) siempre es positivo. La segunda derivada f'' es cero cuando $x = -\sqrt{3}, 0$, y $\sqrt{3}$. La segunda derivada cambia de signo en cada uno de estos puntos: negativa en $(-\infty, -\sqrt{3})$, positiva en $(-\sqrt{3}, 0)$, negativa en $(0, \sqrt{3})$, y positiva nuevamente en $(\sqrt{3}, \infty)$. Por lo tanto, cada punto es un punto de inflexión. La curva es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3})$, cóncava hacia arriba en $(-\sqrt{3}, 0)$, cóncava hacia abajo en $(0, \sqrt{3})$ y, de nuevo, cóncava hacia arriba en $(\sqrt{3}, \infty)$.

6. *Asíntotas*. Al desarrollar el numerador de $f(x)$ y dividiendo después el numerador y el denominador entre x^2, se obtiene

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2} = \frac{x^2+2x+1}{1+x^2} \qquad \text{Se desarrolla el numerador.}$$

$$= \frac{1+(2/x)+(1/x^2)}{(1/x^2)+1}. \qquad \text{Se divide entre } x^2.$$

Vemos que $f(x) \to 1^+$ cuando $x \to \infty$, y que $f(x) \to 1^-$ cuando $x \to -\infty$. Por lo tanto, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Como f decrece en $(-\infty, -1)$ y luego crece en $(-1, 1)$, sabemos que $f(-1) = 0$ es un mínimo local. Aun cuando f decrece en $(1, \infty)$, nunca cruza la asíntota horizontal $y = 1$ en ese intervalo (se aproxima a la asíntota desde arriba). De esta forma, la gráfica nunca es negativa, y $f(-1) = 0$ también es un mínimo absoluto. Asimismo, $f(1) = 2$ es un máximo absoluto porque la gráfica nunca cruza la asíntota $y = 1$ en el intervalo $(-\infty, -1)$, aproximándose a ella desde abajo. Por lo tanto, no hay asíntotas verticales (el rango de f es $0 \le y \le 2$).

7. En la figura 4.31 se presenta la gráfica de f. Observe cómo la gráfica es cóncava hacia abajo al aproximarse a la asíntota horizontal $y = 1$ cuando $x \to -\infty$, y cóncava hacia arriba en su aproximación a $y = 1$ cuando $x \to \infty$. ■

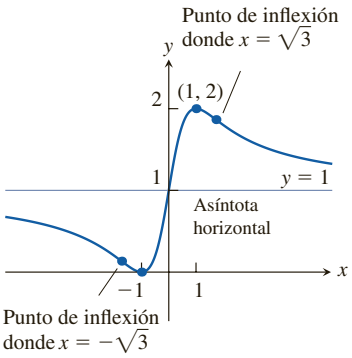


FIGURA 4.31 Gráfica de $y = \dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$ (ejemplo 8).

EJEMPLO 9 Dibuje la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2+4}{2x}$.

Solución

1. El dominio de f son todos los números reales diferentes de cero. No hay intersecciones porque ni x ni $f(x)$ pueden ser cero. Como $f(-x) = -f(x)$, vemos que f es una función impar, de modo que la gráfica de f es simétrica con respecto al origen.

2. Calculamos las derivadas de la función, pero primero la reagrupamos para simplificar los cálculos:

$$f(x) = \frac{x^2+4}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} \qquad \text{Función simplificada para diferenciación.}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2} \qquad \text{Combine fracciones para resolver fácilmente } f'(x) = 0.$$

$$f''(x) = \frac{4}{x^3} \qquad \text{Existe en todo el dominio de } f.$$

3. Los puntos críticos se presentan en $x = \pm 2$, donde $f'(x) = 0$. Como $f''(-2) < 0$ y $f''(2) > 0$, vemos que, según la prueba de la segunda derivada, se presenta un máximo relativo en $x = -2$ con $f(-2) = -2$, y un mínimo relativo en $x = 2$ con $f(2) = 2$.

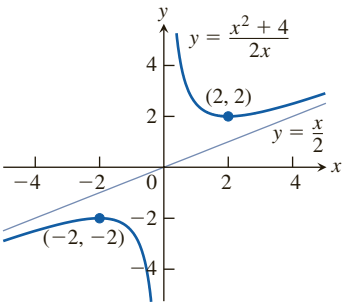


FIGURA 4.32 Gráfica de $y = \dfrac{x^2 + 4}{2x}$ (ejemplo 9).

4. En el intervalo $(-\infty, -2)$ la derivada f' es positiva porque $x^2 - 4 > 0$, de manera que la gráfica es creciente; en el intervalo $(-2, 0)$ la derivada es negativa y la gráfica es decreciente. De forma análoga, la gráfica es decreciente en el intervalo $(0, 2)$ y creciente en $(2, \infty)$.

5. No hay puntos de inflexión porque $f''(x) < 0$ siempre que $x < 0$; $f''(x) > 0$ siempre que $x > 0$; y f'' existe en todas partes y nunca es cero a lo largo del dominio de f. La gráfica es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en el intervalo $(0, \infty)$.

6. A partir de la fórmula rescrita de $f(x)$, vemos que

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x} \right) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x} \right) = -\infty,$$

por lo que el eje y es una asíntota vertical. También, cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$, la gráfica de $f(x)$ se aproxima a la recta $y = x/2$. Por lo tanto, $y = x/2$ es una asíntota oblicua.

7. La gráfica de f se presenta en la figura 4.32. ■

EJEMPLO 10 Dibuje la gráfica de $f(x) = \cos x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} x$ en $0 \le x \le 2\pi$.

Solución Las derivadas de f son

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{y} \qquad f''(x) = -\cos x.$$

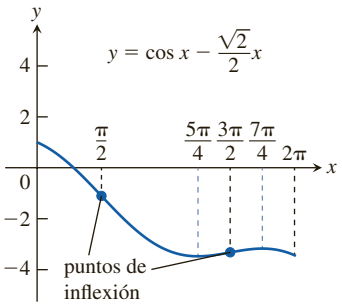


FIGURA 4.33 Gráfica de la función del ejemplo 10.

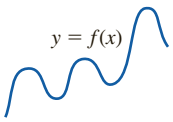
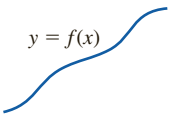
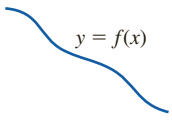
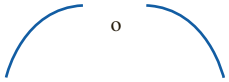
Ambas derivadas existen en todo punto del intervalo $(0, 2\pi)$. Dentro de este intervalo abierto, la primera derivada es cero cuando $\operatorname{sen} x = -\sqrt{2}/2$, de modo que los puntos críticos son $x = 5\pi/4$ y $x = 7\pi/4$. Como $f''(5\pi/4) = -\cos(5\pi/4) = \sqrt{2}/2 > 0$, la función tiene un valor mínimo local de $f(5\pi/4) \approx -3.48$ (evaluado con calculadora), según la prueba de la segunda derivada. También, $f''(7\pi/4) = -\cos(7\pi/4) = -\sqrt{2}/2 < 0$, de manera que la función tiene un valor máximo local de $f(7\pi/4) \approx -3.18$.

Examinando la segunda derivada, encontramos que $f'' = 0$ cuando $x = \pi/2$ o $x = 3\pi/2$. Concluimos que $(\pi/2, f(\pi/2)) \approx (\pi/2, -1.11)$ y $(3\pi/2, f(3\pi/2)) \approx (3\pi/2, -3.33)$ son puntos de inflexión.

Finalmente, evaluamos f en los puntos extremos del intervalo para obtener $f(0) = 1$ y $f(2\pi) \approx -3.44$. Por lo tanto, los valores $f(0) = 1$ y $f(5\pi/4) \approx -3.48$ son los valores absolutos máximo y mínimo de f en el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$. La gráfica de f se presenta en la figura 4.33. ■

Comportamiento gráfico de las funciones a partir de sus derivadas

Como vimos en los ejemplos 7 a 10, podemos aprender mucho acerca de una función dos veces diferenciable $y = f(x)$ examinando su primera derivada. Podemos ver dónde asciende y desciende la gráfica de la función, y dónde se localizan todos sus extremos locales. Podemos diferenciar y' para saber hacia dónde se curva la gráfica cuando pasa por los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Podemos determinar la forma de la gráfica de la función. Lo que no podemos averiguar a partir de la derivada es cómo colocar la gráfica en el plano xy. Sin embargo, como descubrimos en la sección 4.2, la única información adicional que necesitamos para posicionar la gráfica es el valor de f en un punto. La información acerca de las asíntotas se obtiene usando límites (sección 2.6). La siguiente figura resume cómo afectan la primera y segunda derivadas la forma de una gráfica.

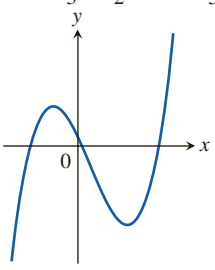
 Diferenciable ⇒ suave, conexa; la gráfica puede elevarse o descender	 $y' > 0 \Rightarrow$ asciende de izquierda a derecha; puede ser ondulada	 $y' < 0 \Rightarrow$ desciende de izquierda a derecha; puede ser ondulada
$y'' > 0 \Rightarrow$ cóncava hacia arriba en todas partes; no tiene ondas; la gráfica puede ascender o descender	 $y'' < 0 \Rightarrow$ cóncava hacia abajo en todas partes; no tiene ondas; la gráfica puede ascender o descender	y'' cambia de signo en un punto de inflexión
y' cambia de signo ⇒ la gráfica tiene un máximo o mínimo local	$y' = 0$ y $y'' < 0$ en un punto; la gráfica tiene un máximo local	$y' = 0$ y $y'' > 0$ en un punto; la gráfica tiene un mínimo local

Ejercicios 4.4

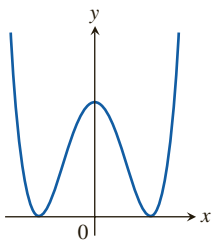
Análisis de funciones vía gráficas

Identifique los puntos de inflexión, además de los mínimos y máximos locales de las funciones graficadas en los ejercicios 1 a 8. Identifique los intervalos en los cuales las funciones son cóncavas hacia arriba y cóncavas hacia abajo.

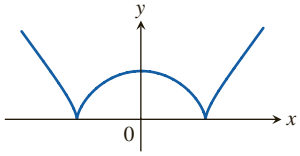
1. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$



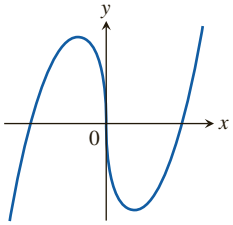
2. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$



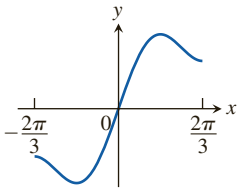
3. $y = \frac{3}{4}(x^2 - 1)^{2/3}$



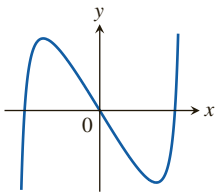
4. $y = \frac{9}{14}x^{1/3}(x^2 - 7)$



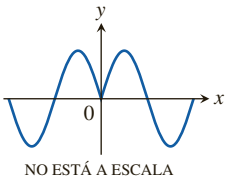
5. $y = x + \operatorname{sen} 2x, \ -\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$



6. $y = \tan x - 4x, \ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

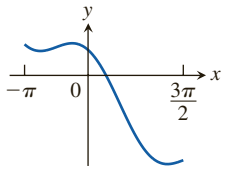


7. $y = \operatorname{sen}|x|, \ -2\pi \le x \le 2\pi$



NO ESTÁ A ESCALA

8. $y = 2\cos x - \sqrt{2}x, \ -\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$



Graficación de funciones

En los ejercicios 9 a 48, identifique las coordenadas de todos los extremos locales y absolutos, así como de los puntos de inflexión. Grafique la función.

9. $y = x^2 - 4x + 3$

10. $y = 6 - 2x - x^2$

11. $y = x^3 - 3x + 3$

12. $y = x(6 - 2x)^2$

13. $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$

14. $y = 1 - 9x - 6x^2 - x^3$

15. $y = (x - 2)^3 + 1$

16. $y = 1 - (x + 1)^3$

17. $y = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$

18. $y = -x^4 + 6x^2 - 4 = x^2(6 - x^2) - 4$

19. $y = 4x^3 - x^4 = x^3(4 - x)$

20. $y = x^4 + 2x^3 = x^3(x + 2)$

21. $y = x^5 - 5x^4 = x^4(x - 5)$

22. $y = x\left(\frac{x}{2} - 5\right)^4$

23. $y = x + \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

24. $y = x - \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

25. $y = \sqrt{3}x - 2\cos x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

26. $y = \frac{4}{3}x - \tan x, \quad \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

27. $y = \operatorname{sen} x \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

28. $y = \cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

29. $y = x^{1/5}$

30. $y = x^{2/5}$

31. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

32. $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{2x + 1}$

33. $y = 2x - 3x^{2/3}$

34. $y = 5x^{2/5} - 2x$

35. $y = x^{2/3}\left(\frac{5}{2} - x\right)$

36. $y = x^{2/3}(x - 5)$

37. $y = x\sqrt{8 - x^2}$

38. $y = (2 - x^2)^{3/2}$

39. $y = \sqrt{16 - x^2}$

40. $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$

41. $y = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$

42. $y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$

43. $y = \dfrac{8x}{x^2 + 4}$

44. $y = \dfrac{5}{x^4 + 5}$

45. $y = |x^2 - 1|$

46. $y = |x^2 - 2x|$

47. $y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \ge 0 \end{cases}$

48. $y = \sqrt{|x - 4|}$

Trazado de la forma general, cuando se conoce y'

En cada uno de los ejercicios 49 a 70 se presenta la primera derivada de una función continua $y = f(x)$. Obtenga y'' y, luego, aplique los pasos 2 a 4 del procedimiento de graficación de la página 209 para dibujar la forma general de la gráfica de f.

49. $y' = 2 + x - x^2$

50. $y' = x^2 - x - 6$

51. $y' = x(x - 3)^2$

52. $y' = x^2(2 - x)$

53. $y' = x(x^2 - 12)$

54. $y' = (x - 1)^2(2x + 3)$

55. $y' = (8x - 5x^2)(4 - x)^2$

56. $y' = (x^2 - 2x)(x - 5)^2$

57. $y' = \sec^2 x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

58. $y' = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

59. $y' = \cot\frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi$

60. $y' = \csc^2\frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi$

61. $y' = \tan^2\theta - 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

62. $y' = 1 - \cot^2\theta, \quad 0 < \theta < \pi$

63. $y' = \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

64. $y' = \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

65. $y' = (x + 1)^{-2/3}$

66. $y' = (x - 2)^{-1/3}$

67. $y' = x^{-2/3}(x - 1)$

68. $y' = x^{-4/5}(x + 1)$

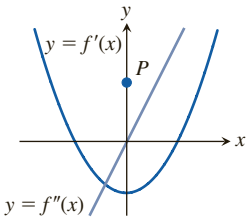
69. $y' = 2|x| = \begin{cases} -2x, & x \le 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$

70. $y' = \begin{cases} -x^2, & x \le 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

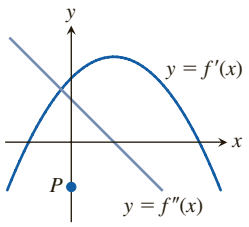
Trazado de y a partir de las gráficas de y' y y''

En cada uno de los ejercicios 71 a 74 se presentan las gráficas de la primera y segunda derivadas de una función $y = f(x)$. Copie la figura y agregue un diagrama de la gráfica aproximada de f, considerando que la gráfica pasa por el punto P.

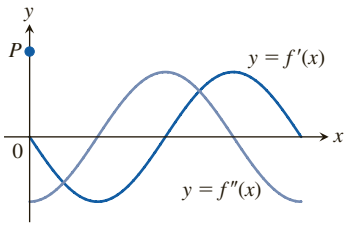
71.



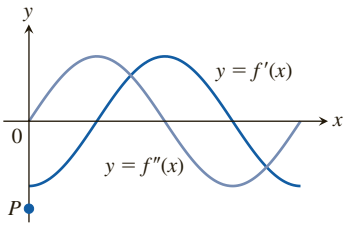
72.



73.



74.



Graficación de funciones racionales

Grafique las funciones racionales de los ejercicios 75 a 92, siguiendo todos los pasos del procedimiento de graficación de la página 209.

75. $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$

76. $y = \dfrac{x^2 - 49}{x^2 + 5x - 14}$

77. $y = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$

78. $y = \dfrac{x^2 - 4}{2x}$

79. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

80. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

81. $y = -\dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 1}$

82. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2}$

83. $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$

84. $y = -\dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$

85. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

86. $y = -\dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

87. $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + x - 2}$

88. $y = \dfrac{x^3 + x - 2}{x - x^2}$

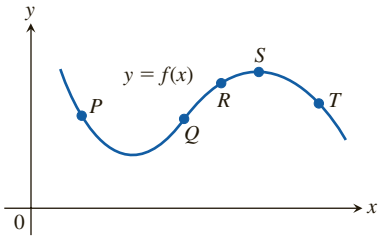
89. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ **90.** $y = \dfrac{x - 1}{x^2(x - 2)}$

91. $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ (Bruja de Agnesi)

92. $y = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$ (Serpentina de Newton)

Teoría y ejemplos

93. La siguiente figura muestra una parte de la gráfica de una función dos veces diferenciable $y = f(x)$. En cada uno de los cinco puntos marcados, clasifique y' y y'' como positiva, negativa o cero.



94. Trace una curva suave y conexa $y = f(x)$ con

$f(-2) = 8$, $f'(2) = f'(-2) = 0$,
$f(0) = 4$, $f'(x) < 0$ para $|x| < 2$,
$f(2) = 0$, $f''(x) < 0$ para $x < 0$,
$f'(x) > 0$ para $|x| > 2$, $f''(x) > 0$ para $x > 0$.

95. Dibuje la gráfica de una función dos veces diferenciable $y = f(x)$ con las propiedades que se describen en la siguiente tabla. Anote los nombres de las coordenadas donde sea posible.

x	y	Derivadas
$x < 2$		$y' < 0$, $y'' > 0$
2	1	$y' = 0$, $y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0$, $y'' > 0$
4	4	$y' > 0$, $y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0$, $y'' < 0$
6	7	$y' = 0$, $y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0$, $y'' < 0$

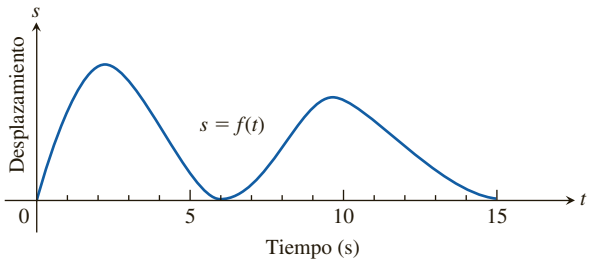
96. Dibuje la gráfica de una función dos veces diferenciable $y = f(x)$ que pase por los puntos $(-2, 2)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(2, 2)$ y cuyas dos primeras derivadas tengan los siguientes patrones de signos.

y': $+$ -2 $-$ 0 $+$ 2 $-$

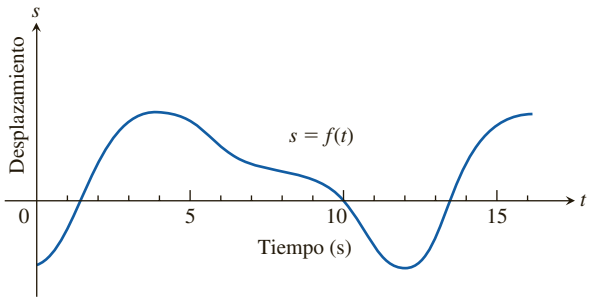
y'': $-$ -1 $+$ 1 $-$

Movimiento a lo largo de una recta Las gráficas de los ejercicios 97 y 98 muestran las posiciones $s = f(t)$ de un objeto que se mueve hacia arriba y hacia abajo en una recta coordenada. ***a)*** ¿Cuándo se aleja el objeto del origen? ¿Y cuándo se acerca al origen? ***b)*** ¿Aproximadamente en qué momento, la velocidad es igual a cero? ***c)*** ¿Aproximadamente en qué momento, la aceleración es igual a cero? ***d)*** ¿Cuándo es positiva la aceleración? ¿Cuándo es negativa?

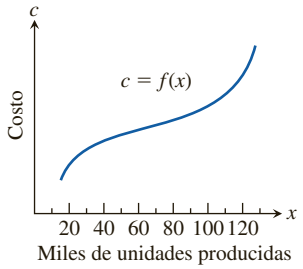
97.



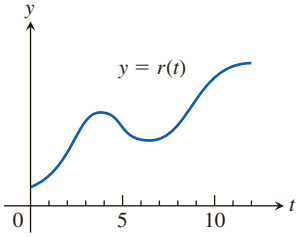
98.



99. Costo marginal La siguiente gráfica muestra el costo hipotético $c = f(x)$ de x artículos manufacturados. ¿En qué nivel de producción, aproximadamente, el costo marginal deja de ser decreciente para volverse creciente?



100. La siguiente figura muestra el ingreso mensual de Widget Corporation durante los últimos 12 años. ¿Aproximadamente en qué intervalos de tiempo aumentó el ingreso marginal? ¿En qué intervalos decreció?



101. Suponga que la derivada de la función $y = f(x)$ es

$$y' = (x - 1)^2(x - 2).$$

¿En qué puntos, si acaso, la gráfica de f tiene un mínimo local, un máximo local o un punto de inflexión? (*Sugerencia:* Dibuje el patrón de signos de y').

102. Suponga que la derivada de la función $y = f(x)$ es

$$y' = (x - 1)^2(x - 2)(x - 4).$$

¿En qué puntos, si acaso, la gráfica de f tiene un mínimo local, un máximo local o un punto de inflexión?

103. Para $x > 0$, dibuje una curva $y = f(x)$ que tenga $f(1) = 0$ y $f'(x) = 1/x$. ¿Puede decirse algo de la concavidad de esta curva? Justifique su respuesta.

104. ¿Puede decirse algo acerca de la gráfica de una función $y = f(x)$, cuya segunda derivada continua nunca es cero? Justifique su respuesta.

105. Si b, c y d son constantes, ¿para qué valor de b tendrá un punto de inflexión en $x = 1$ la curva $y = x^3 + bx^2 + cx + d$? Justifique su respuesta.

106. Parábolas

a) Obtenga las coordenadas del vértice de la parábola

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$$

b) ¿Cuándo es la parábola cóncava hacia arriba? ¿Cuándo es cóncava hacia abajo? Justifique sus respuestas.

107. Curvas cuadráticas ¿Qué puede decir acerca de los puntos de inflexión de la curva cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$? Justifique su respuesta.

108. Curvas cúbicas ¿Qué puede decir acerca de los puntos de inflexión de la curva cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$? Justifique su respuesta.

109. Suponga que la segunda derivada de la función $y = f(x)$ es

$$y'' = (x + 1)(x - 2).$$

¿Para qué valores de x la gráfica de f tiene un punto de inflexión?

110. Suponga que la segunda derivada de la función $y = f(x)$ es

$$y'' = x^2(x - 2)^3(x + 3).$$

¿Para qué valores de x la gráfica de f tiene un punto de inflexión?

111. Obtenga los valores de las constantes a, b y c de modo que la gráfica de $y = ax^3 + bx^2 + cx$ tenga un máximo local en $x = 3$, un mínimo local en $x = -1$, y un punto de inflexión en $(1, 11)$.

112. Obtenga los valores de las constantes a, b y c de modo que la gráfica de $y = (x^2 + a)/(bx + c)$ tenga un mínimo local en $x = 3$, y un máximo local en $(-1, -2)$.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 113 a 116, obtenga los puntos de inflexión (si acaso existen) de la gráfica de la función y las coordenadas de los puntos de la gráfica donde la función tiene un valor máximo o mínimo local. Después, grafique la función en una región lo suficientemente grande para mostrar todos estos puntos al mismo tiempo. Agregue a su dibujo las gráficas de la primera y segunda derivadas de la función. ¿Cómo se relacionan los puntos en los que estas gráficas cortan el eje x con la gráfica de la función? ¿De qué otra manera se relacionan las gráficas de las derivadas con la gráfica de la función?

113. $y = x^5 - 5x^4 - 240$ **114.** $y = x^3 - 12x^2$

115. $y = \frac{4}{5}x^5 + 16x^2 - 25$

116. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 20$

117. Grafique juntas $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ y sus primeras dos derivadas. Explique el comportamiento de f en relación con los signos y valores de f' y f''.

118. Grafique juntas $f(x) = x \cos x$ y su segunda derivada para $0 \leq x \leq 2\pi$. Explique el comportamiento de la gráfica de f en relación con los signos y valores de f''.

4.5 Optimización aplicada

¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo con perímetro fijo y que tiene *área máxima*? ¿Cuáles son las dimensiones de la lata cilíndrica *menos costosa* con un volumen determinado? ¿Cuántos artículos se deben fabricar para un proceso de manufactura *más rentable*? Cada una de estas preguntas indaga por el mejor valor o el óptimo de una función dada. En esta sección usaremos derivadas para resolver diversos problemas de optimización en matemáticas, física, economía y en los negocios.

Solución de problemas de optimización aplicada

1. *Lea el problema*. Léalo hasta que lo entienda plenamente. ¿Qué datos se proporcionan? ¿Cuál es la incógnita que se va a optimizar?
2. *Haga un dibujo*. Identifique en el dibujo cualquier aspecto que pueda ser relevante para el problema.
3. *Introduzca variables*. Liste todas las relaciones en el dibujo y en el problema como una ecuación o expresión algebraica, e identifique la incógnita.
4. *Escriba una ecuación para la incógnita*. Si es posible, exprese la incógnita como función de una sola variable, o bien, obtenga dos ecuaciones con dos incógnitas. Esto tal vez requiera bastante manipulación.
5. *Someta a prueba los puntos críticos y los puntos extremos en el dominio de la incógnita*. Utilice lo que sabe acerca de la forma de la gráfica de la función. Use la primera y la segunda derivadas para identificar y clasificar los puntos críticos de la función.

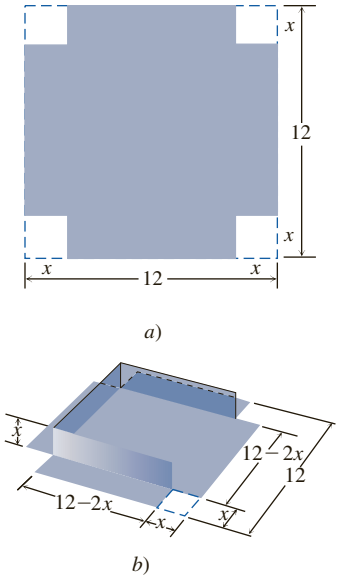


FIGURA 4.34 Una caja sin tapa se elabora cortando cuadrados en las esquinas de una lámina cuadrada. ¿Qué tamaño de las esquinas a cortar maximiza el volumen de la caja? (Ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Una caja sin tapa se construye cortando pequeños cuadrados congruentes de las esquinas de una lámina de 12 in por 12 in y doblando los lados hacia arriba. ¿De qué tamaño se deben cortar los cuadrados de las esquinas para que la caja tenga la máxima capacidad posible?

Solución Iniciamos con un dibujo (figura 4.34). En la figura, los cuadrados de las esquinas son de x in por lado, y el volumen de la caja es una función de esta variable:

$$V(x) = x(12 - 2x)^2 = 144x - 48x^2 + 4x^3. \qquad V = hlw$$

Como los lados de la lámina son de 12 in de largo, $x \le 6$ y el dominio de V es el intervalo $0 \le x \le 6$.

Una gráfica de V (figura 4.35) sugiere un valor mínimo de 0 en $x = 0$ y en $x = 6$, y uno máximo cerca de $x = 2$. Para obtener más información, examinamos la primera derivada de V con respecto a x:

$$\frac{dV}{dx} = 144 - 96x + 12x^2 = 12(12 - 8x + x^2) = 12(2 - x)(6 - x).$$

De los dos ceros, $x = 2$ y $x = 6$, sólo $x = 2$ se encuentra en el interior del dominio de la función y se incorpora a la lista de puntos críticos. Los valores de V en este punto crítico y en los extremos del intervalo son:

Valor del punto crítico: $V(2) = 128$

Valores en los extremos del intervalo: $V(0) = 0, \quad V(6) = 0.$

El volumen máximo es de 128 in^3. Los cuadrados cortados deben medir 2 in de lado. ■

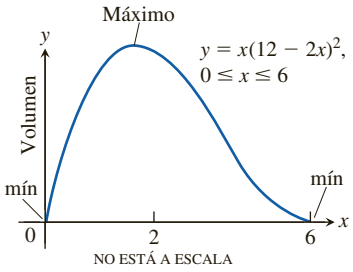


FIGURA 4.35 Volumen de la caja de la figura 4.34, graficado como una función de x.

EJEMPLO 2 Se le ha pedido que diseñe una lata con capacidad de 1 litro, en forma de un cilindro circular recto (figura 4.36). ¿Qué dimensiones debe tener la lata para usar la menor cantidad posible de material?

Solución *Volumen de la lata*: Si r y h se miden en centímetros, entonces, el volumen de la lata en centímetros cúbicos es

$$\pi r^2 h = 1000. \qquad 1 \text{ litro} = 1000 \text{ cm}^3$$

Área superficial de la lata: $A = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{extremos circulares}} + \underbrace{2\pi rh}_{\text{pared cilíndrica}}$

¿Cómo podemos interpretar la frase "menor cantidad posible de material"? Para una primera aproximación, ignoramos el espesor del material y el desperdicio de éste en la fabricación. Después nos preguntamos cuáles son las dimensiones r y h que hacen el área superficial total tan pequeña como sea posible, pero sin dejar de satisfacer la restricción $\pi r^2 h = 1000$ cm^3.

Para expresar el área superficial como función de una variable, despejamos una de las variables en $\pi r^2 h = 1000$ y sustituimos esa expresión en la fórmula del área superficial. Es más fácil despejar h:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r^2 + 2\pi rh \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) \\ &= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}. \end{aligned}$$

Nuestra meta es encontrar un valor de $r > 0$ que minimice el valor de A. La figura 4.37 sugiere que tal valor existe.

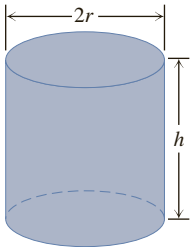


FIGURA 4.36 Esta lata de un litro usa la mínima cantidad de material cuando $h = 2r$ (ejemplo 2).

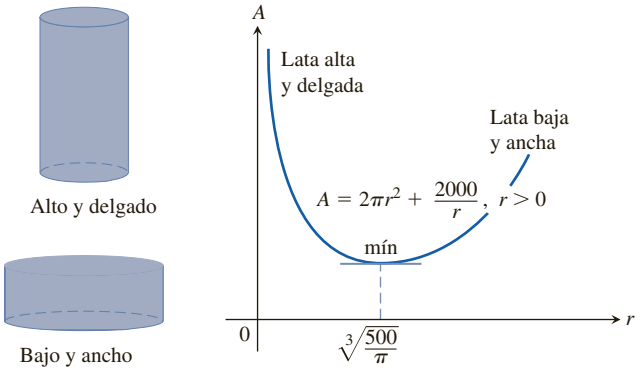


FIGURA 4.37 La gráfica de $A = 2\pi r^2 + 2000/r$ es cóncava hacia arriba.

Observe en la gráfica que para una r pequeña (un recipiente cilíndrico alto y delgado), el término $2000/r$ domina (vea la sección 2.6) y A es grande. Para una r grande (un recipiente cilíndrico bajo y ancho), el término $2\pi r^2$ domina y A es grande otra vez.

Como A es diferenciable en $r > 0$, un intervalo sin extremos, sólo puede tener un valor mínimo donde la primera derivada es cero.

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$$0 = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \qquad \text{Establecemos } dA/dr = 0.$$

$$4\pi r^3 = 2000 \qquad \text{Se multiplica por } r^2.$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5.42 \qquad \text{Se despeja } r.$$

¿Qué ocurre en $r = \sqrt[3]{500/\pi}$?

La segunda derivada

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

es positiva en todo el dominio de A. Por lo tanto, la gráfica es cóncava hacia arriba en todas partes, y el valor de A en $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ es un mínimo absoluto.

El valor correspondiente de h (después de un poco de álgebra) es

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r.$$

La lata de un litro que usa el mínimo de material tiene una altura igual a dos veces el radio, en este caso, con $r \approx 5.42$ cm y $h \approx 10.84$ cm. ■

Ejemplos de matemáticas y física

EJEMPLO 3 Se va a inscribir un rectángulo en un semicírculo de radio 2. ¿Cuál es el área máxima que puede tener el rectángulo, y cuáles son sus dimensiones?

Solución Sean $\left(x, \sqrt{4 - x^2}\right)$ las coordenadas del vértice del rectángulo que se obtiene al colocar el círculo y el rectángulo en el plano de coordenadas (figura 4.38). La longitud, la altura y el área del rectángulo se pueden expresar entonces en términos de la posición x del vértice inferior derecho.

$$\text{Longitud: } 2x, \qquad \text{Altura: } \sqrt{4 - x^2}, \qquad \text{Área: } 2x\sqrt{4 - x^2}.$$

Observe que los valores de x tienen que estar en el intervalo $0 \le x \le 2$, donde se encuentra el vértice seleccionado del rectángulo.

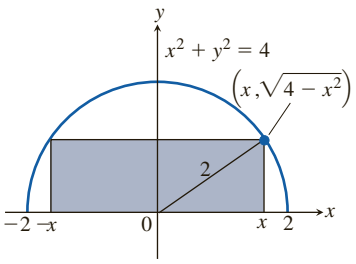


FIGURA 4.38 El rectángulo inscrito en el semicírculo del ejemplo 3.

El objetivo es obtener el valor máximo absoluto de la función

$$A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

en el dominio [0, 2].

La derivada

$$\frac{dA}{dx} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2}$$

no está definida cuando $x = 2$, y es igual a cero cuando

$$\begin{aligned} \frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2} &= 0 \\ -2x^2 + 2(4 - x^2) &= 0 \\ 8 - 4x^2 &= 0 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

De los dos ceros, $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$, sólo $x = \sqrt{2}$ se encuentra en el interior del dominio de A y, por lo tanto, en la lista de puntos críticos. Los valores de A en los puntos extremos y en este punto crítico son

$$\begin{aligned} \text{Valor en el punto crítico:} \quad & A\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}\sqrt{4 - 2} = 4 \\ \text{Valores en los puntos extremos:} \quad & A(0) = 0, \qquad A(2) = 0. \end{aligned}$$

El área tiene un valor máximo de 4 cuando el rectángulo tiene $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{2}$ unidades de altura y $2x = 2\sqrt{2}$ unidades de largo. ■

EJEMPLO 4 La rapidez de la luz depende del medio a través del cual viaja y, en general, es menor cuanto más denso es el medio.

El **principio de Fermat en óptica** establece que la luz viaja de un punto a otro a lo largo de una trayectoria para la cual el tiempo de recorrido es mínimo. Describa la trayectoria que recorrerá un rayo de luz al viajar de un punto A, en un medio donde la rapidez de la luz es c_1, a un punto B, en un segundo medio donde su rapidez es c_2.

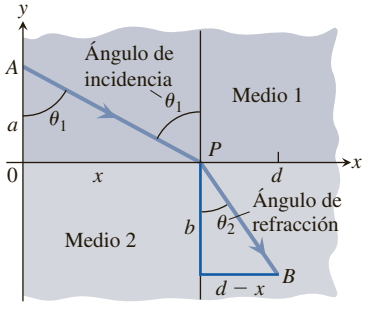


FIGURA 4.39 Un rayo de luz refractado (desviado de su trayectoria) cuando pasa de un medio a otro más denso (ejemplo 4).

Solución Como la luz al viajar de A a B sigue la ruta más rápida, lo que buscamos es una trayectoria que minimice el tiempo de recorrido. Supongamos que A y B están en el plano xy y que la recta que separa a los dos medios es el eje x (figura 4.39).

En un medio uniforme, donde la rapidez de la luz permanece constante, "el tiempo más corto" significa "la trayectoria más corta", por lo que el rayo de luz seguirá una línea recta. Así, la trayectoria de A a B consistirá en un segmento de recta de A a un punto frontera P, seguido por otro segmento de recta de P a B. La distancia recorrida es igual al producto del tiempo por la velocidad, así que

$$\text{Tiempo} = \frac{\text{Distancia}}{\text{Velocidad}}$$

De acuerdo con la figura 4.39, el tiempo requerido para que la luz viaje de A a P es

$$t_1 = \frac{AP}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1}.$$

De P a B, el tiempo es

$$t_2 = \frac{PB}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_2}.$$

El tiempo de A a B es la suma de los tiempos de ambas trayectorias:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c_2}.$$

Esta ecuación expresa t como una función diferenciable de x cuyo dominio es $[0, d]$. Deseamos obtener el valor mínimo absoluto de t en este intervalo cerrado. Obtenemos la derivada

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{c_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

y observamos que es continua. En términos de los ángulos θ_1 y θ_2 de la figura 4.39,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{c_1} - \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{c_2}.$$

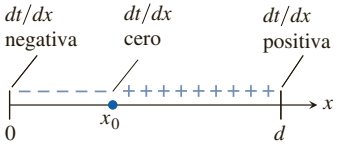


FIGURA 4.40 Patrón de signos de dt/dx del ejemplo 4.

La función t tiene una derivada negativa en $x = 0$ y una derivada positiva en $x = d$. Como dt/dx es continua en todo el intervalo $[0, d]$, según el teorema del valor intermedio para funciones continuas (sección 2.5), existe un punto $x_0 \in [0, d]$ donde $dt/dx = 0$ (figura 4.40). Sólo hay un punto como éste, porque dt/dx es una función creciente de x (ejercicio 62). En este punto único, tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{c_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{c_2}.$$

Esta ecuación es la **ley de Snell** o **ley de refracción**, y es un principio importante en la teoría de la óptica, toda vez que describe la trayectoria que sigue un rayo de luz. ■

Ejemplos de economía

Suponga que

$r(x)$ = el ingreso por vender x artículos

$c(x)$ = el costo por producir x artículos

$p(x) = r(x) - c(x)$ = la utilidad por producir y vender x artículos.

Aun cuando x es normalmente un entero en muchas aplicaciones, podemos saber cómo se comportan estas funciones definiéndolas para todos los números reales diferentes de cero y suponiendo que son funciones diferenciables. Los economistas usan los términos **ingreso marginal**, **costo marginal** y **utilidad marginal** para identificar las derivadas $r'(x)$, $c'(x)$ y $p'(x)$ de las funciones ingreso, costo y utilidad. Consideremos la relación de la utilidad p con estas derivadas.

Si $r(x)$ y $c(x)$ son diferenciables con respecto a x en algún intervalo de posibilidades de producción, y si $p(x) = r(x) - c(x)$ tiene un valor mínimo ahí, éste se presenta en un punto crítico de $p(x)$ o en un punto extremo del intervalo. Si se presenta en un punto crítico, entonces, $p'(x) = r'(x) - c'(x) = 0$ y vemos que $r'(x) = c'(x)$. En términos económicos, esta última ecuación significa que

> En un nivel de producción que genera una utilidad máxima, el ingreso marginal es igual al costo marginal (figura 4.41).

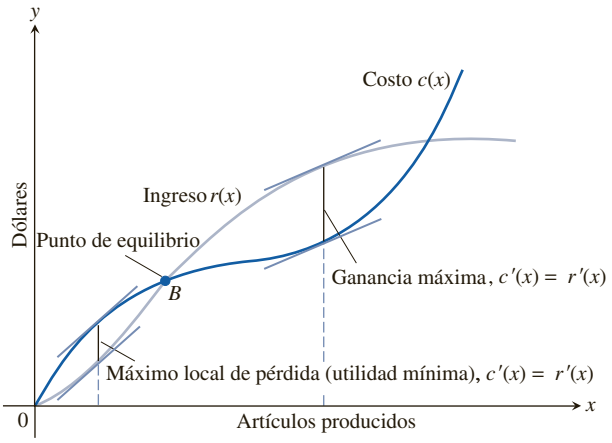


FIGURA 4.41 La gráfica de una función de costo típica comienza siendo cóncava hacia abajo y, después, se vuelve cóncava hacia arriba. Cruza la curva de ingreso en el punto de equilibrio B. A la izquierda de B, la compañía opera con pérdida. A la derecha, la compañía opera con ganancia, alcanzando la máxima utilidad donde $c'(x) = r'(x)$. Más a la derecha, el costo excede el ingreso (quizá debido a una combinación de aumento de mano de obra, costos de los materiales y saturación del mercado), y los niveles de producción se vuelven nuevamente improductivos.

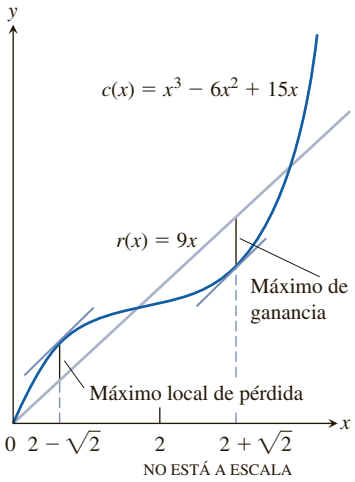


FIGURA 4.42 Curvas de costo e ingreso del ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Suponga que $r(x) = 9x$ y $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, donde x representa millones de reproductores MP3 fabricados. ¿Hay un nivel de producción que maximice la utilidad? De ser así, ¿cuál es?

Solución Observe que $r'(x) = 9$ y $c'(x) = 3x^2 - 12x + 15$.

$$3x^2 - 12x + 15 = 9 \qquad \text{Se establece que } c'(x) = r'(x).$$
$$3x^2 - 12x + 6 = 0$$

Las dos soluciones de la ecuación cuadrática son

$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{72}}{6} = 2 - \sqrt{2} \approx 0.586 \qquad \text{y}$$
$$x_2 = \frac{12 + \sqrt{72}}{6} = 2 + \sqrt{2} \approx 3.414.$$

Los niveles de producción posibles que permitirían maximizar la utilidad son $x \approx 0.586$ millones de reproductores MP3 o $x \approx 3.414$ millones de unidades. La segunda derivada de $p(x) = r(x) - c(x)$ es $p''(x) = -c''(x)$, puesto que $r''(x)$ es cero en todas partes. Así, $p''(x) = 6(2 - x)$, que es negativa en $x = 2 + \sqrt{2}$ y positiva en $x = 2 - \sqrt{2}$. Según la prueba de la segunda derivada, la utilidad máxima se alcanza cerca de $x = 3.414$ (donde el ingreso excede los costos), y la pérdida máxima se presenta cerca de $x = 0.586$. En la figura 4.42 se muestran las gráficas de $r(x)$ y $c(x)$. ■

EJEMPLO 6 Un fabricante de muebles usa madera de caoba para producir 5 escritorios al día. Cada entrega de un contenedor de madera cuesta $5000, mientras que el almacenamiento del material cuesta $10 diarios por unidad almacenada, donde una unidad es la cantidad de material que se necesita para fabricar un escritorio. ¿Qué cantidad de material tiene que ordenar el fabricante cada vez, y con qué frecuencia se debe entregar el material para minimizar su costo promedio diario en el ciclo de producción entre entregas?

Solución Si el fabricante pide que se le entregue la madera cada x días, deberá ordenar $5x$ unidades si desea tener suficiente material para ese ciclo entre entregas. La cantidad alma-

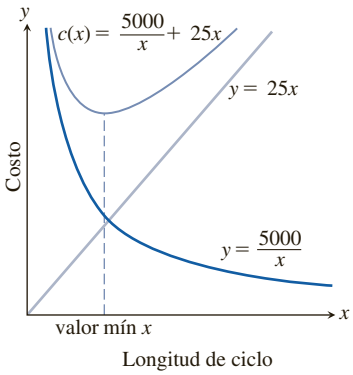


FIGURA 4.43 El costo promedio diario $c(x)$ es la suma de una hipérbola y una función lineal (ejemplo 6).

cenada *promedio* es aproximadamente la mitad de la cantidad entregada, es decir, $5x/2$. Así, el costo de entrega y almacenamiento de cada ciclo es aproximadamente

$$\text{Costo por ciclo} = \text{costos de entrega} + \text{costos de almacenamiento}$$

$$\text{Costo por ciclo} = \underbrace{5000}_{\substack{\text{costo de}\\ \text{entrega}}} + \underbrace{\left(\frac{5x}{2}\right)}_{\substack{\text{cantidad}\\ \text{almacenada}\\ \text{promedio}}} \cdot \underbrace{x}_{\substack{\text{número de}\\ \text{días de}\\ \text{almacenamiento}}} \cdot \underbrace{10}_{\substack{\text{costo de}\\ \text{almacenamiento}\\ \text{por día}}}$$

Calculamos el *costo promedio diario* $c(x)$ dividiendo el costo por ciclo entre el número de días x en el ciclo (vea la figura 4.43).

$$c(x) = \frac{5000}{x} + 25x, \qquad x > 0.$$

Cuando $x \to 0$ y cuando $x \to \infty$, el costo diario promedio aumenta. De esta forma, se esperaría que existiera un mínimo, pero, ¿dónde? Nuestro objetivo es determinar el número de días x entre entregas que representa el costo mínimo absoluto.

Obtenemos los puntos críticos determinando el lugar donde la derivada es igual a cero:

$$c'(x) = -\frac{500}{x^2} + 25 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{200} \approx \pm 14.14.$$

De los dos puntos críticos, sólo $\sqrt{200}$ está en el dominio de $c(x)$. El valor en el punto crítico del costo promedio diario es

$$c\left(\sqrt{200}\right) = \frac{5000}{\sqrt{200}} + 25\sqrt{200} = 500\sqrt{2} \approx \$707.11.$$

Observamos que $c(x)$ está definida en el intervalo abierto $(0, \infty)$ con $c''(x) = 10000/x^3 > 0$. Por lo tanto, existe un mínimo absoluto en $x = \sqrt{200} \approx 14.14$ días.

El fabricante deberá programar una entrega de $5(14) = 70$ unidades de madera de caoba cada 14 días. ■

Ejercicios 4.5

Aplicaciones matemáticas

Siempre que se maximiza o minimiza una función de una sola variable, es muy recomendable dibujar la gráfica en el dominio que sea adecuado para el problema a resolver. La gráfica dará información valiosa antes de efectuar los cálculos, y ofrecerá una herramienta visual para entender la respuesta.

1. Minimización de un perímetro ¿Cuál es el menor perímetro posible para un rectángulo cuya área es de 16 in^2, y cuáles son sus dimensiones?

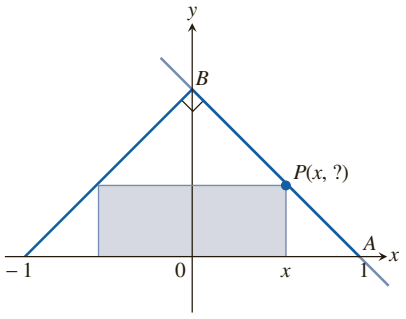
2. Demuestre que entre todos los rectángulos con perímetro de 8 m, el de mayor área es un cuadrado.

3. La figura muestra un rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa mide 2 unidades de longitud.

a) Exprese la coordenada y de P en términos de x. (*Sugerencia:* Escriba una ecuación para la recta AB).

b) Exprese el área del rectángulo en términos de x.

c) ¿Cuál es la mayor área posible del rectángulo, y cuáles son sus dimensiones?



4. Un rectángulo tiene su base en el eje x y sus dos vértices superiores sobre la parábola $y = 12 - x^2$. ¿Cuál es la mayor área posible del rectángulo, y cuáles son sus dimensiones?

5. Usted planea elaborar una caja rectangular sin tapa con una cartulina de 8 in por 15 in, cortando en las esquinas cuadrados congruentes y doblando hacia arriba los lados. Si trabaja de esta manera, ¿cuáles son las dimensiones de la caja con el máximo volumen que puede obtener, y cuál es éste?

6. Está planeando cercar una esquina en el primer cuadrante con un segmento recto de 20 unidades de longitud que va de $(a, 0)$ a $(0, b)$. Demuestre que el área del triángulo formado por el segmento y los ejes de coordenadas es máxima cuando $a = b$.

7. La mejor cerca Una parcela rectangular en una granja estará limitada, en un lado, por un río, y en los otros tres, por una cerca electrificada de un solo alambre. Si se cuenta sólo con 800 m de alambre, ¿cuál es la mayor área de la parcela que se puede cercar, y cuáles son sus dimensiones?

8. La cerca más corta Se desea cercar un sembradío rectangular de guisantes que mide 216 m^2, y dividirlo en dos partes iguales con otra cerca paralela a uno de los lados. ¿Qué dimensiones del rectángulo exterior requerirá la menor longitud total de cerca? ¿Qué cantidad de cerca se necesita?

9. Diseño de un tanque La fundidora donde usted trabaja fue contratada para diseñar y construir un tanque rectangular de acero, de base cuadrada, abierto por arriba y con una capacidad de 500 ft^3. El tanque se debe fabricar soldando placas delgadas de acero a lo largo de sus bordes. Como ingeniero de producción, su trabajo consiste en determinar las dimensiones de la base y la altura, que harán que el tanque pese lo menos posible.

***a*)** ¿Qué dimensiones recomendará al taller para fabricar el tanque?

***b*)** Describa brevemente cómo tomó en cuenta el peso en su cálculo.

10. Recolección de agua de lluvia Se desea construir un tanque rectangular abierto por arriba de 1125 ft^3, con base cuadrada de x ft por lado y y ft de profundidad, con su parte superior al nivel del piso para poder recolectar el agua de lluvia. El costo asociado con el tanque incluye no sólo el material que se usará para construirlo, sino también el costo de excavación que es proporcional al producto xy.

***a*)** Si el costo total es

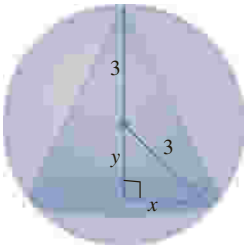
$$c = 5(x^2 + 4xy) + 10xy,$$

¿qué valores de x y y lo minimizarán?

***b*)** Describa un escenario posible para la función de costo del inciso *a*).

11. Diseño de un cartel Se diseña un cartel rectangular con un área de impresión de 50 in^2, con márgenes superior e inferior de 4 in y márgenes laterales de 2 in cada uno. ¿Qué dimensiones debe tener el cartel para minimizar la cantidad de papel utilizada?

12. Obtenga el volumen del cono circular recto más grande que se puede inscribir en una esfera de radio 3.



13. Dos lados de un triángulo tienen longitudes a y b, y el ángulo entre ellos es θ. ¿Qué valor de θ maximizará el área del triángulo? (*Sugerencia:* Considere $A = (1/2)ab \operatorname{sen} \theta$).

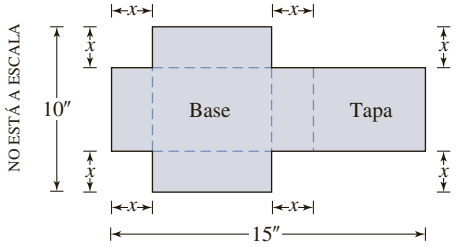
14. Diseño de una lata ¿Cuáles son las dimensiones de la lata, más ligera, abierta, cilíndrica circular recta que puede contener un volumen de 1000 cm^3? Compare el resultado con el del ejemplo 2.

15. Diseño de una lata Usted está diseñando una lata cilíndrica circular recta de 1000 cm^3 y debe tomar en cuenta el desperdicio de material. No hay desperdicio al cortar el aluminio para los lados, pero las tapas superior e inferior de radio r se cortarán a partir de cuadrados que miden $2r$ unidades por lado. Por lo tanto, la cantidad total de aluminio usado para la lata será

$$A = 8r^2 + 2\pi rh$$

en lugar de $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ como en el ejemplo 2. En el ejemplo 2 la razón de h con respecto a r de la lata más económica era de 2 a 1. ¿Cuál es la razón ahora?

T 16. Diseño de una caja con tapa Una pieza de cartulina mide 10 in por 15 in. Como se muestra en la figura, se cortaron dos cuadrados iguales en las esquinas del lado que mide 10 in. Además, se cortaron dos rectángulos de las otras dos esquinas, de manera que las cejas puedan doblarse para formar una caja rectangular con tapa.



***a*)** Escriba una fórmula para el volumen $V(x)$ de la caja.

***b*)** Obtenga el dominio de V para la situación del problema, y grafique V en su dominio.

***c*)** Use un método gráfico para obtener el volumen máximo y el valor de x en el que se alcanza.

***d*)** Confirme analíticamente el resultado que obtuvo en el inciso *c*).

T 17. Diseño de una maleta Se dobla en dos partes una hoja de cartulina, que mide 24 in por 36 in, para formar un rectángulo de 24 in por 18 in como se muestra en la siguiente figura. Después, de las esquinas del rectángulo doblado, se cortan cuatro cuadrados congruentes de longitud x por lado. Se desdobla la hoja y las seis cejas se doblan hacia arriba para formar una caja con tapa.

***a*)** Escriba una fórmula para el volumen $V(x)$ de la caja.

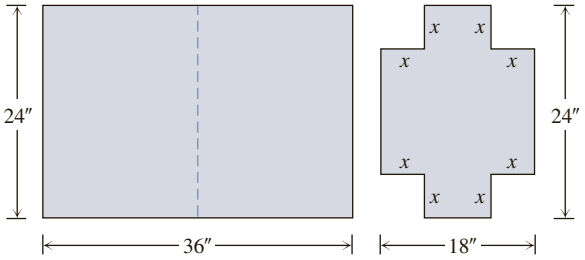
***b*)** Obtenga el dominio de V para este problema, y grafique V en su dominio.

***c*)** Use un método gráfico para obtener el volumen máximo y el valor de x en el que se alcanza.

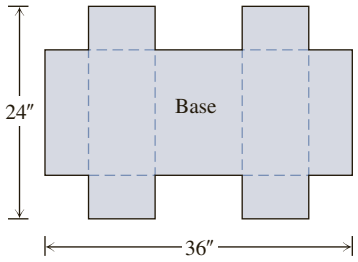
***d*)** Confirme analíticamente el resultado que obtuvo en el inciso *c*).

e) Obtenga el valor de x que genera un volumen de 1120 in^3.

f) Escriba un párrafo describiendo los inconvenientes que surgieron en el inciso *b*).



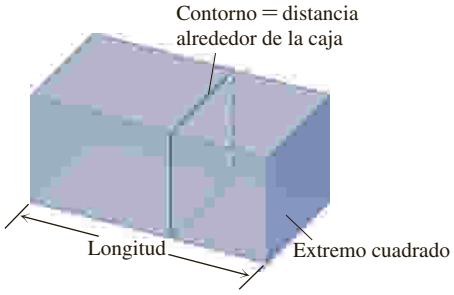
Después, la hoja se desdobla.



18. Se desea inscribir un rectángulo bajo el arco de la curva $y = 4\cos(0.5x)$ de $x = -\pi$ a $x = \pi$. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de mayor área y cuál es ésta?

19. Obtenga las dimensiones de un cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir en una esfera de radio igual a 10 cm. ¿Cuál es el volumen máximo?

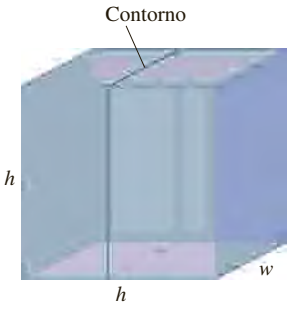
20. ***a)*** El servicio postal de Estados Unidos aceptará una caja para envío doméstico sólo si la suma de su longitud y su contorno (es decir, la distancia alrededor de la caja) no excede 108 in. ¿Qué dimensiones tendrá una caja con extremos cuadrados y el mayor volumen posible?



T ***b)*** Grafique el volumen de una caja de 108 in (longitud más contorno = 108 in) como una función de su longitud, y compare lo que ve con la respuesta del inciso *a*).

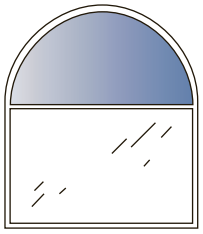
21. (*Continuación del ejercicio 20*).

a) Suponga que en lugar de tener una caja con extremos cuadrados, tiene una caja con los lados cuadrados, de manera que sus dimensiones son h por h por w, y el contorno es $2h + 2w$. En este caso, ¿qué dimensiones de la caja darán el mayor volumen?



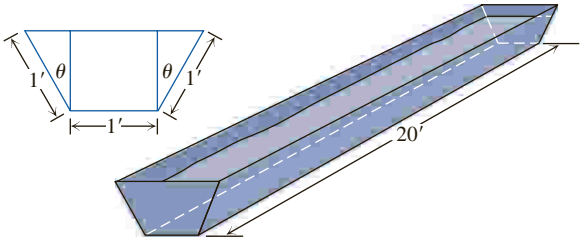
T ***b)*** Grafique el volumen como una función de h, y compare lo que ve con su respuesta del inciso *a*).

22. Una ventana tiene forma rectangular y está coronada con un semicírculo. El rectángulo es de vidrio transparente, mientras que el semicírculo es de vidrio de color, y deja pasar sólo la mitad de luz por unidad de área en comparación con el vidrio transparente. El perímetro total es fijo. Obtenga las proporciones de la ventana que dejen pasar la mayor cantidad de luz. Ignore el espesor del marco.



23. Se desea construir un silo (sin incluir la base) en forma de un cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción por unidad cuadrada del área superficial es dos veces mayor para la semiesfera que para la pared cilíndrica. Determine las dimensiones que se deben usar si el volumen es fijo y el costo de construcción debe mantenerse al mínimo. Ignore el espesor del silo y los desperdicios en la construcción.

24. El bebedero de la figura se debe fabricar con las dimensiones indicadas. Sólo se puede variar el ángulo θ. ¿Qué valor de θ maximizará el volumen del bebedero?

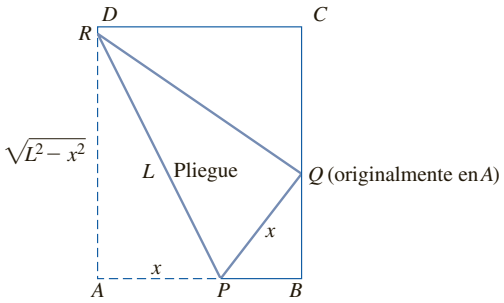


25. Doblado de papel Se coloca una hoja rectangular de papel de 8.5 in por 11 in sobre una superficie plana. Una de las esquinas se coloca sobre el lado opuesto más largo, como se muestra en la figura, y se mantiene ahí conforme el papel se aplana en el pliegue. El problema es hacer la longitud del pliegue tan pequeña como sea posible. Llamamos L a la longitud. Inténtelo con un papel.

a) Demuestre que $L^2 = 2x^3/(2x - 8.5)$.

b) ¿Qué valor de x minimiza L^2?

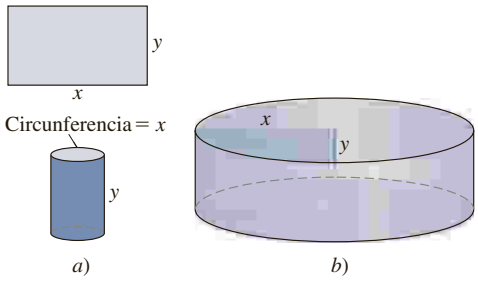
c) ¿Cuál es el valor mínimo de L?



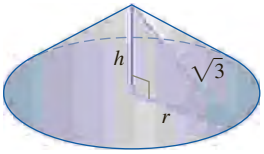
26. Construcción de cilindros Compare las respuestas de los dos problemas de construcción siguientes.

a) Una hoja rectangular de perímetro igual a 36 cm y dimensiones x por y cm se enrolla para formar un cilindro, como muestra el inciso *a*) de la figura. ¿Qué valores de x y y dan el mayor volumen?

b) La misma hoja se hace girar alrededor de uno de los lados de longitud y para generar el cilindro que se muestra en el inciso *b*) de la figura. ¿Qué valores de x y y dan el mayor volumen?



27. Construcción de conos Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $\sqrt{3}$ m de longitud se hace girar alrededor de uno de sus catetos para generar un cono circular recto. Obtenga el radio, la altura y el volumen del cono de mayor volumen que se puede generar de esta manera.



28. Obtenga el punto de la recta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ que está más cerca del origen.

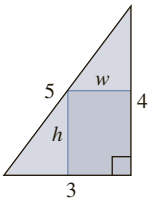
29. Obtenga un número positivo para el cual la suma de él con su recíproco sea lo más pequeña (mínima) posible.

30. Obtenga un número positivo para el cual la suma de su recíproco con cuatro veces su cuadrado sea lo más pequeña posible.

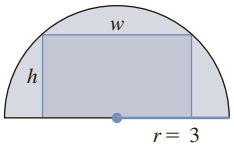
31. Se corta un alambre de b m de largo en dos partes. Una de ellas se dobla como un triángulo equilátero, y la otra como un círculo. Si la suma de las áreas encerradas por cada parte es mínima, ¿cuál es la longitud de cada parte?

32. Resuelva el ejercicio 31 considerando que una de las partes se dobla como un cuadrado, y la otra como un círculo.

33. Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en el triángulo rectángulo que se ilustra en la figura.



34. Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en un semicírculo de radio 3. (Vea la figura adjunta).



35. ¿Qué valores de a hacen que $f(x) = x^2 + (a/x)$ tenga

a) un mínimo local en $x = 2$?

b) un punto de inflexión en $x = 1$?

36. ¿Qué valores de a y b hacen que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tenga

a) un máximo local en $x = -1$ y un mínimo local en $x = 3$?

b) un mínimo local en $x = 4$ y un punto de inflexión en $x = 1$?

Aplicaciones físicas

37. Movimiento vertical La altura por encima del suelo de un objeto que se desplaza verticalmente está dada por

$$s = -16t^2 + 96t + 112,$$

con s en pies, y t en segundos. Determine

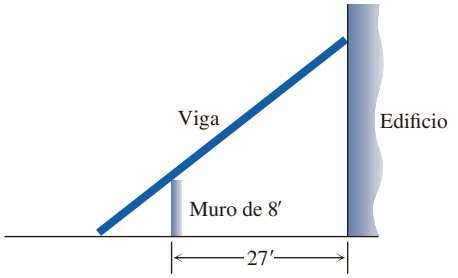
a) la velocidad del objeto cuando $t = 0$;

b) su altura máxima y en qué instante se presenta;

c) su velocidad cuando $s = 0$.

38. La ruta más rápida Jane se encuentra a 2 millas de la costa en un bote y quiere llegar a un pueblo costero que se localiza a 6 millas en línea recta desde el punto de la orilla que es más cercano al bote. Ella puede remar a 2 millas/hora y caminar a 5 millas/hora. ¿Dónde debe bajar de la lancha para llegar al pueblo en el menor tiempo posible?

39. La viga más corta El muro de 8 ft que se ilustra aquí se encuentra a 27 ft de un edificio. Determine la menor longitud de una viga recta, de manera que ésta toque con un extremo el lado del edificio y, con el otro, el suelo pasando por la parte alta de la pared.



40. Movimiento en una recta Las posiciones de dos partículas en el eje s son $s_1 = \operatorname{sen} t$ y $s_2 = \operatorname{sen}(t + \pi/3)$, con s_1 y s_2 en metros y t en segundos.

a) ¿En qué instante(s) del intervalo $0 \le t \le 2\pi$ se encuentran las partículas en el mismo lugar?

b) ¿Cuál es la distancia máxima que se separan las partículas?

c) ¿En qué momento la distancia entre las partículas cambia más rápidamente en el intervalo $0 \le t \le 2\pi$?

41. La intensidad de iluminación de cualquier punto desde una fuente de luz es proporcional al cuadrado del recíproco de la distancia entre el punto y la fuente de luz. Dos luces, una con una intensidad ocho veces más que la otra, están separadas por 6 m. ¿A qué distancia de la luz más intensa es mínima la iluminación total?

42. Movimiento de proyectiles El *alcance* R de un proyectil disparado desde el origen sobre el suelo horizontal es la distancia del origen al punto de impacto. Si el proyectil se dispara con una

velocidad inicial v_0 a un ángulo α con la horizontal, en el capítulo 13 determinamos que

$$R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\alpha,$$

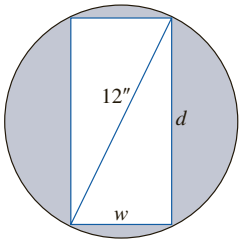
donde g es la aceleración hacia abajo debida a la gravedad. Determine el ángulo α para el cual el alcance R es el mayor posible.

T 43. Resistencia de una viga La resistencia S de una viga rectangular de madera es proporcional a su ancho por el cuadrado de su largo. (Vea la siguiente figura).

a) Obtenga las dimensiones de la viga más resistente que se puede cortar de un tronco cilíndrico de 12 in de diámetro.

b) Grafique S como una función del ancho w de la viga, suponiendo que la constante de proporcionalidad es $k = 1$. Compare lo que ve con la respuesta que dio en el inciso *a*).

c) En la misma pantalla, grafique S como función del largo d de la viga, tomando nuevamente $k = 1$. Compare las gráficas entre sí y con la respuesta que dio en el inciso *a*). ¿Qué efecto tendría cambiar k por algún otro valor? Inténtelo.



T 44. Rigidez de una viga La rigidez S de una viga rectangular es proporcional a su ancho por el cubo de su largo.

a) Obtenga las dimensiones de la viga más resistente que se puede cortar de un tronco cilíndrico de 12 in de diámetro.

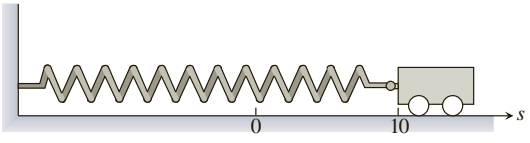
b) Grafique S como una función del ancho w de la viga, suponiendo que la constante de proporcionalidad es $k = 1$. Compare lo que ve con la respuesta que dio en el inciso *a*).

c) En la misma pantalla, grafique S como función del espesor d de la viga, tomando nuevamente $k = 1$. Compare las gráficas entre sí y con la respuesta que dio en el inciso *a*). ¿Qué efecto tendría cambiar k por algún otro valor? Inténtelo.

45. Carrito sin fricción Un carrito sin fricción está sujeto a la pared mediante un resorte. Se tira del carrito 10 cm a partir de su posición de reposo y se libera en el tiempo $t = 0$ para que ruede hacia delante y hacia atrás durante 4 s. Su posición en el tiempo t es $s = 10 \cos \pi t$.

a) ¿Cuál es la rapidez máxima del carrito? ¿Cuándo alcanza esa rapidez? ¿Dónde se encuentra en ese momento? ¿Cuál es la magnitud de la aceleración en ese momento?

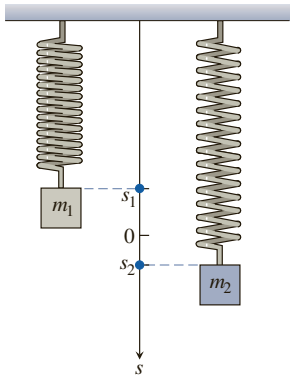
b) ¿Dónde está el carrito cuando la magnitud de la aceleración es máxima? ¿Cuál es la rapidez del carrito en ese momento?



46. Dos masas que cuelgan de resortes, una al lado de la otra, tienen las posiciones $s_1 = 2 \operatorname{sen} t$ y $s_2 = \operatorname{sen} 2t$, respectivamente.

a) ¿En qué instantes, en el intervalo $0 < t$, las masas pasan una frente a la otra? (*Sugerencia:* Considere $\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$).

b) ¿En qué momento del intervalo $0 \le t \le 2\pi$ se da la máxima distancia vertical entre las masas? ¿Cuál es esa distancia? (*Sugerencia:* Considere $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$).



47. Distancia entre dos barcos Al mediodía, el barco A se encontraba a 12 millas náuticas al norte del barco B. El barco A navegaba hacia el sur a 12 nudos (millas náuticas por hora; una milla náutica es igual a 2000 yardas), y continuó así todo el día. El barco B navegaba hacia el este a 8 nudos, y continuó de esa forma por el resto del día.

a) Inicie el conteo de tiempo en $t = 0$ al mediodía, y exprese la distancia s entre los barcos como una función de t.

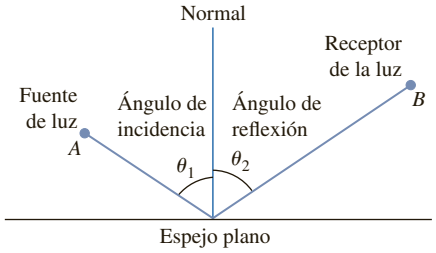
b) ¿Qué tan rápido cambiaba la distancia entre los barcos al mediodía? ¿Qué tan rápido cambiaba una hora después?

c) La visibilidad ese día era de 5 millas náuticas. ¿Los tripulantes de cada barco pudieron avistar al otro alguna vez?

T *d)* Grafique juntas s y ds/dt como funciones de t para $-1 \le t \le 3$, usando diferentes colores, si es posible. Compare las gráficas con las respuestas que dio en los incisos *b*) y *c*).

e) Aparentemente, la gráfica de ds/dt podría tener una asíntota horizontal en el primer cuadrante. Esto sugiere a la vez que ds/dt se aproxima a un valor límite cuando $t \to \infty$. ¿Cuál es ese valor? ¿Cuál es su relación con la rapidez individual de cada barco?

48. El principio de Fermat en óptica La luz de una fuente A se refleja en un espejo plano hacia un receptor B, como se muestra en la figura. Demuestre que para que la luz cumpla con el principio de Fermat, el ángulo de incidencia debe ser igual al ángulo de reflexión, ambos medidos desde la recta normal a la superficie reflectante. (Este resultado se puede obtener sin cálculo. Hay un argumento puramente geométrico, que tal vez prefiera).



49. Peste del estaño Cuando el estaño metálico se mantiene por debajo de 13.2°C, lentamente se vuelve quebradizo y se desmorona hasta convertirse en un polvo gris. Tarde o temprano, los objetos de estaño se desintegran espontáneamente en este polvo gris si se mantienen en climas fríos durante años. Los europeos, que veían desmoronarse los tubos de estaño de los órganos

de sus iglesias, llamaban a ese fenómeno la *peste del estaño* porque parecía contagiosa, y de hecho lo era, ya que este polvo gris es un catalizador para su propia formación.

En una reacción química, un *catalizador* es una sustancia que controla la rapidez de reacción sin sufrir ningún cambio permanente. Una *reacción autocatalítica* es aquella cuyo producto es un catalizador para su propia formación. Tal reacción puede realizarse con lentitud al principio si la cantidad de catalizador presente es pequeña, y lentamente de nuevo al final, cuando la mayor parte de la sustancia original se ha consumido. Pero entre ambas fases, cuando tanto la sustancia como su producto catalizador son abundantes, la reacción se realiza a un ritmo más rápido.

En algunos casos, es razonable aceptar que la rapidez $v = dx/dt$ de reacción es proporcional tanto a la cantidad presente de la sustancia original como a la cantidad del producto. Esto es, se puede considerar que v es una función sólo de x, y

$$v = kx(a - x) = kax - kx^2,$$

donde

x = cantidad del producto
a = cantidad inicial de la sustancia
k = constante positiva.

¿Para qué valores de x la rapidez v alcanza su máximo? ¿Cuál es el valor máximo de v?

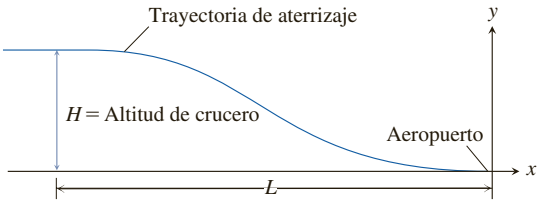
50. Trayectoria del aterrizaje de un avión Un avión vuela a una altitud H cuando inicia su descenso hacia una pista de aterrizaje horizontal, a una distancia L del avión, como se muestra en la figura. Suponga que la trayectoria de aterrizaje del avión es la gráfica de una función polinomial cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $y(-L) = H$ y $y(0) = 0$.

a) ¿Cuál es dy/dx en $x = 0$?

b) ¿Cuál es dy/dx en $x = -L$?

c) Use los valores de dy/dx en $x = 0$ y $x = -L$ junto con $y(0) = 0$ y $y(-L) = H$ para demostrar que

$$y(x) = H\left[2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right].$$



Negocios y economía

51. La fabricación y distribución de mochilas cuesta c dólares por cada una. Si cada mochila se vende en x dólares, el número de mochilas vendidas está dado por

$$n = \frac{a}{x - c} + b(100 - x),$$

donde a y b son constantes positivas. ¿Qué precio de venta generará la máxima utilidad?

52. Usted opera un servicio turístico que ofrece las siguientes tarifas: \$200 por persona si van 50 viajeros al paseo (número mínimo de personas para reservar una excursión).

Por cada persona adicional, hasta un máximo de 80 individuos, la tarifa individual se reduce \$2.

El costo del recorrido es de \$6000 (costo fijo) más \$32 por persona. ¿Cuántos viajeros deben contratar el servicio para maximizar la utilidad?

53. Fórmula de Wilson para determinar el tamaño de un lote Una de las fórmulas para el manejo de inventarios indica que el costo promedio semanal de solicitar, pagar y manejar mercancía es

$$A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2},$$

donde q es la cantidad que se ordena cuando el inventario (de zapatos, radios, escobas o el artículo que sea) se está agotando, k es el costo de realizar un pedido (una constante, no importa con cuánta frecuencia se ordene), c es el costo de un artículo (una constante), m es el número de productos vendidos cada semana (una constante), y h es el costo de manejo semanal por artículo (una constante que toma en cuenta factores como espacio, equipo, pago de seguros y servicio de seguridad).

a) Usted trabaja como gerente de inventario en una tienda, así que debe obtener la cantidad que minimice $A(q)$. ¿Cuál es? (La fórmula que obtenga en su respuesta se llama *fórmula de Wilson para el tamaño de un lote*).

b) Los costos de envío dependen algunas veces del tamaño del pedido. Cuando esto es así, es más realista reemplazar k por $k + bq$, la suma de k y un múltiplo constante de q. ¿Cuál es ahora la cantidad más económica para ordenar?

54. Nivel de producción Demuestre que el nivel de producción (si existe), en el cual el costo promedio es el menor, es un nivel en el que el costo promedio es igual al costo marginal.

55. Demuestre que si $r(x) = 6x$ y $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ son sus funciones de ingreso y costo, lo mejor que puede hacer es alcanzar el punto de equilibrio (es decir, lograr que el ingreso sea igual al costo).

56. Nivel de producción Suponga que $c(x) = x^3 - 20x^2 + 20{,}000x$ es el costo de fabricar x artículos. Obtenga el nivel de producción que minimizará el costo promedio de fabricar x artículos.

57. Va a construir una caja rectangular abierta con una base cuadrada y un volumen de 48 ft^3. Si el material de la base cuesta \$6/ft^2 y el material de los lados cuesta \$4/ft^2, ¿qué dimensiones permitirán obtener la caja menos costosa? ¿Cuál es el costo mínimo?

58. La cadena Mega Motel de 800 habitaciones se llena a toda su capacidad cuando cada habitación cuesta \$50 por noche. Por cada \$10 de aumento por habitación, se ocupan 40 habitaciones menos cada noche. ¿Qué precio por habitación dará como resultado el máximo ingreso por noche?

Biología

59. Sensibilidad a medicamentos (*Continuación del ejercicio 72, sección 3.3*). Determine la cantidad de medicamento a la que el cuerpo es más sensible, obteniendo el valor de M que maximiza la derivada dR/dM, donde

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right)$$

y C es una constante.

60. Cómo tosemos

a) Cuando tosemos, la tráquea se contrae para incrementar la velocidad del aire de salida. Esto suscita la pregunta de cuánto debe contraerse la tráquea para maximizar la velocidad, y si realmente se contrae tanto cuando tosemos.

Con supuestos razonables acerca de la elasticidad de la pared de la tráquea y de la forma en que se frena el aire cerca de la pared por la fricción, la velocidad promedio v del flujo puede modelarse con la ecuación

$$v = c(r_0 - r)r^2 \text{ cm/s}, \qquad \frac{r_0}{2} \le r \le r_0,$$

donde r_0 es el radio, en centímetros, de la tráquea en reposo, y c es una constante positiva cuyo valor depende en parte de la longitud de la tráquea.

Demuestre que v tiene su valor máximo cuando $r = (2/3)r_0$, esto es, cuando la tráquea se contrae alrededor de 33%. El hecho notable es que las radiografías confirman que la tráquea se contrae aproximadamente ese porcentaje cuando se tose.

T **b)** Tome r_0 como 0.5 y c como 1, y grafique v en el intervalo $0 \le r \le 0.5$. Compare lo que ve con el hecho de que v está en un máximo cuando $r = (2/3)r_0$.

Teoría y ejemplos

61. Una desigualdad para enteros positivos Demuestre que si a, b, c y d son enteros positivos, entonces,

$$\frac{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1)}{abcd} \ge 16.$$

62. La derivada *dt/dx* del ejemplo 4

a) Demuestre que

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

es una función creciente de x.

b) Demuestre que

$$g(x) = \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

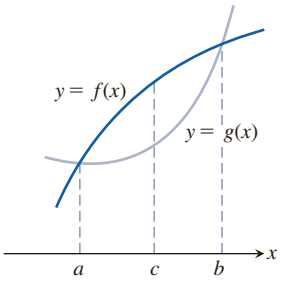
es una función decreciente de x.

c) Demuestre que

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{c_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

es una función creciente de x.

63. Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones diferenciables graficadas en la figura. El punto c es el punto donde la distancia vertical entre las curvas es mayor. ¿Hay algo especial en las tangentes a las dos curvas en c? Justifique su respuesta.



64. Le han pedido determinar si la función $f(x) = 3 + 4\cos x + \cos 2x$ es en algún momento negativa.

a) Explique por qué sólo necesita considerar valores de x en el intervalo $[0, 2\pi]$.

b) ¿Es f en algún momento negativa? Explique.

65. a) La función $y = \cot x - \sqrt{2}\csc x$ tiene un valor máximo absoluto en el intervalo $0 < x < \pi$. Obtenga este valor máximo absoluto.

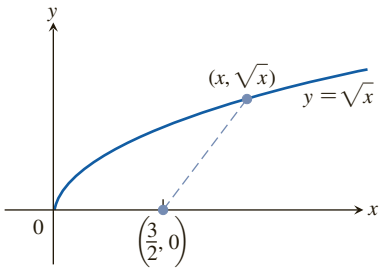
T **b)** Grafique la función y compare lo que ve con su respuesta del inciso *a*).

66. a) La función $y = \tan x + 3\cot x$ tiene un valor mínimo absoluto en el intervalo $0 < x < \pi/2$. Obtenga este valor mínimo absoluto.

T **b)** Grafique la función y compare lo que ve con su respuesta del inciso *a*).

67. a) ¿Qué tan cerca está la curva $y = \sqrt{x}$ del punto $(3/2, 0)$? (*Sugerencia:* Si minimiza el *cuadrado* de la distancia, podrá eludir las raíces cuadradas).

T **b)** Grafique juntas la función distancia $D(x)$ y $y = \sqrt{x}$ y compare lo que ve con su respuesta del inciso *a*).



68. a) ¿Qué tan cerca está el semicírculo $y = \sqrt{16 - x^2}$ del punto $\left(1, \sqrt{3}\right)$?

T **b)** Grafique juntas la función distancia y $y = \sqrt{16 - x^2}$, y compare lo que ve con su respuesta del inciso *a*).

4.6 El método de Newton

En esta sección estudiaremos un método numérico llamado *método de Newton* o *método de Newton–Raphson*, que es una técnica de aproximación a la solución de una ecuación $f(x) = 0$. En esencia, para estimar la solución, este método emplea rectas tangentes a la gráfica de $y = f(x)$ cerca de los puntos donde f es cero. [Un valor de x donde f es cero es una *raíz* de la función f y una *solución* de la ecuación $f(x) = 0$].

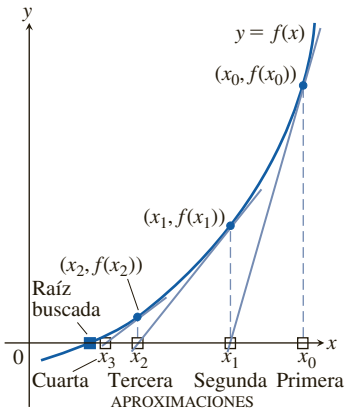


FIGURA 4.44 El método de Newton comienza con una conjetura inicial x_0 y (en circunstancias favorables) mejora la conjetura en cada paso.

Procedimiento del método de Newton

El objetivo del método de Newton para estimar una solución de una ecuación $f(x) = 0$ es producir una sucesión de aproximaciones que se acerquen a la solución. Elegimos el primer número x_0 de la sucesión. Luego, en circunstancias favorables, el método hace el resto al moverse paso a paso hacia un punto donde la gráfica de f cruza el eje x (figura 4.44). En cada paso, el método aproxima un cero de f con un cero de una de sus linealizaciones. Veamos cómo funciona esto.

La estimación inicial, x_0, se puede obtener de manera gráfica o, simplemente, suponiéndola. Después, el método usa la tangente a la curva $y = f(x)$, en $(x_0, f(x_0))$ para aproximar la curva, llamando x_1 al punto donde la tangente corta al eje x (figura 4.44). Usualmente, el número x_1 es una mejor aproximación a la solución que x_0. El punto x_2, donde la tangente a la curva en $(x_1, f(x_1))$ cruza el eje x, es la siguiente aproximación en la sucesión. Continuamos así, usando cada aproximación para generar la siguiente, hasta estar lo suficientemente cerca de la raíz para detener el algoritmo.

Podemos obtener una fórmula para generar las aproximaciones sucesivas de la siguiente manera. Dada la aproximación x_n, la ecuación punto-pendiente de la tangente a la curva en $(x_n, f(x_n))$ es

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

Podemos saber dónde corta al eje x considerando $y = 0$ (figura 4.45):

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x - x_n$$

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \text{si } f'(x_n) \neq 0$$

Este valor de x es la siguiente aproximación x_{n+1}. A continuación se presenta un resumen del método de Newton.

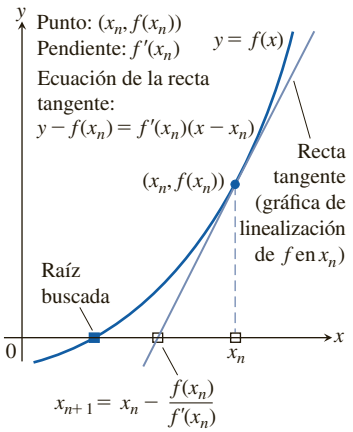


FIGURA 4.45 Geometría de los pasos sucesivos del método de Newton. Subimos a la curva en x_n y seguimos hacia abajo a la recta tangente para obtener x_{n+1}.

Método de Newton

1. Suponga una primera aproximación a la solución de la ecuación $f(x) = 0$. Una gráfica de $y = f(x)$ puede ayudar.
2. Use la primera aproximación para obtener la segunda, la segunda para obtener la tercera, y así sucesivamente, mediante la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \text{si } f'(x_n) \neq 0. \tag{1}$$

Aplicación del método de Newton

Las aplicaciones del método de Newton, por lo general, implican muchos cálculos numéricos, por lo que suele ser más cómodo resolverlas con ayuda de computadoras o calculadoras. Sin embargo, aun cuando los cálculos se efectúen a mano (lo que puede ser muy tedioso), se trata de un procedimiento poderoso para obtener soluciones de ecuaciones.

En nuestro primer ejemplo, obtendremos aproximaciones decimales a $\sqrt{2}$ estimando la raíz positiva de la ecuación $f(x) = x^2 - 2 = 0$.

EJEMPLO 1 Obtenga la raíz positiva de la ecuación

$$f(x) = x^2 - 2 = 0.$$

Solución Con $f(x) = x^2 - 2$ y $f'(x) = 2x$, la ecuación (1) se convierte en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$
$$= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$
$$= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

La ecuación

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

nos permite ir de una aproximación a la siguiente con muy poco esfuerzo. Con el valor inicial $x_0 = 1$, obtenemos los resultados de la primera columna de la siguiente tabla. ($\sqrt{2} = 1.41421$, con cinco decimales).

	Error	Número de dígitos correctos
$x_0 = 1$	−0.41421	1
$x_1 = 1.5$	0.08579	1
$x_2 = 1.41667$	0.00246	3
$x_3 = 1.41422$	0.00001	5

■

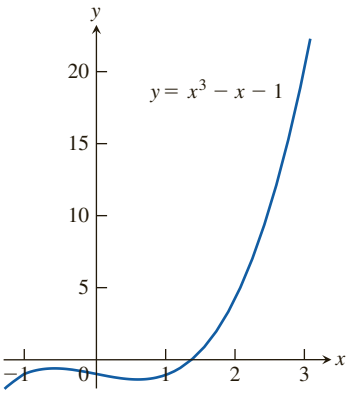


FIGURA 4.46 La gráfica de $f(x) = x^3 - x - 1$ cruza el eje x una vez; ésta es la raíz que queremos encontrar (ejemplo 2).

El método de Newton es el que se usa en la mayoría de las aplicaciones de software para calcular raíces, porque converge muy rápido (más adelante hablaremos de esto). Si la aritmética de la tabla del ejemplo 1 se hubiera hecho con 13 decimales en lugar de 5, dar un paso más nos habría dado $\sqrt{2}$ con más de 10 decimales correctos.

EJEMPLO 2 Obtenga la coordenada x del punto donde la curva $y = x^3 - x$ cruza la recta horizontal $y = 1$.

Solución La curva cruza la recta cuando $x^3 - x = 1$ o $x^3 - x - 1 = 0$. ¿En qué momento $f(x) = x^3 - x - 1$ es igual a cero? Como $f(1) = -1$ y $f(2) = 5$, sabemos que según el teorema del valor intermedio, existe una raíz en el intervalo (1, 2) (figura 4.46).

Aplicamos el método de Newton a f con el valor inicial $x_0 = 1$. Los resultados se presentan en la tabla 4.1 y en la figura 4.47.

En $n = 5$, llegamos al resultado $x_6 = x_5 = 1.3247\ 17957$. Cuando $x_{n+1} = x_n$, la ecuación (1) muestra que $f(x_n) = 0$. Hemos encontrado una solución de $f(x) = 0$ con nueve decimales. ■

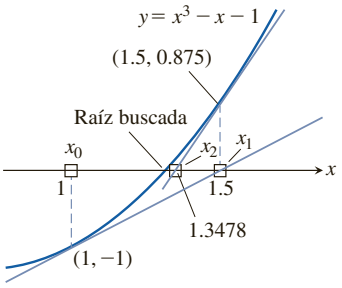


FIGURA 4.47 Los primeros tres valores de x en la tabla 4.1 (cuatro cifras decimales).

TABLA 4.1 Resultado de la aplicación del método de Newton a $f(x) = x^3 - x - 1$ con $x_0 = 1$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	−1	2	1.5
1	1.5	0.875	5.75	1.3478 26087
2	1.3478 26087	0.1006 82173	4.4499 05482	1.3252 00399
3	1.3252 00399	0.0020 58362	4.2684 68292	1.3247 18174
4	1.3247 18174	0.0000 00924	4.2646 34722	1.3247 17957
5	1.3247 17957	−1.8672E-13	4.2646 32999	1.3247 17957

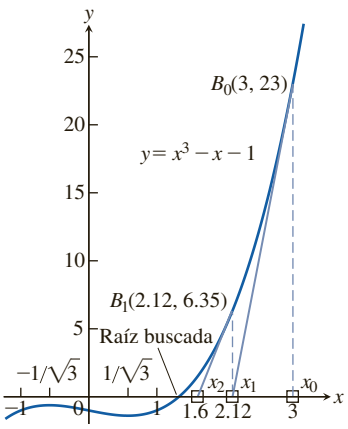


FIGURA 4.48 Cualquier valor inicial x_0 a la derecha de $x = 1/\sqrt{3}$ conducirá a la raíz del ejemplo 2.

En la figura 4.48 se indica que el proceso del ejemplo 2 podría haber iniciado en el punto $B_0(3, 23)$ de la curva, con $x_0 = 3$. El punto B_0 está bastante lejos del eje x, pero la tangente en B_0 cruza el eje x en aproximadamente (2.12, 0), de modo que x_1 sigue siendo mejor que x_0. Si usamos la ecuación (1) repetidamente como antes, con $f(x) = x^3 - x - 1$ y $f'(x) = 3x^2 - 1$, obtenemos la solución correcta a nueve cifras decimales $x_7 = x_6 = 1.3247\ 17957$ en siete pasos.

Convergencia de las aproximaciones

En el capítulo 10 definiremos detalladamente la idea de *convergencia* de las aproximaciones x_n en el método de Newton. No obstante, guiados por la intuición, decimos que cuando el número n de aproximaciones se incrementa de forma ilimitada, los valores de x_n se acercan arbitrariamente a la raíz deseada r. [Esta noción es similar a la idea de límite de una función $g(t)$ cuando t se aproxima al infinito, como se definió en la sección 2.6].

En la práctica, el método de Newton generalmente converge con una rapidez impresionante, pero esto no está garantizado. Una manera de probar la convergencia es comenzar graficando la función para estimar un valor inicial adecuado de x_0. Se puede comprobar que nos estamos acercando a un cero de la función si evaluamos $|f(x_n)|$; también es posible verificar que las aproximaciones están convergiendo, si evaluamos $|x_n - x_{n-1}|$.

El método de Newton no siempre converge. Por ejemplo, si

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{r - x}, & x < r \\ \sqrt{x - r}, & x \geq r, \end{cases}$$

la gráfica será como la de la figura 4.49. Si iniciamos con $x_0 = r - h$, obtenemos $x_1 = r + h$, y las aproximaciones sucesivas saltan de uno al otro de estos dos valores. Ningún número de iteraciones nos acerca más a la raíz que nuestra primera suposición.

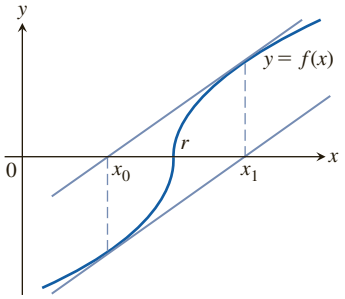


FIGURA 4.49 Falla la convergencia del método de Newton. Se va de x_0 a x_1 y luego de regreso a x_0, sin acercarse nunca a r.

Si el método de Newton converge, lo hace a una raíz. Sin embargo, tenga cuidado. Existen situaciones en las cuales el método parece converger, pero no hay una raíz ahí. Por fortuna, son situaciones poco comunes.

Cuando el método de Newton converge a una raíz, tal vez no sea la raíz que usted tiene en mente. La figura 4.50 muestra dos maneras en que esto puede suceder.

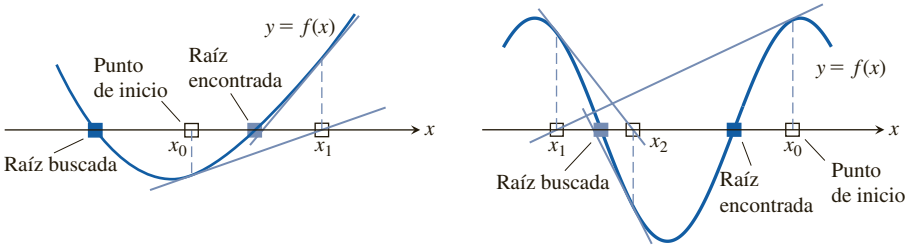


FIGURA 4.50 Si inicia demasiado lejos, el método de Newton podría no encontrar la raíz que se desea.

Ejercicios 4.6

Obtención de raíces

1. Use el método de Newton para estimar las soluciones de la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$. Inicie con $x_0 = -1$ para la solución de la izquierda, y con $x_0 = 1$ para la solución de la derecha. Después, en cada caso, obtenga x_2.
2. Use el método de Newton para estimar la solución real de la ecuación $x^3 + 3x + 1 = 0$. Inicie con $x_0 = 0$ y, después, obtenga x_2.
3. Use el método de Newton para estimar los dos ceros de la función $f(x) = x^4 + x - 3$. Inicie con $x_0 = -1$ para el cero de la izquierda, y con $x_0 = 1$ para el cero de la derecha. Luego, en cada caso, obtenga x_2.
4. Use el método de Newton para estimar los dos ceros de la función $f(x) = 2x - x^2 + 1$. Inicie con $x_0 = 0$ para el cero de la izquierda, y con $x_0 = 2$ para el cero de la derecha. Luego, en cada caso, obtenga x_2.
5. Use el método de Newton para obtener la raíz cuarta positiva de 2 resolviendo la ecuación $x^4 - 2 = 0$. Inicie con $x_0 = 1$ y obtenga x_2.
6. Use el método de Newton para obtener la raíz cuarta negativa de 2 resolviendo la ecuación $x^4 - 2 = 0$. Inicie con $x_0 = -1$ y obtenga x_2.
7. **Suponer una raíz** Suponga que su primera conjetura es afortunada, en el sentido de que x_0 es una raíz de $f(x) = 0$. Suponiendo que $f'(x_0)$ está definida y no es cero, ¿qué ocurre con x_1 y las aproximaciones subsiguientes?

8. Estimación de pi Se desea estimar $\pi/2$ a cinco cifras decimales, empleando el método de Newton para resolver la ecuación $\cos x = 0$. ¿Importa cuál sea el valor de inicio? Justifique su respuesta.

Teoría y ejemplos

9. Oscilación Demuestre que si $h > 0$, la aplicación del método de Newton a

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

nos lleva a $x_1 = -h$ si $x_0 = h$, y a $x_1 = h$ si $x_0 = -h$. Dibuje una gráfica para mostrar lo que ocurre.

10. Aproximación que empeora cada vez más Aplique el método de Newton a $f(x) = x^{1/3}$ con $x_0 = 1$ y calcule x_1, x_2, x_3 y x_4. Determine una fórmula para $|x_n|$. ¿Qué ocurre con $|x_n|$ cuando $n \to \infty$? Dibuje una gráfica para mostrar lo que sucede.

11. Explique por qué los cuatro enunciados siguientes solicitan la misma información:

i. Obtenga las raíces de $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

ii. Obtenga las coordenadas x de las intersecciones de la curva $y = x^3$ con la recta $y = 3x + 1$.

iii. Obtenga las coordenadas x de los puntos donde la curva $y = x^3 - 3x$ cruza la recta horizontal $y = 1$.

iv. Obtenga los valores de x donde la derivada de $g(x) = (1/4)x^4 - (3/2)x^2 - x + 5$ es igual a cero.

12. Localización de un planeta Para calcular las coordenadas que ocupa un planeta en el espacio, tenemos que resolver ecuaciones como $x = 1 + 0.5 \operatorname{sen} x$. La gráfica de la función $f(x) = x - 1 - 0.5 \operatorname{sen} x$ sugiere que la función tiene una raíz cerca de $x = 1.5$. Use una iteración del método de Newton para mejorar esa estimación. Es decir, inicie con $x_0 = 1.5$ y obtenga x_1. (A cinco cifras decimales, el valor de la raíz es 1.49870). Recuerde utilizar radianes.

T 13. Curvas que se intersecan La curva $y = \tan x$ cruza la recta $y = 2x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/2$. Use el método de Newton para saber dónde se intersecan.

T 14. Soluciones reales de una ecuación de cuarto grado Use el método de Newton para obtener las dos soluciones reales de la ecuación $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$.

T 15. ***a)*** ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $3x = 0.99 - x^2$?

b) Use el método de Newton para obtenerlas.

16. Curvas que se intersecan

a) ¿$\cos 3x = x$ para alguna x? Justifique su respuesta.

b) Use el método de Newton para determinar dónde.

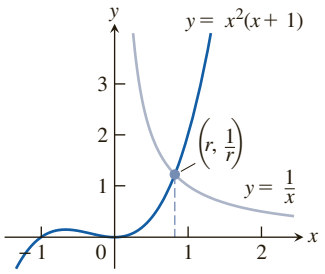
17. Obtenga los cuatro ceros reales de la función $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

T 18. Estimación de pi Estime π con tantos decimales como pueda desplegar su calculadora; use el método de Newton para resolver la ecuación $\tan x = 0$ con $x_0 = 3$.

19. Curvas que se intersecan ¿En qué valor(es) de x, $\cos x = 2x$?

20. Curvas que se intersecan ¿En qué valor(es) de x, $\cos x = -x$?

21. Las gráficas de $y = x^2(x + 1)$ y $y = 1/x$ $(x > 0)$ se intersecan en un punto $x = r$. Use el método de Newton para estimar el valor de r con cuatro decimales.

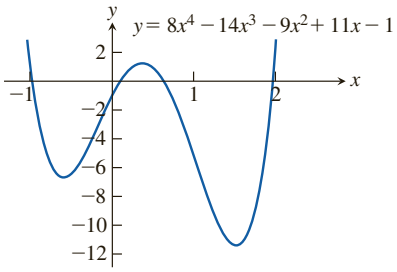


22. Las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = 3 - x^2$ se intersecan en un punto $x = r$. Emplee el método de Newton para estimar el valor de r a cuatro cifras decimales.

23. Utilice el teorema del valor intermedio de la sección 2.5 para demostrar que $f(x) = x^3 + 2x - 4$ tiene una raíz entre $x = 1$ y $x = 2$. Después, obtenga la raíz a cinco cifras decimales.

24. Factorización de una ecuación de cuarto grado Obtenga los valores aproximados de r_1 a r_4 en la factorización

$$8x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 11x - 1 = 8(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4).$$



T 25. Convergencia a distintos ceros Use el método de Newton para obtener los ceros de $f(x) = 4x^4 - 4x^2$ considerando los valores iniciales dados.

a) $x_0 = -2$ y $x_0 = -0.8$, en $\left(-\infty, -\sqrt{2}/2\right)$

b) $x_0 = -0.5$ y $x_0 = 0.25$, en $\left(-\sqrt{21}/7, \sqrt{21}/7\right)$

c) $x_0 = 0.8$ y $x_0 = 2$, en $\left(\sqrt{2}/2, \infty\right)$

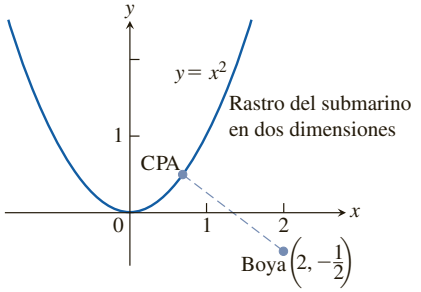
d) $x_0 = -\sqrt{21}/7$ y $x_0 = \sqrt{21}/7$

26. El problema de la boya de sonar En problemas de localización de submarinos, con frecuencia es necesario encontrar el punto de aproximación más cercano (*closest point of approach*, CPA) a una boya de sonar (detector de sonido) en el agua. Suponga que el submarino viaja por la trayectoria de la parábola $y = x^2$, y que la boya se localiza en el punto $(2, -1/2)$.

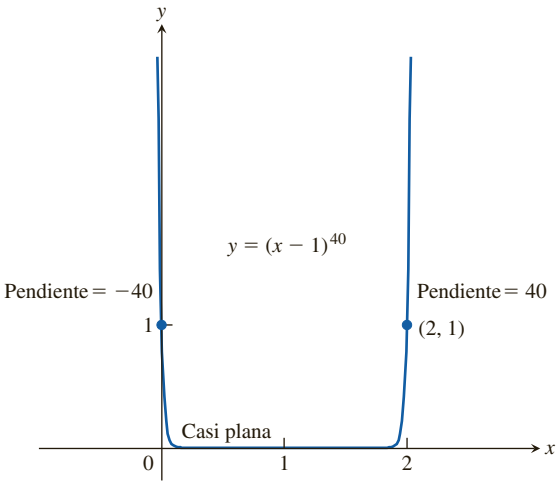
a) Demuestre que el valor de x que minimiza la distancia entre el submarino y la boya es una solución de la ecuación

$$x = 1/(x^2 + 1).$$

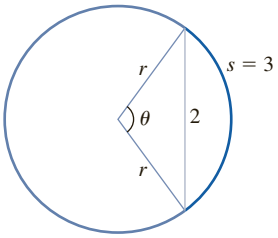
b) Resuelva la ecuación $x = 1/(x^2 + 1)$ con el método de Newton.



T **27. Curva casi plana en la raíz** Algunas curvas son tan planas que, en la práctica, el método de Newton se detiene demasiado lejos de la raíz para dar una estimación útil. Intente aplicar el método de Newton a $f(x) = (x - 1)^{40}$ iniciando con un valor de $x_0 = 2$, para ver qué tanto se acerca su calculadora a la raíz $x = 1$. Vea la siguiente figura.



28. La siguiente figura muestra una circunferencia de radio r con una cuerda de longitud igual a 2 y un arco s de longitud 3. Utilice el método de Newton para obtener r y θ (en radianes) a cuatro cifras decimales. Suponga que $0 < \theta < \pi$.



4.7 Antiderivadas

Hemos aprendido a obtener la derivada de una función y cómo usarla para resolver una gran variedad de problemas. Sin embargo, muchos otros problemas exigen recuperar una función a partir de su derivada (es decir, a partir de su razón de cambio). Por ejemplo, las leyes de la física definen la aceleración de un objeto en caída desde una altura inicial, y podemos usar esta información para calcular su velocidad y su altura en cualquier instante. De manera más general, a partir de una función f, deseamos obtener una función F cuya derivada es f. Si tal función F existe, se conoce como la *antiderivada* de f. En el siguiente capítulo veremos que las antiderivadas son el vínculo que conecta los dos elementos principales del cálculo: las derivadas y las integrales definidas.

Obtención de antiderivadas

DEFINICIÓN Una función F es una **antiderivada** de f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

El proceso de recuperación de una función $F(x)$ a partir de su derivada $f(x)$ se conoce como *antidiferenciación*. Usamos letras mayúsculas como F para representar la antiderivada de una función f, G para representar la antiderivada de g, y así sucesivamente.

EJEMPLO 1 Obtenga la antiderivada de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x$ ***b)*** $g(x) = \cos x$ ***c)*** $h(x) = \sec^2 x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Solución Aquí necesitamos trabajar hacia atrás. Con base en nuestro conocimiento, ¿qué función tiene una derivada igual que la función dada?

a) $F(x) = x^2$ ***b)*** $G(x) = \operatorname{sen} x$ ***c)*** $H(x) = \tan x + \sqrt{x}$

Las respuestas se pueden verificar con diferenciación. La derivada de $F(x) = x^2$ es $2x$. La derivada de $G(x) = \operatorname{sen} x$ es $\cos x$, y la derivada de $H(x) = \tan x + \sqrt{x}$ es $\sec^2 x + \left(1/2\sqrt{x}\right)$. ■

La función $F(x) = x^2$ no es la única función cuya derivada es $2x$. La función $x^2 + 1$ tiene la misma derivada, al igual que $x^2 + C$ para cualquier constante C. ¿Hay otras?

El corolario 2 del teorema del valor medio de la sección 4.2 da la respuesta. Dos antiderivadas cualesquiera de una función difieren por una constante. Así que las funciones $x^2 + C$, donde C es una **constante arbitraria**, forman *todas* las antiderivadas de $f(x) = 2x$. De una forma más general, tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 8 Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, la antiderivada más general de f en I es

$$F(x) + C,$$

donde C es una constante arbitraria.

Por lo tanto, la antiderivada más general de f en I es una *familia* de funciones $F(x) + C$ cuyas gráficas son traslaciones verticales unas de otras. Podemos elegir una antiderivada particular de esta familia, asignando un valor específico a C. A continuación se presenta un ejemplo de cómo puede hacerse esa elección.

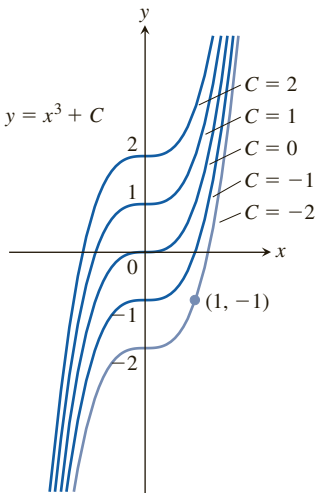


FIGURA 4.51 Las curvas $y = x^3 + C$ llenan el plano de coordenadas sin traslaparse. En el ejemplo 2, identificamos la curva $y = x^3 - 2$ como la única que pasa por el punto dado $(1, -1)$.

EJEMPLO 2 Obtenga una antiderivada de $f(x) = 3x^2$ que satisfaga $F(1) = -1$.

Solución Como la derivada de x^3 es $3x^2$, la antiderivada general

$$F(x) = x^3 + C$$

proporciona todas las antiderivadas de $f(x)$. La condición $F(1) = -1$ determina un valor específico de C. Al sustituir $x = 1$ en $F(x) = x^3 + C$, tenemos

$$F(1) = (1)^3 + C = 1 + C.$$

Como $F(1) = -1$, si se despeja C de $1 + C = -1$, se obtiene $C = -2$. De esta forma,

$$F(x) = x^3 - 2$$

es la antiderivada que satisface $F(1) = -1$. Observe que esta C corresponde a una curva particular de la familia de curvas $y = x^3 + C$ que pasa por el punto $(1, -1)$ del plano (figura 4.51). ■

Trabajando hacia atrás a partir de la lista de reglas de diferenciación, podemos obtener fórmulas y reglas para las antiderivadas. En cada caso, en la expresión general existe una constante arbitraria C que representa a todas las antiderivadas de una función dada. La tabla 4.2 incluye las fórmulas de las antiderivadas de varias funciones importantes.

Las reglas de la tabla 4.2 se pueden verificar fácilmente diferenciando la fórmula de la antiderivada general para obtener la función de la izquierda. Por ejemplo, la derivada de $(\tan kx)/k + C$ es $\sec^2 kx$, siempre que las constantes C o $k \neq 0$, y esto establece la fórmula 4 de la antiderivada más general de $\sec^2 kx$.

TABLA 4.2 Fórmulas de antiderivadas, con k como una constante diferente de cero.

Función	Antiderivada general
1. x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$
2. $\operatorname{sen} kx$	$-\frac{1}{k}\cos kx + C$
3. $\cos kx$	$\frac{1}{k}\operatorname{sen} kx + C$
4. $\sec^2 kx$	$\frac{1}{k}\tan kx + C$
5. $\csc^2 kx$	$-\frac{1}{k}\cot kx + C$
6. $\sec kx \tan kx$	$\frac{1}{k}\sec kx + C$
7. $\csc kx \cot kx$	$-\frac{1}{k}\csc kx + C$

EJEMPLO 3 Obtenga la antiderivada general de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^5$ ***b)*** $g(x) = \sqrt{x}$

c) $h(x) = \operatorname{sen} 2x$ ***d)*** $i(x) = \cos\frac{x}{2}$

Solución En cada caso, usamos una de las fórmulas listadas en la tabla 4.2.

a) $F(x) = \frac{x^6}{6} + C$ Fórmula 1 con $n = 5$

b) $g(x) = x^{1/2}$, por lo que

$$G(x) = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$ Fórmula 1 con $n = 1/2$

c) $H(x) = \frac{-\cos 2x}{2} + C$ Fórmula 2 con $k = 2$

d) $I(x) = \frac{\operatorname{sen}(x/2)}{1/2} + C = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2} + C$ Fórmula 3 con $k = 1/2$

■

Otras reglas de las derivadas también conducen a las reglas correspondientes de las antiderivadas. Podemos sumar y restar antiderivadas y multiplicarlas por constantes.

TABLA 4.3 Reglas de linealidad de antiderivadas

	Función	Antiderivada general
1. *Regla del múltiplo constante:*	$kf(x)$	$kF(x) + C$, k es constante
2. *Regla del negativo:*	$-f(x)$	$-F(x) + C$
3. *Regla de la suma o diferencia:*	$f(x) \pm g(x)$	$F(x) \pm G(x) + C$

Las fórmulas de la tabla 4.3 se comprueban fácilmente diferenciando las antiderivadas y verificando que los resultados concuerden con la función original. La fórmula 2 es el caso especial en que $k = -1$ en la fórmula 1.

EJEMPLO 4 Obtenga la antiderivada general de

$$f(x) = 3\sqrt{x} + \operatorname{sen} 2x.$$

Solución Tenemos que $f(x) = 3g(x) + h(x)$ para las funciones g y h del ejemplo 3. Como $G(x) = 2x^{3/2}/3$ es una antiderivada de $g(x)$ según el ejemplo 3*b*), de la regla del múltiplo constante para antiderivadas se deduce que $3G(x) = 3(2x^{3/2}/3) = 2x^{3/2}$ es una antiderivada de $3g(x) = 3\sqrt{x}$. Asimismo, por el ejemplo 3*c*) sabemos que $H(x) = (-1/2)\cos 2x$ es una antiderivada de $h(x) = \operatorname{sen} 2x$. Según la regla de la suma para antiderivadas, tenemos que

$$\begin{aligned} F(x) &= 3G(x) + H(x) + C \\ &= 2x^{3/2} - \frac{1}{2}\cos 2x + C \end{aligned}$$

es la fórmula general de la antiderivada de $f(x)$, donde C es una constante arbitraria. ■

Problemas con valor inicial y ecuaciones diferenciales

Las antiderivadas desempeñan varios papeles importantes en matemáticas y sus aplicaciones. Los métodos y las técnicas para obtenerlas son una parte fundamental del cálculo, y los estudiaremos en el capítulo 8. La obtención de una antiderivada de una función $f(x)$ es el mismo problema que encontrar una función $y(x)$ que satisfaga la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Ésta se conoce como **ecuación diferencial**, ya que es una ecuación que involucra a una función desconocida y que se está diferenciando. Para resolverla, necesitamos una función $y(x)$ que satisfaga la ecuación. Esta función se obtiene tomando la antiderivada de $f(x)$. Fijamos la constante arbitraria que surge en el proceso de antidiferenciación especificando una condición inicial.

$$y(x_0) = y_0.$$

Esta condición significa que la función $y(x)$ tiene el valor y_0 cuando $x = x_0$. La combinación de una ecuación diferencial y una condición inicial se llama **problema con valor inicial**. Estos problemas desempeñan papeles importantes en todas las ramas de la ciencia.

La antiderivada más general $F(x) + C$ (tal como $x^3 + C$ en el ejemplo 2) de la función $f(x)$ ofrece la **solución general** $y = F(x) + C$ de la ecuación diferencial $dy/dx = f(x)$. La solución general proporciona *todas* las soluciones de la ecuación (existe un número infinito, una para cada valor de C). **Resolvemos** la ecuación diferencial obteniendo su solución general. Luego, se resuelve el problema con valor inicial obteniendo la **solución particular** que satisfaga la condición inicial $y(x_0) = y_0$. En el ejemplo 2, la función $y = x^3 - 2$ es la solución particular de la ecuación diferencial $dy/dx = 3x^2$ que satisface la condición inicial $y(1) = -1$.

Antiderivadas y movimiento

Hemos visto que la derivada de la función de posición de un objeto proporciona su velocidad, y que la derivada de la función velocidad da su aceleración. Si conocemos la aceleración de un objeto, entonces, obteniendo una antiderivada, podemos recuperar la velocidad y, a partir de la antiderivada de la velocidad, podemos recuperar su función de posición. Este

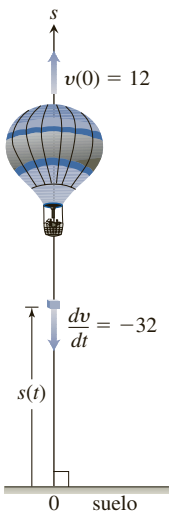


FIGURA 4.52 Paquete arrojado desde un globo que se eleva (ejemplo 5).

procedimiento se usó como una aplicación del corolario 2 que se mencionó en la sección 4.2. Ahora que tenemos una terminología y un marco conceptual en términos de antiderivadas, nos ocuparemos nuevamente del problema desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales.

EJEMPLO 5 Un globo de aire caliente, que asciende a razón de 12 ft/s, se encuentra a una altura de 80 ft por encima del suelo, cuando el tripulante arroja un paquete. ¿Cuánto tiempo tarda el paquete en llegar al suelo?

Solución Sea $v(t)$ la velocidad del paquete en el tiempo t, y sea $s(t)$ su altura sobre el suelo. La aceleración de la gravedad cerca de la superficie de la Tierra es de 32 ft/s^2. Suponiendo que no actúan otras fuerzas sobre el paquete, tenemos

$$\frac{dv}{dt} = -32.$$

Es negativa porque la gravedad actúa en la dirección en que s decrece

Esto nos lleva al siguiente problema con valor inicial (figura 4.52):

$$\textit{Ecuación diferencial:} \quad \frac{dv}{dt} = -32$$

$$\textit{Condición inicial:} \quad v(0) = 12.$$

Elevación inicial del globo

Éste es nuestro modelo matemático para el movimiento del paquete. Resolvemos el problema con valor inicial para obtener la velocidad del paquete.

1. *Resuelva la ecuación diferencial*: La fórmula general para la antiderivada de −32 es

$$v = -32t + C.$$

Una vez que se encuentra la solución general de la ecuación diferencial, usamos la condición inicial para obtener la solución particular que resuelva nuestro problema.

2. *Evalúe C:*

$$12 = -32(0) + C \qquad \text{Condición inicial } v(0) = 12$$
$$C = 12.$$

La solución del problema con valor inicial es

$$v = -32t + 12.$$

Puesto que la velocidad es la derivada de la altura, y como la altura a la que se encuentra el paquete es de 80 ft en el tiempo $t = 0$ cuando se lanza, ahora tenemos un segundo problema con valor inicial:

$$\textit{Ecuación diferencial:} \quad \frac{ds}{dt} = -32t + 12$$

Se establece $v = ds/d$ en la ecuación anterior.

$$\textit{Condición inicial:} \quad s(0) = 80.$$

Resolvemos este problema con valor inicial para determinar la altura como una función de t.

1. *Resuelva la ecuación diferencial*: La antiderivada general de $-32t + 12$ es

$$s = -16t^2 + 12t + C.$$

2. *Evalúe C*:

$$80 = -16(0)^2 + 12(0) + C \qquad \text{Condición inicial: } s(0) = 80$$
$$C = 80.$$

La altura a la que se encuentra el paquete con respecto al suelo en el tiempo t es

$$s = -16t^2 + 12t + 80.$$

Use la solución: Para saber cuánto tiempo tarda el paquete en llegar al suelo, igualamos s a 0 y resolvemos para t:

$$-16t^2 + 12t + 80 = 0$$
$$-4t^2 + 3t + 20 = 0$$
$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{329}}{-8} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$
$$t \approx -1.89, \qquad t \approx 2.64.$$

El paquete golpea el suelo aproximadamente 2.64 s después de ser arrojado desde el globo. (La raíz negativa carece de significado físico). ■

Integrales indefinidas

Se usa un símbolo especial para denotar el conjunto de todas las antiderivadas de una función f.

DEFINICIÓN El conjunto de todas las antiderivadas de f es la **integral indefinida** de f con respecto a x, y se denota de la siguiente forma:

$$\int f(x)\,dx.$$

El símbolo $\int$ es un **signo que representa la integral**. La función f es el **integrando**, y x es la **variable de integración**.

Después del signo de integral que acabamos de definir, la función del integrando siempre va seguida por una diferencial para indicar la variable de integración. En el capítulo 5 se explicará por qué esto es tan importante. Usando esta notación, rescribimos las soluciones del ejemplo 1 como sigue:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C,$$
$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C,$$
$$\int \left(\sec^2 x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx = \tan x + \sqrt{x} + C$$

Esta notación se relaciona con la aplicación principal de las antiderivadas, que se analizará en el capítulo 5. Las antiderivadas desempeñan un papel clave en el cálculo de límites de ciertas sumas infinitas, un papel inesperado y sumamente útil que se describe en un resultado central del capítulo 5, llamado el teorema fundamental del cálculo.

EJEMPLO 6 Evalúe

$$\int (x^2 - 2x + 5)\,dx.$$

Solución Si reconocemos que $(x^3/3) - x^2 + 5x$ es una antiderivada de $x^2 - 2x + 5$, podemos evaluar la integral como

$$\int (x^2 - 2x + 5)\,dx = \overbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}^{\text{antiderivada}} + \underbrace{C}_{\text{constante arbitraria}}.$$

Si no reconocemos la antiderivada en seguida, podemos generarla término a término con las reglas de la suma, de la diferencia y del múltiplo constante.

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x + 5)\,dx &= \int x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 5\,dx \\ &= \int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 5\int 1\,dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) - 2\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) + 5(x + C_3) \\ &= \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 - 2C_2 + 5x + 5C_3.\end{aligned}$$

Esta fórmula es más complicada de lo que debería. Si combinamos C_1, $-2C_2$ y $5C_3$ en una sola constante arbitraria $C = C_1 - 2C_2 + 5C_3$, la fórmula se simplifica a

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

y *todavía* proporciona todas las antiderivadas posibles existentes. Por esta razón, le recomendamos que vaya directamente hasta la forma final, aunque haya elegido integrar término a término. Escriba

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x + 5)\,dx &= \int x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 5\,dx \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C.\end{aligned}$$

Obtenga, para cada parte, la antiderivada más sencilla posible y sume la constante arbitraria de integración hasta el final. ■

Ejercicios 4.7

Obtención de antiderivadas

En los ejercicios 1 a 16, obtenga una antiderivada para cada función. Resuelva todo lo que pueda mentalmente. Verifique sus respuestas mediante diferenciación.

1.	***a)*** $2x$	***b)*** x^2	***c)*** $x^2 - 2x + 1$
2.	***a)*** $6x$	***b)*** x^7	***c)*** $x^7 - 6x + 8$
3.	***a)*** $-3x^{-4}$	***b)*** x^{-4}	***c)*** $x^{-4} + 2x + 3$
4.	***a)*** $2x^{-3}$	***b)*** $\frac{x^{-3}}{2} + x^2$	***c)*** $-x^{-3} + x - 1$
5.	***a)*** $\frac{1}{x^2}$	***b)*** $\frac{5}{x^2}$	***c)*** $2 - \frac{5}{x^2}$
6.	***a)*** $-\frac{2}{x^3}$	***b)*** $\frac{1}{2x^3}$	***c)*** $x^3 - \frac{1}{x^3}$
7.	***a)*** $\frac{3}{2}\sqrt{x}$	***b)*** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$	***c)*** $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
8.	***a)*** $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$	***b)*** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$	***c)*** $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
9.	***a)*** $\frac{2}{3}x^{-1/3}$	***b)*** $\frac{1}{3}x^{-2/3}$	***c)*** $-\frac{1}{3}x^{-4/3}$
10.	***a)*** $x^{\sqrt{3}}$	***b)*** x^{π}	***c)*** $x^{\sqrt{2}-1}$
11.	***a)*** $-\pi \operatorname{sen} \pi x$	***b)*** $3 \operatorname{sen} x$	***c)*** $\operatorname{sen} \pi x - 3 \operatorname{sen} 3x$
12.	***a)*** $\pi \cos \pi x$	***b)*** $\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$	***c)*** $\cos \frac{\pi x}{2} + \pi \cos x$
13.	***a)*** $\frac{1}{2}\sec^2 x$	***b)*** $\frac{2}{3}\sec^2 \frac{x}{3}$	***c)*** $-\sec^2 \frac{3x}{2}$
14.	***a)*** $\csc^2 x$	***b)*** $-\frac{3}{2}\csc^2 \frac{3x}{2}$	***c)*** $1 - 8\csc^2 2x$
15.	***a)*** $\csc x \cot x$	***b)*** $-\csc 5x \cot 5x$	***c)*** $-\pi \csc \frac{\pi x}{2} \cot \frac{\pi x}{2}$
16.	***a)*** $\sec x \tan x$	***b)*** $4 \sec 3x \tan 3x$	***c)*** $\sec \frac{\pi x}{2} \tan \frac{\pi x}{2}$

Obtención de integrales indefinidas

En los ejercicios 17 a 56, obtenga la antiderivada más general o la integral indefinida. Tal vez necesite intentar una solución y, después, ajustar su conjetura. Verifique sus respuestas mediante diferenciación.

17. $\int (x + 1)\,dx$	**18.** $\int (5 - 6x)\,dx$	
19. $\int \left(3t^2 + \frac{t}{2}\right) dt$	**20.** $\int \left(\frac{t^2}{2} + 4t^3\right) dt$	
21. $\int (2x^3 - 5x + 7)\,dx$	**22.** $\int (1 - x^2 - 3x^5)\,dx$	
23. $\int \left(\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}\right) dx$	**24.** $\int \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{x^3} + 2x\right) dx$	
25. $\int x^{-1/3}\,dx$	**26.** $\int x^{-5/4}\,dx$	

27. $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$

28. $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$

29. $\int \left(8y - \frac{2}{y^{1/4}}\right) dy$

30. $\int \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{y^{5/4}}\right) dy$

31. $\int 2x(1 - x^{-3})\, dx$

32. $\int x^{-3}(x + 1)\, dx$

33. $\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} dt$

34. $\int \frac{4 + \sqrt{t}}{t^3} dt$

35. $\int (-2 \cos t)\, dt$

36. $\int (-5 \operatorname{sen} t)\, dt$

37. $\int 7 \operatorname{sen} \frac{\theta}{3}\, d\theta$

38. $\int 3 \cos 5\theta\, d\theta$

39. $\int (-3 \csc^2 x)\, dx$

40. $\int \left(-\frac{\sec^2 x}{3}\right) dx$

41. $\int \frac{\csc\theta \cot\theta}{2} d\theta$

42. $\int \frac{2}{5} \sec\theta \tan\theta\, d\theta$

43. $\int (4 \sec x \tan x - 2 \sec^2 x)\, dx$

44. $\int \frac{1}{2}(\csc^2 x - \csc x \cot x)\, dx$

45. $\int (\operatorname{sen} 2x - \csc^2 x)\, dx$

46. $\int (2 \cos 2x - 3 \operatorname{sen} 3x)\, dx$

47. $\int \frac{1 + \cos 4t}{2} dt$

48. $\int \frac{1 - \cos 6t}{2} dt$

49. $\int 3x^{\sqrt{3}}\, dx$

50. $\int x^{\sqrt{2}-1}\, dx$

51. $\int (1 + \tan^2\theta)\, d\theta$

52. $\int (2 + \tan^2\theta)\, d\theta$

(*Sugerencia:* $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$)

53. $\int \cot^2 x\, dx$

54. $\int (1 - \cot^2 x)\, dx$

(*Sugerencia:* $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$)

55. $\int \cos\theta\,(\tan\theta + \sec\theta)\, d\theta$

56. $\int \frac{\csc\theta}{\csc\theta - \operatorname{sen}\theta} d\theta$

Verificación de fórmulas de antiderivadas

Verifique mediante diferenciación las fórmulas de los ejercicios 57 a 62.

57. $\int (7x - 2)^3\, dx = \frac{(7x - 2)^4}{28} + C$

58. $\int (3x + 5)^{-2}\, dx = -\frac{(3x + 5)^{-1}}{3} + C$

59. $\int \sec^2(5x - 1)\, dx = \frac{1}{5}\tan(5x - 1) + C$

60. $\int \csc^2\left(\frac{x - 1}{3}\right) dx = -3 \cot\left(\frac{x - 1}{3}\right) + C$

61. $\int \frac{1}{(x + 1)^2} dx = -\frac{1}{x + 1} + C$

62. $\int \frac{1}{(x + 1)^2} dx = \frac{x}{x + 1} + C$

63. Determine cuál de las siguientes fórmulas es verdadera y cuál es falsa, y explique brevemente la razón de su respuesta.

a) $\int x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} x + C$

b) $\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x \cos x + C$

c) $\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$

64. Determine cuál de las siguientes fórmulas es verdadera y cuál es falsa, y explique brevemente la razón de su respuesta.

a) $\int \tan\theta \sec^2\theta\, d\theta = \frac{\sec^3\theta}{3} + C$

b) $\int \tan\theta \sec^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\tan^2\theta + C$

c) $\int \tan\theta \sec^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sec^2\theta + C$

65. Determine cuál de las siguientes fórmulas es verdadera y cuál es falsa, y explique brevemente la razón de su respuesta.

a) $\int (2x + 1)^2\, dx = \frac{(2x + 1)^3}{3} + C$

b) $\int 3(2x + 1)^2\, dx = (2x + 1)^3 + C$

c) $\int 6(2x + 1)^2\, dx = (2x + 1)^3 + C$

66. Determine cuál de las siguientes fórmulas es verdadera y cuál es falsa, y explique brevemente la razón de su respuesta.

a) $\int \sqrt{2x + 1}\, dx = \sqrt{x^2 + x + C}$

b) $\int \sqrt{2x + 1}\, dx = \sqrt{x^2 + x} + C$

c) $\int \sqrt{2x + 1}\, dx = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2x + 1}\right)^3 + C$

67. ¿Verdadero o falso? Explique brevemente la razón de su respuesta.

$$\int \frac{-15(x + 3)^2}{(x - 2)^4} dx = \left(\frac{x + 3}{x - 2}\right)^3 + C$$

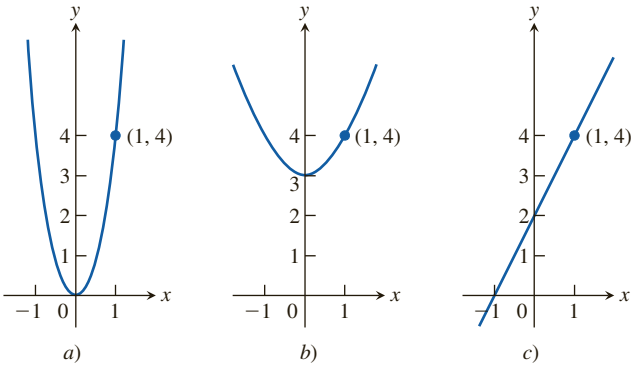
68. ¿Verdadero o falso? Explique brevemente la razón de su respuesta.

$$\int \frac{x \cos(x^2) - \operatorname{sen}(x^2)}{x^2} dx = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x} + C$$

Problemas con valor inicial

69. ¿Cuál de las siguientes gráficas muestra la solución del problema con valor inicial

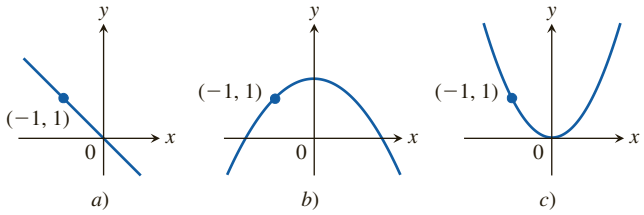
$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad y = 4 \text{ cuando } x = 1?$$



Justifique su respuesta.

70. ¿Cuál de las siguientes gráficas muestra la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -x, \quad y = 1 \text{ cuando } x = -1?$$



Justifique su respuesta.

Resuelva los problemas con valor inicial en los ejercicios 71 a 90.

71. $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 7, \quad y(2) = 0$

72. $\dfrac{dy}{dx} = 10 - x, \quad y(0) = -1$

73. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2} + x, \quad x > 0; \quad y(2) = 1$

74. $\dfrac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 5, \quad y(-1) = 0$

75. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^{-2/3}, \quad y(-1) = -5$

76. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y(4) = 0$

77. $\dfrac{ds}{dt} = 1 + \cos t, \quad s(0) = 4$

78. $\dfrac{ds}{dt} = \cos t + \operatorname{sen} t, \quad s(\pi) = 1$

79. $\dfrac{dr}{d\theta} = -\pi \operatorname{sen} \pi\theta, \quad r(0) = 0$

80. $\dfrac{dr}{d\theta} = \cos \pi\theta, \quad r(0) = 1$

81. $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{2} \sec t \tan t, \quad v(0) = 1$

82. $\dfrac{dv}{dt} = 8t + \csc^2 t, \quad v\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -7$

83. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2 - 6x; \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = 1$

84. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0; \quad y'(0) = 2, \quad y(0) = 0$

85. $\dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{2}{t^3}; \quad \left.\dfrac{dr}{dt}\right|_{t=1} = 1, \quad r(1) = 1$

86. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{3t}{8}; \quad \left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=4} = 3, \quad s(4) = 4$

87. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 6; \quad y''(0) = -8, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 5$

88. $\dfrac{d^3\theta}{dt^3} = 0; \quad \theta''(0) = -2, \quad \theta'(0) = -\dfrac{1}{2}, \quad \theta(0) = \sqrt{2}$

89. $y^{(4)} = -\operatorname{sen} t + \cos t;$
$y'''(0) = 7, \quad y''(0) = y'(0) = -1, \quad y(0) = 0$

90. $y^{(4)} = -\cos x + 8 \operatorname{sen} 2x;$
$y'''(0) = 0, \quad y''(0) = y'(0) = 1, \quad y(0) = 3$

91. Obtenga la curva $y = f(x)$ en el plano xy que pasa por el punto $(9, 4)$ y cuya pendiente en todo punto es $3\sqrt{x}$.

92. ***a)*** Obtenga una curva $y = f(x)$ con las siguientes propiedades:

i. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x$

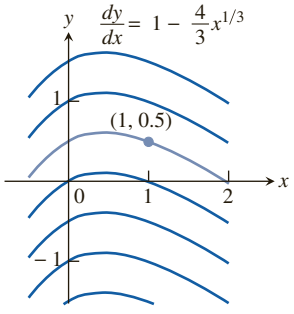
ii. Su gráfica pasa por el punto $(0, 1)$ y tiene una tangente horizontal ahí.

b) ¿Cuántas curvas como ésta existen? ¿Cómo lo sabe?

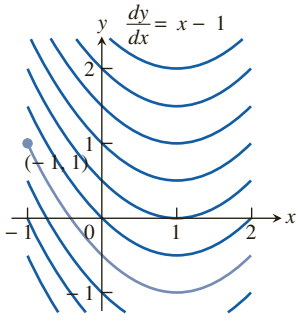
Curvas solución (integrales)

En los ejercicios 93 a 96, se presentan curvas solución de ecuaciones diferenciales. Obtenga, en cada ejercicio, una ecuación para la curva que pasa por el punto marcado.

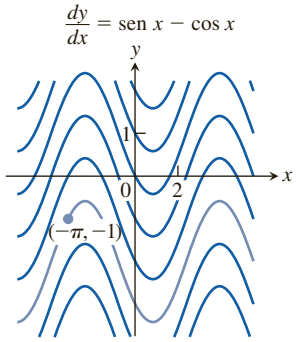
93.



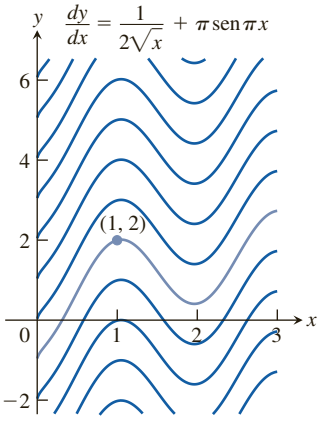
94.



95.



96.



Aplicaciones

97. Obtención del desplazamiento a partir de una antiderivada de la velocidad

a) Suponga que la velocidad de un cuerpo que se desplaza a lo largo del eje s es

$$\frac{ds}{dt} = v = 9.8t - 3.$$

- **i.** Determine el desplazamiento del cuerpo en el intervalo de tiempo que va de $t = 1$ a $t = 3$, considerando que $s = 5$ cuando $t = 0$.
- **ii.** Determine el desplazamiento del cuerpo de $t = 1$ a $t = 3$ dado que $s = -2$ cuando $t = 0$.
- **iii.** Ahora determine el desplazamiento del cuerpo de $t = 1$ a $t = 3$ considerando que $s = s_0$ cuando $t = 0$.

b) Suponga que la posición s de un cuerpo que se desplaza a lo largo de una recta coordenada es una función diferenciable del tiempo t. ¿Es verdad que, una vez que se conoce una antiderivada de la función velocidad ds/dt, es posible determinar el desplazamiento del cuerpo de $t = a$ a $t = b$, incluso si no se conoce la posición exacta del cuerpo en ninguno de esos momentos? Justifique su respuesta.

98. Elevación desde la Tierra Un cohete se eleva desde la superficie de la Tierra con una aceleración constante de 20 m/s^2. ¿Qué tan rápido irá el cohete un minuto después?

99. Frenado a tiempo de un automóvil Usted conduce su automóvil a una velocidad constante de 60 millas/hora (88 ft/s) por una carretera, cuando ve que se produjo un accidente más adelante y frena de inmediato. ¿Qué desaceleración constante se requiere para detener su automóvil en 242 ft? Para averiguarlo, ejecute los siguientes pasos.

1. Resuelva el problema con valor inicial

Ecuación diferencial: $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -k$ (k es constante)

Condiciones iniciales: $\dfrac{ds}{dt} = 88$ y $s = 0$ cuando $t = 0$.

Medición del tiempo y la distancia desde que se pisó el freno

2. Obtenga el valor de t que hace que $ds/dt = 0$. (La respuesta involucra a k).

3. Obtenga el valor de k que hace que $s = 242$ para el valor de t que obtuvo en el paso 2.

100. Frenado de una motocicleta El programa de seguridad vial del estado de Illinois exige a los motociclistas que sus vehículos sean capaces de frenar de 30 millas/hora (44 ft/s) a 0 en una distancia de 45 ft. ¿Qué desaceleración constante se requiere para lograrlo?

101. Movimiento a lo largo de una recta coordenada Una partícula se desplaza sobre una recta coordenada con una aceleración $a = d^2s/dt^2 = 15\sqrt{t} - \left(3/\sqrt{t}\right)$, sujeta a las condiciones $ds/dt = 4$ y $s = 0$ cuando $t = 1$. Determine

a) la velocidad $v = ds/dt$ en términos de t.

b) la posición s en términos de t.

T **102. El martillo y la pluma** Cuando el astronauta del *Apolo 15* David Scott dejó caer un martillo y una pluma en la Luna para demostrar que en el vacío todos los cuerpos caen con la misma aceleración (constante), lo hizo desde una altura aproximada de 4 ft arriba del suelo. La grabación del evento que se exhibió por televisión muestra que la pluma y el martillo caen más lentamente en la Luna que en la Tierra, donde tales objetos tardarían sólo medio segundo en caer desde los 4 ft en el vacío. ¿Cuánto tiempo tardaron en caer desde los 4 ft el martillo y la pluma en la Luna? Para averiguarlo, resuelva el siguiente problema con valor inicial para s como una función de t. Después, obtenga el valor de t que hace que $s = 0$.

Ecuación diferencial: $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -5.2 \text{ ft/s}^2$

Condiciones iniciales: $\dfrac{ds}{dt} = 0$ y $s = 4$ cuando $t = 0$

103. Movimiento con aceleración constante La ecuación estándar de la posición s de un cuerpo que se desplaza con aceleración constante a lo largo de una recta coordenada es

$$s = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + s_0, \tag{1}$$

donde v_0 y s_0 son la velocidad y la posición del cuerpo en el instante $t = 0$. Deduzca esta ecuación resolviendo el problema con valor inicial

Ecuación diferencial: $\dfrac{d^2s}{dt^2} = a$

Condiciones iniciales: $\dfrac{ds}{dt} = v_0$ y $s = s_0$ cuando $t = 0$.

104. Caída libre cerca de la superficie de un planeta En el caso de la caída libre cerca de la superficie de un planeta donde la aceleración debida a la gravedad tiene una magnitud constante de g unidades de longitud/s^2, la ecuación (1) del ejercicio 103 toma la forma

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0, \tag{2}$$

donde s es la altura del cuerpo por encima de la superficie. La ecuación tiene un signo menos porque la aceleración actúa hacia abajo, en la dirección decreciente de s. La velocidad v_0 es positiva si el objeto se eleva en el tiempo $t = 0$, y negativa si el objeto cae.

En lugar de usar el resultado del ejercicio 103, puede obtener la ecuación (2) directamente resolviendo el problema con valor inicial adecuado. ¿Cuál es dicho problema? Resuélvalo para asegurarse de que la ecuación es correcta y explique los pasos que realiza conforme avanza.

105. Suponga que

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - \sqrt{x}\right) \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{d}{dx}(x + 2).$$

Obtenga:

a) $\int f(x)\,dx$ ***b)*** $\int g(x)\,dx$

c) $\int [-f(x)]\,dx$ ***d)*** $\int [-g(x)]\,dx$

e) $\int [f(x) + g(x)]\,dx$ ***f)*** $\int [f(x) - g(x)]\,dx$

106. Unicidad de las soluciones Si las funciones diferenciables $y = F(x)$ y $y = G(x)$ resuelven el problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \qquad y(x_0) = y_0,$$

en un intervalo I, ¿debe ser $F(x) = G(x)$ para toda x en I? Justifique su respuesta.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Use un software matemático para resolver los problemas con valor inicial de los ejercicios 107 a 110. Trace las curvas solución.

107. $y' = \cos^2 x + \operatorname{sen} x, \quad y(\pi) = 1$

108. $y' = \frac{1}{x} + x, \quad y(1) = -1$

109. $y' = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad y(0) = 2$

110. $y'' = \frac{2}{x} + \sqrt{x}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0$

Capítulo 4 Preguntas de repaso

1. ¿Qué se puede decir acerca de los valores extremos de una función continua en un intervalo cerrado?

2. ¿Qué significa que una función tenga un valor extremo local en su dominio? ¿Qué quiere decir que tenga un valor extremo absoluto? ¿Cómo se relacionan los valores extremos locales y absolutos, si es que existe tal relación? Dé ejemplos.

3. ¿Cómo se obtienen los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado? Dé ejemplos.

4. ¿Cuáles son las hipótesis y las conclusiones del teorema de Rolle? ¿Las hipótesis son realmente necesarias? Explique.

5. ¿Cuáles son las hipótesis y las conclusiones del teorema del valor medio? ¿Qué interpretaciones físicas puede tener dicho teorema?

6. Enuncie los tres corolarios del teorema del valor medio.

7. ¿Cómo es posible identificar algunas veces una función $f(x)$ conociendo f' y el valor de f en un punto $x = x_0$? Dé ejemplos.

8. ¿Cuál es la prueba de la primera derivada para valores extremos locales? Dé ejemplos de su aplicación.

9. ¿Cómo se puede someter a prueba una función dos veces diferenciable para determinar dónde su gráfica es cóncava hacia arriba o hacia abajo? Dé ejemplos.

10. ¿Qué es un punto de inflexión? Dé un ejemplo. ¿Qué significado físico tienen los puntos de inflexión?

11. ¿Cuál es la prueba de la segunda derivada para valores extremos locales? Dé ejemplos de su aplicación.

12. ¿Qué indica la derivada de una función con respecto a la forma de su gráfica?

13. Elabore una lista de los pasos que deben seguirse para graficar una función polinomial. Ilustre con un ejemplo.

14. ¿Qué es una cúspide? Dé ejemplos.

15. Elabore una lista de los pasos que deben seguirse para graficar una función racional. Ilustre con un ejemplo.

16. Describa una estrategia general para resolver problemas de máximos y mínimos. Dé ejemplos.

17. Describa el método de Newton para resolver ecuaciones. Dé un ejemplo. ¿Cuál es la teoría que está detrás del método? ¿A qué se debe prestar atención al usar este método?

18. ¿Una función puede tener más de una antiderivada? Si es así, ¿cómo se relacionan las antiderivadas? Explique.

19. ¿Qué es una integral indefinida? ¿Cómo se puede evaluar? ¿Qué fórmulas generales conoce para obtener las integrales indefinidas?

20. ¿Cómo se puede resolver algunas veces una ecuación diferencial de la forma $dy/dx = f(x)$?

21. ¿Qué es un problema con valor inicial? ¿Cómo se resuelve? Dé un ejemplo.

22. Además de la aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de una recta coordenada como una función del tiempo, ¿qué más se necesita saber para obtener la función de posición del cuerpo? Dé un ejemplo.

Capítulo 4 Ejercicios de práctica

Valores extremos

1. ¿La función $f(x) = x^3 + 2x + \tan x$ tiene algún valor máximo o mínimo local? Justifique su respuesta.

2. ¿La función $g(x) = \csc x + 2 \cot x$ tiene algún valor máximo o mínimo local? Justifique su respuesta.

3. ¿La función $f(x) = (7 + x)(11 - 3x)^{1/3}$ tiene algún valor mínimo absoluto? ¿Tiene un máximo absoluto? De ser así, obténgalos; en caso contrario, explique por qué no existen. Elabore una lista de todos los puntos críticos de f.

4. Obtenga los valores a y b tales que la función

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 - 1}$$

tenga un valor extremo local de 1 en $x = 3$. ¿Este valor extremo es un máximo o mínimo local? Justifique su respuesta.

5. La función mayor entero $f(x) = \lfloor x \rfloor$, definida para todo valor de x, alcanza un valor máximo local de 0 en cada punto de $[0, 1)$. ¿Alguno de estos valores máximos locales puede ser también un valor mínimo local de f? Justifique su respuesta.

6. ***a)*** Dé un ejemplo de una función diferenciable f cuya primera derivada sea cero en algún punto c, aun cuando f no tenga máximo ni mínimo local en c.

b) ¿Por qué esto es congruente con el teorema 2 de la sección 4.1? Justifique su respuesta.

7. La función $y = 1/x$ no alcanza un mínimo ni un máximo en el intervalo $0 < x < 1$, aun cuando la función es continua en este intervalo. ¿Contradice esto el teorema del valor extremo para funciones continuas? ¿Por qué?

8. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función $y = |x|$ en el intervalo $-1 \le x < 1$? Observe que el intervalo no es cerrado. ¿Esto es congruente con el teorema del valor extremo para funciones continuas? ¿Por qué?

T 9. Una gráfica lo suficientemente grande para mostrar el comportamiento global de una función podría no revelar características locales importantes. La gráfica de $f(x) = (x^8/8) - (x^6/2) - x^5 + 5x^3$ es un ejemplo de esta situación.

a) Grafique f en el intervalo $-2.5 \le x \le 2.5$. ¿Dónde parece que la gráfica tiene valores extremos locales o puntos de inflexión?

b) Ahora factorice $f'(x)$ y demuestre que f tiene un máximo local en $x = \sqrt[3]{5} \approx 1.70998$ y mínimos locales en $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73205$.

c) Haga un acercamiento a la gráfica para obtener una ventana de visualización que muestre la presencia de los valores extremos en $x = \sqrt[3]{5}$ y $x = \sqrt{3}$.

La moraleja es que, sin cálculo, la existencia de dos de los tres valores extremos podría haber pasado inadvertida. En cualquier gráfica normal de la función, los valores estarán lo suficientemente juntos para caer dentro de las dimensiones de un solo pixel de la pantalla.

(*Fuente*: *Uses of Technology in the Mathematics Curriculum*, de Benny Evans y Jerry Johnson, Oklahoma State University, publicado en 1990 bajo el auspicio de National Science Foundation, USE–8950044).

T 10. (*Continuación del ejercicio 9*).

a) Grafique $f(x) = (x^8/8) - (2/5)x^5 - 5x - (5/x^2) + 11$ en el intervalo $-2 \le x \le 2$. ¿Dónde parece que la gráfica tiene valores extremos locales o puntos de inflexión?

b) Demuestre que f tiene un valor máximo local en $x = \sqrt[7]{5} \approx 1.2585$ y un valor mínimo local en $x = \sqrt[3]{2} \approx 1.2599$.

c) Haga un acercamiento a la gráfica para obtener una ventana de visualización que muestre la presencia de los valores extremos en $x = \sqrt[7]{5}$ y $x = \sqrt[3]{2}$.

Teorema del valor medio

11. ***a)*** Demuestre que $g(t) = \text{sen}^2\, t - 3t$ decrece en todo intervalo de su dominio.

b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\text{sen}^2\, t - 3t = 5$? Justifique su respuesta.

12. ***a)*** Demuestre que $y = \tan\theta$ crece en todo intervalo abierto de su dominio.

b) Si la conclusión del inciso *a*) es correcta, ¿cómo explica el hecho de que $\tan \pi = 0$ es menor que $\tan(\pi/4) = 1$?

13. ***a)*** Demuestre que la ecuación $x^4 + 2x^2 - 2 = 0$ tiene exactamente una solución en $[0, 1]$.

T ***b)*** Obtenga la solución con tantas cifras decimales como sea posible.

14. ***a)*** Demuestre que $f(x) = x/(x + 1)$ crece en todo intervalo abierto de su dominio.

b) Demuestre que $f(x) = x^3 + 2x$ no tiene valores máximos ni mínimos locales.

15. Agua en un depósito Como resultado de una lluvia intensa, el volumen de agua en un depósito creció 1400 acre-ft en 24 horas. Demuestre que en algún instante durante ese periodo, el volumen del depósito estaba creciendo a una razón mayor de 225,000 galones/min. (Un acre-pie equivale a 43,560 ft^3, el volumen que cubriría un acre con profundidad de 1 ft. Un ft^3 es igual a 7.48 galones).

16. La fórmula $F(x) = 3x + C$ proporciona una función distinta para cada valor de C. Sin embargo, todas estas funciones tienen la misma derivada con respecto a x, a saber, $F'(x) = 3$. ¿Éstas son las únicas funciones diferenciables cuya derivada es 3? ¿Podría haber otras? Justifique su respuesta.

17. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x+1}\right)$$

aun cuando

$$\frac{x}{x+1} \neq -\frac{1}{x+1}.$$

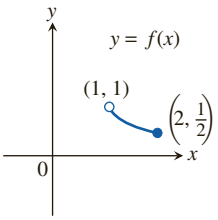
¿Contradice esto el corolario 2 del teorema del valor medio? Justifique su respuesta.

18. Calcule las primeras derivadas de $f(x) = x^2/(x^2 + 1)$ y $g(x) = -1/(x^2 + 1)$. ¿Qué concluye acerca de las gráficas de estas funciones?

Análisis de gráficas

En los ejercicios 19 y 20, use la gráfica respectiva para contestar las preguntas.

19. Identifique valores extremos globales cualesquiera de f y los valores de x en los que se presentan.

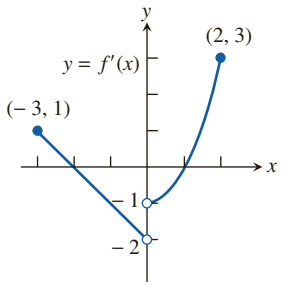


20. Estime los intervalos abiertos en los que la función $y = f(x)$ es

a) creciente.

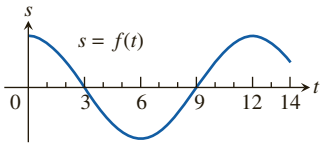
b) decreciente.

c) Use la gráfica de f' que aquí se presenta para indicar dónde se alcanzan los valores extremos locales de la función, y diga si cada extremo es un máximo o un mínimo relativo.

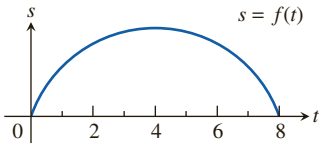


Cada una de las gráficas de los ejercicios 21 y 22 es la gráfica de la función de posición $s = f(t)$ de un cuerpo en movimiento en una recta coordenada (t representa el tiempo). ¿En qué momento aproximadamente (si acaso), ***a)*** la velocidad del cuerpo es igual a cero, y ***b)*** la aceleración del cuerpo es igual a cero? ¿Durante qué intervalos el cuerpo se mueve ***c)*** hacia delante, y ***d)*** hacia atrás?

21.



22.



Gráficas y graficación

Grafique las curvas de los ejercicios 23 a 32.

23. $y = x^2 - (x^3/6)$ **24.** $y = x^3 - 3x^2 + 3$

25. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$

26. $y = (1/8)(x^3 + 3x^2 - 9x - 27)$

27. $y = x^3(8 - x)$ **28.** $y = x^2(2x^2 - 9)$

39. $y = x - 3x^{2/3}$ **30.** $y = x^{1/3}(x - 4)$

31. $y = x\sqrt{3 - x}$ **32.** $y = x\sqrt{4 - x^2}$

Cada uno de los ejercicios 33 a 38 proporciona la primera derivada de una función $y = f(x)$. ***a)*** ¿En qué puntos, si acaso, la gráfica de f tiene un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión? ***b)*** Dibuje la forma general de la gráfica.

33. $y' = 16 - x^2$ **34.** $y' = x^2 - x - 6$

35. $y' = 6x(x + 1)(x - 2)$ **36.** $y' = x^2(6 - 4x)$

37. $y' = x^4 - 2x^2$ **38.** $y' = 4x^2 - x^4$

En los ejercicios 39 a 42, grafique cada función. Luego, use la primera derivada de la función para explicar lo que observa.

39. $y = x^{2/3} + (x - 1)^{1/3}$ **40.** $y = x^{2/3} + (x - 1)^{2/3}$

41. $y = x^{1/3} + (x - 1)^{1/3}$ **42.** $y = x^{2/3} - (x - 1)^{1/3}$

Dibuje las gráficas de las funciones racionales de los ejercicios 43 a 50.

43. $y = \dfrac{x + 1}{x - 3}$ **44.** $y = \dfrac{2x}{x + 5}$

45. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ **46.** $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$

47. $y = \dfrac{x^3 + 2}{2x}$ **48.** $y = \dfrac{x^4 - 1}{x^2}$

49. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3}$ **50.** $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

Optimización

51. La suma de dos números no negativos es 36. Obtenga los números si

a) la diferencia de sus raíces cuadradas debe ser lo más grande posible.

b) la suma de sus raíces cuadradas debe ser lo más grande posible.

52. La suma de dos números no negativos es 20. Obtenga los números si

a) el producto de uno de ellos con la raíz cuadrada del otro debe ser lo más grande posible.

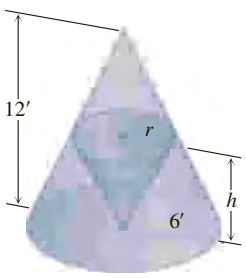
b) la suma de uno de ellos con la raíz cuadrada del otro debe ser lo más grande posible.

53. Un triángulo isósceles tiene un vértice en el origen y su base paralela al eje x con los vértices arriba del eje en la curva $y = 27 - x^2$. Obtenga el área máxima que puede tener el triángulo.

54. Un cliente le pide que diseñe un recipiente rectangular abierto de acero inoxidable. Éste debe tener base cuadrada y un volumen de 32 ft^3; además, debe construirse usando una placa de un cuarto de pulgada, y no debe pesar más de lo necesario. ¿Qué dimensiones recomienda?

55. Obtenga la altura y el radio del cilindro circular recto más grande que se pueda colocar en una esfera de radio $\sqrt{3}$.

56. La figura muestra dos conos circulares rectos, uno con el vértice hacia abajo dentro del otro. Las dos bases son paralelas, y el vértice del cono más pequeño se encuentra en el centro de la base del cono más grande. ¿Qué valores de r y h darán al cono pequeño el mayor volumen posible?



57. Fabricación de neumáticos Su compañía fabrica x cientos de neumáticos de calidad A y y cientos de neumáticos de calidad B al día, donde $0 \le x \le 4$ y

$$y = \frac{40 - 10x}{5 - x}.$$

La ganancia que se obtiene de los neumáticos de calidad A es el doble de la que se obtiene de los de calidad B. ¿Cuáles son las cantidades de cada una que maximizan la ganancia?

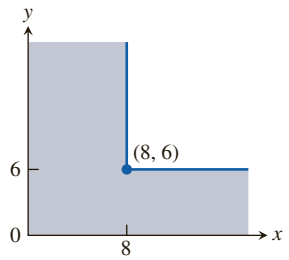
58. Movimiento de una partícula Las posiciones de dos partículas en el eje s son $s_1 = \cos t$ y $s_2 = \cos(t + \pi/4)$.

a) ¿Cuál es la mayor distancia que puede haber entre las partículas?

b) ¿Cuándo colisionan las dos partículas?

T **59. Caja abierta por arriba** Una caja rectangular abierta por arriba se fabrica con una pieza de cartón de 10 in por 16 in, cortando cuadrados con lados de la misma longitud en las esquinas, y doblando los lados hacia arriba. Obtenga analíticamente las dimensiones de la caja de mayor volumen e indique cuál es ese máximo volumen. Justifique su respuesta gráficamente.

60. Problema de la escalera ¿Cuál es la longitud aproximada (en pies) de la escalera más larga que se puede transportar horizontalmente por la esquina del corredor que se ilustra aquí? Redondee su respuesta hacia abajo, al ft más cercano.



Método de Newton

61. Sea $f(x) = 3x - x^3$. Demuestre que la ecuación $f(x) = -4$ tiene una solución en el intervalo $[2, 3]$ y use el método de Newton para obtenerla.

62. Sea $f(x) = x^4 - x^3$. Demuestre que la ecuación $f(x) = 75$ tiene una solución en el intervalo $[3, 4]$ y use el método de Newton para obtenerla.

Determinación de integrales indefinidas

Obtenga las integrales indefinidas (las antiderivadas más generales) en los ejercicios 63 a 78. Tal vez sea conveniente intentar una solución y después ajustar su conjetura. Verifique sus respuestas por diferenciación.

63. $\int (x^3 + 5x - 7)\,dx$

64. $\int \left(8t^3 - \frac{t^2}{2} + t\right) dt$

65. $\int \left(3\sqrt{t} + \frac{4}{t^2}\right) dt$

66. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{3}{t^4}\right) dt$

67. $\int \frac{dr}{(r + 5)^2}$

68. $\int \frac{6\,dr}{(r - \sqrt{2})^3}$

69. $\int 3\theta\sqrt{\theta^2 + 1}\,d\theta$

70. $\int \frac{\theta}{\sqrt{7 + \theta^2}} d\theta$

71. $\int x^3(1 + x^4)^{-1/4}\,dx$

72. $\int (2 - x)^{3/5}\,dx$

73. $\int \sec^2 \frac{s}{10} ds$

74. $\int \csc^2 \pi s\,ds$

75. $\int \csc\sqrt{2}\theta \cot\sqrt{2}\theta\,d\theta$

76. $\int \sec\frac{\theta}{3}\tan\frac{\theta}{3}\,d\theta$

77. $\int \text{sen}^2 \frac{x}{4}\,dx$ $\left(\textit{Sugerencia: } \text{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right)$

78. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$

Problemas con valor inicial

Resuelva los problemas con valor inicial de los ejercicios 79 a 82.

79. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{x^2}, \quad y(1) = -1$

80. $\frac{dy}{dx} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2, \quad y(1) = 1$

81. $\frac{d^2r}{dt^2} = 15\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}}; \quad r'(1) = 8, \quad r(1) = 0$

82. $\frac{d^3r}{dt^3} = -\cos t; \quad r''(0) = r'(0) = 0, \quad r(0) = -1$

Capítulo 4 Ejercicios adicionales y avanzados

Funciones y derivadas

1. ¿Qué puede decir de una función cuyos valores máximo y mínimo en un intervalo son iguales? Justifique su respuesta.

2. ¿Es verdad que una función discontinua no puede tener un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en un intervalo cerrado? Justifique su respuesta.

3. ¿Se puede concluir algo acerca de los valores extremos de una función continua en un intervalo abierto? ¿Y en un intervalo semiabierto? Justifique su respuesta.

4. Extremos locales Use el patrón de signos de la derivada

$$\frac{df}{dx} = 6(x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3(x - 4)^4$$

para identificar los puntos donde f tiene valores máximo y mínimo locales.

5. Extremos locales

a) Suponga que la primera derivada de $y = f(x)$ es

$$y' = 6(x + 1)(x - 2)^2.$$

¿En qué puntos, si acaso, la gráfica de f tiene un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión?

b) Suponga que la primera derivada de $y = f(x)$ es

$$y' = 6x(x + 1)(x - 2).$$

¿En qué puntos, si acaso, la gráfica de f tiene un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión?

6. Si $f'(x) \le 2$ para toda x, ¿cuánto es lo más que pueden incrementarse los valores de f en $[0, 6]$? Justifique su respuesta.

7. Acotamiento de una función Suponga que f es continua en $[a, b]$ y que c es un punto interior del intervalo. Demuestre que si $f'(x) \le 0$ en $[a, c)$ y $f'(x) \ge 0$ en $(c, b]$, entonces, $f(x)$ nunca es menor que $f(c)$ en $[a, b]$.

8. Una desigualdad

a) Demuestre que $-1/2 \le x/(1 + x^2) \le 1/2$ para todo valor de x.

b) Suponga que f es una función cuya derivada es $f'(x) = x/(1 + x^2)$. Utilice el resultado del inciso *a)* para demostrar que

$$|f(b) - f(a)| \le \frac{1}{2}|b - a|$$

para cualesquiera a y b.

9. La derivada de $f(x) = x^2$ es cero en $x = 0$, pero f no es una función constante. ¿Contradice esto el corolario del teorema del valor medio que afirma que las funciones con derivada igual a cero son constantes? Justifique su respuesta.

10. Puntos extremos y de inflexión Sea $h = fg$ el producto de dos funciones diferenciables de x.

a) Si f y g son positivas, con máximo local en $x = a$, y si f' y g' cambian de signo en a, ¿h tiene un máximo local en a?

b) Si las gráficas de f y g tienen puntos de inflexión en $x = a$, ¿la gráfica de h tiene un punto de inflexión en a?

Si cualquiera de sus respuestas es afirmativa, demuéstrelo. Si la respuesta es negativa, dé un contraejemplo.

11. Determinación de una función Use la siguiente información para obtener los valores de a, b y c en la fórmula $f(x) = (x + a)/(bx^2 + cx + 2)$.

i. Los valores de a, b y c son 0 o 1.

ii. La gráfica de f pasa por el punto $(-1, 0)$.

iii. La recta $y = 1$ es una asíntota de la gráfica de f.

12. Tangente horizontal ¿Para qué valor o valores de la constante k la curva $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ tiene exactamente una tangente horizontal?

Optimización

13. El mayor triángulo inscrito Los puntos A y B están en los extremos del diámetro de una circunferencia unitaria, y el punto C se encuentra en la circunferencia. ¿Es verdad que el área del triángulo ABC es la mayor cuando el triángulo es isósceles? ¿Cómo lo sabe?

14. Demostración de la prueba de la segunda derivada La prueba de la segunda derivada para máximos y mínimos locales (sección 4.4) afirma que:

a) f tiene un valor máximo local en $x = c$ si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$.

b) f tiene un valor mínimo local en $x = c$ si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$.

Para demostrar el enunciado *a)*, sea $\epsilon = (1/2)|f''(c)|$. Después, considere el hecho de que

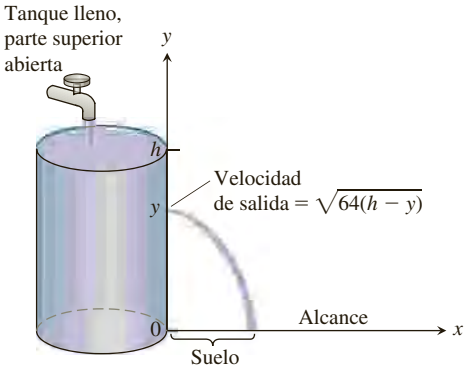
$$f''(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c + h) - f'(c)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c + h)}{h}$$

para concluir que, para alguna $\delta > 0$,

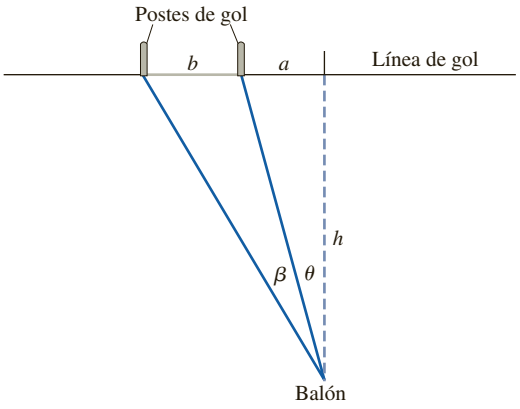
$$0 < |h| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(c + h)}{h} < f''(c) + \epsilon < 0.$$

Por lo tanto, $f'(c + h)$ es positiva para $-\delta < h < 0$, y negativa para $0 < h < \delta$. Demuestre el enunciado *b)* de un modo similar.

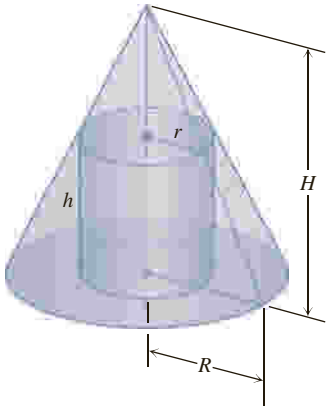
15. Orificio en un tanque de agua Se desea taladrar un orificio en el lado del tanque que se muestra aquí, a una altura que haga que el flujo de agua que sale llegue al suelo tan lejos del tanque como sea posible. Si se taladra el orificio cerca de la parte superior, donde la presión es baja, el agua saldrá lentamente, pero estará un tiempo relativamente largo en el aire. Si se taladra el orificio cerca de la base, el agua saldrá con mayor velocidad, pero tendrá poco tiempo para caer. ¿Cuál es el mejor lugar, si lo hay, para hacer el orificio? (*Sugerencia:* Piense en cuánto tiempo tardará una gota de agua que sale en caer de la altura y hasta el suelo).



16. Gol de campo Un jugador de fútbol americano desea patear un gol de campo con el balón colocado en la línea punteada de la derecha. Suponga que los postes del marco de anotación están separados b pies y la línea punteada está a una distancia $a > 0$ pies del poste derecho del marco. (Vea la figura). Obtenga la distancia h desde el marco de anotación que da al pateador el mayor ángulo β de tiro. Suponga que el campo de fútbol es plano.



17. Un problema de máximos y mínimos con una respuesta variable Algunas veces la solución de un problema de máximos y mínimos depende de las proporciones de la figura implicada. Por ejemplo, suponga que un cilindro circular recto de radio r y altura h está inscrito en un cono circular recto de radio R y altura H, como se muestra aquí. Determine el valor de r (en términos de R y H) que maximice el área superficial total del cilindro (incluyendo las tapas superior e inferior). Como verá, la solución depende de si $H \le 2R$ o $H > 2R$.



18. Minimización de un parámetro Obtenga el valor más pequeño de la constante positiva m que hará que $mx - 1 + (1/x)$ sea mayor o igual que cero para todos los valores positivos de x.

Teoría y ejemplos

19. Suponga que a una compañía le cuesta $y = a + bx$ dólares producir x unidades por semana y que puede vender x unidades semanalmente a un precio de $P = c - ex$ dólares por unidad. Considere que a, b, c y e representan constantes positivas. ***a)*** ¿Qué nivel de producción maximiza la utilidad? ***b)*** ¿Cuál es el precio correspondiente? ***c)*** ¿Cuál es la utilidad semanal con este nivel de producción? ***d)*** ¿A qué precio debería venderse cada artículo para maximizar las ganancias si las autoridades imponen un gravamen de t dólares por artículo vendido? Comente la diferencia entre este precio y el que estaba vigente antes del impuesto.

20. Estimación de recíprocos sin división Es posible estimar el valor del recíproco de un número a, sin dividir entre a, si se aplica el método de Newton a la función $f(x) = (1/x) - a$. Por ejemplo, si $a = 3$, la función involucrada es $f(x) = (1/x) - 3$.

a) Grafique $y = (1/x) - 3$. ¿Dónde cruza la gráfica el eje x?

b) Demuestre que, en este caso, la fórmula de recursión es

$$x_{n+1} = x_n(2 - 3x_n),$$

de modo que la división no es necesaria.

21. Para obtener $x = \sqrt[q]{a}$, aplicamos el método de Newton a $f(x) = x^q - a$. Aquí suponemos que a es un número real positivo y q es un entero positivo. Demuestre que x_1 es un "promedio ponderado" de x_0 y $a/{x_0}^{q-1}$, y obtenga los coeficientes m_0, m_1 tales que

$$x_1 = m_0 x_0 + m_1\left(\frac{a}{{x_0}^{q-1}}\right), \quad \begin{matrix} m_0 > 0, m_1 > 0, \\ m_0 + m_1 = 1. \end{matrix}$$

¿A qué conclusión llegaría si x_0 y $a/{x_0}^{q-1}$ fueran iguales? ¿Cuál sería el valor de x_1 en este caso?

22. La familia de rectas $y = ax + b$ (a y b constantes arbitrarias) pueden caracterizarse por la relación $y'' = 0$. Obtenga una relación similar que satisfaga la familia de todas las circunferencias

$$(x - h)^2 + (y - h)^2 = r^2,$$

donde h y r son constantes arbitrarias. (*Sugerencia:* Elimine h y r del conjunto de tres ecuaciones, incluyendo la que se da en el planteamiento y los dos obtenidas por diferenciación sucesiva).

23. Suponga que los frenos de un automóvil producen una desaceleración constante de k ft/s^2. ***a)*** Determine qué valor de k llevará a un automóvil que viaja a 60 millas/hora (88 ft/s) a detenerse a una distancia de 100 ft desde el punto donde se pisa el freno. ***b)*** Con el mismo valor de k, ¿qué tan lejos llegará un automóvil que viaja a 30 millas/hora antes de detenerse por completo?

24. Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuamente diferenciables que satisfacen las relaciones $f'(x) = g(x)$ y $f''(x) = -f(x)$. Sea $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$. Si $h(0) = 5$, obtenga $h(10)$.

25. ¿Puede haber una curva que satisfaga las siguientes condiciones? d^2y/dx^2 es igual a 0 en todas partes y, cuando $x = 0$, $y = 0$ y $dy/dx = 1$. Justifique su respuesta.

26. Obtenga la ecuación de una curva en el plano xy que pase por el punto $(1, -1)$ si su pendiente en x siempre es $3x^2 + 2$.

27. Una partícula se desplaza a lo largo del eje x. Su aceleración es $a = -t^2$. En $t = 0$, la partícula está en el origen. En el curso de su movimiento, alcanza el punto $x = b$, donde $b > 0$, pero ningún punto más allá de b. Determine su velocidad en $t = 0$.

28. Una partícula se desplaza con una aceleración $a = \sqrt{t} - \left(1/\sqrt{t}\right)$. Suponiendo que la velocidad $v = 4/3$ y la posición $s = -4/15$ cuando $t = 0$, obtenga

a) la velocidad v en términos de t.

b) la posición s en términos de t.

29. Dada $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ con $a > 0$. Considerando el mínimo, demuestre que $f(x) \ge 0$ para toda x real, si y sólo si $b^2 - ac \le 0$.

30. Desigualdad de Schwarz

a) En el ejercicio 29, sea

$$f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \cdots + (a_nx + b_n)^2,$$

y deduzca la desigualdad de Schwarz:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le \left({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2\right)\left({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2\right).$$

b) Demuestre que la igualdad se da en la desigualdad de Schwarz sólo si existe un número real x tal que $a_ix = -b_i$ para todo valor de i de 1 a n.

Capítulo 4 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulos Mathematica/Maple

Movimiento a lo largo de una recta*: *Posición → velocidad → aceleración
Observará la forma de una gráfica por medio de visualizaciones animadas de las relaciones de las derivadas entre la posición, la velocidad y la aceleración. Las figuras del texto pueden animarse.

Método de Newton*: *Estimación de π ¿a cuántas cifras decimales?
Grafique un función, observe una raíz, elija un punto inicial cerca de esta última y use el procedimiento de iteraciones de Newton para aproximar la raíz con la exactitud deseada. Los números π, e y $\sqrt{2}$ son aproximados.

5 Integrales

INTRODUCCIÓN Un gran logro de la geometría clásica fue la obtención de fórmulas para determinar las áreas y los volúmenes de triángulos, esferas y conos. En este capítulo desarrollaremos un método para calcular las áreas y los volúmenes de objetos mucho más generales. Este método, conocido como *integración*, es una herramienta para calcular mucho más que áreas y volúmenes. La *integral definida* es la herramienta clave del cálculo para definir y calcular diversas magnitudes, como áreas, volúmenes, longitudes de trayectorias curvas, probabilidades, promedios, consumo de energía, pesos de diferentes objetos y las fuerzas del agua contra las compuertas de una presa, sólo por mencionar algunas. Muchas de estas aplicaciones se estudian en capítulos subsiguientes.

Al igual que la derivada, la integral definida surge como un límite, esta vez, de las finas aproximaciones sucesivas a la cantidad de interés. La idea detrás de la integral es que podemos calcular tales cantidades descomponiéndolas en partes pequeñas, y luego sumando las contribuciones de cada parte. Consideraremos lo que sucede cuando se toman en cuenta partes cada vez más y más pequeñas en el proceso de suma. Conforme el número de términos que contribuyen a la suma tiende a infinito, y tomamos el límite de esta suma de la manera descrita en la sección 5.3, el resultado es una integral definida. Al considerar la razón de cambio del área debajo de una gráfica, se demuestra que las integrales definidas están vinculadas con las antiderivadas, un vínculo que constituye una de las relaciones más importantes en cálculo.

5.1 Área y su estimación mediante sumas finitas

La base de la formulación de las integrales definidas es la construcción de aproximaciones adecuadas vía sumas finitas. En esta sección se consideran tres ejemplos de tal proceso de aproximación: obtención del área debajo de una gráfica, la distancia recorrida por un objeto en movimiento y el valor promedio de una función. Aun cuando necesitamos definir con exactitud qué queremos decir con área de una región en el plano, o el valor promedio de una función en un intervalo cerrado, tenemos noción de lo que tales ideas significan. En esta sección iniciaremos el enfoque de integración a través de la *aproximación* a estas magnitudes por medio de sumas finitas. También se considera lo que sucede cuando tomamos en cuenta más y más términos en el proceso de suma. En secciones subsiguientes veremos cómo tomamos los límites de estas sumas cuando el número de términos tiende al infinito, lo cual conduce a definir con precisión las cantidades que aquí se aproximarán.

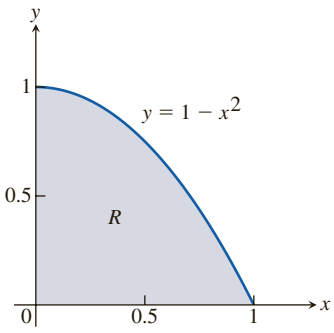


FIGURA 5.1 El área de la región R no se puede obtener con una fórmula simple.

Área

Suponga que deseamos obtener el área de la región sombreada R que se encuentra arriba del eje x, debajo de la gráfica de $y = 1 - x^2$, y entre las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$ (figura 5.1). Por desgracia, no existe una fórmula sencilla para calcular las áreas de regiones generales que tengan una frontera curva, como sucede con la región R. Así que, ¿cómo podemos obtener el área de R?

Mientras no tengamos un método para la determinación exacta del área de R, podemos aproximarla de manera sencilla. La figura 5.2*a*) muestra dos rectángulos que, en conjunto,

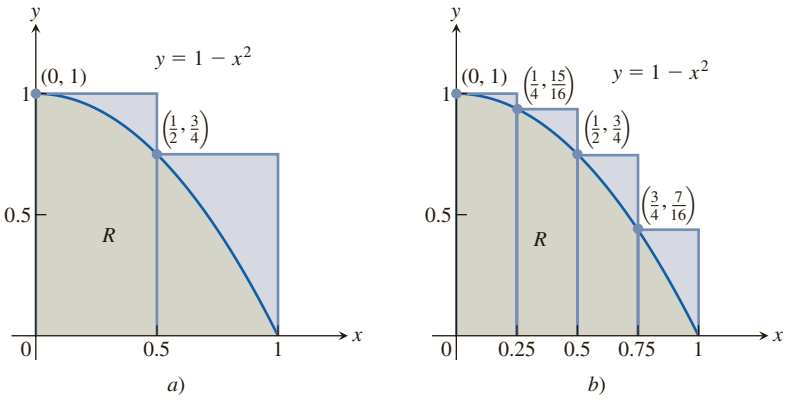


FIGURA 5.2 *a*) Obtendremos una sobrestimación del área de R al usar dos rectángulos que la contengan; el resultado será mayor que el área real. *b*) Cuatro rectángulos dan una mejor sobrestimación. Ambas estimaciones sobrepasan el valor real del área por la cantidad del área sombreada en color.

contienen a la región R. La base de cada rectángulo mide $1/2$; de izquierda a derecha, tales rectángulos tienen alturas de 1 y $3/4$. La altura de cada uno es el valor máximo de la función f en cada subintervalo. Como la función f es decreciente, la altura es el valor en el punto extremo del lado izquierdo del subintervalo de $[0, 1]$ que forma la base del rectángulo. El área total de los dos rectángulos aproxima el área A de la región R,

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8} = 0.875.$$

Dicha estimación es mayor que el valor real del área, A, puesto que los dos rectángulos contienen a R. Decimos que 0.875 es una **suma superior** porque se obtuvo tomando la altura de cada rectángulo como el valor máximo (el más alto) de $f(x)$, para un punto x en el intervalo de la base del rectángulo. En la figura 5.2*b*), mejoramos nuestra estimación al utilizar cuatro rectángulos más delgados, cada uno con un ancho de $1/4$, los cuales, juntos, contienen a la región R. Estos cuatro rectángulos dan la aproximación

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{32} = 0.78125,$$

la cual es todavía mayor que A, puesto que los cuatro rectángulos contienen a R.

Supongamos ahora que, para estimar el área, usamos cuatro rectángulos contenidos *dentro* de la región R como en la figura 5.3*a*). Cada rectángulo tiene un ancho de $1/4$ como

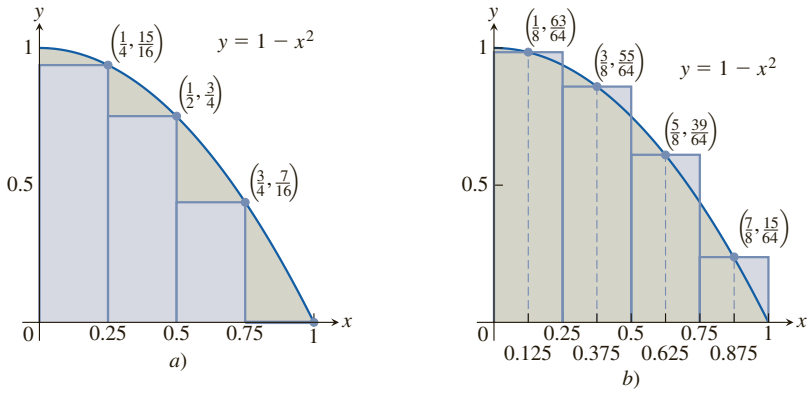


FIGURA 5.3 *a*) Los rectángulos contenidos en R dan una estimación del área que es inferior a su valor real, por una cantidad igual al área en color. *b*) La regla del punto medio usa rectángulos cuya altura es el valor de $y = f(x)$ en el punto medio de sus bases. La estimación parece más cercana al valor real del área porque las sombras en color que sobrepasan la curva se equilibran aproximadamente con las regiones blancas debajo de la curva.

antes, pero los cuatro son más pequeños y están totalmente por debajo de la gráfica de f. La función $f(x) = 1 - x^2$ es decreciente en $[0, 1]$, de modo que la altura de cada uno de estos rectángulos está dada por el valor de f en el punto extremo derecho del subintervalo que forma su base. El cuarto rectángulo tiene una altura igual a cero y, por lo tanto, no contribuye al área. Al sumar las áreas de estos rectángulos con alturas iguales al valor mínimo de $f(x)$ para un punto x en cada subintervalo, se obtiene una **suma inferior** de aproximación al área,

$$A \approx \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{32} = 0.53125.$$

Esta estimación es menor que el área A porque todos los rectángulos se encuentran dentro de la región R. El valor verdadero de A está entre las sumas inferior y superior:

$$0.53125 < A < 0.78125.$$

Considerando la aproximación tanto de la suma inferior como de la superior, obtenemos no sólo estimaciones del área, sino también una cota del tamaño del posible error en dichas estimaciones, ya que el valor verdadero del área está entre ambas. Aquí el error no puede ser mayor que la diferencia $0.78125 - 0.53125 = 0.25$.

Todavía es posible obtener otra estimación usando rectángulos cuyas alturas sean los valores de f en los puntos medios de sus bases (figura 5.3*b*). Este método de estimación se conoce como **regla del punto medio** de aproximación al área. La regla del punto medio brinda una estimación que se encuentra entre una suma inferior y una superior, pero no está muy claro si rebasa al área verdadera o es menor que ésta. Con cuatro rectángulos de $1/4$ de ancho, como antes, la regla del punto medio estima que el área de R es

$$A \approx \frac{63}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{55}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{39}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{64} \cdot \frac{1}{4} = \frac{172}{64} \cdot \frac{1}{4} = 0.671875.$$

En cada una de nuestras sumas, el intervalo $[a, b]$ sobre el que la función f está definida, se subdividió en n subintervalos de igual longitud, $\Delta x = (b - a)/n$, y f se evaluó en un punto de cada subintervalo: c_1 en el primer subintervalo, c_2 en el segundo, y así sucesivamente. Así, todas las sumas finitas tienen la forma

$$f(c_1)\,\Delta x + f(c_2)\,\Delta x + f(c_3)\,\Delta x + \cdots + f(c_n)\,\Delta x.$$

Tomando más rectángulos, cada vez más delgados que antes, parece que estas sumas finitas dan cada vez mejores aproximaciones del área verdadera de la región R.

La figura 5.4*a*) muestra una aproximación por una suma inferior al área de R usando 16 rectángulos de bases iguales. La suma de sus áreas es 0.634765625, un valor que parece más cercano al área verdadera, pero todavía se trata de una subestimación porque los rectángulos se encuentran dentro de R.

La figura 5.4*b*) muestra una aproximación con suma superior usando 16 rectángulos de bases iguales. La suma de sus áreas es 0.697265625, que es un poco mayor que el área verdadera, porque los rectángulos tomados en conjunto contienen a R. La regla del punto medio para 16 rectángulos da una aproximación del área igual a 0.6669921875, pero no resulta claro de inmediato si esta estimación es mayor o menor que el área verdadera.

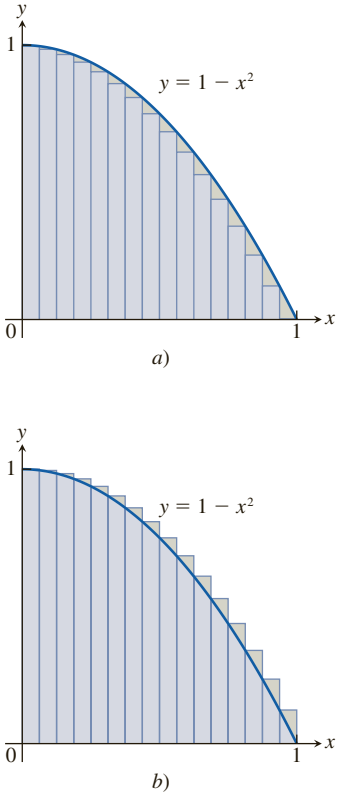


FIGURA 5.4 *a*) Una suma inferior que se obtuvo a partir de 16 rectángulos del mismo ancho $\Delta x = 1/16$. *b*) Una suma superior, con base en 16 rectángulos.

EJEMPLO 1 La tabla 5.1 muestra los valores de las aproximaciones de las sumas superior e inferior del área R usando hasta 1000 rectángulos. En la sección 5.2 veremos cómo obtener un valor exacto de las áreas de regiones como R, tomando un límite cuando el ancho de la base de cada rectángulo tiende a cero y el número de rectángulos tiende a infinito. Con las técnicas desarrolladas en esa sección, demostraremos que el área de R es igual a $2/3$. ■

Distancia recorrida

Suponga que conocemos la función velocidad $v(t)$ de un automóvil que viaja por una carretera sin cambiar de dirección, y se desea conocer la distancia que recorrió entre los tiempos $t = a$ y $t = b$. La función de posición, $s(t)$, del automóvil tiene derivada $v(t)$. Si podemos obtener una antiderivada $F(t)$ de $v(t)$, entonces, podemos encontrar la función de posición $s(t)$ del

TABLA 5.1 Aproximaciones finitas del área de R

Número de subintervalos	Suma inferior	Suma del punto medio	Suma superior
2	0.375	0.6875	0.875
4	0.53125	0.671875	0.78125
16	0.634765625	0.6669921875	0.697265625
50	0.6566	0.6667	0.6766
100	0.66165	0.666675	0.67165
1000	0.6661665	0.66666675	0.6671665

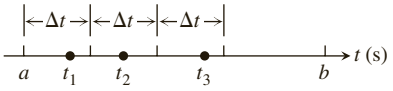
automóvil al considerar $s(t) = F(t) + C$. De este modo, la distancia recorrida se obtiene calculando el cambio de posición $s(b) - s(a) = F(b) - F(a)$. Si la función velocidad se determina sólo con las lecturas del velocímetro en varios instantes, no tenemos una fórmula para obtener una antiderivada de la función velocidad. ¿Qué conviene hacer en esta situación?

Cuando no se conoce una antiderivada de la función velocidad $v(t)$, podemos aproximar la distancia recorrida con sumas finitas de manera similar a la estimación del área que se explicó anteriormente. Subdividimos el intervalo $[a, b]$ en intervalos de tiempo pequeños, en cada uno de los cuales la velocidad se considera constante. Después, aproximamos la distancia recorrida en cada subintervalo de tiempo con la fórmula usual de distancia

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}$$

y sumamos los resultados a lo largo de $[a, b]$.

Suponga que el intervalo subdividido se ve así



con todos los subintervalos de la misma longitud Δt. Elegimos un número t_1 en el primer intervalo. Si Δt es tan diminuto que la velocidad apenas cambia en un pequeño intervalo de duración Δt, entonces, la distancia recorrida en el primer intervalo de tiempo es aproximadamente $v(t_1)\,\Delta t$. Si t_2 es un número en el segundo intervalo, la distancia recorrida en este segundo intervalo de tiempo es aproximadamente $v(t_2)\,\Delta t$. La suma de las distancias recorridas en todos los intervalos de tiempo es

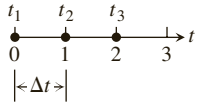
$$D \approx v(t_1)\,\Delta t + v(t_2)\,\Delta t + \cdots + v(t_n)\,\Delta t,$$

donde n es el número total de subintervalos.

EJEMPLO 2 La función velocidad de un proyectil disparado en línea recta es $f(t) = 160 - 9.8t$ m/s. Use la técnica de suma que describimos anteriormente para estimar la distancia que se eleva el proyectil durante los primeros tres segundos. ¿Qué tanto se acerca el resultado de estas sumas al valor exacto de 435.9 m? (En la sección 5.4 aprenderá cómo calcular fácilmente el valor exacto).

Solución Exploramos los resultados para distintos números de intervalos y diferentes elecciones de los puntos de evaluación. Observe que $f(t)$ es decreciente, de modo que, eligiendo los puntos extremos izquierdos, obtenemos una estimación mediante suma superior; si elegimos los puntos extremos derechos, obtenemos una estimación mediante suma inferior.

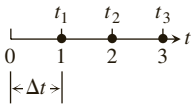
a) *Tres subintervalos de longitud 1, con f evaluada en los puntos extremos izquierdos, dan lugar a una suma superior*:



Con f evaluada en $t = 0$, 1 y 2, tenemos

$$\begin{aligned} D &\approx f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + f(t_3)\,\Delta t \\ &= [\,160 - 9.8(0)\,](1) + [\,160 - 9.8(1)\,](1) + [\,160 - 9.8(2)\,](1) \\ &= 450.6. \end{aligned}$$

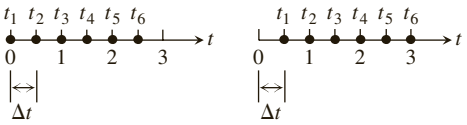
b) *Tres subintervalos de longitud 1, con f evaluada en los puntos extremos derechos, dan lugar a una suma inferior*:



Con f evaluada en $t = 1$, 2 y 3, tenemos

$$\begin{aligned} D &\approx f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + f(t_3)\,\Delta t \\ &= [\,160 - 9.8(1)\,](1) + [\,160 - 9.8(2)\,](1) + [\,160 - 9.8(3)\,](1) \\ &= 421.2. \end{aligned}$$

c) *Con seis subintervalos de longitud igual a* $1/2$, *obtenemos*



Estas estimaciones dan una suma superior utilizando puntos extremos izquierdos: $D \approx 443.25$; y una suma inferior usando puntos extremos derechos: $D \approx 428.55$. Las estimaciones de estos seis intervalos están algo más cerca del valor exacto que las estimaciones de los tres intervalos. El resultado mejora cuando los intervalos son más cortos.

Como se observa en la tabla 5.2, las sumas superiores con el punto extremo izquierdo se aproximan al valor real, 435.9, por arriba, mientras que las sumas inferiores con el punto extremo derecho se aproximan a ese valor por debajo. El valor real se encuentra entre estas sumas superior e inferior. La magnitud del error en las entradas más cercanas es de 0.23, que es un porcentaje pequeño del valor real.

$$\begin{aligned} \text{Magnitud del error} &= |\text{valor real} - \text{valor calculado}| \\ &= |435.9 - 435.67| = 0.23. \end{aligned}$$

$$\text{Porcentaje de error} = \frac{0.23}{435.9} \approx 0.05\%.$$

Si consideramos las últimas entradas de la tabla, sería razonable concluir que el proyectil se eleva alrededor de 436 m durante los primeros 3 s de vuelo. ■

TABLA 5.2 Estimaciones de recorrido-distancia

Número de subintervalos	Longitud de cada subintervalo	Suma superior	Suma inferior
3	1	450.6	421.2
6	1/2	443.25	428.55
12	1/4	439.58	432.23
24	1/8	437.74	434.06
48	1/16	436.82	434.98
96	1/32	436.36	435.44
192	1/64	436.13	435.67

Desplazamiento contra distancia recorrida

Si un objeto con una función de posición $s(t)$ se mueve a lo largo de una recta coordenada sin cambiar de dirección, es posible calcular la distancia total del recorrido entre $t = a$ y $t = b$ sumando la distancia recorrida en intervalos pequeños, como en el ejemplo 2. Si el cuerpo invierte su dirección una o más veces durante el recorrido, entonces, necesitamos considerar la *rapidez* del objeto $|v(t)|$, que es el valor absoluto de su función velocidad, $v(t)$, para obtener la distancia total recorrida. Utilizando la velocidad como en el ejemplo 2, sólo obtenemos una estimación del **desplazamiento** del cuerpo, $s(b) - s(a)$, es decir, la diferencia entre sus posiciones inicial y final.

Para entender por qué al usar la función velocidad en el proceso de suma se obtiene una estimación del desplazamiento, se divide el intervalo de tiempo $[a, b]$ en subintervalos iguales Δt lo suficientemente pequeños para que la velocidad del objeto no cambie mucho del tiempo t_{k-1} a t_k. Entonces, $v(t_k)$ da una buena aproximación de la velocidad en ese intervalo. De acuerdo con esto, el cambio en la coordenada de posición del objeto durante el intervalo de tiempo, que es su desplazamiento, es aproximadamente

$$v(t_k)\,\Delta t.$$

El cambio es positivo si $v(t_k)$ es positivo, y negativo si $v(t_k)$ es negativo.

En cualquier caso, la distancia recorrida por el objeto durante el subintervalo es aproximadamente

$$|v(t_k)|\,\Delta t.$$

La **distancia total recorrida** en el intervalo de tiempo es aproximadamente la suma

$$|v(t_1)|\Delta t + |v(t_2)|\Delta t + \cdots + |v(t_n)|\,\Delta t.$$

Repasaremos estas ideas en la sección 5.4.

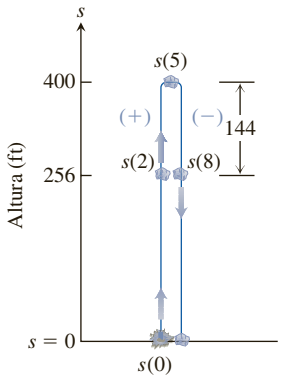


FIGURA 5.5 Piedra del ejemplo 3. La altura $s = 256$ ft se alcanza en $t = 2$ y $t = 8$ s. La piedra cae 144 ft desde la altura máxima cuando $t = 8$.

EJEMPLO 3 En el ejemplo 4 de la sección 3.4, analizamos el movimiento de una piedra arrojada directamente hacia arriba por una explosión de dinamita. En ese ejemplo, vimos que la velocidad de la piedra en cualquier instante durante su movimiento es $v(t) = 160 - 32t$ ft/s. La piedra estaba a 256 ft por arriba del suelo 2 s después de la explosión, continuó subiendo hasta alcanzar una altura máxima de 400 ft, 5 s después de la explosión, y luego cayó para alcanzar la altura de 256 ft nuevamente en $t = 8$ s después de la explosión. (Vea la figura 5.5).

Si seguimos un procedimiento como el presentado en el ejemplo 2, y consideramos la función velocidad $v(t)$ en el proceso de suma en el intervalo [0, 8], obtendremos una estimación de la *altura* de la piedra, en $t = 8$, igual a 256 ft sobre el suelo. El movimiento positivo hacia arriba (el cual produce un cambio de distancia positivo de 144 ft desde la altura de 256 ft hasta la altura máxima) se cancela con el movimiento negativo hacia abajo (que produce un cambio negativo de 144 ft desde la altura máxima hasta una altura de 256 ft por debajo de ella), de modo que la altura o el desplazamiento sobre el suelo se estima a partir de la función velocidad.

Por otro lado, si se usa el valor absoluto $|v(t)|$ en el proceso de suma, se obtendrá una estimación de la *distancia total* que recorre la piedra: la altura máxima de 400 ft, más la distancia adicional de 144 ft que ha bajado a partir de ese máximo cuando nuevamente tiene una altura de 256 ft en $t = 8$ s. Es decir, usando el valor absoluto de la función velocidad en el proceso de suma durante el intervalo [0, 8], se obtiene una estimación de 544 ft, la distancia total hacia arriba y hacia abajo que la piedra ha recorrido en 8 s. No hay cancelación de distancias debido a cambios de signo en la función velocidad, de modo que se estima la distancia recorrida en lugar del desplazamiento cuando se usa el valor absoluto de la función velocidad (es decir, la rapidez de la piedra).

Para ejemplificar nuestro análisis, subdividimos el intervalo [0, 8] en 16 subintervalos de longitud $\Delta t = 1/2$ y tomamos el punto extremo derecho de cada subintervalo en nuestros cálculos. La tabla 5.3 muestra los valores de la función velocidad en esos puntos.

TABLA 5.3 Función velocidad

t	$v(t)$	t	$v(t)$
0	160	4.5	16
0.5	144	5.0	0
1.0	128	5.5	−16
1.5	112	6.0	−32
2.0	96	6.5	−48
2.5	80	7.0	−64
3.0	64	7.5	−80
3.5	48	8.0	−96
4.0	32		

Utilizando $v(t)$ en la sumatoria, estimamos el desplazamiento en $t = 8$:

$$(144 + 128 + 112 + 96 + 80 + 64 + 48 + 32 + 16 + 0 - 16 - 32 - 48 - 64 - 80 - 96) \cdot \frac{1}{2} = 192$$

$$\text{Magnitud del error} = 256 - 192 = 64$$

Al emplear $|v(t)|$ en la sumatoria, se estima la distancia total recorrida durante el intervalo de tiempo $[0, 8]$:

$$(144 + 128 + 112 + 96 + 80 + 64 + 48 + 32 + 16 + 0 + 16 + 32 + 48 + 64 + 80 + 96) \cdot \frac{1}{2} = 528$$

$$\text{Magnitud del error} = 544 - 528 = 16$$

Si tomamos cada vez más subintervalos de $[0, 8]$ para nuestros cálculos, las estimaciones para los valores de 256 ft y 544 ft mejoran, aproximándolos como se muestra en la tabla 5.4. ■

TABLA 5.4 Estimación del recorrido de una piedra, lanzada hacia arriba, durante el intervalo de tiempo $[0, 8]$

Número de subintervalos	Longitud de cada subintervalo	Desplazamiento	Distancia total
16	1/2	192.0	528.0
32	1/4	224.0	536.0
64	1/8	240.0	540.0
128	1/16	248.0	542.0
256	1/32	252.0	543.0
512	1/64	254.0	543.5

Valor promedio de una función continua no negativa

El valor promedio de un conjunto de n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se obtiene sumándolos y, luego, dividiendo la suma entre n. Pero, ¿cuál es el valor promedio de una función continua f en un intervalo $[a, b]$? Dicha función podría tomar una infinidad de valores. Por ejemplo, la temperatura en cierta zona de un poblado es una función continua que sube y baja cada día. ¿Qué significa que la temperatura promedio en ese lugar, en el transcurso de un día, sea de 73 grados?

Cuando una función es constante, es fácil contestar esa pregunta. Una función con valor constante c en un intervalo $[a, b]$ tiene un valor promedio c. Cuando c es positiva, su gráfica en $[a, b]$ es un rectángulo de altura c. Entonces, el valor promedio de la función puede interpretarse geométricamente como el área de este rectángulo, dividida entre la longitud de su base $b - a$ (figura 5.6*a*).

¿Qué conviene hacer si queremos obtener el valor promedio de una función que no es constante, como la función g de la figura 5.6*b*)? Podemos imaginar su gráfica como si fuera

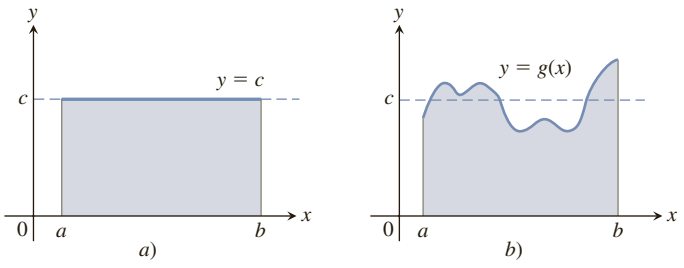


FIGURA 5.6 *a*) El valor promedio de $f(x) = c$ en $[a, b]$ es el área del rectángulo dividida entre $b - a$. *b*) El valor promedio de $g(x)$ en $[a, b]$ es el área debajo de su gráfica, dividida entre $b - a$.

una fotografía instantánea de la altura del agua que está chapoteando dentro de un tanque, encerrada entre las paredes $x = a$ y $x = b$. Cuando el agua se mueve, su altura en cada punto cambia, pero su altura promedio permanece igual. Para obtener la altura promedio del agua, hacemos que se estabilice su nivel para que su altura sea constante. La altura resultante c es igual al área que está debajo de la gráfica de g dividida entre $b - a$. Esto nos lleva a *definir* el valor promedio de una función no negativa en el intervalo $[a, b]$ como el área debajo de su gráfica dividida entre $b - a$. Para que esta definición sea válida, necesitamos entender con precisión a qué nos referimos con el área que está debajo de la gráfica. Esto se explicará en la sección 5.3, aunque, por ahora, veamos un ejemplo.

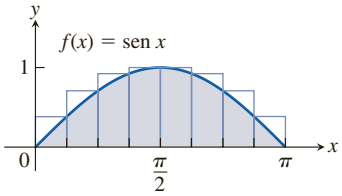


FIGURA 5.7 Aproximación del área debajo de $f(x) = \operatorname{sen} x$ entre 0 y π para calcular el valor promedio de sen x en $[0, \pi]$, usando 8 rectángulos (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Estime el valor promedio de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución Viendo la gráfica de sen x entre 0 y π en la figura 5.7, podemos decir que su altura promedio se encuentra en algún lugar entre 0 y 1. Para obtener el promedio, necesitamos calcular el área A debajo de la gráfica y después dividirla entre la longitud del intervalo, $\pi - 0 = \pi$.

No hay una manera sencilla de determinar el área, de manera que la aproximamos con sumas finitas. Para obtener una aproximación con la suma superior, sumamos las áreas de ocho rectángulos del mismo ancho, $\pi/8$, que contienen en conjunto la región que está debajo de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y arriba del eje x en $[0, \pi]$. Elegimos las alturas de los rectángulos como el máximo valor de sen x en cada subintervalo. En un subintervalo en particular, este valor máximo puede alcanzarse en el extremo izquierdo, en el extremo derecho, o en algún punto entre ellos. Evaluamos sen x en este punto con la finalidad de obtener la altura del rectángulo para una suma superior. Así, la suma de las áreas de los rectángulos estima el área total (figura 5.7).

$$A \approx \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{5\pi}{8} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{7\pi}{8}\right) \cdot \frac{\pi}{8}$$

$$\approx (.38 + .71 + .92 + 1 + 1 + .92 + .71 + .38) \cdot \frac{\pi}{8} = (6.02) \cdot \frac{\pi}{8} \approx 2.364.$$

TABLA 5.5 Valor promedio de sen x en $0 \le x \le \pi$

Número de subintervalos	Estimación con la suma superior
8	0.75342
16	0.69707
32	0.65212
50	0.64657
100	0.64161
1000	0.63712

Para estimar el valor promedio de sen x en $[0, \pi]$, dividimos el área estimada entre la longitud π del intervalo y obtenemos la aproximación $2.364/\pi \approx 0.753$.

Como usamos una suma superior para aproximar el área, esta estimación es mayor que el valor promedio real de sen x en $[0, \pi]$. Si usamos más rectángulos, cada vez más delgados, obtendremos un valor promedio cada vez más cercano al real, como se muestra en la tabla 5.5. Usando las técnicas de la sección 5.3, demostraremos que el valor promedio real es $2/\pi \approx 0.63662$.

Como antes, también podríamos haber usado rectángulos que estuvieran debajo de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y calcular la aproximación por la suma inferior, o podríamos haber usado la regla del punto medio. En la sección 5.3 veremos que, en cada caso, las aproximaciones están cercanas al área real si todos los rectángulos son lo suficientemente delgados. ■

Resumen

El área debajo de la gráfica de una función positiva, la distancia recorrida por un objeto que se desplaza sin cambiar de dirección, y el valor promedio de una función no negativa en un intervalo pueden aproximarse con sumas finitas construidas de cierto modo. Primero dividimos el intervalo en subintervalos, tratando a la función f como si fuera constante en cada subintervalo particular. Después, multiplicamos la longitud de cada subintervalo por el valor de f en algún punto dentro de él, y sumamos todos estos productos. Si el intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos de la misma longitud, $\Delta x = (b - a)/n$, y si $f(c_k)$ es el valor de f en el punto elegido c_k del *k-ésimo* subintervalo, este proceso genera una suma finita de la forma

$$f(c_1)\,\Delta x + f(c_2)\,\Delta x + f(c_3)\,\Delta x + \cdots + f(c_n)\,\Delta x.$$

La elección de c_k podría maximizar o minimizar el valor de f en el k-ésimo subintervalo, o dar algún valor intermedio. El valor real está entre las aproximaciones que se obtienen mediante las sumas superiores y las inferiores. Las aproximaciones con sumas finitas que hemos visto mejoran cuando sumamos un mayor número de subintervalos más delgados.

Ejercicios 5.1

Área

En los ejercicios 1 a 4, use aproximaciones finitas para estimar el área debajo de la gráfica de la función, utilizando

a) una suma inferior con dos rectángulos del mismo ancho.

b) una suma inferior con cuatro rectángulos del mismo ancho.

c) una suma superior con dos rectángulos del mismo ancho.

d) una suma superior con cuatro rectángulos del mismo ancho.

1. $f(x) = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

2. $f(x) = x^3$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

3. $f(x) = 1/x$ entre $x = 1$ y $x = 5$.

4. $f(x) = 4 - x^2$ entre $x = -2$ y $x = 2$.

Use rectángulos cuyas alturas estén dadas por el valor de la función en el punto medio de la base del rectángulo (*regla del punto medio*), para estimar el área debajo de las gráficas de las siguientes funciones; primero utilice dos rectángulos, y después cuatro.

5. $f(x) = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

6. $f(x) = x^3$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

7. $f(x) = 1/x$ entre $x = 1$ y $x = 5$.

8. $f(x) = 4 - x^2$ entre $x = -2$ y $x = 2$.

Distancia

9. Distancia recorrida La siguiente tabla muestra la velocidad de una locomotora de juguete que se desplaza a lo largo de una vía durante 10 s. Estime la distancia recorrida por la locomotora utilizando 10 subintervalos de longitud igual a 1, con

a) los valores de los puntos extremos izquierdos.

b) los valores de los puntos extremos derechos.

Tiempo (s)	Velocidad (in / s)	Tiempo (s)	Velocidad (in / s)
0	0	6	11
1	12	7	6
2	22	8	2
3	10	9	6
4	5	10	0
5	13		

10. Distancia recorrida río arriba Usted está sentado a la orilla de un río mirando una botella que flota y se mueve a contracorriente debido a la marea. Registra la velocidad de la corriente cada 5 minutos durante una hora, con los resultados que se muestran en la siguiente tabla. ¿Cuánto se desplazó río arriba la botella durante esa hora? Obtenga una estimación usando 12 subintervalos de longitud igual a 5, con

a) los valores de los puntos extremos izquierdos.

b) los valores de los puntos extremos derechos.

Tiempo (min)	Velocidad (m / s)	Tiempo (min)	Velocidad (m / s)
0	1	35	1.2
5	1.2	40	1.0
10	1.7	45	1.8
15	2.0	50	1.5
20	1.8	55	1.2
25	1.6	60	0
30	1.4		

11. Longitud de un camino Usted y un acompañante están a punto de viajar por un camino sinuoso de terracería, a bordo de un automóvil cuyo velocímetro funciona, pero su odómetro (el contador de distancia) está descompuesto. Para determinar la longitud del tramo que van a recorrer, usted registra la velocidad del automóvil a intervalos de 10 s, con los resultados que se presentan en la siguiente tabla. Estime la longitud del camino, utilizando

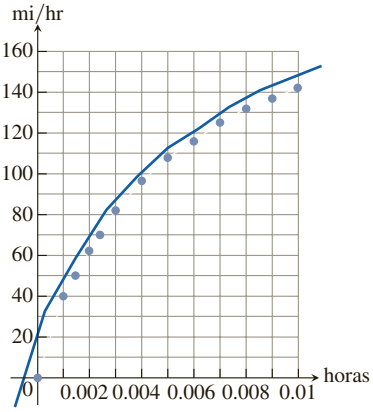
a) los valores de los puntos extremos izquierdos.

b) los valores de los puntos extremos derechos.

Tiempo (s)	Velocidad (convertida a ft / s) (30 mi / h = 44 ft / s)	Tiempo (s)	Velocidad (convertida a ft / s) (30 mi / h = 44 ft / s)
0	0	70	15
10	44	80	22
20	15	90	35
30	35	100	44
40	30	110	30
50	44	120	35
60	35		

12. Distancia a partir de los datos de velocidad La siguiente tabla presenta los datos de velocidad de un automóvil deportivo clásico que acelera de 0 a 142 millas/hora en 36 s (10 milésimas de una hora).

Tiempo (h)	Velocidad (mi / h)	Tiempo (h)	Velocidad (mi / h)
0.0	0	0.006	116
0.001	40	0.007	125
0.002	62	0.008	132
0.003	82	0.009	137
0.004	96	0.010	142
0.005	108		



a) Use rectángulos para estimar la distancia que recorrió el automóvil durante los 36 s que le tomó alcanzar 142 millas/hora.

b) Aproximadamente, ¿cuántos segundos tardó el automóvil en alcanzar el punto medio del camino? Aproximadamente, ¿qué tan rápido iba el automóvil en ese punto?

13. Caída libre con resistencia del aire Se deja caer un objeto desde un helicóptero. El objeto cae cada vez más rápido, pero su aceleración (la razón de cambio de la velocidad) decrece con el tiempo, debido a la resistencia del aire. La aceleración se mide en ft/s^2 y se registra cada segundo después de soltar el objeto, durante 5 s, como se muestra a continuación:

t	0	1	2	3	4	5
a	32.00	19.41	11.77	7.14	4.33	2.63

a) Obtenga una estimación superior para la rapidez cuando $t = 5$.

b) Obtenga una estimación inferior para la rapidez cuando $t = 5$.

c) Obtenga una estimación superior de la distancia recorrida cuando $t = 3$.

14. Distancia recorrida por un proyectil Un objeto es disparado directamente hacia arriba desde el nivel del mar, con una velocidad inicial de 400 ft/s.

a) Suponiendo que la gravedad es la única fuerza que actúa sobre el objeto, obtenga una estimación superior de su velocidad después de transcurridos 5 s. Considere que la aceleración debida a la gravedad es $g = 32\ ft/s^2$.

b) Obtenga una estimación inferior para la altura que se alcanza después de 5 s.

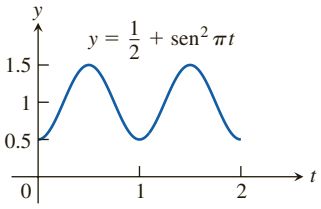
Valor promedio de una función

En los ejercicios 15 a 18, use una suma finita para estimar el valor promedio de f en el intervalo dado, dividiendo el intervalo en cuatro subintervalos de la misma longitud y evaluando f en los puntos medios de cada uno.

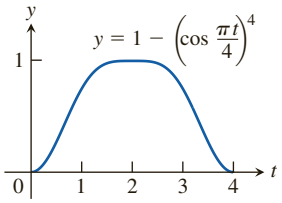
15. $f(x) = x^3$ en $[0, 2]$

16. $f(x) = 1/x$ en $[1, 9]$

17. $f(t) = (1/2) + \text{sen}^2 \pi t$ en $[0, 2]$



18. $f(t) = 1 - \left(\cos\dfrac{\pi t}{4}\right)^4$ en $[0, 4]$



Ejemplos de estimaciones

19. Contaminación del agua Un tanque dañado está derramando petróleo en el mar. El daño del tanque está empeorando, como lo evidencia el crecimiento del derrame, cada hora, registrado en la siguiente tabla.

Tiempo (h)	0	1	2	3	4
Derrame (gal/h)	50	70	97	136	190

Tiempo (h)	5	6	7	8
Derrame (gal/h)	265	369	516	720

a) Obtenga una estimación superior e inferior de la cantidad total de petróleo que se ha derramado durante 5 horas.

b) Repita el inciso *a)* para estimar la cantidad de petróleo que se habrá derramado después de 8 horas.

c) El tanque continúa derramando 720 galones/hora después de las primeras 8 horas. Si el tanque contenía originalmente 25,000 galones de petróleo ¿aproximadamente cuántas horas más pasarán, en el peor de los casos, antes de que se vierta todo el petróleo? ¿Cuántas horas transcurrirán en el mejor de los casos?

20. Contaminación del aire Una planta genera electricidad quemando petróleo. Los contaminantes producidos como resultado del proceso de combustión se eliminan mediante filtros colocados en las chimeneas. Con el tiempo, los filtros pierden eficiencia, hasta que llega el momento en que tienen que reemplazarse porque la cantidad de contaminantes liberados rebasa los estándares gubernamentales. Al final de cada mes se midió la razón a la que los contaminantes se liberaban en la atmósfera, y se obtuvo el siguiente registro.

Mes	**Ene**	**Feb**	**Mar**	**Abr**	**May**	**Jun**
Razón de contaminantes liberados (ton / día)	0.20	0.25	0.27	0.34	0.45	0.52

Mes	**Jul**	**Ago**	**Sep**	**Oct**	**Nov**	**Dic**
Razón de contaminantes liberados (ton / día)	0.63	0.70	0.81	0.85	0.89	0.95

a) Suponiendo meses de 30 días y que los filtros nuevos sólo permiten liberar 0.05 ton/día, obtenga una estimación superior del tonelaje total de contaminantes liberados al final de junio. ¿Cuál sería la estimación inferior?

b) Aproximadamente, ¿cuándo se habrá liberado un total de 125 toneladas de contaminantes en la atmósfera, en el mejor de los casos?

21. Inscriba un polígono regular de n lados en un círculo de radio 1, y calcule el área del polígono para los siguientes valores de n:

a) 4 (un cuadrado) ***b)*** 8 (un octágono) ***c)*** 16

d) Compare las áreas de los incisos *a*), *b*) y *c*) con el área del círculo.

22. (*Continuación del ejercicio 21*).

a) Inscriba un polígono regular de n lados en un círculo de radio 1, y calcule el área de los n triángulos congruentes que se obtienen dibujando los radios hacia los vértices del polígono.

b) Calcule el límite del área del polígono inscrito cuando $n \to \infty$.

c) Repita los cálculos de los incisos *a*) y *b*) para un círculo de radio r.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 23 a 26, use un software matemático para ejecutar los siguientes pasos.

a) Grafique las funciones en el intervalo dado.

b) Subdivida el intervalo en $n = 100$, 200 y 1000 subintervalos de la misma longitud, y evalúe la función en el punto medio de cada uno.

c) Calcule el valor promedio de los valores de la función obtenidos en el inciso *b*).

d) Resuelva la ecuación $f(x) =$ (valor promedio) para x, usando el valor promedio calculado en el inciso *c*) para la partición $n = 1000$.

23. $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$ **24.** $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ en $[0, \pi]$

25. $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ en $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ **26.** $f(x) = x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$ en $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

5.2 Notación sigma y límites de sumas finitas

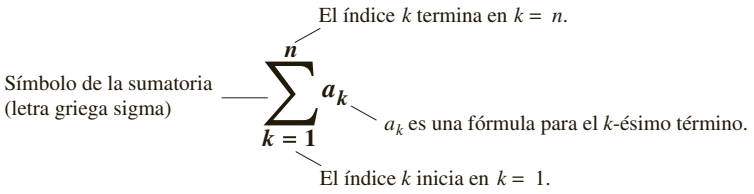
En las estimaciones con sumas finitas de la sección 5.1, nos encontramos con sumas de muchos términos (por ejemplo, hasta 1000 en la tabla 5.1). En esta sección presentaremos una notación más conveniente para las sumas con un gran número de términos. Después de describir la notación y definir varias de sus propiedades, veremos qué ocurre con una aproximación de suma finita cuando el número de términos tiende a infinito.

Sumas finitas y la notación sigma

La **notación sigma** nos permite escribir una suma con muchos términos en la forma compacta:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

La letra griega Σ (sigma mayúscula, que corresponde a nuestra letra S) representa la "suma". El **índice de la sumatoria**, k, nos indica dónde inicia la suma (con el número que se encuentra debajo del símbolo Σ) y dónde termina (con el número que se encuentra arriba del símbolo Σ). Se puede usar cualquier letra para denotar el índice, pero las letras i, j y k, son las que se acostumbran.



Así, podemos escribir

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 = \sum_{k=1}^{11} k^2,$$

y

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(100) = \sum_{i=1}^{100} f(i).$$

El límite inferior de la sumatoria no tiene que ser igual a 1; puede ser cualquier entero.

EJEMPLO 1

La suma en notación sigma	La suma extendida, un término por cada valor de k	El valor de la suma
$\sum_{k=1}^{5} k$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$	15
$\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k$	$(-1)^1(1) + (-1)^2(2) + (-1)^3(3)$	$-1 + 2 - 3 = -2$
$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1}$	$\frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1}$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$
$\sum_{k=4}^{5} \frac{k^2}{k-1}$	$\frac{4^2}{4-1} + \frac{5^2}{5-1}$	$\frac{16}{3} + \frac{25}{4} = \frac{139}{12}$

■

EJEMPLO 2 Exprese la suma $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ en notación sigma.

Solución La fórmula que genera los términos cambia según el límite inferior de la sumatoria, pero los términos generados son los mismos. A menudo es más sencillo iniciar con $k = 0$ o $k = 1$, pero podemos iniciar con cualquier entero.

$$\textit{Al iniciar con } k = 0: \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=0}^{4} (2k + 1)$$

$$\textit{Al iniciar con } k = 1: \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=1}^{5} (2k - 1)$$

$$\textit{Al iniciar con } k = 2: \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=2}^{6} (2k - 3)$$

$$\textit{Al iniciar con } k = -3: \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=-3}^{1} (2k + 7)$$

■

Cuando tenemos una suma como

$$\sum_{k=1}^{3} (k + k^2)$$

podemos reordenar sus términos,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} (k + k^2) &= (1 + 1^2) + (2 + 2^2) + (3 + 3^2) \\ &= (1 + 2 + 3) + (1^2 + 2^2 + 3^2) \qquad \text{Se reordenan los términos} \\ &= \sum_{k=1}^{3} k + \sum_{k=1}^{3} k^2. \end{aligned}$$

Esto ilustra una regla general para sumas finitas:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Cuatro de estas reglas se presentan en seguida. La demostración de que son válidas se obtiene mediante inducción matemática (vea el apéndice 2).

Reglas algebraicas para sumas finitas

1. *Regla de la suma:* $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
2. *Regla de la diferencia:* $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$
3. *Regla del múltiplo constante:* $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$ (Cualquier número c)
4. *Regla del valor constante:* $\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$ (c es cualquier valor constante.)

EJEMPLO 3 A continuación se demostrará el uso de las reglas algebraicas.

a) $\sum_{k=1}^{n}(3k - k^2) = 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2$ Reglas de la diferencia y del múltiplo constante

b) $\sum_{k=1}^{n}(-a_k) = \sum_{k=1}^{n}(-1) \cdot a_k = -1 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k = -\sum_{k=1}^{n} a_k$ Regla del múltiplo constante

c) $\sum_{k=1}^{3}(k + 4) = \sum_{k=1}^{3} k + \sum_{k=1}^{3} 4$ Regla de la suma

$= (1 + 2 + 3) + (3 \cdot 4)$ Regla del valor constante

$= 6 + 12 = 18$

d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1$ Regla del valor constante ($1/n$ es constante) ■

Con los años, se ha descubierto una variedad de fórmulas para los valores de sumas finitas. Las más conocidas son la fórmula de la suma de los primeros n enteros (se dice que Gauss la descubrió a la edad de 8 años) y las fórmulas de las sumas de los cuadrados y cubos de los primeros n enteros.

EJEMPLO 4 Demuestre que la suma de los primeros n enteros es

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Solución La fórmula nos dice que la suma de los primeros cuatro enteros es

$$\frac{(4)(5)}{2} = 10.$$

La suma comprueba esta predicción:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Para demostrar la fórmula en general, escribimos los términos de la suma dos veces, primero en orden creciente y después en orden decreciente.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 1 \end{array}$$

Si sumamos los dos términos de la primera columna, obtenemos $1 + n = n + 1$. De manera similar, si sumamos los dos términos de la segunda columna, obtenemos $2 + (n - 1) = n + 1$. La suma de los dos términos de cualquier columna es $n + 1$. Cuando sumamos las n columnas, obtenemos n términos, cada uno igual a $n + 1$, para dar un total de $n(n + 1)$. Como éste es el doble de la cantidad deseada, la suma de los primeros n enteros es $(n)(n + 1)/2$. ■

Las fórmulas para las sumas de los cuadrados y los cubos de los primeros n enteros se demuestran mediante inducción matemática (vea el apéndice 2), y son:

$$\text{Los primeros } n \text{ cuadrados:} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{Los primeros } n \text{ cubos:} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Límites de sumas finitas

Las aproximaciones de sumas finitas que consideramos en la sección 5.1 se volvían más exactas conforme aumentaba el número de términos y disminuía la longitud de los intervalos. El siguiente ejemplo muestra cómo calcular un valor límite cuando la longitud de los subintervalos tiende a cero y el número de términos tiende a infinito.

EJEMPLO 5 Obtenga el valor límite de las aproximaciones con sumas inferiores al área de la región R que está por debajo de la gráfica de $y = 1 - x^2$ y sobre el intervalo $[0, 1]$ en el eje x, usando rectángulos del mismo ancho, el cual tiende a cero; por otro lado, el número de rectángulos tiende a infinito. (Vea la figura 5.4*a*).

Solución Calculamos la aproximación con sumas inferiores usando n rectángulos del mismo ancho, $\Delta x = (1 - 0)/n$, y después vemos qué ocurre cuando $n \to \infty$. Iniciamos subdividiendo $[0, 1]$ en n subintervalos de la misma longitud.

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right].$$

Cada subintervalo tiene longitud igual a $1/n$. La función $1 - x^2$ es decreciente en $[0, 1]$, y su valor mínimo en un subintervalo se alcanza en el extremo derecho del subintervalo. Así, una suma inferior se construye con rectángulos cuya altura en el subintervalo $[(k-1)/n, k/n]$ es $f(k/n) = 1 - (k/n)^2$, que da la suma

$$\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right) + \left[f\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \left[f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \left[f\left(\frac{n}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right).$$

Escribimos esta suma en notación sigma y simplificamos,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3} && \text{Regla de la diferencia} \\
&= n \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 && \text{Reglas del valor constante y del múltiplo constante} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{n^3}\right)\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} && \text{Suma de los primeros } n \text{ cuadrados} \\
&= 1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}. && \text{Numerador desarrollado}
\end{aligned}$$

Hemos obtenido una expresión de la suma inferior que se cumple para cualquier n. Tomando el límite de esta expresión cuando $n \to \infty$, vemos que las sumas inferiores convergen cuando el número de subintervalos aumenta y la longitud de éstos tiende a cero:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}\right) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}.$$

Las aproximaciones de las sumas inferiores convergen hacia $2/3$. Un cálculo similar prueba que las aproximaciones con sumas superiores también convergen a $2/3$. Cualquier aproximación con suma finita $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(1/n)$ también converge al mismo valor, $2/3$. Esto se debe a que es posible demostrar que cualquier aproximación de suma finita se encuentra entre las aproximaciones de suma inferior y superior. Ello nos lleva a *definir* el área de la región R como este valor límite. En la sección 5.3 analizaremos los límites de estas aproximaciones finitas en un escenario más general. ■

Sumas de Riemann

La teoría de límites de aproximaciones finitas fue formalizada por el matemático alemán Bernhard Riemann. A continuación presentaremos la idea de la *suma de Riemann*, la cual subyace en la teoría de la integral definida que se estudiará en la siguiente sección.

Iniciamos con una función acotada y arbitraria f definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Al igual que la función representada en la figura 5.8, f puede tener valores tanto negativos como positivos. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en subintervalos, no necesariamente de la misma longitud, y formamos sumas como lo hicimos para las aproximaciones finitas en la sección 5.1. Para hacerlo, elegimos $n - 1$ puntos $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}\}$ entre a y b que satisfagan

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b.$$

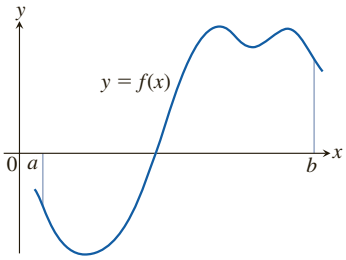


FIGURA 5.8 Una función continua típica $y = f(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$.

Para tener una notación consistente, denominamos a con x_0 y b con x_n, de manera que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

El conjunto

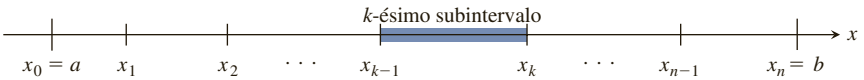
$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

se llama **partición** de $[a, b]$.

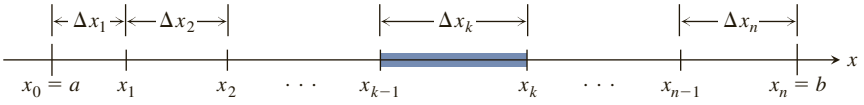
La partición P divide $[a, b]$ en n subintervalos cerrados

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n].$$

El primero de estos subintervalos es $[x_0, x_1]$, el segundo es $[x_1, x_2]$, y el ***k*-ésimo subintervalo** de P es $[x_{k-1}, x_k]$, donde k es un entero entre 1 y n.



La longitud del primer subintervalo $[x_0, x_1]$ se denota con Δx_1, la longitud del segundo intervalo $[x_1, x_2]$ se denota Δx_2, y la longitud del k-ésimo subintervalo es $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Si todos los n subintervalos tienen la misma longitud, entonces, la longitud común Δx es igual a $(b - a)/n$.



En cada subintervalo elegimos algún punto. El punto elegido en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se denota con c_k. Entonces, en cada subintervalo levantamos un rectángulo vertical a partir del eje x hasta tocar la curva en $(c_k, f(c_k))$. Estos rectángulos pueden estar arriba o abajo del eje x, dependiendo de si $f(c_k)$ es positiva o negativa, o en el eje x si $f(c_k) = 0$ (figura 5.9).

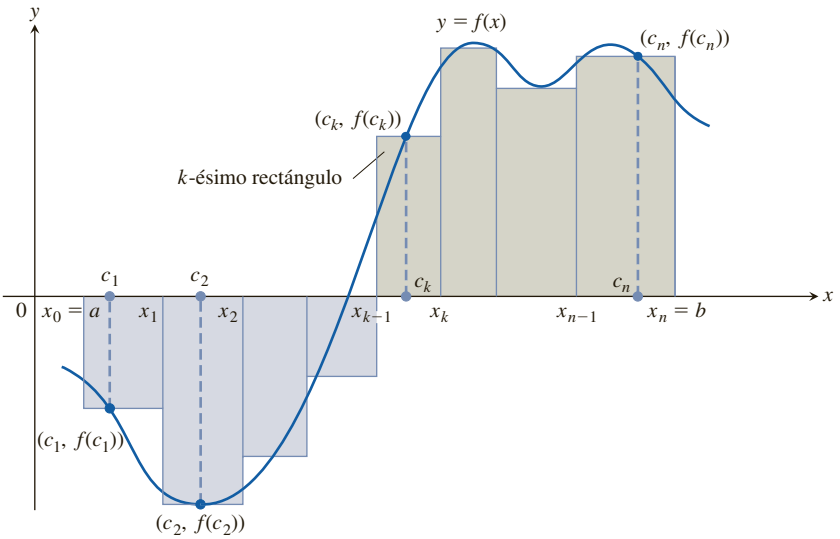


FIGURA 5.9 Los rectángulos aproximan la región entre la gráfica de la función $y = f(x)$ y el eje x. La figura 5.8 se ha amplificado para resaltar la partición de $[a, b]$ y la selección de puntos c_k que producen los rectángulos.

En cada subintervalo formamos el producto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$. Este producto es positivo, negativo o cero, dependiendo del signo de $f(c_k)$. Cuando $f(c_k) > 0$, el producto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ es el área del rectángulo con altura $f(c_k)$ y ancho Δx_k. Cuando $f(c_k) < 0$, el producto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ es un número negativo, el negativo del área de un rectángulo de ancho Δx_k que va desde el eje x al número negativo $f(c_k)$.

Finalmente, sumamos todos estos productos para obtener

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k.$$

La suma S_P se conoce como **suma de Riemann para f en el intervalo $[a, b]$**. Existen muchas de estas sumas, dependiendo de la partición P que se elija y de la elección de los puntos c_k en los subintervalos. Por ejemplo, podríamos elegir n subintervalos, todos con la misma longitud $\Delta x = (b - a)/n$, para subdividir $[a, b]$ y, luego, elegir el punto c_k como el punto extremo de la derecha de cada subintervalo al formar la suma de Riemann (como en el ejemplo 5). Esta elección conduce a la fórmula de la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right).$$

Se pueden obtener fórmulas similares si se elige c_k como el extremo izquierdo o el punto medio de cada subintervalo.

En el caso en que todos los subintervalos tienen la misma longitud $\Delta x = (b - a)/n$, podemos hacerlos más angostos aumentando simplemente el número n. Cuando una partición tiene subintervalos cuya longitud varía, podemos asegurar que todos sean angostos controlando la longitud del subintervalo más largo. Definimos la **norma** de una partición P, denotada con $\|P\|$, como el mayor de las longitudes de todos los subintervalos. Si $\|P\|$ es un número pequeño, todos los subintervalos de la partición P tendrán longitud pequeña. Veamos un ejemplo.

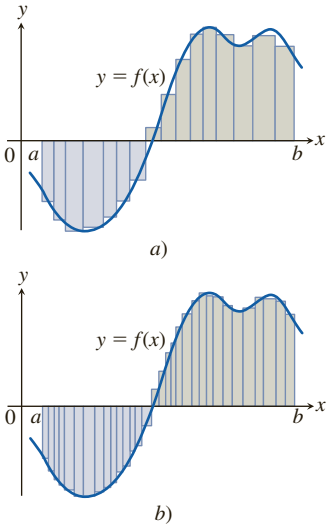
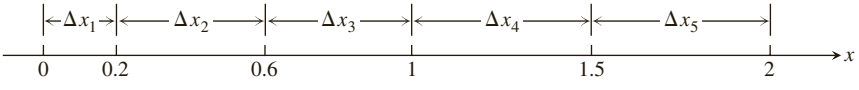


FIGURA 5.10 La curva de la figura 5.9 con rectángulos de una partición más fina de $[a, b]$. Las particiones más finas crean conjuntos de rectángulos con bases más delgadas, que aproximan con mayor exactitud la región entre la gráfica de f y el eje x.

EJEMPLO 6 El conjunto $P = \{0, 0.2, 0.6, 1, 1.5, 2\}$ es una partición de $[0, 2]$. Hay cinco subintervalos de P: $[0, 0.2]$, $[0.2, 0.6]$, $[0.6, 1]$, $[1, 1.5]$ y $[1.5, 2]$:



Las longitudes de los subintervalos son: $\Delta x_1 = 0.2$, $\Delta x_2 = 0.4$, $\Delta x_3 = 0.4$, $\Delta x_4 = 0.5$ y $\Delta x_5 = 0.5$. La longitud del subintervalo más largo es 0.5, de modo que la norma de la partición es $\|P\| = 0.5$. En este ejemplo, hay dos subintervalos con esa longitud. ■

Cualquier suma de Riemann asociada a una partición de un intervalo cerrado $[a, b]$ define rectángulos que aproximan la región entre la gráfica de una función continua f y el eje x. Las particiones con normas que se aproximan a cero conducen a conjuntos de rectángulos que aproximan esta región con mayor exactitud, como sugiere la figura 5.10. Como veremos en la siguiente sección, si la función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, no importa cómo elijamos la partición P y los puntos c_k en sus intervalos para construir sumas de Riemann, ya que, de cualquier forma, éstas aproximarán un valor límite único cuando la longitud de sus subintervalos, controlada por la norma de la partición, se aproxima a cero.

Ejercicios 5.2

Notación sigma

Escriba las sumas de los ejercicios 1 a 6 sin la notación sigma. Después, evalúelas.

1. $\sum_{k=1}^{2} \frac{6k}{k+1}$

2. $\sum_{k=1}^{3} \frac{k-1}{k}$

3. $\sum_{k=1}^{4} \cos k\pi$

4. $\sum_{k=1}^{5} \operatorname{sen} k\pi$

5. $\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{k}$

6. $\sum_{k=1}^{4} (-1)^k \cos k\pi$

7. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa a $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$ en notación sigma?

a) $\sum_{k=1}^{6} 2^{k-1}$ ***b)*** $\sum_{k=0}^{5} 2^k$ ***c)*** $\sum_{k=-1}^{4} 2^{k+1}$

8. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa a $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32$ en notación sigma?

a) $\sum_{k=1}^{6} (-2)^{k-1}$ ***b)*** $\sum_{k=0}^{5} (-1)^k 2^k$ ***c)*** $\sum_{k=-2}^{3} (-1)^{k+1} 2^{k+2}$

9. ¿Qué fórmula no es equivalente a las otras dos?

a) $\sum_{k=2}^{4} \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}$ ***b)*** $\sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{k+1}$ ***c)*** $\sum_{k=-1}^{1} \frac{(-1)^k}{k+2}$

10. ¿Qué fórmula no es equivalente a las otras dos?

a) $\sum_{k=1}^{4} (k-1)^2$ ***b)*** $\sum_{k=-1}^{3} (k+1)^2$ ***c)*** $\sum_{k=-3}^{-1} k^2$

Exprese las sumas de los ejercicios 11 a 16 en notación sigma. La forma de su respuesta dependerá del límite inferior que elija para la sumatoria.

11. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

12. $1 + 4 + 9 + 16$

13. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

14. $2 + 4 + 6 + 8 + 10$

15. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

16. $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{3}{5} + \frac{4}{5} - \frac{5}{5}$

Valor de sumas finitas

17. Suponga que $\sum_{k=1}^{n} a_k = -5$ y $\sum_{k=1}^{n} b_k = 6$. Obtenga los valores de

a) $\sum_{k=1}^{n} 3a_k$ ***b)*** $\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{6}$ ***c)*** $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$

d) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)$ ***e)*** $\sum_{k=1}^{n} (b_k - 2a_k)$

18. Suponga que $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ y $\sum_{k=1}^{n} b_k = 1$. Obtenga los valores de

a) $\sum_{k=1}^{n} 8a_k$ ***b)*** $\sum_{k=1}^{n} 250b_k$

c) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + 1)$ ***d)*** $\sum_{k=1}^{n} (b_k - 1)$

Evalúe las sumas de los ejercicios 19–32.

19. ***a)*** $\sum_{k=1}^{10} k$ ***b)*** $\sum_{k=1}^{10} k^2$ ***c)*** $\sum_{k=1}^{10} k^3$

20. ***a)*** $\sum_{k=1}^{13} k$ ***b)*** $\sum_{k=1}^{13} k^2$ ***c)*** $\sum_{k=1}^{13} k^3$

21. $\sum_{k=1}^{7} (-2k)$

22. $\sum_{k=1}^{5} \frac{\pi k}{15}$

23. $\sum_{k=1}^{6} (3 - k^2)$

24. $\sum_{k=1}^{6} (k^2 - 5)$

25. $\sum_{k=1}^{5} k(3k + 5)$

26. $\sum_{k=1}^{7} k(2k + 1)$

27. $\sum_{k=1}^{5} \frac{k^3}{225} + \left(\sum_{k=1}^{5} k\right)^3$

28. $\left(\sum_{k=1}^{7} k\right)^2 - \sum_{k=1}^{7} \frac{k^3}{4}$

29. ***a)*** $\sum_{k=1}^{7} 3$ ***b)*** $\sum_{k=1}^{500} 7$ ***c)*** $\sum_{k=3}^{264} 10$

30. ***a)*** $\sum_{k=9}^{36} k$ ***b)*** $\sum_{k=3}^{17} k^2$ ***c)*** $\sum_{k=18}^{71} k(k-1)$

31. ***a)*** $\sum_{k=1}^{n} 4$ ***b)*** $\sum_{k=1}^{n} c$ ***c)*** $\sum_{k=1}^{n} (k-1)$

32. ***a)*** $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} + 2n\right)$ ***b)*** $\sum_{k=1}^{n} \frac{c}{n}$ ***c)*** $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$

Sumas de Riemann

En los ejercicios 33 a 36, grafique cada función $f(x)$ en el intervalo dado. Divida el intervalo en cuatro subintervalos de la misma longitud. Después, agregue a su gráfica los rectángulos asociados a la suma de Riemann $\sum_{k=1}^{4} f(c_k)\,\Delta x_k$ dado que c_k es *a*) el extremo izquierdo del subinervalo, *b*) el extremo derecho del subintervalo, *c*) el punto medio del *k*-ésimo subintervalo. (Dibuje por separado cada conjunto de rectángulos).

33. $f(x) = x^2 - 1, \quad [0, 2]$

34. $f(x) = -x^2, \quad [0, 1]$

35. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad [-\pi, \pi]$

36. $f(x) = \operatorname{sen} x + 1, \quad [-\pi, \pi]$

37. Obtenga la norma de la partición $P = \{0, 1.2, 1.5, 2.3, 2.6, 3\}$.

38. Obtenga la norma de la partición $P = \{-2, -1.6, -0.5, 0, 0.8, 1\}$.

Límites de sumas de Riemann

En las funciones de los ejercicios 39 a 46, encuentre una fórmula para la suma de Riemann obtenida al dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales y usando el extremo derecho del subintervalo como c_k. Después, tome el límite de estas sumas cuando $n \to \infty$, para calcular el área debajo de la curva en $[a, b]$.

39. $f(x) = 1 - x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

40. $f(x) = 2x$ en el intervalo $[0, 3]$.

41. $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $[0, 3]$.

42. $f(x) = 3x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

43. $f(x) = x + x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

44. $f(x) = 3x + 2x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

45. $f(x) = 2x^3$ en el intervalo $[0, 1]$.

46. $f(x) = x^2 - x^3$ en el intervalo $[-1, 0]$.

5.3 La integral definida

En la sección 5.2 averiguamos el límite de una suma finita para una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ usando n subintervalos de la misma longitud, $(b - a)/n$. En esta sección consideraremos el límite de sumas de Riemann más generales cuando la norma de las particiones de $[a, b]$ tiende a cero. Para las sumas de Riemann en general, los subintervalos de las particiones no necesitan tener la misma longitud. El proceso de límite nos conduce a la definición de la *integral definida* de una función en un intervalo cerrado $[a, b]$.

Definición de la integral definida

La definición de la integral definida se basa en la idea de que, para ciertas funciones, cuando las normas de las particiones de $[a, b]$ tienden a cero, los valores correspondientes de las sumas de Riemann tienden a un valor límite J. Lo que queremos decir con esta idea de límite es que una suma de Riemann estará cerca del número J siempre que la norma de la partición sea lo suficientemente pequeña (de modo que todos sus subintervalos tengan longitudes suficientemente pequeñas). Introduciremos el símbolo ϵ como un número pequeño positivo que especifica qué tan cerca debe estar la suma de Riemann de J, y el símbolo δ como un segundo número pequeño positivo que especifica qué tan pequeña debe ser la norma de una partición para que tenga lugar la convergencia. He aquí la definición precisa.

DEFINICIÓN Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Decimos que un número J es la **integral definida de f en $[a, b]$** y que J es el límite de las sumas de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$ si se satisface la siguiente condición:

Dado cualquier número $\epsilon > 0$, existe un número correspondiente $\delta > 0$ tal que para toda partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ con $\|P\| < \delta$ y cualquier elección de c_k en $[x_{k-1}, x_k]$, tenemos

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k - J \right| < \epsilon.$$

La definición involucra un proceso de límite en el cual la norma de la partición tiende a cero.

Tenemos muchas posibilidades para una partición P con una norma que tiende a cero, y muchas posibles elecciones de puntos c_k para cada partición. La integral definida existe cuando obtenemos siempre el mismo límite J, sin importar la elección que se haga. Cuando el límite existe, lo escribimos como la integral definida

$$J = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k.$$

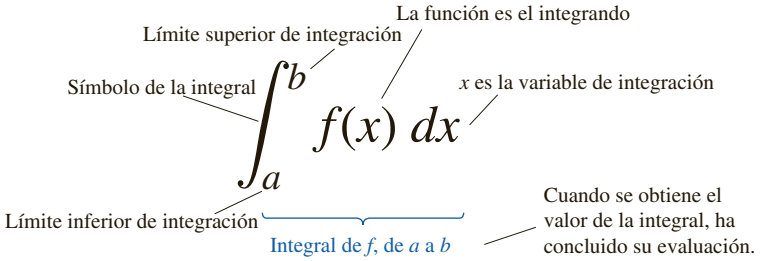
El límite de cualquier suma de Riemann siempre se toma cuando la norma de las particiones tiende a cero y el número de subintervalos tiende a infinito.

Leibniz introdujo una notación para la integral definida que evidencia su construcción como un límite de sumas de Riemann. Leibniz imaginó a las sumas finitas $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$ convirtiéndose en una suma infinita de los valores de la función $f(x)$ multiplicada por longitudes "infinitesimales" dx de los subintervalos. El símbolo de suma $\sum$ se reemplaza en el límite con el símbolo de la integral $\int$, cuyo origen es la letra "S". Los valores de la función $f(c_k)$ son reemplazados por una selección continua de valores de la función $f(x)$. Las longitudes de los subintervalos Δx_k se convierten en la diferencial dx. Es como si sumáramos todos los productos de la forma $f(x) \cdot dx$ cuando x va de a a b. Aun cuando esta notación refleja el proceso de construcción de una integral, es la definición de Riemann la que da un significado preciso de la integral definida.

El símbolo para el número J en la **definición de integral** es

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

que se lee como "la integral de a a b de f de x, de x", o algunas veces como "la integral de a a b de f de x con respecto a x". Las partes que componen el símbolo de la integral también reciben nombres especiales:



Cuando la condición de la definición se satisface, decimos que las sumas de Riemann de f en $[a, b]$ **convergen** a la integral definida $J = \int_a^b f(x)\,dx$ y que f es **integrable** en $[a, b]$.

En los casos donde todos los subintervalos tienen la misma longitud $\Delta x = (b - a)/n$, podemos formar cada suma de Riemann como

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\left(\frac{b-a}{n}\right), \qquad \Delta x_k = \Delta x = (b-a)/n \text{ para toda } k$$

donde c_k se elige en el k-ésimo subintervalo. Al considerar el límite de estas sumas de Riemann cuando $n \to \infty$ existe y es igual a J, entonces, J es la integral definida de f en $[a, b]$, de modo que

$$J = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\left(\frac{b-a}{n}\right) \qquad \|P\| \to 0 \text{ significa } n \to \infty.$$

Si elegimos el punto c_k como el extremo de la derecha del k-ésimo subintervalo, de manera que $c_k = a + k\,\Delta x = a + k(b - a)/n$, entonces, la fórmula de la integral definida se convierte en

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right) \tag{1}$$

La ecuación (1) da una fórmula explícita que se puede usar para calcular integrales definidas. Otras elecciones de particiones y de puntos c_k dan por resultado el mismo valor de la integral definida cuando tomamos el límite cuando $n \to \infty$, siempre que la norma de la partición se aproxime a cero.

El valor de la integral definida de una función en cualquier intervalo en particular depende de la función, y no de la letra que elijamos para representar la variable independiente. Si decidimos usar t o u en lugar de x, simplemente escribimos la integral como

$$\int_a^b f(t)\,dt \qquad \text{o} \qquad \int_a^b f(u)\,du \qquad \text{en lugar de} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Sin importar cómo escribamos la integral, sigue siendo el mismo número que está definido como un límite de sumas de Riemann. Puesto que no importa qué letra usemos, la variable de integración se llama **variable muda**, y representa números reales en el intervalo cerrado $[a, b]$.

Funciones integrables y no integrables

No todas las funciones definidas en un intervalo cerrado $[a, b]$ son integrables ahí, incluso si están acotadas. Es decir, las sumas de Riemann de algunas funciones tal vez no converjan al mismo valor límite, o ni siquiera converjan a algún valor. Un desarrollo detallado de cuáles funciones definidas en $[a, b]$ son integrables requiere de análisis matemático avanzado, pero, por fortuna, la mayoría de las funciones que normalmente se manejan en las aplicaciones son integrables. En particular, todas las funciones *continuas* en $[a, b]$ son integrables en ese intervalo, y también lo son aquellas que tienen un número finito de discontinuidades de salto en $[a, b]$. (Vea las figuras 1.9 y 1.10. Estas últimas funciones se conocen como *funciones continuas por partes*, y se definen en los ejercicios adicionales 11 a 18 al final del capítulo). El siguiente teorema, cuya demostración es materia de cursos más avanzados, establece estos resultados.

TEOREMA 1 Integrabilidad de funciones continuas Si una función f es continua en el intervalo $[a, b]$, o si tiene a lo más un número finito de discontinuidades de salto en el intervalo, entonces, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe y f es integrable en $[a, b]$.

La idea detrás del teorema 1 para funciones continuas se presenta en los ejercicios 86 y 87. Brevemente, diremos que cuando f es continua, podemos elegir cada c_k de modo que $f(c_k)$ sea el valor máximo de f en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, dando como resultado una suma superior. Asimismo, podemos elegir c_k como el punto donde se alcanza el valor mínimo de f en $[x_{k-1}, x_k]$ y obtener una suma inferior. Es posible demostrar que las sumas superior e inferior convergen al mismo valor límite cuando la norma de la partición P tiende a cero. Además, cada suma de Riemann se encuentra entre los valores de la suma superior y los de la suma inferior, de manera que toda suma de Riemann converge también al mismo límite. Por lo tanto, el número J de la definición de las integrales definidas existe, y la función continua f es integrable en $[a, b]$.

Para que la integrabilidad falle, una función debe ser lo suficientemente discontinua para que la región entre su gráfica y el eje x no se pueda aproximar bien por rectángulos cada vez más delgados. El siguiente ejemplo muestra una función que no es integrable en un intervalo cerrado.

EJEMPLO 1 La función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

no tiene integral de Riemann en $[0, 1]$. La razón de esto es que entre dos números cualesquiera, siempre hay un número racional y un número irracional. Por consiguiente, la función salta hacia arriba y hacia abajo erráticamente sobre $[0, 1]$ para permitir que la región que está debajo de su gráfica y arriba del eje x pueda aproximarse mediante rectángulos, sin importar qué tan delgados sean. De hecho, veremos que las aproximaciones con sumas superiores y las aproximaciones con sumas inferiores convergen a valores límite distintos.

Si elegimos una partición P de $[0, 1]$ y elegimos c_k como el punto de valor máximo de f en $[x_{k-1}, x_k]$, entonces, la suma de Riemann correspondiente es

$$U = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (1)\,\Delta x_k = 1,$$

ya que cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ incluye un número racional donde $f(c_k) = 1$. Observe que las longitudes de los intervalos de la partición suman 1, $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1$. De esta forma, cada suma de Riemann es igual a 1, y el límite de las sumas de Riemann usando estas opciones es igual a 1.

Por otro lado, si elegimos c_k como el punto de valor mínimo para f en $[x_{k-1}, x_k]$, la suma de Riemann es

$$L = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (0)\,\Delta x_k = 0,$$

ya que cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ contiene un número irracional c_k donde $f(c_k) = 0$. El límite de las sumas de Riemann usando estas opciones es igual a cero. Como el límite depende de la elección de c_k, la función f no es integrable. ■

El teorema 1 no dice cómo *calcular* integrales definidas. En la sección 5.4 se desarrollará un método de cálculo estableciendo un vínculo con la antiderivada de la función integrando f.

Propiedades de las integrales definidas

Para definir $\int_a^b f(x)\,dx$ como un límite de las sumas $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$, nos movimos de izquierda a derecha a lo largo del intervalo $[a, b]$. ¿Qué sucedería si, en vez de ello, nos moviéramos de derecha a izquierda iniciando en $x_0 = b$ y terminando en $x_n = a$? Cada Δx_k en la suma de Riemann cambiaría su signo, con $x_k - x_{k-1}$ negativo en lugar de positivo. Con las mismas elecciones de c_k en cada subintervalo, el signo de cualquier suma de Riemann cambiaría, al igual que el signo del límite, es decir, la integral $\int_b^a f(x)\,dx$. Como no habíamos dado previamente un significado a la integración en sentido inverso, esto nos lleva a definir

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Aun cuando sólo hemos definido la integral en un intervalo $[a, b]$ cuando $a < b$, es conveniente tener una definición para la integral en $[a, b]$ cuando $a = b$, es decir, para la integral en un intervalo de longitud igual a cero. Como $a = b$ nos da $\Delta x = 0$, siempre que $f(a)$ exista, definimos

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

El teorema 2 establece siete propiedades básicas de las integrales, expresadas como reglas que satisfacen las integrales, incluyendo las dos comentadas anteriormente. Estas reglas, listadas en la tabla 5.6, resultan muy útiles en el proceso del cálculo de integrales. Recurriremos a ellas repetidamente para simplificar nuestros cálculos. Las reglas 2 a 7 tienen interpretaciones geométricas, las cuales se presentan en la figura 5.11. Las gráficas de estas figuras son de funciones positivas, pero las reglas se aplican a las funciones integrables en general.

TEOREMA 2 Cuando f y g son integrables en el intervalo $[a, b]$, la integral definida satisface las reglas 1 a 7 de la tabla 5.6.

Mientras que las reglas 1 y 2 son definiciones, las reglas 3 a 7 de la tabla 5.6 se deben demostrar. La siguiente es una demostración de la regla 6. Es posible desarrollar pruebas similares para las otras propiedades de la tabla 5.6.

TABLA 5.6 Reglas que satisfacen las integrales definidas

1. *Orden de integración:* $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ — Una definición

2. *Intervalo de longitud cero:* $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ — Una definición cuando $f(a)$ existe

3. *Múltiplo constante:* $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ — Cualquier constante k

4. *Suma y diferencia:* $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

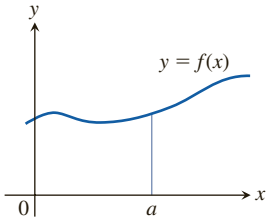
5. *Aditividad:* $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

6. *Desigualdad máx-mín:* Si f tiene un valor máximo (máx f) y un valor mínimo (mín f) en $[a, b]$, entonces

$$\text{mín } f \cdot (b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \text{ máx } f \cdot (b - a).$$

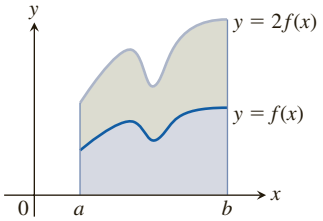
7. *Dominación:* $f(x) \ge g(x)$ en $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

$f(x) \ge 0$ en $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ (Caso especial)



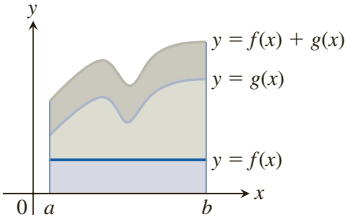
a) Longitud del intervalo cero:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$



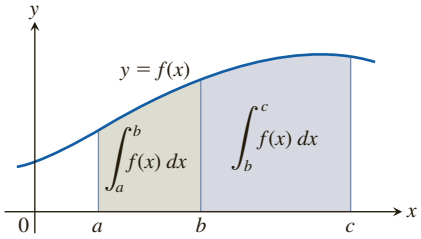
b) Múltiplo constante: $(k = 2)$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$



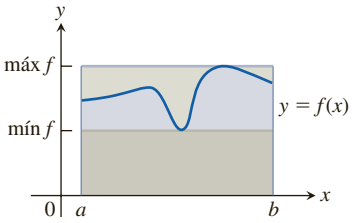
c) Suma: (*suma de áreas*)

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$



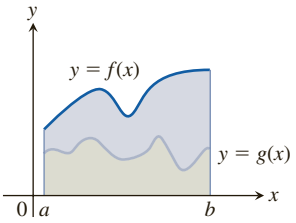
d) Aditividad para integrales definidas:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$



e) Desigualdad máximo-mínimo:

$$\text{mín } f \cdot (b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \text{ máx } f \cdot (b - a)$$



f) Dominación:

$f(x) \ge g(x)$ en $[a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

FIGURA 5.11 Interpretaciones geométricas de las reglas 2 a 7 de la tabla 5.6.

Demostración de la regla 6 La regla 6 afirma que la integral de f en $[a, b]$ nunca es menor que el valor mínimo de f multiplicado por la longitud del intervalo, y nunca es mayor que el valor máximo de f multiplicado por la longitud del intervalo. La razón es que para toda partición de $[a, b]$ y cualquier elección de los puntos c_k,

$$\begin{aligned}
\text{mín } f \cdot (b - a) &= \text{mín } f \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k && \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a \\
&= \sum_{k=1}^{n} \text{mín } f \cdot \Delta x_k && \text{Regla del múltiplo constante} \\
&\le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k && \text{mín } f \le f(c_k) \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \text{máx } f \cdot \Delta x_k && f(c_k) \le \text{máx } f \\
&= \text{máx } f \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k && \text{Regla del múltiplo constante} \\
&= \text{máx } f \cdot (b - a).
\end{aligned}$$

En resumen, todas las sumas de Riemann para f en $[a, b]$ satisfacen la desigualdad

$$\text{mín } f \cdot (b - a) \le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k \le \text{ máx } f \cdot (b - a).$$

Por lo tanto, su límite (la integral) también la satisface. ■

EJEMPLO 2 Para ilustrar algunas de las reglas, suponga que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 5, \qquad \int_{1}^{4} f(x)\, dx = -2, \quad \text{y} \quad \int_{-1}^{1} h(x)\, dx = 7.$$

Entonces,

1. $\displaystyle\int_{4}^{1} f(x)\, dx = -\int_{1}^{4} f(x)\, dx = -(-2) = 2$ Regla 1

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} [\,2f(x) + 3h(x)\,]\, dx = 2\int_{-1}^{1} f(x)\, dx + 3\int_{-1}^{1} h(x)\, dx$ Reglas 3 y 4

$$= 2(5) + 3(7) = 31$$

3. $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{4} f(x)\, dx = 5 + (-2) = 3$ Regla 5 ■

EJEMPLO 3 Demuestre que el valor de $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x}\, dx$ es menor o igual que $\sqrt{2}$.

Solución La desigualdad máx-mín para integrales definidas (regla 6) indica que mín $f \cdot (b - a)$ es una *cota inferior* para el valor de $\int_a^b f(x)\, dx$ y que máx $f \cdot (b - a)$ es una *cota superior*.

El valor máximo de $\sqrt{1 + \cos x}$ en $[\,0, 1\,]$ es $\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, de modo que

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x}\, dx \le \sqrt{2} \cdot (1 - 0) = \sqrt{2}.$$

■

Área debajo de la gráfica de una función no negativa

A continuación regresamos al problema con el que iniciamos este capítulo, el de definir lo que significa el *área* de una región con frontera curva. En la sección 5.1 aproximamos el área debajo de la gráfica de una función continua no negativa usando varios tipos de sumas finitas de áreas de rectángulos que capturan la región: sumas superiores, sumas inferiores y sumas a partir de los puntos medios de cada subintervalo. Todas ellas son casos de sumas de Riemann construidas de maneras especiales. El teorema 1 garantiza que todas estas sumas de Riemann convergen a una integral definida única cuando la norma de las particiones se aproxima a cero y el número de subintervalos tiende a infinito. Como consecuencia, ahora podemos *definir* el área debajo de la gráfica de una función integrable no negativa como el valor de esa integral definida.

DEFINICIÓN Si $y = f(x)$ es no negativa e integrable en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces, el **área debajo de la curva $y = f(x)$ en $[a, b]$** es la integral de f de a a b,

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Por primera vez tenemos una definición rigurosa del área de una región cuya frontera es la gráfica de cualquier función continua. En seguida aplicaremos esto a un ejemplo sencillo, el área debajo de una recta, donde podremos verificar que la nueva definición coincide con nuestra noción previa de área.

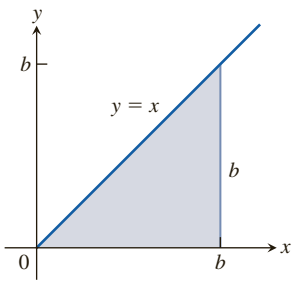


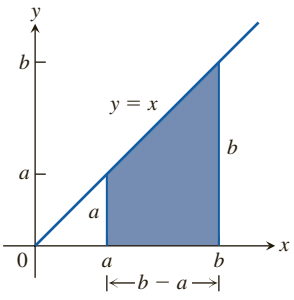
FIGURA 5.12 La región del ejemplo 4 es un triángulo.

EJEMPLO 4 Calcule $\int_0^b x\,dx$ y obtenga el área A debajo de $y = x$ en el intervalo $[0, b]$, $b > 0$.

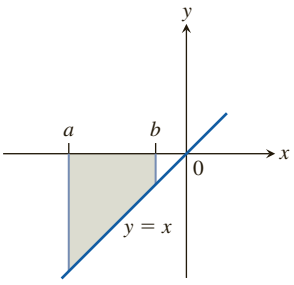
Solución La región de interés es un triángulo (figura 5.12). Calcularemos el área de dos maneras.

a) Para calcular la integral definida como el límite de sumas de Riemann, obtenemos $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$ para particiones cuyas normas tienden a cero. El teorema 1 nos dice que no importa cómo elijamos las particiones o los puntos c_k siempre y cuando las normas tiendan a cero. Todas las opciones dan exactamente el mismo límite. Así, consideramos la partición P que subdivide el intervalo $[0, b]$ en n subintervalos con la misma longitud $\Delta x = (b - 0)/n = b/n$, y elegimos a c_k como el extremo derecho de cada subintervalo. La partición es $P = \left\{0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, \cdots, \frac{nb}{n}\right\}$ y $c_k = \frac{kb}{n}$. De esta forma,

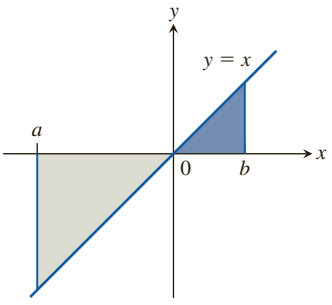
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x &= \sum_{k=1}^{n} \frac{kb}{n}\cdot\frac{b}{n} && f(c_k) = c_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{kb^2}{n^2} \\
&= \frac{b^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k && \text{Regla del múltiplo constante} \\
&= \frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} && \text{Suma de los primeros } n \text{ enteros} \\
&= \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$



a)



b)



c)

FIGURA 5.13 *a*) El área de esta región trapezoidal es $A = (b^2 - a^2)/2$. *b*) La integral definida en la ecuación (2) proporciona el negativo del área de esta región trapezoidal. *c*) La integral definida en la ecuación (2) proporciona el área de la región triangular en color sumada al negativo del área de la región triangular gris.

Cuando $n \to \infty$ y $\|P\| \to 0$, esta última expresión de la derecha tiene como límite $b^2/2$. Por lo tanto,

$$\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}.$$

b) Como el área, en el caso de una función no negativa, es igual a la integral definida, podemos obtener rápidamente la integral definida usando la fórmula para el área de un triángulo que tiene como base b y altura $y = b$. El área es $A = (1/2)b \cdot b = b^2/2$. Nuevamente, concluimos que $\int_0^b x\,dx = b^2/2$. ■

El ejemplo 4 se puede generalizar para integrar $f(x) = x$ en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$, $0 < a < b$.

$$\int_a^b x\,dx = \int_a^0 x\,dx + \int_0^b x\,dx \qquad \text{Regla 5}$$

$$= -\int_0^a x\,dx + \int_0^b x\,dx \qquad \text{Regla 1}$$

$$= -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}. \qquad \text{Ejemplo 4}$$

En conclusión, para integrar $f(x) = x$, tenemos la siguiente regla:

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, \qquad a < b \tag{2}$$

Este cálculo proporciona el área del trapezoide de la figura 5.13*a*). La ecuación (2) sigue siendo válida cuando a y b son negativos, pero la interpretación de la integral definida cambia. Cuando $a < b < 0$, el valor de la integral definida $(b^2 - a^2)/2$ es un número negativo, el negativo del área del trapezoide debajo del eje x y hasta la recta $y = x$ (figura 5.13*b*). Cuando $a < 0$ y $b > 0$, la ecuación (2) sigue siendo válida y la integral definida nos da la diferencia entre dos áreas, el área debajo de la gráfica y arriba de $[0, b]$, menos el área debajo de $[a, 0]$ y arriba de la gráfica (figura 5.13*c*).

Los siguientes resultados también se pueden establecer usando un cálculo con suma de Riemann similar al del ejemplo 4 (ejercicios 63 y 65).

$$\int_a^b c\,dx = c(b - a), \qquad c \text{ es cualquier constante} \tag{3}$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, \qquad a < b \tag{4}$$

Revisión del valor promedio de una función continua

En la sección 5.1 nos referimos de manera informal al valor promedio de una función continua no negativa f en un intervalo $[a, b]$, lo que nos llevó a definir este promedio como el área debajo de la gráfica de $y = f(x)$ dividida entre $b - a$. En notación de integrales, escribimos esto como

$$\text{Promedio} = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Podemos usar esta fórmula para dar una definición precisa del valor promedio de cualquier función continua (o integrable), ya sea positiva, negativa o ambas cosas.

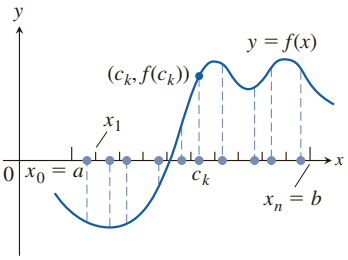


FIGURA 5.14 Muestra de valores de una función en un intervalo $[a, b]$.

De forma alternativa, se puede aplicar el siguiente razonamiento. Iniciamos con el concepto aritmético de que el promedio de n números es su suma dividida entre n. Una función continua f en $[a, b]$ puede tener una infinidad de valores, pero aún así, podemos tomar una muestra de ellos de manera ordenada. Dividimos $[a, b]$ en n subintervalos con la misma longitud $\Delta x = (b - a)/n$ y evaluamos f en el punto c_k de cada uno (figura 5.14). El promedio de los n valores de la muestra es

$$\frac{f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)$$

$$= \frac{\Delta x}{b - a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) \qquad \Delta x = \frac{b - a}{n}, \text{ por lo que } \frac{1}{n} = \frac{\Delta x}{b - a}$$

$$= \frac{1}{b - a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x. \qquad \text{Regla del múltiplo constante}$$

El promedio se obtiene dividiendo una suma de Riemann para f en $[a, b]$, entre $(b - a)$. Conforme incrementamos el tamaño de la muestra y hacemos que la norma de la partición tienda a cero, el promedio se aproxima a $(1/(b - a))\int_a^b f(x)\,dx$. Ambos puntos de vista nos llevan a la siguiente definición.

DEFINICIÓN Si f es integrable en $[a, b]$, entonces, su **valor promedio en $[a, b]$**, también llamado **media**, es

$$\text{prom}(f) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

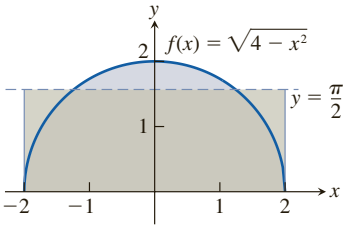


FIGURA 5.15 El valor promedio de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en $[-2, 2]$ es $\pi/2$ (ejemplo 5). El área del rectángulo mostrado aquí es $4 \cdot (\pi/2) = 2\pi$, que también es el área del semicírculo.

EJEMPLO 5 Obtenga el valor promedio de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en $[-2, 2]$.

Solución Reconocemos a $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ como una función cuya gráfica es el semicírculo superior de radio 2 con centro en el origen (figura 5.15).

Como conocemos el área interior del círculo, no necesitamos tomar el límite de las sumas de Riemann. El área entre el semicírculo y el eje x de -2 a 2 se calcula mediante la fórmula geométrica

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi(2)^2 = 2\pi.$$

Como f es no negativa, el área también es el valor de la integral de f de -2 a 2,

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx = 2\pi.$$

Por lo tanto, el valor promedio de f es

$$\text{prom}(f) = \frac{1}{2 - (-2)}\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

Observe que el valor promedio de f en $[-2, 2]$ es el mismo que la altura de un rectángulo en $[-2, 2]$ cuya área es igual al área del semicírculo superior (vea la figura 5.15). ■

Ejercicios 5.3

Interpretación de límites de sumas como integrales

Exprese los límites de los ejercicios 1 a 8 como integrales definidas.

1. $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} c_k{}^2\,\Delta x_k$, donde P es una partición de $[0, 2]$
2. $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} 2c_k{}^3\,\Delta x_k$, donde P es una partición de $[-1, 0]$
3. $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} (c_k{}^2 - 3c_k)\,\Delta x_k$, donde P es una partición de $[-7, 5]$
4. $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{c_k}\right)\Delta x_k$, donde P es una partición de $[1, 4]$
5. $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - c_k}\,\Delta x_k$, donde P es una partición de $[2, 3]$

6. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{4 - c_k^2}\,\Delta x_k$, donde P es una partición de $[0, 1]$

7. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\sec c_k)\,\Delta x_k$, donde P es una partición de $[-\pi/4, 0]$

8. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\tan c_k)\,\Delta x_k$, donde P es una partición de $[0, \pi/4]$

Aplicación de las reglas de la integral definida

9. Suponga que f y g son integrables y que

$$\int_1^2 f(x)\,dx = -4, \quad \int_1^5 f(x)\,dx = 6, \quad \int_1^5 g(x)\,dx = 8.$$

Use las reglas de la tabla 5.6 para obtener

a) $\int_2^2 g(x)\,dx$ ***b)*** $\int_5^1 g(x)\,dx$

c) $\int_1^2 3f(x)\,dx$ ***d)*** $\int_2^5 f(x)\,dx$

e) $\int_1^5 [f(x) - g(x)]\,dx$ ***f)*** $\int_1^5 [4f(x) - g(x)]\,dx$

10. Suponga que f y h son integrables y que

$$\int_1^9 f(x)\,dx = -1, \quad \int_7^9 f(x)\,dx = 5, \quad \int_7^9 h(x)\,dx = 4.$$

Use las reglas de la tabla 5.6 para obtener

a) $\int_1^9 -2f(x)\,dx$ ***b)*** $\int_7^9 [f(x) + h(x)]\,dx$

c) $\int_7^9 [2f(x) - 3h(x)]\,dx$ ***d)*** $\int_9^1 f(x)\,dx$

e) $\int_1^7 f(x)\,dx$ ***f)*** $\int_9^7 [h(x) - f(x)]\,dx$

11. Suponga que $\int_1^2 f(x)\,dx = 5$. Obtenga

a) $\int_1^2 f(u)\,du$ ***b)*** $\int_1^2 \sqrt{3} f(z)\,dz$

c) $\int_2^1 f(t)\,dt$ ***d)*** $\int_1^2 [-f(x)]\,dx$

12. Suponga que $\int_{-3}^0 g(t)\,dt = \sqrt{2}$. Obtenga

a) $\int_0^{-3} g(t)\,dt$ ***b)*** $\int_{-3}^0 g(u)\,du$

c) $\int_{-3}^0 [-g(x)]\,dx$ ***d)*** $\int_{-3}^0 \frac{g(r)}{\sqrt{2}} dr$

13. Suponga que f es integrable y que $\int_0^3 f(z)\,dz = 3$ y $\int_0^4 f(z)\,dz = 7$. Obtenga

a) $\int_3^4 f(z)\,dz$ ***b)*** $\int_4^3 f(t)\,dt$

14. Suponga que h es integrable y que $\int_{-1}^1 h(r)\,dr = 0$ y $\int_{-1}^3 h(r)\,dr = 6$. Obtenga

a) $\int_1^3 h(r)\,dr$ ***b)*** $-\int_3^1 h(u)\,du$

Uso de áreas conocidas para obtener integrales

En los ejercicios 15 a 22, grafique los integrandos y use fórmulas de áreas conocidas para evaluar las integrales.

15. $\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx$ **16.** $\int_{1/2}^{3/2} (-2x + 4)\,dx$

17. $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx$ **18.** $\int_{-4}^0 \sqrt{16 - x^2}\,dx$

19. $\int_{-2}^1 |x|\,dx$ **20.** $\int_{-1}^1 (1 - |x|)\,dx$

21. $\int_{-1}^1 (2 - |x|)\,dx$ **22.** $\int_{-1}^1 \left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$

Use fórmulas de áreas conocidas para evaluar las integrales de los ejercicios 23 a 28.

23. $\int_0^b \frac{x}{2} dx, \quad b > 0$ **24.** $\int_0^b 4x\,dx, \quad b > 0$

25. $\int_a^b 2s\,ds, \quad 0 < a < b$ **26.** $\int_a^b 3t\,dt, \quad 0 < a < b$

27. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en ***a)*** $[-2, 2]$, ***b)*** $[0, 2]$

28. $f(x) = 3x + \sqrt{1 - x^2}$ en ***a)*** $[-1, 0]$, ***b)*** $[-1, 1]$

Evaluación de integrales definidas

Use los resultados de las ecuaciones (2) y (4) para evaluar las integrales de los ejercicios 29 a 40.

29. $\int_1^{\sqrt{2}} x\,dx$ **30.** $\int_{0.5}^{2.5} x\,dx$ **31.** $\int_{\pi}^{2\pi} \theta\,d\theta$

32. $\int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} r\,dr$ **33.** $\int_0^{\sqrt[3]{7}} x^2\,dx$ **34.** $\int_0^{0.3} s^2\,ds$

35. $\int_0^{1/2} t^2\,dt$ **36.** $\int_0^{\pi/2} \theta^2\,d\theta$ **37.** $\int_a^{2a} x\,dx$

38. $\int_a^{\sqrt{3}a} x\,dx$ **39.** $\int_0^{\sqrt[3]{b}} x^2\,dx$ **40.** $\int_0^{3b} x^2\,dx$

Utilice las reglas de la tabla 5.6 y las ecuaciones (2) a (4) para evaluar las integrales de los ejercicios 41 a 50.

41. $\int_3^1 7\,dx$ **42.** $\int_0^2 5x\,dx$

43. $\int_0^2 (2t - 3)\,dt$ **44.** $\int_0^{\sqrt{2}} \left(t - \sqrt{2}\right) dt$

45. $\int_2^1 \left(1 + \frac{z}{2}\right) dz$ **46.** $\int_3^0 (2z - 3)\,dz$

47. $\int_1^2 3u^2\,du$ **48.** $\int_{1/2}^1 24u^2\,du$

49. $\int_0^2 (3x^2 + x - 5)\,dx$ **50.** $\int_1^0 (3x^2 + x - 5)\,dx$

Obtención de áreas con integrales definidas

En los ejercicios 51 a 54, use una integral definida para obtener el área de la región entre la curva dada y el eje x en el intervalo $[0, b]$.

51. $y = 3x^2$ **52.** $y = \pi x^2$

53. $y = 2x$ **54.** $y = \frac{x}{2} + 1$

Obtención de valores promedio

En los ejercicios 55 a 62, grafique la función y obtenga su valor promedio en el intervalo dado.

55. $f(x) = x^2 - 1$ en $[0, \sqrt{3}]$

56. $f(x) = -\dfrac{x^2}{2}$ en $[0, 3]$

57. $f(x) = -3x^2 - 1$ en $[0, 1]$

58. $f(x) = 3x^2 - 3$ en $[0, 1]$

59. $f(t) = (t - 1)^2$ en $[0, 3]$

60. $f(t) = t^2 - t$ en $[-2, 1]$

61. $g(x) = |x| - 1$ en ***a)*** $[-1, 1]$, ***b)*** $[1, 3]$, y ***c)*** $[-1, 3]$

62. $h(x) = -|x|$ en ***a)*** $[-1, 0]$, ***b)*** $[0, 1]$, y ***c)*** $[-1, 1]$

Integrales definidas como límites de sumas

Use el método del ejemplo 4*a*) o la ecuación (1) para evaluar las integrales definidas en los ejercicios 63 a 70.

63. $\displaystyle\int_a^b c\,dx$

64. $\displaystyle\int_0^2 (2x + 1)\,dx$

65. $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx, \quad a < b$

66. $\displaystyle\int_{-1}^0 (x - x^2)\,dx$

67. $\displaystyle\int_{-1}^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$

68. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^3\,dx$

69. $\displaystyle\int_a^b x^3\,dx, \quad a < b$

70. $\displaystyle\int_0^1 (3x - x^3)\,dx$

Teoría y ejemplos

71. ¿Qué valores de a y b maximizan el valor de

$$\int_a^b (x - x^2)\,dx?$$

(*Sugerencia:* Averigüe dónde es positivo el integrando).

72. ¿Qué valores de a y b minimizan el valor de

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2)\,dx?$$

73. Use la desigualdad máx-mín para obtener cotas superiores e inferiores para el valor de

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx.$$

74. (*Continuación del ejercicio 73*). Use la desigualdad máx-mín para obtener cotas superiores e inferiores de

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1 + x^2}\,dx \quad \text{y} \quad \int_{0.5}^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx.$$

Sume las cotas para llegar a una mejor estimación de

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx.$$

75. Demuestre que el valor de $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ no puede ser 2.

76. Demuestre que el valor de $\int_0^1 \sqrt{x + 8}\,dx$ se encuentra entre $2\sqrt{2} \approx 2.8$ y 3.

77. Integrales de funciones no negativas Use la desigualdad máx-mín para demostrar que si f es integrable, entonces,

$$f(x) \geq 0 \quad \text{en} \quad [a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

78. Integrales de funciones no positivas Demuestre que si f es integrable, entonces,

$$f(x) \leq 0 \quad \text{en} \quad [a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \leq 0.$$

79. Considerando la desigualdad $\operatorname{sen} x \leq x$, que se cumple para $x \geq 0$, obtenga una cota superior para el valor de $\int_0^1 \operatorname{sen} x\,dx$.

80. La desigualdad $\sec x \geq 1 + (x^2/2)$ se cumple en $(-\pi/2, \pi/2)$. Úsela para obtener una cota inferior para el valor de $\int_0^1 \sec x\,dx$.

81. Si prom(f) realmente es un valor típico de la función integrable $f(x)$ en $[a, b]$, entonces, la función constante prom(f) debería tener la misma integral que f en $[a, b]$. ¿Es así? Es decir, ¿la siguiente expresión es correcta?

$$\int_a^b \text{prom}(f)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx?$$

Justifique su respuesta.

82. Sería bueno que los valores promedio de funciones integrables cumplieran las siguientes reglas en un intervalo $[a, b]$.

a) $\text{prom}(f + g) = \text{prom}(f) + \text{prom}(g)$

b) $\text{prom}(kf) = k\,\text{prom}(f)$ (para cualquier número k)

c) $\text{prom}(f) \leq \text{prom}(g)$ si $f(x) \leq g(x)$ en $[a, b]$.

¿Se cumplen siempre estas reglas? Justifique sus respuestas.

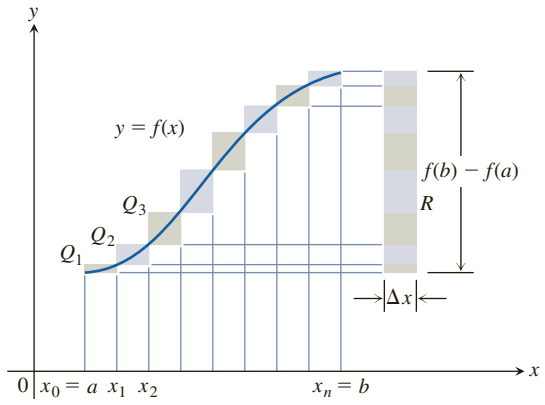
83. Sumas superior e inferior de funciones crecientes

a) Suponga que la gráfica de una función continua $f(x)$ asciende conforme x se mueve de izquierda a derecha a lo largo del intervalo $[a, b]$. Sea P una partición de $[a, b]$ en n subintervalos de longitud $\Delta x = (b - a)/n$. Considere la siguiente figura para demostrar que la diferencia entre las sumas superior e inferior de f en esta partición puede representarse gráficamente como el área de un rectángulo R cuyas dimensiones son $[f(b) - f(\text{a})]$ por Δx. (*Sugerencia:* Considere que la diferencia $U - L$ es la suma de las áreas de los rectángulos cuyas diagonales Q_0Q_1, Q_1Q_2,…, $Q_{n-1}Q_n$ están aproximadamente a lo largo de la curva. No hay traslape cuando estos rectángulos se desplazan horizontalmente dentro de R).

b) Suponga que en lugar de ser iguales, las longitudes Δx_k de los subintervalos de la partición de $[a, b]$ varían de tamaño. Demuestre que

$$U - L \leq |f(b) - f(a)|\,\Delta x_{\text{máx}},$$

donde $\Delta x_{\text{máx}}$ es la norma de P y, por lo tanto, $\lim_{\|P\| \to 0} (U - L) = 0$.



84. Sumas superior e inferior de funciones decrecientes (*Continuación del ejercicio 83*).

a) Dibuje una figura como la del ejercicio 83 para una función continua $f(x)$ cuyos valores decrecen constantemente conforme x se mueve de izquierda a derecha a lo largo del intervalo $[a, b]$. Sea P una partición de $[a, b]$ en subintervalos de igual longitud. Obtenga una expresión para $U - L$ que sea análoga a la que encontró para $U - L$ en el ejercicio 83*a*).

b) Suponga que en lugar de ser iguales, las longitudes Δx_k de los subintervalos de P varían de tamaño. Demuestre que la desigualdad

$$U - L \leq |f(b) - f(a)|\, \Delta x_{\text{máx}}$$

del ejercicio 83*b*) aún se cumple, y que, por lo tanto, $\lim_{\|P\| \to 0} (U - L) = 0$.

85. Use la fórmula

$$\text{sen } h + \text{sen } 2h + \text{sen } 3h + \cdots + \text{sen } mh = \frac{\cos(h/2) - \cos((m + (1/2))h)}{2 \text{ sen } (h/2)}$$

para obtener el área debajo de la curva $y = \text{sen } x$ de $x = 0$ a $x = \pi/2$ en dos pasos:

a) Haga una partición del intervalo $[0, \pi/2]$ en n subintervalos de la misma longitud, y calcule la suma superior correspondiente U.

b) Después, obtenga el límite de U cuando $n \to \infty$ y $\Delta x = (b - a)/n \to 0$.

86. Suponga que f es continua y no negativa en $[a, b]$, como en la figura. Mediante la inserción de puntos

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_{n-1}$$

como se muestra, divida $[a, b]$ en n subintervalos de longitud $\Delta x_1 = x_1 - a$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_n = b - x_{n-1}$, que no tienen que ser iguales.

a) Si $m_k = \text{mín } \{f(x) \text{ para } x \text{ en el } k\text{-ésimo subintervalo}\}$, explique la conexión entre la **suma inferior**

$$L = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \cdots + m_n \Delta x_n$$

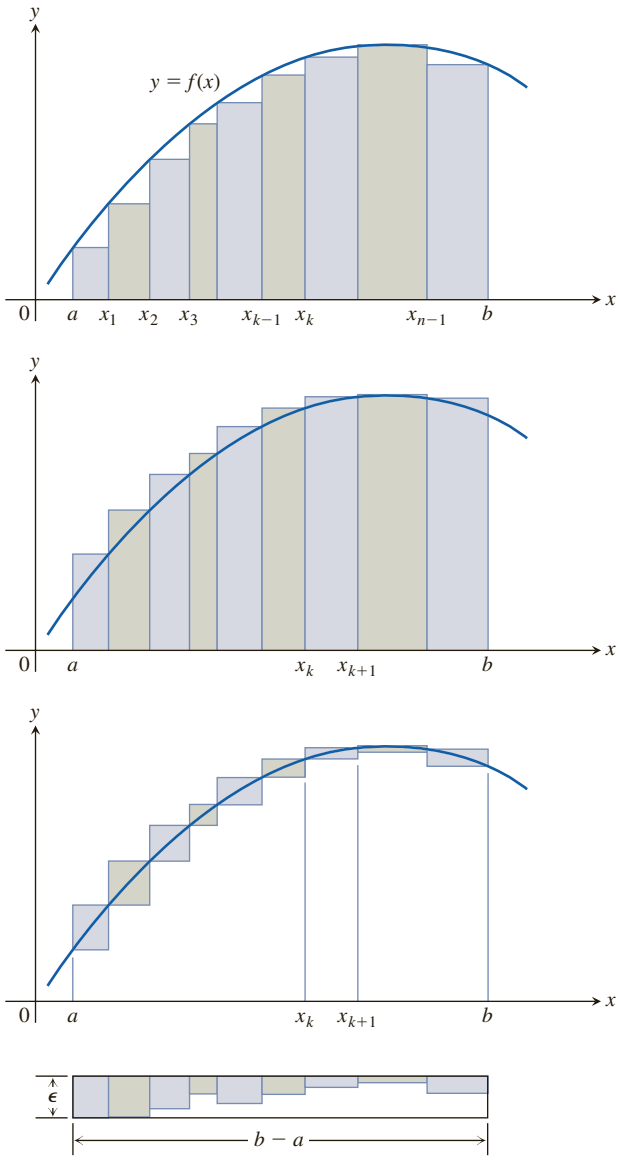
y las regiones sombreadas en la primera parte de la figura.

b) Si $M_k = \text{máx } \{f(x) \text{ para } x \text{ en el } k\text{-ésimo subintervalo}\}$, explique la conexión entre la **suma superior**

$$U = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \cdots + M_n \Delta x_n$$

y las regiones sombreadas en la segunda parte de la figura.

c) Explique la conexión entre $U - L$ y las regiones sombreadas a lo largo de la curva en la tercera parte de la figura.



87. Decimos que f es **uniformemente continua** en $[a, b]$ si dado cualquier $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que si x_1, x_2 están en $[a, b]$ y $|x_1 - x_2| < \delta$, entonces, $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Es posible demostrar que una función continua en $[a, b]$ es uniformemente continua. Considere esto y la figura del ejercicio 86 para demostrar que si f es continua y $\epsilon > 0$ está dada, es posible lograr que $U - L \leq \epsilon \cdot (b - a)$ haciendo suficientemente pequeño al Δx_k más grande.

88. Si en un viaje de 150 millas, el promedio de velocidad es de 30 millas/hora, y después se regresa por el mismo camino de 150 millas a una razón de 50 millas/hora, ¿cuál es la rapidez promedio en todo el viaje? Justifique su respuesta.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Si su software matemático lo permite, úselo para dibujar rectángulos asociados a las sumas de Riemann que convergen a las integrales de los ejercicios 89 a 94. En cada caso, utilice $n = 4$, 10, 20 y 50 subintervalos de igual longitud.

89. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x)\, dx = \frac{1}{2}$

90. $\int_0^1 (x^2 + 1)\,dx = \frac{4}{3}$ **91.** $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx = 0$

92. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx = 1$ **93.** $\int_{-1}^{1} |x|\,dx = 1$

94. $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ (El valor de la integral es aproximadamente 0.693)

En los ejercicios 95 a 98, use un software matemático para ejecutar los siguientes pasos:

a) Trace las funciones en el intervalo dado.

b) Divida el intervalo en $n = 100$, 200 y 1000 subintervalos de la misma longitud, y evalúe la función en el punto medio de cada subintervalo.

c) Calcule el valor promedio de los valores de la función generados en el inciso *b*).

d) Resuelva la ecuación $f(x) =$ (valor promedio) de x utilizando el valor promedio calculado en el inciso *c*) para la partición $n = 1000$.

95. $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$

96. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ en $[0, \pi]$

97. $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ en $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

98. $f(x) = x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$ en $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

5.4 El teorema fundamental del cálculo

En esta sección presentaremos el teorema fundamental del cálculo, que es el teorema central del cálculo integral. Dicho teorema vincula la integración con la diferenciación, permitiéndonos calcular integrales usando una antiderivada de la función del integrando en lugar de tomar límites de las sumas de Riemann, como lo hicimos en la sección 5.3. Leibniz y Newton aprovecharon esta relación e iniciaron los desarrollos matemáticos que fueron el combustible de la revolución científica durante los 200 años siguientes.

A lo largo de nuestro análisis, presentaremos una versión integral del teorema del valor medio, que es otro teorema importante del cálculo integral, y la usaremos para demostrar el teorema fundamental. Descubriremos también que el cambio neto de una función en un intervalo es la integral de su razón de cambio, como lo sugiere el ejemplo 3 de la sección 5.1.

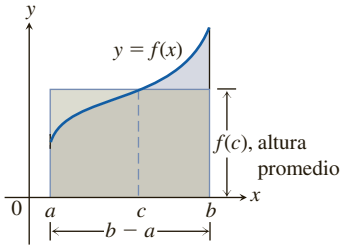


FIGURA 5.16 El valor $f(c)$ en el teorema del valor medio es, en cierto sentido, la altura promedio (o *media*) de f en $[a, b]$. Cuando $f \geq 0$, el área del rectángulo es el área debajo de la gráfica de f de a a b.

$$f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Teorema del valor medio para integrales definidas

En la sección anterior definimos el valor promedio de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ como la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ dividida entre la longitud $b - a$ del intervalo. El teorema del valor medio para integrales definidas afirma que la función f *siempre* alcanza, al menos una vez en el intervalo, el valor promedio.

La gráfica de la figura 5.16 muestra una función continua *positiva* $y = f(x)$ definida en el intervalo $[a, b]$. Geométricamente, el teorema del valor medio indica que existe un número c en $[a, b]$ tal que el rectángulo con altura igual al valor promedio $f(c)$ de la función y el ancho de la base $b - a$ tiene exactamente la misma área que la región que está debajo de la gráfica de f, de a a b.

TEOREMA 3: Teorema del valor medio para integrales definidas Si f es continua en $[a, b]$, entonces, en algún punto c en $[a, b]$,

$$f(c) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Demostración Si dividimos ambos lados de la desigualdad máx-mín (regla 6, tabla 5.6) entre $(b - a)$, obtenemos

$$\text{mín}\, f \leq \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \text{máx}\, f.$$

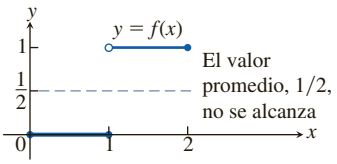


FIGURA 5.17 Una función discontinua no tiene que alcanzar su valor promedio.

Como f es continua, el teorema del valor intermedio para funciones continuas (sección 2.5) afirma que f debe alcanzar todos los valores entre mín f y máx f. Por lo tanto, debe alcanzar el valor $(1/(b-a))\int_a^b f(x)\,dx$ en algún punto c de $[a, b]$. ■

Aquí, la continuidad de f es importante. Es posible que una función discontinua nunca alcance su valor promedio (figura 5.17).

EJEMPLO 1 Demuestre que si f es continua en $[a, b]$, $a \neq b$, y si

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

entonces, $f(x) = 0$ al menos una vez en $[a, b]$.

Solución El valor promedio de f en $[a, b]$ es

$$\text{prom}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot 0 = 0.$$

Según el teorema del valor medio, f alcanza este valor en algún punto $c \in [a, b]$. ■

Teorema fundamental, parte 1

Tal vez resulte muy difícil calcular integrales definidas tomando el límite de las sumas de Riemann. A continuación desarrollaremos un método poderoso para evaluar integrales definidas utilizando antiderivadas. Este método combina dos hilos del cálculo. Un hilo involucra la idea de tomar límites de sumas finitas para obtener una integral definida, y el otro hilo incluye derivadas y antiderivadas. Ambos se unen para establecer el teorema fundamental del cálculo. Iniciamos considerando cómo diferenciar cierto tipo de función que se describe como una integral.

Si $f(t)$ es una función integrable en un intervalo finito I, entonces, la integral de cualquier número fijo $a \in I$ a otro número $x \in I$ define una nueva función F cuyo valor en x es

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{1}$$

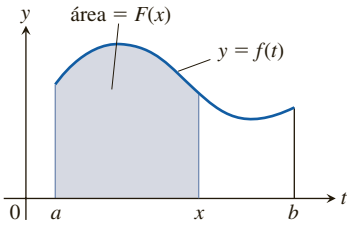


FIGURA 5.18 La función $F(x)$, definida por la ecuación (1), proporciona el área debajo de la gráfica de f de a a x cuando f es no negativa y $x > a$.

Por ejemplo, si f es no negativa y x está a la derecha de a, entonces, $F(x)$ es el área debajo de la gráfica de a a x (figura 5.18). La variable x es el límite superior de integración de una integral, pero F es como cualquier otra función real de una variable real. Para cada valor de entrada x, existe un resultado bien definido numéricamente, en este caso, la integral definida de f, de a a x.

La ecuación (1) proporciona una manera de definir funciones nuevas (como veremos en la sección 7.2), pero su importancia, por el momento, reside en la conexión que hace entre integrales y derivadas. Si f es cualquier función continua, entonces, el teorema fundamental del cálculo afirma que F es una función diferenciable de x cuya derivada es f. Afirma que, en todo valor de x,

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x).$$

Para entender mejor por qué el resultado es válido, analicémoslo desde el punto de vista geométrico.

Si $f \geq 0$ en $[a, b]$, entonces, el cálculo de $F'(x)$, según la definición de derivada, significa tomar el límite (cuando $h \to 0$) del cociente diferencial

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

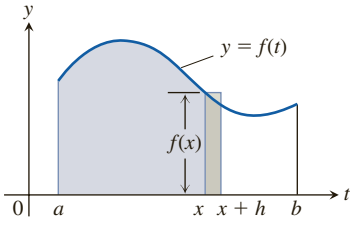


FIGURA 5.19 En la ecuación (1), $F(x)$ es el área a la izquierda de x. Asimismo, $F(x+h)$ es el área a la izquierda de $x+h$. Entonces, el cociente diferencial $[F(x+h) - F(x)]/h$ es aproximadamente igual a $f(x)$, la altura del rectángulo que se muestra aquí.

Para $h > 0$, el numerador se obtiene restando dos áreas, de modo que es el área debajo de la gráfica de f, de x a $x+h$ (figura 5.19). Si h es pequeña, esta área es aproximadamente igual al área del rectángulo de altura $f(x)$ y ancho h, como se observa en la figura 5.19. Es decir,

$$F(x+h) - F(x) \approx hf(x).$$

Al dividir ambos lados de esta aproximación entre h y si $h \to 0$, es razonable esperar que

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Este resultado es verdadero aun si la función f no es positiva, y constituye la primera parte del teorema fundamental del cálculo.

TEOREMA 4: El teorema fundamental del cálculo, parte 1 Si f es continua en $[a, b]$, entonces, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), y su derivada es $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{2}$$

Antes de demostrar el teorema 4, veremos algunos ejemplos para entender mejor lo que dice. En cada ejemplo, observe que la variable independiente aparece en un límite de integración, posiblemente en una fórmula.

EJEMPLO 2 Use el teorema fundamental para obtener dy/dx si

a) $y = \displaystyle\int_a^x (t^3 + 1)\,dt$ ***b)*** $y = \displaystyle\int_x^5 3t \operatorname{sen} t\,dt$

c) $y = \displaystyle\int_1^{x^2} \cos t\,dt$ ***d)*** $y = \displaystyle\int_{1+3x^2}^4 \frac{1}{2+t}\,dt$

Solución Se calculan las derivadas con respecto a la variable independiente x.

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x (t^3 + 1)\,dt = x^3 + 1$ Ecuación (2) con $f(t) = t^3 + 1$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^5 3t \operatorname{sen} t\,dt = \dfrac{d}{dx}\left(-\int_5^x 3t \operatorname{sen} t\,dt\right)$ Regla 1, tabla 5.6

$$= -\frac{d}{dx}\int_5^x 3t \operatorname{sen} t\,dt$$

$$= -3x \operatorname{sen} x$$ Ecuación (2) con $f(t) = 3t \operatorname{sen} t$

c) El límite superior de integración no es x, sino x^2. Esto hace a y una composición de dos funciones,

$$y = \int_1^u \cos t\,dt \qquad \text{y} \qquad u = x^2.$$

Por consiguiente, debemos aplicar la regla de la cadena para obtener dy/dx.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \left(\frac{d}{du}\int_1^u \cos t\,dt\right)\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \cos u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \cos(x^2)\cdot 2x$$

$$= 2x\cos x^2$$

d) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{1+3x^2}^4 \frac{1}{2+t}\,dt = \frac{d}{dx}\left(-\int_4^{1+3x^2} \frac{1}{2+t}\,dt\right)$ Regla 1

$$= -\frac{d}{dx}\int_4^{1+3x^2} \frac{1}{2+t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2+(1+3x^2)}\cdot\frac{d}{dx}(1+3x^2)$$ Ecuación (2) y la regla de la cadena

$$= -\frac{2x}{1+x^2}$$

■

Demostración del teorema 4 Demostramos el teorema fundamental, parte 1, aplicando directamente la definición de derivada a la función $F(x)$, cuando x y $x + h$ están en (a, b). Esto significa escribir el cociente diferencial

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} \tag{3}$$

y demostrar que su límite cuando $h \to 0$ es el número $f(x)$ para cada x en (a, b). Al hacerlo, obtenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt. \qquad \text{Regla 5, tabla 5.6} \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema del valor medio para integrales definidas, el valor antes de tomar el límite de la última expresión es uno de los valores tomados por f en el intervalo entre x y $x + h$. Es decir, para algún número c de este intervalo,

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c). \tag{4}$$

Cuando $h \to 0$, $x + h$ se aproxima a x, forzando a c a aproximarse también a x (porque c está entre x y $x + h$). Como f es continua en x, $f(c)$ se aproxima a $f(x)$:

$$\lim_{h\to 0} f(c) = f(x). \tag{5}$$

En conclusión, tenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \\ &= \lim_{h\to 0} f(c) \qquad \text{Ecuación (4)} \\ &= f(x). \qquad \text{Ecuación (5)} \end{aligned}$$

Si $x = a$ o b, entonces, el límite de la ecuación (3) se interpreta como un límite unilateral con $h \to 0^+$ o $h \to 0^-$, respectivamente. Entonces, el teorema 1 de la sección 3.2 muestra que F es continua en $[a, b]$. Esto concluye la demostración. ■

Teorema fundamental, parte 2 (teorema de evaluación)

Veamos ahora la segunda parte del teorema fundamental del cálculo. En ella se describe cómo evaluar integrales definidas sin tener que calcular los límites de sumas de Riemann. En vez de ello, obtenemos y evaluamos una antiderivada en los límites superior e inferior de integración.

TEOREMA 4 (Continuación): Teorema fundamental del cálculo, parte 2 Si f es continua en $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Demostración La parte 1 del teorema fundamental nos dice que existe una antiderivada de f, a saber,

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Por lo tanto, si F es *cualquier* antiderivada de f, entonces, $F(x) = G(x) + C$ para alguna constante C y para $a < x < b$ (según el corolario 2 del teorema del valor medio para derivadas de la sección 4.2).

En vista de que tanto F como G son continuas en $[a, b]$, vemos que $F(x) = G(x) + C$ también se cumple cuando $x = a$ y $x = b$ tomando límites laterales (cuando $x \longrightarrow a^+$ y $x \longrightarrow b^-$).

Evaluando $F(b) - F(a)$, tenemos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [\,G(b) + C\,] - [\,G(a) + C\,] \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - 0 \\ &= \int_a^b f(t)\,dt. \end{aligned}$$

■

El teorema de evaluación es importante porque señala que para calcular la integral definida de f en un intervalo $[a, b]$ sólo se necesita:

1. Obtener una antiderivada F de f, y
2. Calcular el número $F(b) - F(a)$, que es igual a $\int_a^b f(x)\,dx$.

Este proceso es mucho más fácil que el cálculo de la suma de Riemann. El poder del teorema radica en comprender que la integral definida, la cual se define por un proceso complicado que involucra todos los valores de la función f en $[a, b]$, se puede obtener conociendo los valores de *cualquier* antiderivada F sólo en los dos puntos extremos a y b. La notación usual de la diferencia $F(b) - F(a)$ es

$$F(x)\Big]_a^b \qquad \text{o} \qquad \Big[F(x)\Big]_a^b,$$

dependiendo de si F tiene uno o más términos.

EJEMPLO 3 Calcularemos algunas integrales definidas utilizando el teorema de evaluación, en lugar de tomar los límites de las sumas de Riemann.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi}$ $\qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$

$$= \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = 0 - 0 = 0$$

b) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{0} \sec x \tan x\,dx = \sec x\Big]_{-\pi/4}^{0}$ $\qquad \frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

$$= \sec 0 - \sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}$$

c) $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{x^2}\right) dx = \left[x^{3/2} + \frac{4}{x}\right]_1^4$ $\qquad \frac{d}{dx}\left(x^{3/2} + \frac{4}{x}\right) = \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{4}{x^2}$

$$= \left[(4)^{3/2} + \frac{4}{4}\right] - \left[(1)^{3/2} + \frac{4}{1}\right]$$

$$= [\,8 + 1\,] - [\,5\,] = 4$$

■

El ejercicio 72 constituye otra demostración del teorema de evaluación, al reunir las ideas de las sumas de Riemann, el teorema del valor medio y la definición de integral definida.

Integral de una razón

La parte 2 del teorema fundamental también se interpreta de otra manera. Si F es cualquier antiderivada de f, entonces, $F' = f$. La ecuación del teorema se puede rescribir como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ahora $F'(x)$ representa la razón de cambio de la función $F(x)$ con respecto a x, de modo que la última ecuación afirma que la integral de F' es exactamente el *cambio neto* en F conforme x cambia de a a b. De manera más formal, tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 5: Teorema del cambio neto El cambio neto en una función diferenciable $F(x)$ en un intervalo $a \le x \le b$ es la integral de su razón de cambio:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx. \tag{6}$$

EJEMPLO 4 He aquí algunas interpretaciones del teorema del cambio neto.

a) Si $c(x)$ es el costo de producción de x unidades de cierto producto, entonces, $c'(x)$ es el costo marginal (sección 3.4). Según el teorema 5,

$$\int_{x_1}^{x_2} c'(x)\,dx = c(x_2) - c(x_1),$$

que es el costo de aumentar la producción de x_1 a x_2 unidades.

b) Si un objeto con función de posición $s(t)$ se mueve a lo largo de una recta coordenada, su velocidad es $v(t) = s'(t)$. El teorema 5 afirma que

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1),$$

de modo que la integral de la velocidad es el **desplazamiento** en el intervalo de tiempo $t_1 \le t \le t_2$. Por otro lado, la integral de la rapidez $|v(t)|$ es la **distancia total recorrida** en ese intervalo de tiempo. Esto concuerda con el análisis de la sección 5.1. ■

Si reordenamos la ecuación (6) como

$$F(b) = F(a) + \int_a^b F'(x)\,dx,$$

vemos que el teorema del cambio neto también afirma que el valor final de una función $F(x)$ en un intervalo $[a, b]$ es igual a su valor inicial $F(a)$ más su cambio neto en el intervalo. De esta forma, si $v(t)$ representa la función velocidad de un objeto que se desplaza a lo largo de una recta coordenada, esto significa que la posición final del objeto, $s(t_2)$, en el intervalo de tiempo $t_1 \le t \le t_2$ es su posición inicial $s(t_1)$ más el cambio neto de posición a lo largo de la recta (vea el ejemplo 4*b*).

EJEMPLO 5 Considere nuevamente el ejemplo de la piedra arrojada hacia arriba por una explosión de dinamita (ejemplo 3, sección 5.1). La velocidad de la piedra en cualquier instante t durante su movimiento está dada como $v(t) = 160 - 32t$ ft/s.

a) Obtenga el desplazamiento de la piedra durante el periodo $0 \le t \le 8$.

b) Obtenga la distancia total recorrida durante este intervalo de tiempo.

Solución

a) Por el ejemplo 4*b*) sabemos que el desplazamiento es la integral

$$\int_0^8 v(t)\,dt = \int_0^8 (160 - 32t)\,dt = \left[160t - 16t^2\right]_0^8$$
$$= (160)(8) - (16)(64) = 256.$$

Esto significa que la altura de la piedra es de 256 ft por encima del suelo 8 s después de la explosión, lo cual concuerda con la conclusión del ejemplo 3, de la sección 5.1.

b) Como se observa en la tabla 5.3, la función velocidad $v(t)$ es positiva en el intervalo de tiempo [0, 5] y negativa en el intervalo [5, 8]. Por lo tanto, según el ejemplo 4*b*), la distancia total recorrida es la integral

$$\int_0^8 |v(t)|dt = \int_0^5 |v(t)|dt + \int_5^8 |v(t)|dt$$
$$= \int_0^5 (160 - 32t)\,dt - \int_5^8 (160 - 32t)\,dt$$
$$= \left[160t - 16t^2\right]_0^5 - \left[160t - 16t^2\right]_5^8$$
$$= [(160)(5) - (16)(25)] - [(160)(8) - (16)(64) - ((160)(5) - (16)(25))]$$
$$= 400 - (-144) = 544.$$

Nuevamente, este cálculo concuerda con la conclusión del ejemplo 3 de la sección 5.1. Es decir, la distancia total de 544 ft recorrida por la piedra durante el intervalo de tiempo $0 \le t \le 8$ es **i.** la altura máxima de 400 ft alcanzada en el intervalo [0, 5], más **ii.** la distancia adicional de 144 ft que la roca cae en el intervalo de tiempo [5, 8]. ■

Relación entre integración y diferenciación

Las conclusiones del teorema fundamental nos indican varias cosas. La ecuación (2) se puede rescribir como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x),$$

lo cual significa que si primero se integra la función f y luego se diferencia el resultado, se obtiene la función f de nuevo. Asimismo, al sustituir b por x y x por t en la ecuación (6), se obtiene

$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a),$$

de modo que si se deriva primero la función F y luego se integra el resultado, se obtiene la función F (ajustada por una constante de integración). En cierto sentido, los procesos de integración y diferenciación son "inversos" el uno del otro. El teorema fundamental también sostiene que todas las funciones continuas f tienen una antiderivada F. Esto demuestra la importancia de la obtención de antiderivadas para evaluar fácilmente integrales definidas. Además, señala que la ecuación diferencial $dy/dx = f(x)$ tiene una solución [a saber, cualquiera de las funciones $y = F(x) + C$] para toda función continua F.

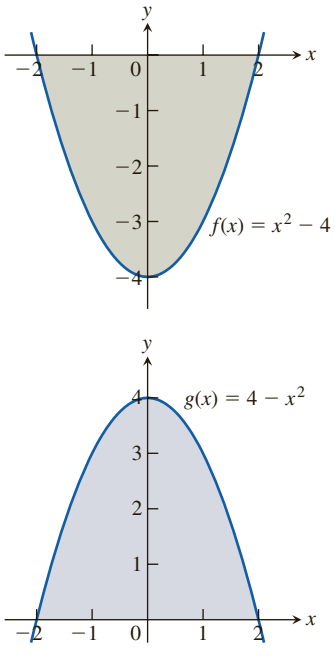


FIGURA 5.20 Estas gráficas encierran la misma área con el eje x, pero las integrales definidas de las dos funciones en $[-2, 2]$ difieren por el signo (ejemplo 6).

Área total

El área siempre es una cantidad no negativa. La suma de Riemann tiene términos de la forma $f(c_k)\,\Delta x_k$ que proporcionan el área de un rectángulo cuando $f(c_k)$ es positiva. Cuando $f(c_k)$ es negativa, entonces, el producto $f(c_k)\,\Delta x_k$ es el negativo del área del rectángulo. Cuando sumamos estos términos para una función negativa, obtenemos el negativo del área entre la curva y el eje x. Si entonces se toma el valor absoluto, se obtiene, como debe ser, el área positiva.

EJEMPLO 6 La figura 5.20 muestra la gráfica de $f(x) = x^2 - 4$ y su imagen especular $g(x) = 4 - x^2$, reflejada con respecto al eje x. Para cada función, calcule

a) la integral definida en el intervalo $[-2, 2]$, y

b) el área entre la gráfica y el eje x en $[-2, 2]$.

Solución

a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{2} = \left(\frac{8}{3} - 8\right) - \left(-\frac{8}{3} + 8\right) = -\frac{32}{3},$

y

$$\int_{-2}^{2} g(x)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.$$

b) En ambos casos, el área entre la curva y el eje x en $[-2, 2]$ es de $32/3$ unidades cuadradas. Aun cuando la integral definida de $f(x)$ es negativa, el área es positiva. ■

Para calcular el área de la región acotada por la gráfica de una función $y = f(x)$ y el eje x cuando la función toma tanto valores positivos como negativos, debemos tener cuidado de dividir el intervalo $[a, b]$ en subintervalos en los que la función no cambie de signo. De otro modo, podría haber cancelación entre áreas con valores positivos y negativos, llevándonos a un resultado erróneo. El total correcto se obtiene sumando el valor absoluto de la integral definida en cada subintervalo donde $f(x)$ no cambia de signo. El término "área" se entenderá como el *área total*.

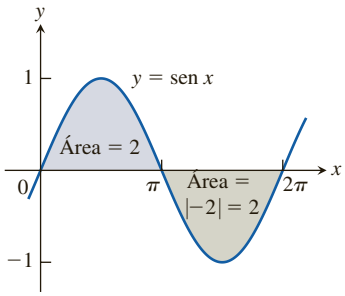


FIGURA 5.21 El área total entre $y = \text{sen } x$ y el eje x para $0 \le x \le 2\pi$ es la suma de los valores absolutos de dos integrales (ejemplo 7).

EJEMPLO 7 La figura 5.21 muestra la gráfica de la función $f(x) = \text{sen } x$ entre $x = 0$ y $x = 2\pi$. Calcule

a) la integral definida de $f(x)$ en $[0, 2\pi]$.

b) el área entre la gráfica de $f(x)$ y el eje x en $[0, 2\pi]$.

Solución

a) La integral definida para $f(x) = \text{sen } x$ está dada por

$$\int_0^{2\pi} \text{sen } x\,dx = -\cos x\Big]_0^{2\pi} = -[\cos 2\pi - \cos 0] = -[1 - 1] = 0.$$

La integral definida es cero porque las partes de la gráfica por arriba y por debajo del eje x hacen que las contribuciones se cancelen.

b) El área entre la gráfica $f(x)$ y el eje x en $[0, 2\pi]$ se calcula dividiendo el dominio de sen x en dos partes: el intervalo $[0, \pi]$ donde es no negativa y el intervalo $[\pi, 2\pi]$ donde es no positiva.

$$\int_0^{\pi} \text{sen } x\,dx = -\cos x\Big]_0^{\pi} = -[\cos \pi - \cos 0] = -[-1 - 1] = 2$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \text{sen } x\,dx = -\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi} = -[\cos 2\pi - \cos \pi] = -[1 - (-1)] = -2$$

La segunda ecuación nos da un valor negativo. El área entre la gráfica y el eje se obtiene sumando los valores absolutos.

$$\text{Área} = |2| + |-2| = 4.$$

■

Resumen:

Para obtener el área entre la gráfica de $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a, b]$:

1. Se divide $[a, b]$ con los ceros de f.
2. Se integra f en cada subintervalo.
3. Se suman los valores absolutos de las integrales.

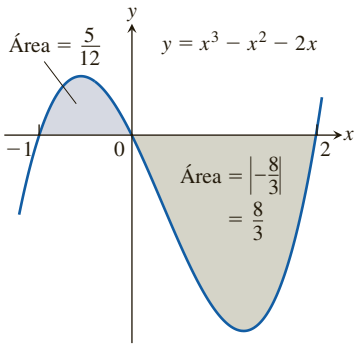


FIGURA 5.22 Región entre la curva $y = x^3 - x^2 - 2x$ y el eje x (ejemplo 8).

EJEMPLO 8 Determine el área de la región entre el eje x y la gráfica de $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, $-1 \le x \le 2$.

Solución Primero se obtienen los ceros de f. Como

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x + 1)(x - 2),$$

los ceros están en $x = 0, -1$ y 2 (figura 5.22). Los ceros dividen a $[-1, 2]$ en dos subintervalos: $[-1, 0]$, en el que $f \ge 0$, y $[0, 2]$, en el que $f \le 0$. Integramos f en cada subintervalo y sumamos los valores absolutos de las integrales calculadas.

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right] = \frac{5}{12}$$

$$\int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2} = \left[4 - \frac{8}{3} - 4\right] - 0 = -\frac{8}{3}$$

El área total acotada se obtiene sumando los valores absolutos de las integrales calculadas.

$$\text{Área total acotada} = \frac{5}{12} + \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{37}{12}$$ ■

Ejercicios 5.4

Evaluación de integrales

Evalúe las integrales de los ejercicios 1 a 28.

1. $\displaystyle\int_0^2 x(x - 3)\,dx$

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2 - 2x + 3)\,dx$

3. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{3}{(x + 3)^4}\,dx$

4. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{299}\,dx$

5. $\displaystyle\int_1^4 \left(3x^2 - \frac{x^3}{4}\right) dx$

6. $\displaystyle\int_{-2}^{3} (x^3 - 2x + 3)\,dx$

7. $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2 + \sqrt{x}\right) dx$

8. $\displaystyle\int_1^{32} x^{-6/5}\,dx$

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} 2\sec^2 x\,dx$

10. $\displaystyle\int_0^{\pi} (1 + \cos x)\,dx$

11. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc\theta \cot\theta\,d\theta$

12. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} 4\,\frac{\operatorname{sen} u}{\cos^2 u}\,du$

13. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{0} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt$

14. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \operatorname{sen}^2 t\,dt$

15. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} (\sec x + \tan x)^2\,dx$

17. $\displaystyle\int_0^{\pi/8} \operatorname{sen} 2x\,dx$

18. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{-\pi/4} \left(4\sec^2 t + \frac{\pi}{t^2}\right) dt$

19. $\displaystyle\int_1^{-1} (r + 1)^2\,dr$

20. $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t + 1)(t^2 + 4)\,dt$

21. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{1} \left(\frac{u^7}{2} - \frac{1}{u^5}\right) du$

22. $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{y^5 - 2y}{y^3}\,dy$

23. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{s^2 + \sqrt{s}}{s^2}\,ds$

24. $\displaystyle\int_1^8 \frac{(x^{1/3} + 1)(2 - x^{2/3})}{x^{1/3}}\,dx$

25. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2\operatorname{sen} x}\,dx$

26. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} (\cos x + \sec x)^2\,dx$

27. $\displaystyle\int_{-4}^{4} |x|\,dx$

28. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\cos x + |\cos x|)\,dx$

En los ejercicios 29 a 32, sugiera una antiderivada para el integrando de la función. Valide su propuesta por diferenciación y, luego, evalúe la integral definida proporcionada. (*Sugerencia:* Tenga en mente la regla de la cadena cuando proponga la antiderivada. En la siguiente sección aprenderá cómo obtener estas antiderivadas).

29. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos x^2\,dx$

30. $\displaystyle\int_1^{\pi^2} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

31. $\displaystyle\int_2^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1 + x^2}}$

32. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx$

Derivadas de integrales

Obtenga las derivadas en los ejercicios 33 a 38,

a) evaluando la integral y derivando el resultado.

b) derivando directamente la integral.

33. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \cos t\, dt$

34. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{\operatorname{sen} x} 3t^2\, dt$

35. $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{t^4} \sqrt{u}\, du$

36. $\dfrac{d}{d\theta}\displaystyle\int_0^{\tan\theta} \sec^2 y\, dy$

37. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^3} t^{-2/3}\, dt$

38. $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_1^{\sqrt{t}} \left(x^4 + \frac{3}{x^3}\right) dx$

Obtenga dy/dx en los ejercicios 39 a 46.

39. $y = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt$

40. $y = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$

41. $y = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^0 \operatorname{sen}(t^2)\, dt$

42. $y = x \displaystyle\int_2^{x^2} \operatorname{sen}(t^3)\, dt$

43. $y = \displaystyle\int_{-1}^x \frac{t^2}{t^2 + 4} dt - \int_3^x \frac{t^2}{t^2 + 4} dt$

44. $y = \left(\displaystyle\int_0^x (t^3 + 1)^{10}\, dt\right)^3$

45. $y = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$

46. $y = \displaystyle\int_{\tan x}^0 \frac{dt}{1 + t^2}$

Área

En los ejercicios 47 a 50, obtenga el área total entre la región y el eje x.

47. $y = -x^2 - 2x, \quad -3 \le x \le 2$

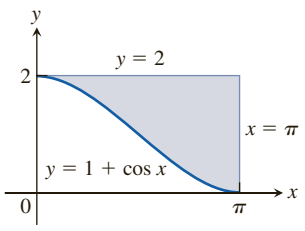
48. $y = 3x^2 - 3, \quad -2 \le x \le 2$

49. $y = x^3 - 3x^2 + 2x, \quad 0 \le x \le 2$

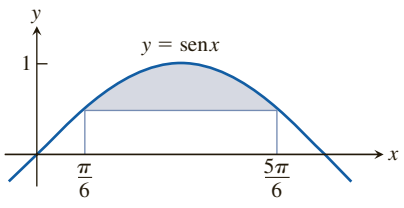
50. $y = x^{1/3} - x, \quad -1 \le x \le 8$

Obtenga las áreas de las regiones sombreadas en los ejercicios 51 a 54.

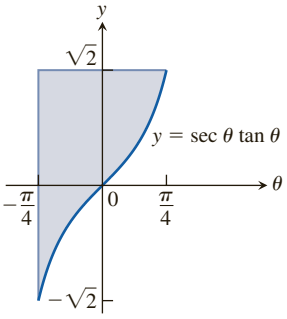
51.



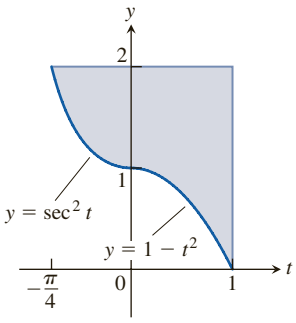
52.



53.



54.



Problemas con valor inicial

Cada una de las siguientes funciones resuelve un problema con valor inicial de los ejercicios 55 a 58. ¿Qué función resuelve cuál problema? Justifique sus respuestas.

a) $y = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t} dt - 3$

b) $y = \displaystyle\int_0^x \sec t\, dt + 4$

c) $y = \displaystyle\int_{-1}^x \sec t\, dt + 4$

d) $y = \displaystyle\int_\pi^x \frac{1}{t} dt - 3$

55. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}, \quad y(\pi) = -3$

56. $y' = \sec x, \quad y(-1) = 4$

57. $y' = \sec x, \quad y(0) = 4$

58. $y' = \dfrac{1}{x}, \quad y(1) = -3$

Exprese las soluciones de los problemas con valor inicial en los ejercicios 59 y 60 en términos de integrales.

59. $\dfrac{dy}{dx} = \sec x, \quad y(2) = 3$

60. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 + x^2}, \quad y(1) = -2$

Teoría y ejemplos

61. Fórmula de Arquímedes para el área de las parábolas Arquímedes (287-212 a. C.), inventor, ingeniero militar, físico y el matemático más notable de la época clásica del mundo occidental, descubrió que el área debajo de un arco parabólico es igual a dos tercios de la base por la altura. Dibuje el arco parabólico $y = h - (4h/b^2)x^2$, $-b/2 \le x \le b/2$, suponiendo que h y b son positivas. Después, use cálculo integral para obtener el área de la región acotada entre el arco y el eje x.

62. Demuestre que si k es una constante positiva, entonces, el área entre el eje x y un arco de la curva $y = \operatorname{sen} kx$ es $2/k$.

63. Costo a partir del costo marginal El costo marginal de imprimir un cartel cuando se han imprimido x carteles es

$$\frac{dc}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

dólares. Obtenga $c(100) - c(1)$, el costo de imprimir del cartel 2 al 100.

64. Ingresos a partir del ingreso marginal Suponga que el ingreso marginal de una compañía que fabrica y vende batidoras es

$$\frac{dr}{dx} = 2 - 2/(x + 1)^2,$$

donde r se mide en miles de dólares y x en miles de unidades. ¿Cuánto dinero recibirá la compañía por una producción de $x = 3$ mil batidoras? Para averiguarlo, integre el ingreso marginal de $x = 0$ a $x = 3$.

65. La temperatura T(°F) de una habitación al tiempo t minutos está dada por

$$T = 85 - 3\sqrt{25 - t} \quad \text{para } 0 \le t \le 25.$$

a) Obtenga la temperatura de la habitación cuando $t = 0$, $t = 16$ y $t = 25$.

b) Obtenga la temperatura promedio para $0 \le t \le 25$.

66. La altura H (ft) de una palmera después de crecer durante t años está dada por

$$H = \sqrt{t + 1} + 5t^{1/3} \quad \text{para } 0 \le t \le 8.$$

a) Obtenga la altura de la palmera cuando $t = 0$, $t = 4$ y $t = 8$.

b) Obtenga la altura promedio de la palmera para $0 \le t \le 8$.

67. Suponga que $\int_1^x f(t)\,dt = x^2 - 2x + 1$. Obtenga $f(x)$.

68. Obtenga $f(4)$ si $\int_0^x f(t)\,dt = x\cos \pi x$.

69. Obtenga la linealización de

$$f(x) = 2 - \int_2^{x+1} \frac{9}{1 + t}\,dt$$

en $x = 1$.

70. Obtenga la linealización de

$$g(x) = 3 + \int_1^{x^2} \sec(t - 1)\,dt$$

en $x = -1$.

71. Suponga que f tiene una derivada positiva para todos los valores de x, y que $f(1) = 0$. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos para la función

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt?$$

Justifique sus respuestas.

a) g es una función diferenciable de x.

b) g es una función continua de x.

c) La gráfica de g tiene una tangente horizontal en $x = 1$.

d) g tiene un máximo local en $x = 1$.

e) g tiene un mínimo local en $x = 1$.

f) La gráfica de g tiene un punto de inflexión en $x = 1$.

g) La gráfica de dg/dx cruza el eje x en $x = 1$.

72. Otra demostración del teorema de evaluación

a) Sea $a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$ cualquier partición de $[a, b]$, y sea F cualquier antiderivada de f. Demuestre que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

b) Aplique el teorema del valor medio a cada término para demostrar que $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ para alguna c_i en el intervalo (x_{i-1}, x_i). Después, demuestre que $F(b) - F(a)$ es una suma de Riemann para f en $[a, b]$.

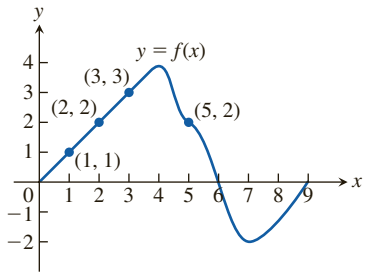
c) Considerando el inciso *b)* y la definición de integral definida, demuestre que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

73. Suponga que f es la función diferenciable representada en la figura, y que la posición en el instante t (s) de una partícula que se mueve a lo largo de un eje de coordenadas es

$$s = \int_0^t f(x)\,dx$$

metros. Use la gráfica para contestar las siguientes preguntas. Justifique sus respuestas.



a) ¿Cuál es la velocidad de la partícula en el instante $t = 5$?

b) ¿La aceleración de la partícula en el instante $t = 5$ es positiva o negativa?

c) ¿Cuál es la posición de la partícula en el instante $t = 3$?

d) ¿En qué instante durante los primeros 9 s alcanza s su valor máximo?

e) ¿Aproximadamente en qué instante la aceleración es cero?

f) ¿Cuándo se está moviendo la partícula hacia el origen? ¿Cuándo se aleja del origen?

g) ¿En qué lado del origen se encuentra la partícula en el instante $t = 9$?

74. El costo marginal de fabricar x unidades de un dispositivo electrónico es de $0.001x^2 - 0.5x + 115$. Si se producen 600 unidades, ¿cuál es el costo de producción por unidad?

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 75 a 78, sea $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ para la función especificada f y el intervalo $[a, b]$. Use un software matemático para ejecutar los siguientes pasos y contestar las preguntas que se plantean.

a) Grafique juntas las funciones f y F en $[a, b]$.

b) Resuelva la ecuación $F'(x) = 0$. ¿Qué puede afirmar acerca de las gráficas de f y F en los puntos donde $F'(x) = 0$? ¿Su observación se basa en la parte 1 del teorema fundamental y en la información que brinda la primera derivada? Explique su respuesta.

c) ¿En qué intervalos (aproximadamente) la función F es creciente, y en cuáles decreciente? ¿Qué es verdad acerca de f en esos intervalos?

d) Calcule la derivada f' y grafíquela junto con F. ¿Qué puede afirmar acerca de la gráfica de F en los puntos donde $f'(x) = 0$? ¿Su observación se basa en la parte 1 del teorema fundamental? Explique su respuesta.

75. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x, \quad [0, 4]$

76. $f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 46x^2 - 43x + 12, \quad \left[0, \frac{9}{2}\right]$

77. $f(x) = \operatorname{sen} 2x \cos \frac{x}{3}, \quad [0, 2\pi]$

78. $f(x) = x \cos \pi x, \quad [0, 2\pi]$

En los ejercicios 79 a 82, sea $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$ para a, u y f especificadas. Utilice un software matemático para ejecutar los siguientes pasos y contestar las preguntas que se plantean.

a) Obtenga el dominio de F.

b) Calcule $F'(x)$ y determine sus ceros. ¿En qué puntos de su dominio F es creciente? ¿En cuáles es decreciente?

c) Calcule $F''(x)$ y determine sus ceros. Identifique los extremos locales y los puntos de inflexión de F.

d) Use la información de los incisos *a*) a *c*), para hacer un bosquejo, a mano, de $y = F(x)$ en su dominio. Después, grafique $F(x)$ con su software matemático para apoyar su dibujo.

79. $a = 1, \quad u(x) = x^2, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

80. $a = 0, \quad u(x) = x^2, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

81. $a = 0, \quad u(x) = 1 - x, \quad f(x) = x^2 - 2x - 3$

82. $a = 0, \quad u(x) = 1 - x^2, \quad f(x) = x^2 - 2x - 3$

En los ejercicios 83 y 84, suponga que f es continua y que $u(x)$ es dos veces diferenciable.

83. Calcule $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)\,dt$ y verifique su respuesta con un software matemático.

84. Calcule $\dfrac{d^2}{dx^2}\displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)\,dt$ y verifique su respuesta con un software matemático.

5.5 Integrales indefinidas y el método de sustitución

El teorema fundamental del cálculo afirma que una integral definida de una función continua se puede calcular directamente si se obtiene una antiderivada de la función. En la sección 4.8 se definió la **integral indefinida** de la función f con respecto a x como el conjunto de *todas* las antiderivadas de f, denotado con $\int f(x)\,dx$. Puesto que dos antiderivadas cualesquiera de f difieren por una constante, la notación de integral indefinida $\int$ significa que para cualquier antiderivada F de f,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

donde C es cualquier constante arbitraria. El vínculo entre las antiderivadas y la integral definida establecido en el teorema fundamental explica ahora esta notación:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x) + C\Big]_a^b = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b.$$

Cuando se obtiene la integral indefinida de una función f, recuerde que siempre se incluye una constante arbitraria C.

Debemos distinguir cuidadosamente entre integrales definidas e indefinidas. Una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un *número*. Una integral indefinida $\int f(x)\,dx$ es una *función* más una constante arbitraria C.

Hasta ahora sólo hemos obtenido antiderivadas de funciones que reconocemos claramente como derivadas. En esta sección iniciaremos el desarrollo de las técnicas más comunes para obtener las antiderivadas de funciones que no se reconocen fácilmente como derivadas.

Sustitución: Aplicación hacia atrás de la regla de la cadena

Si u es una función diferenciable de x, y n es cualquier número diferente de -1, la regla de la cadena indica que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u^n \frac{du}{dx}.$$

Desde otro punto de vista, esta misma ecuación señala que $u^{n+1}/(n+1)$ es una de las antiderivadas de la función $u^n(du/dx)$. Por lo tanto,

$$\int u^n \frac{du}{dx}\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C. \tag{1}$$

La integral en la ecuación (1) es igual a la integral más sencilla

$$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,$$

lo cual sugiere que la expresión más sencilla du se puede sustituir por $(du/dx)\,dx$ cuando se calcula una integral. Leibniz, uno de los fundadores del cálculo, sabía que, de hecho, esta sustitución era posible, lo que condujo hacia el *método de sustitución* para el cálculo de integrales. Al igual que con las diferenciales, cuando se calculan integrales, tenemos

$$du = \frac{du}{dx}\,dx.$$

EJEMPLO 1 Resuelva la integral $\int (x^3 + x)^5(3x^2 + 1)\,dx$.

Solución Se establece que $u = x^3 + x$. Entonces,

$$du = \frac{du}{dx}\,dx = (3x^2 + 1)\,dx,$$

de manera que, por sustitución, tenemos

$$\begin{aligned}
\int (x^3 + x)^5(3x^2 + 1)\,dx &= \int u^5\,du && \text{Sea } u = x^3 + x,\ du = (3x^2 + 1)\,dx. \\
&= \frac{u^6}{6} + C && \text{Se integra con respecto a } u. \\
&= \frac{(x^3 + x)^6}{6} + C && \text{Se sustituye } x^3 + x \text{ por } u.
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Resuelva $\int \sqrt{2x + 1}\,dx$.

Solución La integral no se ajusta a la fórmula

$$\int u^n \, du,$$

con $u = 2x + 1$ y $n = 1/2$, porque

$$du = \frac{du}{dx}\,dx = 2\,dx$$

no es exactamente dx. El factor constante 2 falta en la integral. Sin embargo, podemos introducir este factor después del signo integral si lo compensamos con un factor de $1/2$ antes del signo de la integral. Entonces, escribimos

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{2x + 1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{\underbrace{2x + 1}_{u}} \cdot \underbrace{2\,dx}_{du} \\
&= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du && \text{Sea } u = 2x + 1,\ du = 2\,dx. \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{u^{3/2}}{3/2} + C && \text{Se integra con respecto a } u. \\
&= \frac{1}{3}(2x + 1)^{3/2} + C && \text{Se sustituye } 2x + 1 \text{ por } u.
\end{aligned}$$

■

Las sustituciones en los ejemplos 1 y 2 son casos de la siguiente regla general.

TEOREMA 6: Regla de sustitución Si $u = g(x)$ es una función diferenciable cuyo rango es un intervalo I, y f es continua en I, entonces,

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Demostración Por la regla de la cadena, $F(g(x))$ es una antiderivada de $f(g(x))\cdot g'(x)$ siempre que F sea una antiderivada de f:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}F(g(x)) &= F'(g(x))\cdot g'(x) && \text{Regla de la cadena} \\ &= f(g(x))\cdot g'(x). && F' = f \end{aligned}$$

Si hacemos la sustitución $u = g(x)$, entonces,

$$\begin{aligned} \int f(g(x))g'(x)\,dx &= \int \frac{d}{dx}F(g(x))\,dx \\ &= F(g(x)) + C && \text{Teorema 8 del capítulo 4} \\ &= F(u) + C && u = g(x) \\ &= \int F'(u)\,du && \text{Teorema 8 del capítulo 4} \\ &= \int f(u)\,du. && F' = f \end{aligned}$$

■

En la regla de la sustitución, es común el uso de la variable u (algunas veces conocida como sustitución-u), pero se puede utilizar cualquier letra, como v, t, θ, etcétera. La regla ofrece un método para evaluar una integral de la forma $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ dado que se satisfacen las condiciones del teorema 6. El reto principal es decidir qué expresión que involucra a x se desea sustituir en el integrando. Los ejemplos que siguen aportan ideas útiles.

Método de la sustitución para evaluar $\int f(g(x))g'(x)\,dx$

1. Sustituya $u = g(x)$ y $du = (du/dx)\,dx = g'(x)\,dx$ para obtener $\int f(u)\,du$.
2. Integre con respecto a u.
3. Sustituya u por $g(x)$.

EJEMPLO 3 Resuelva $\int \sec^2(5x + 1)\cdot 5\,dx$.

Solución Se sustituyen $u = 5x + 1$ y $du = 5\,dx$. De esta forma,

$$\begin{aligned} \int \sec^2(5x + 1)\cdot 5\,dx &= \int \sec^2 u\,du && \text{Sea } u = 5x + 1,\ du = 5\,dx. \\ &= \tan u + C && \frac{d}{du}\tan u = \sec^2 u \\ &= \tan(5x + 1) + C. && \text{Se sustituye } u \text{ por } 5x + 1. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 Resuelva $\int \cos(7\theta + 3)\, d\theta$.

Solución Se establece que $u = 7\theta + 3$, de manera que $du = 7\, d\theta$. Falta el factor constante 7 del término $d\theta$ en la integral. Es posible compensar esto si se multiplica por 7 y se divide entre 7, usando el mismo procedimiento del ejemplo 2. Así,

$$\int \cos(7\theta + 3)\, d\theta = \frac{1}{7}\int \cos(7\theta + 3)\cdot 7\, d\theta \qquad \text{Se coloca el factor 1/7 afuera de la integral.}$$

$$= \frac{1}{7}\int \cos u\, du \qquad \text{Sean } u = 7\theta + 3,\ du = 7\, d\theta.$$

$$= \frac{1}{7}\operatorname{sen} u + C \qquad \text{Se integra.}$$

$$= \frac{1}{7}\operatorname{sen}(7\theta + 3) + C. \qquad \text{Se sustituye } u \text{ por } 7\theta + 3.$$

Hay otro enfoque para este problema. Con $u = 7\theta + 3$ y $du = 7\, d\theta$ como antes, despejamos $d\theta$ para obtener $d\theta = (1/7)\, du$. Así, la integral se convierte en

$$\int \cos(7\theta + 3)\, d\theta = \int \cos u \cdot \frac{1}{7}\, du \qquad \text{Sean } u = 7\theta + 3,\ du = 7\, d\theta, \text{ y } d\theta = (1/7)\, du.$$

$$= \frac{1}{7}\operatorname{sen} u + C \qquad \text{Se integra.}$$

$$= \frac{1}{7}\operatorname{sen}(7\theta + 3) + C. \qquad \text{Se sustituye } u \text{ por } 7\theta + 3.$$

Esta solución se puede verificar derivando y confirmando que se obtiene la función original $\cos(7\theta + 3)$. ■

EJEMPLO 5 Algunas veces vemos que en el integrando aparece una potencia de x que es menor en 1 que la potencia de x que aparece en el argumento de la función que deseamos integrar. Esto sugiere inmediatamente el uso de la sustitución de la potencia mayor de x. Esta situación se presenta en la siguiente integración.

$$\int x^2 \cos x^3\, dx = \int \cos x^3 \cdot x^2\, dx$$

$$= \int \cos u \cdot \frac{1}{3}\, du \qquad \text{Sean } u = x^3,\ du = 3x^2\, dx,\ (1/3)\, du = x^2\, dx.$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos u\, du$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{sen} u + C \qquad \text{Se integra con respecto a } u.$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{sen} x^3 + C \qquad \text{Se sustituye } u \text{ por } x^3.$$ ■

Tal vez aparezca un factor extra de x en el integrando cuando intentamos sustituir $u = g(x)$. En tal caso, es posible resolver la ecuación $u = g(x)$ para despejar x en términos de u. Al sustituir el factor adicional de x con esa expresión, se da paso a una integral que puede evaluarse. A continuación se presenta un ejemplo de tal situación.

EJEMPLO 6 Evalúe $\int x\sqrt{2x+1}\,dx$.

Solución La integración anterior del ejemplo 2 sugiere la sustitución de $u = 2x + 1$ con $du = 2\,dx$. De esta forma,

$$\sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{u}\,du.$$

Sin embargo, en este caso, el integrando contiene un factor extra de x que multiplica el término $\sqrt{2x+1}$. Para ajustarnos a ello, resolvemos la ecuación de sustitución $u = 2x + 1$ para obtener $x = (u-1)/2$, y encontrar que

$$x\sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}(u-1)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{u}\,du.$$

Ahora la integración se convierte en

$$\int x\sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{4}\int (u-1)\sqrt{u}\,du = \frac{1}{4}\int (u-1)u^{1/2}\,du \quad \text{Se sustituye.}$$

$$= \frac{1}{4}\int (u^{3/2} - u^{1/2})\,du \quad \text{Se multiplican los términos.}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C \quad \text{Se integra.}$$

$$= \frac{1}{10}(2x+1)^{5/2} - \frac{1}{6}(2x+1)^{3/2} + C. \quad \text{Se sustituye } u \text{ por } 2x+1. \ \blacksquare$$

EJEMPLO 7 Algunas veces es posible utilizar identidades trigonométricas para transformar las integrales que no sabemos evaluar en una que sí se pueda, usando la regla de la sustitución.

a) $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$$= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

b) $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

c) $\int (1 - 2\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen} 2x\,dx = \int (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen} 2x\,dx$

$$= \int \cos 2x \operatorname{sen} 2x\,dx \quad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$= \int \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x\,dx = \int \frac{1}{8}\operatorname{sen} u\,du \quad u = 4x,\ du = 4\,dx$$

$$= -\cos 4x + C. \ \blacksquare$$

Intentos con diferentes sustituciones

El éxito del método de sustitución depende de encontrar una sustitución que convierta una integral que no es posible evaluar directamente en una que sí se pueda. La labor de identificar cuál es la sustitución correcta se facilita con la práctica y la experiencia. Si la primera sustitución falla, se intenta con otra, tal vez aunada a simplificaciones algebraicas o trigonométricas del integrando. En el capítulo 8 se estudiarán algunas sustituciones más complicadas.

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}}$.

Solución Podemos utilizar el método de sustitución de integración como una herramienta exploratoria: se sustituye la parte más problemática del integrando para ver qué sucede. Para esta integral, podemos intentar $u = z^2 + 1$ o incluso poner a prueba nuestra suerte y tomar u como toda la raíz cúbica. A continuación se describe lo que ocurre en cada caso; ambas sustituciones tienen éxito.

Método 1: Se sustituye $u = z^2 + 1$.

$$\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}} = \int \frac{du}{u^{1/3}} \qquad \text{Sean } u = z^2 + 1,\ du = 2z\,dz.$$

$$= \int u^{-1/3}\,du \qquad \text{En la forma } \int u^n\,du$$

$$= \frac{u^{2/3}}{2/3} + C \qquad \text{Se integra.}$$

$$= \frac{3}{2}u^{2/3} + C$$

$$= \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C \qquad \text{Se sustituye } u \text{ por } z^2 + 1.$$

Método 2: Ahora sustituimos $u = \sqrt[3]{z^2+1}$.

$$\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}} = \int \frac{3u^2\,du}{u} \qquad \text{Sean } u = \sqrt[3]{z^2+1},\ u^3 = z^2 + 1,\ 3u^2\,du = 2z\,dz.$$

$$= 3\int u\,du$$

$$= 3\cdot\frac{u^2}{2} + C \qquad \text{Se integra.}$$

$$= \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C \qquad \text{Se sustituye } u \text{ por } (z^2+1)^{1/3}.$$ ■

Ejercicios 5.5

Evaluación de integrales indefinidas

Evalúe las integrales indefinidas de los ejercicios 1 a 16, utilizando las sustituciones que se indican para reducir las integrales a la forma estándar.

1. $\displaystyle\int 2(2x+4)^5\,dx, \quad u = 2x + 4$

2. $\displaystyle\int 7\sqrt{7x-1}\,dx, \quad u = 7x - 1$

3. $\displaystyle\int 2x(x^2+5)^{-4}\,dx, \quad u = x^2 + 5$

4. $\int \frac{4x^3}{(x^4+1)^2}\,dx, \quad u = x^4 + 1$

5. $\int (3x+2)(3x^2+4x)^4\,dx, \quad u = 3x^2 + 4x$

6. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^{1/3}}{\sqrt{x}}\,dx, \quad u = 1 + \sqrt{x}$

7. $\int \operatorname{sen} 3x\,dx, \quad u = 3x$

8. $\int x \operatorname{sen}(2x^2)\,dx, \quad u = 2x^2$

9. $\int \sec 2t \tan 2t\,dt, \quad u = 2t$

10. $\int \left(1 - \cos\frac{t}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\frac{t}{2}\,dt, \quad u = 1 - \cos\frac{t}{2}$

11. $\int \frac{9r^2\,dr}{\sqrt{1-r^3}}, \quad u = 1 - r^3$

12. $\int 12(y^4+4y^2+1)^2(y^3+2y)\,dy, \quad u = y^4 + 4y^2 + 1$

13. $\int \sqrt{x}\,\operatorname{sen}^2(x^{3/2}-1)\,dx, \quad u = x^{3/2} - 1$

14. $\int \frac{1}{x^2}\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)dx, \quad u = -\frac{1}{x}$

15. $\int \csc^2 2\theta \cot 2\theta\,d\theta$

a) Usando $u = \cot 2\theta$ ***b)*** Usando $u = \csc 2\theta$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+8}}$

a) Usando $u = 5x + 8$ ***b)*** Usando $u = \sqrt{5x+8}$

Evalúe las integrales de los ejercicios 17 a 50.

17. $\int \sqrt{3-2s}\,ds$

18. $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}}\,ds$

19. $\int \theta\sqrt[4]{1-\theta^2}\,d\theta$

20. $\int 3y\sqrt{7-3y^2}\,dy$

21. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}\,dx$

22. $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos^3 x\,dx$

23. $\int \sec^2(3x+2)\,dx$

24. $\int \tan^2 x \sec^2 x\,dx$

25. $\int \operatorname{sen}^5\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}dx$

26. $\int \tan^7\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx$

27. $\int r^2\left(\frac{r^3}{18}-1\right)^5 dr$

28. $\int r^4\left(7-\frac{r^5}{10}\right)^3 dr$

29. $\int x^{1/2}\operatorname{sen}(x^{3/2}+1)\,dx$

30. $\int \csc\left(\frac{v-\pi}{2}\right)\cot\left(\frac{v-\pi}{2}\right)dv$

31. $\int \frac{\operatorname{sen}(2t+1)}{\cos^2(2t+1)}dt$

32. $\int \frac{\sec z \tan z}{\sqrt{\sec z}}dz$

33. $\int \frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{1}{t}-1\right)dt$

34. $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\cos\left(\sqrt{t}+3\right)dt$

35. $\int \frac{1}{\theta^2}\operatorname{sen}\frac{1}{\theta}\cos\frac{1}{\theta}d\theta$

36. $\int \frac{\cos\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}\,\operatorname{sen}^2\sqrt{\theta}}d\theta$

37. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$

38. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}dx$

39. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{2-\frac{1}{x}}\,dx$

40. $\int \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\,dx$

41. $\int \sqrt{\frac{x^3-3}{x^{11}}}\,dx$

42. $\int \sqrt{\frac{x^4}{x^3-1}}\,dx$

43. $\int x(x-1)^{10}\,dx$

44. $\int x\sqrt{4-x}\,dx$

45. $\int (x+1)^2(1-x)^5\,dx$

46. $\int (x+5)(x-5)^{1/3}\,dx$

47. $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

48. $\int 3x^5\sqrt{x^3+1}\,dx$

49. $\int \frac{x}{(x^2-4)^3}\,dx$

50. $\int \frac{x}{(2x-1)^{2/3}}\,dx$

Si no sabe qué sustitución hacer, intente reducir la integral paso a paso, usando una sustitución de prueba para simplificar un poco la integral, y después otra para simplificarla un poco más. Verá a lo que nos referimos si se fija en la secuencia de sustituciones de los ejercicios 51 y 52.

51. $\int \frac{18\tan^2 x \sec^2 x}{(2+\tan^3 x)^2}dx$

a) $u = \tan x$, seguida por $v = u^3$, después por $w = 2 + v$

b) $u = \tan^3 x$, seguida por $v = 2 + u$

c) $u = 2 + \tan^3 x$

52. $\int \sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x-1)}\,\operatorname{sen}(x-1)\cos(x-1)\,dx$

a) $u = x - 1$, seguida por $v = \operatorname{sen} u$, después por $w = 1 + v^2$

b) $u = \operatorname{sen}(x-1)$, seguida por $v = 1 + u^2$

c) $u = 1 + \operatorname{sen}^2(x-1)$

Evalúe las integrales de los ejercicios 53 y 54.

53. $\int \frac{(2r-1)\cos\sqrt{3(2r-1)^2+6}}{\sqrt{3(2r-1)^2+6}}dr$

54. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}\cos^3\sqrt{\theta}}d\theta$

Problemas con valor inicial

Resuelva los problemas con valor inicial de los ejercicios 55 a 60.

55. $\frac{ds}{dt} = 12t(3t^2-1)^3, \quad s(1) = 3$

56. $\frac{dy}{dx} = 4x(x^2+8)^{-1/3}, \quad y(0) = 0$

57. $\frac{ds}{dt} = 8\operatorname{sen}^2\left(t+\frac{\pi}{12}\right), \quad s(0) = 8$

58. $\dfrac{dr}{d\theta} = 3\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right), \quad r(0) = \dfrac{\pi}{8}$

59. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -4\,\text{sen}\left(2t - \dfrac{\pi}{2}\right), \quad s'(0) = 100, \quad s(0) = 0$

60. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4\sec^2 2x \tan 2x, \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = -1$

61. La velocidad de una partícula que se mueve hacia atrás y hacia delante sobre una recta es $v = ds/dt = 6$ sen $2t$ m/s para toda t. Si $s = 0$ cuando $t = 0$, obtenga el valor de s cuando $t = \pi/2$ s.

62. La aceleración de una partícula que se mueve hacia atrás y hacia delante sobre una recta es $a = d^2s/dt^2 = \pi^2 \cos \pi t$ m/s^2 para toda t. Si $s = 0$ y $v = 8$ m/s cuando $t = 0$, obtenga s cuando $t = 1$ s.

5.6 Sustituciones en integrales definidas y el área entre curvas

Hay dos métodos para evaluar, por sustitución, una integral definida. El primero consiste en obtener una antiderivada usando sustitución, y después evaluar la integral definida aplicando el teorema de evaluación. El otro método extiende el proceso de sustitución directamente a integrales *definidas* cambiando los límites de integración. Además aplicaremos la nueva fórmula que se presenta a continuación, para calcular el área entre dos curvas.

Fórmula de sustitución

La siguiente fórmula muestra cómo cambian los límites de integración cuando la variable de integración se modifica por sustitución.

TEOREMA 7: Sustitución en integrales definidas Si g' es continua en el intervalo $[a, b]$ y f es continua en el rango de $g(x) = u$, entonces,

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Demostración Denotamos con F a cualquier antiderivada de f. De esta forma,

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x))\Big]_{x=a}^{x=b} \qquad \frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

$$= F(g(b)) - F(g(a))$$

$$= F(u)\Big]_{u=g(a)}^{u=g(b)}$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du. \qquad \text{Teorema fundamental, parte 2}$$

■

Para usar la fórmula, hacemos la misma sustitución de $u = g(x)$ y $du = g'(x)\,dx$ que usaríamos para evaluar la integral indefinida correspondiente. Después, se integra la integral transformada con respecto a u, del valor $g(a)$ (el valor de u en $x = a$) al valor $g(b)$ (el valor de u en $x = b$).

EJEMPLO 1 Evalúe $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx.$

Solución Tenemos dos opciones.

Método 1: Transformamos la integral y evaluamos la integral transformada con los límites modificados que se indican en el teorema 7.

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$

Sean $u = x^3 + 1$, $du = 3x^2\,dx$.
Cuando $x = -1$, $u = (-1)^3 + 1 = 0$.
Cuando $x = 1$, $u = (1)^3 + 1 = 2$.

$$= \int_0^2 \sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_0^2$$

Se evalúa la nueva integral definida.

$$= \frac{2}{3}\left[2^{3/2} - 0^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\left[2\sqrt{2}\right] = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Método 2: Se convierte la integral a una integral indefinida, se integra, se regresa a x, y se usan los límites originales de x.

$$\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$

Sean $u = x^3 + 1$, $du = 3x^2\,dx$.

$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

Se integra con respecto a u.

$$= \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2} + C$$

Se sustituye a u por $x^3 + 1$.

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2}\Big]_{-1}^{1}$$

Se usa la integral recién obtenida con los límites de integración para x.

$$= \frac{2}{3}\left[((1)^3+1)^{3/2} - ((-1)^3+1)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[2^{3/2} - 0^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\left[2\sqrt{2}\right] = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

■

¿Cuál método es mejor: evaluar la integral definida transformada y con los límites modificados usando el teorema 7, o transformar la integral, integrar y regresar a la variable original para usar los límites originales de integración? En el ejemplo 1, el primer método parece más fácil, pero no siempre es así. Por lo general, es mejor conocer ambos métodos y utilizar el que parezca más adecuado en cada caso.

EJEMPLO 2 Emplearemos el método de transformación de los límites de integración.

a) $$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot\theta \csc^2\theta\,d\theta = \int_1^0 u\cdot(-du)$$

Sean $u = \cot\theta$, $du = -\csc^2\theta\,d\theta$, $-du = \csc^2\theta\,d\theta$.
Cuando $\theta = \pi/4$, $u = \cot(\pi/4) = 1$.
Cuando $\theta = \pi/2$, $u = \cot(\pi/2) = 0$.

$$= -\int_1^0 u\,du$$

$$= -\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^0$$

$$= -\left[\frac{(0)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

b) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x\,dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$

$\displaystyle = -\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{u}$ Sean $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\,dx$. Cuando $x = -\pi/4$, $u = \sqrt{2}/2$. Cuando $x = \pi/4$, $u = \sqrt{2}/2$.

$= 0$ Intervalo de longitud igual a cero ■

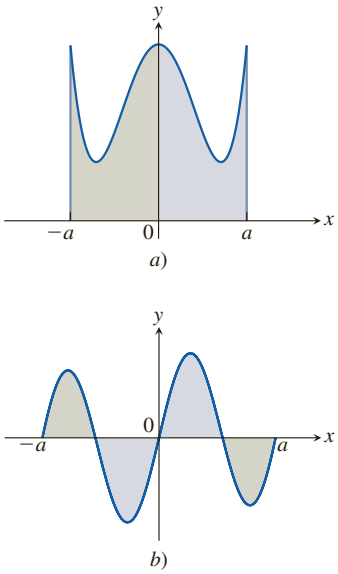


FIGURA 5.23 *a*) Para una función par f, la integral de $-a$ a a es dos veces la integral de 0 a a. *b*) Para una función impar f, la integral de $-a$ a a es igual a 0.

Integrales definidas de funciones simétricas

La fórmula de sustitución del teorema 7 simplifica los cálculos de integrales definidas de funciones pares e impares (sección 1.1) en un intervalo simétrico $[-a, a]$ (figura 5.23).

TEOREMA 8 Sea f continua en el intervalo $[-a, a]$.

a) Si f es par, entonces, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$

b) Si f es impar, entonces, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Demostración del inciso *a)*

$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ Regla de aditividad para integrales definidas

$\displaystyle = -\int_{0}^{-a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ Regla de orden del integración

$\displaystyle = -\int_{0}^{a} f(-u)(-du) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ Sean $u = -x$, $du = -dx$. Cuando $x = 0$, $u = 0$. Cuando $x = -a$, $u = a$.

$\displaystyle = \int_{0}^{a} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$

$\displaystyle = \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ f es par, así que $f(-u) = f(u)$.

$\displaystyle = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

La demostración del inciso *b*) es muy similar y se le pedirá que la desarrolle en el ejercicio 114. ■

Las afirmaciones del teorema 8 siguen siendo válidas cuando f es una función integrable (en lugar de tener la propiedad más fuerte de ser continua).

EJEMPLO 3 Evalúe $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^4 - 4x^2 + 6)\,dx.$

Solución Como $f(x) = x^4 - 4x^2 + 6$ satisface $f(-x) = f(x)$, es par en el intervalo simétrico $[-2, 2]$, entonces,

$$\int_{-2}^{2} (x^4 - 4x^2 + 6)\,dx = 2\int_{0}^{2} (x^4 - 4x^2 + 6)\,dx$$
$$= 2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 6x\right]_0^2$$
$$= 2\left(\frac{32}{5} - \frac{32}{3} + 12\right) = \frac{232}{15}.$$

■

Áreas entre curvas

Suponga que deseamos obtener el área de una región que está acotada arriba por la curva $y = f(x)$, y abajo por la curva $y = g(x)$, y a la izquierda y derecha por las rectas $x = a$ y $x = b$, respectivamente (figura 5.24). Tal vez la región podría tener una forma cuya área podríamos obtener geométricamente, pero si f y g son funciones continuas arbitrarias, por lo general, tenemos que determinar el área con una integral.

Para ver cuál sería dicha integral, primero aproximamos la región con n rectángulos verticales, con base en una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ (figura 5.25). El área del k-ésimo rectángulo es

$$\Delta A_k = \text{altura} \times \text{ancho} = [\,f(c_k) - g(c_k)\,]\,\Delta x_k.$$

Después, aproximamos el área de la región sumando las áreas de los n rectángulos:

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} [\,f(c_k) - g(c_k)\,]\,\Delta x_k. \qquad \text{Suma de Riemann}$$

Cuando $\|P\| \to 0$, las sumas de la derecha se aproximan al límite $\int_a^b [\,f(x) - g(x)\,]\,dx$ porque f y g son continuas. Tomamos el área de la región como el valor de esta integral. Es decir,

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} [\,f(c_k) - g(c_k)\,]\,\Delta x_k = \int_a^b [\,f(x) - g(x)\,]\,dx.$$

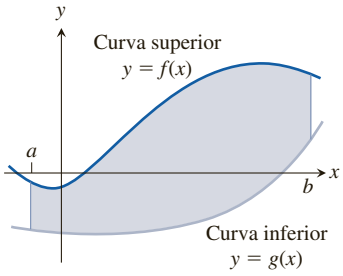


FIGURA 5.24 Región entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$.

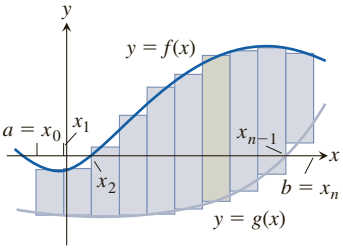


FIGURA 5.25 La región se aproxima mediante rectángulos perpendiculares al eje x.

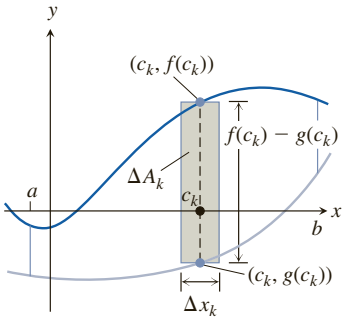


FIGURA 5.26 El área ΔA_k del k-ésimo rectángulo es el producto de su altura, $f(c_k) - g(c_k)$, por su ancho Δx_k.

DEFINICIÓN Si f y g son continuas con $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, entonces, el **área de la región entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ de a a b** es la integral de $(f - g)$ de a a b:

$$A = \int_a^b [\,f(x) - g(x)\,]\,dx.$$

Cuando se aplica esta definición, es conveniente trazar las gráficas de las curvas. La gráfica revela cuál curva es la superior f y cuál es la inferior g. Además, nos ayuda a obtener los límites de integración si no los conocemos. Quizá también sea necesario saber dónde se intersecan las curvas para determinar los límites de integración, y esto tal vez implique resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ para obtener valores de x. Después, se integra la función $f - g$ para obtener el área entre las intersecciones.

EJEMPLO 4 Obtenga el área de la región acotada por la parábola $y = 2 - x^2$ y la recta $y = -x$.

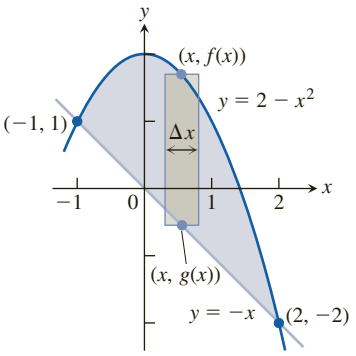


FIGURA 5.27 La región del ejemplo 4 con un rectángulo típico de aproximación.

Solución Primero trazamos las dos curvas (figura 5.27). Los límites de integración se obtienen resolviendo simultáneamente las ecuaciones $y = 2 - x^2$ y $y = -x$ para despejar x.

$$\begin{aligned} 2 - x^2 &= -x && \text{Se iguala } f(x) \text{ y } g(x). \\ x^2 - x - 2 &= 0 && \text{Se reordena.} \\ (x + 1)(x - 2) &= 0 && \text{Se factoriza.} \\ x = -1, \quad & x = 2. && \text{Se resuelve.} \end{aligned}$$

La región va de $x = -1$ a $x = 2$. Los límites de integración son $a = -1$ y $b = 2$.

El área entre las curvas es

$$A = \int_a^b [\, f(x) - g(x) \,]\, dx = \int_{-1}^{2} [\, (2 - x^2) - (-x) \,]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\, dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} \right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{2}.$$

■

Si la fórmula de una curva que acota una región cambia en uno o más puntos, dividimos la región en subregiones que correspondan a los cambios de la fórmula y aplicamos la fórmula del área entre las curvas a cada subregión.

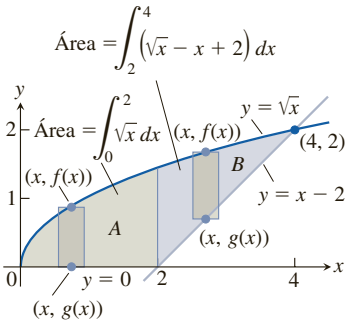


FIGURA 5.28 Cuando la fórmula de una curva que acota una región varía, la integral del área cambia para convertirse en una suma de integrales, una integral por cada región sombreada que se muestra aquí (ejemplo 6).

EJEMPLO 5 Obtenga el área de la región, en el primer cuadrante, que está acotada arriba por $y = \sqrt{x}$ y abajo por el eje x y la recta $y = x - 2$.

Solución El diagrama (figura 5.28) muestra que la frontera superior de la región es la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$. La frontera inferior cambia de $g(x) = 0$ en $0 \le x \le 2$ a $g(x) = x - 2$ en $2 \le x \le 4$ (ambas fórmulas coinciden en $x = 2$). En $x = 2$ se divide la región en las subregiones A y B que se ilustran en la figura 5.28.

Los límites de integración de la región A son $a = 0$ y $b = 2$. El límite izquierdo para la región B es $a = 2$. Para obtener el límite derecho, resolvemos de manera simultánea las ecuaciones $y = \sqrt{x}$ y $y = x - 2$ para despejar x:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= x - 2 && \text{Se iguala } f(x) \text{ y } g(x). \\ x &= (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 && \text{Se elevan al cuadrado ambos lados.} \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 && \text{Se reordena.} \\ (x - 1)(x - 4) &= 0 && \text{Se factoriza.} \\ x = 1, \quad & x = 4. && \text{Se resuelve.} \end{aligned}$$

Sólo el valor $x = 4$ satisface la ecuación $\sqrt{x} = x - 2$. El valor $x = 1$ es una raíz inadecuada, que surge al elevar al cuadrado. El límite derecho es $b = 4$.

$$\text{Para } 0 \le x \le 2: \quad f(x) - g(x) = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}$$

$$\text{Para } 2 \le x \le 4: \quad f(x) - g(x) = \sqrt{x} - (x - 2) = \sqrt{x} - x + 2$$

Sumamos las áreas de las subregiones A y B para obtener el área total:

$$\text{Área total} = \underbrace{\int_0^2 \sqrt{x}\, dx}_{\text{área de } A} + \underbrace{\int_2^4 \left(\sqrt{x} - x + 2 \right) dx}_{\text{área de } B}$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^2 + \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_2^4$$

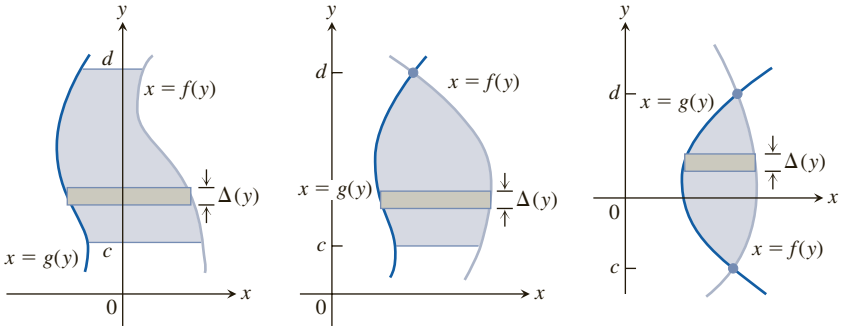
$$= \frac{2}{3}(2)^{3/2} - 0 + \left(\frac{2}{3}(4)^{3/2} - 8 + 8\right) - \left(\frac{2}{3}(2)^{3/2} - 2 + 4\right)$$

$$= \frac{2}{3}(8) - 2 = \frac{10}{3}.$$ ■

Integración con respecto a *y*

Si las curvas que acotan una región están descritas como funciones de y, los rectángulos de aproximación son horizontales en lugar de verticales y la fórmula básica tiene a y en lugar de x.

Para regiones como éstas:



se utiliza la fórmula

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy.$$

En esta ecuación, f siempre denota la curva de la derecha, y g la curva de la izquierda, de modo que $f(y) - g(y)$ es no negativa.

EJEMPLO 6 Obtenga el área de la región del ejemplo 5 integrando con respecto a y.

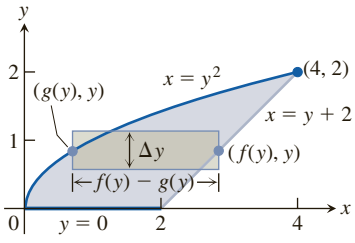


FIGURA 5.29 Se calculan dos integrales para obtener el área de esta región si integramos con respecto a x. Sólo se calcula una si integramos con respecto a y (ejemplo 6).

Solución Primero dibujamos la región y un rectángulo *horizontal* con base en la partición de un intervalo de valores y (figura 5.29). La frontera derecha de la región es la recta $x = y + 2$, de manera que $f(y) = y + 2$. La frontera izquierda de la región es la curva $x = y^2$, de modo que $g(y) = y^2$. El límite inferior de integración es $y = 0$. Para obtener el límite superior, resolvemos de manera simultánea las ecuaciones $x = y + 2$ y $x = y^2$ para despejar y:

$$y + 2 = y^2 \qquad \text{Se iguala } f(y) = y + 2 \text{ y } g(y) = y^2.$$

$$y^2 - y - 2 = 0 \qquad \text{Se reordena.}$$

$$(y + 1)(y - 2) = 0 \qquad \text{Se factoriza.}$$

$$y = -1, \quad y = 2 \qquad \text{Se resuelve.}$$

El límite superior de integración es $b = 2$. (El valor $y = -1$ nos da un punto de intersección por *debajo* del eje x).

El área de la región es

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy = \int_0^2 [y + 2 - y^2]\,dy$$

$$= \int_0^2 [2 + y - y^2]\,dy$$

$$= \left[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^2$$

$$= 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}.$$

Éste es el resultado del ejemplo 6, obtenido con menos trabajo. ■

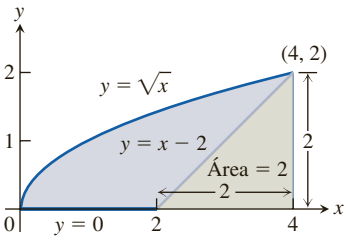


FIGURA 5.30 El área de la región en color es el área debajo de la parábola $y = \sqrt{x}$ menos el área del triángulo.

Aun cuando resultó más fácil obtener el área del ejemplo 5 integrando con respecto a y y no con respecto a x (tal como se procedió en el ejemplo 6), todavía existe un camino más fácil. Al revisar la figura 5.30, vemos que el área de interés es el área entre la curva $y = \sqrt{x}$ y el eje x para $0 \le x \le 4$, *menos* el área del triángulo isósceles de base y altura igual a 2. Así, combinando cálculo con algo de geometría, obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^4 \sqrt{x}\, dx - \frac{1}{2}(2)(2) \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^4 - 2 \\ &= \frac{2}{3}(8) - 0 - 2 = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

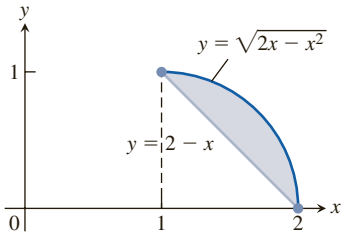


FIGURA 5.31 La región descrita por las curvas en el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Obtenga el área de la región acotada en la parte inferior por la recta $y = 2 - x$ y arriba por la curva $y = \sqrt{2x - x^2}$.

Solución En la figura 5.31 se presenta un dibujo de la región, y vemos que la recta y la curva se intersecan en los puntos (1, 1) y (2, 0). Usando rectángulos verticales, el área de la región está dada por

$$A = \int_1^2 \left(\sqrt{2x - x^2} + x - 2\right) dx.$$

Sin embargo, no sabemos cómo obtener una antiderivada para el término que involucra el radical, y no parece haber una sustitución sencilla.

Para usar rectángulos horizontales, primero necesitamos expresar cada curva frontera como una función de la variable y. La recta de la izquierda se obtiene fácilmente como $x = 2 - y$. Para la curva $y = \sqrt{2x - x^2}$ del lado derecho de la figura 5.31, tenemos

$$\begin{aligned} y^2 &= 2x - x^2 \\ &= -(x^2 - 2x + 1) + 1 \qquad \text{Se completa el cuadrado.} \\ &= -(x - 1)^2 + 1. \end{aligned}$$

Despejando x,

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 &= 1 - y^2, \\ x &= 1 + \sqrt{1 - y^2}. \qquad x \ge 1,\ 0 \le y \le 1 \end{aligned}$$

Entonces, el área de la región está dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left[\left(1 + \sqrt{1 - y^2}\right) - (2 - y)\right] dy \\ &= \int_0^1 \left(\sqrt{1 - y^2} + y - 1\right) dy. \end{aligned}$$

Nuevamente, no sabemos todavía cómo integrar el término radical (aunque veremos cómo hacerlo en la sección 8.4). Concluimos que ni los rectángulos verticales ni los horizontales conducen a una integral que podamos evaluar.

Sin embargo, tal como ocurrió en el ejemplo 6, algunas veces resulta útil un poco de observación. Si buscamos nuevamente cómo expresar con álgebra el lado derecho de la curva $y = \sqrt{2x - x^2}$ como una función de y, vemos que $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ es la ecuación de la circunferencia unitaria con centro en el punto (1, 0). Entonces, en la figura 5.31, podemos ver que el área de la región que queremos es el área del cuarto superior derecho del círculo unitario menos el área del triángulo con vértices en (1, 1), (1, 0) y (2, 0). Es decir, el área está dada por

$$A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 2}{4} \approx 0.285.$$

■

Ejercicios 5.6

Evaluación de integrales definidas

Utilice la fórmula de sustitución del teorema 7 para evaluar las integrales en los ejercicios 1 a 24.

1. *a)* $\int_0^3 \sqrt{y+1}\,dy$ *b)* $\int_{-1}^0 \sqrt{y+1}\,dy$

2. *a)* $\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$ *b)* $\int_{-1}^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$

3. *a)* $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x\,dx$ *b)* $\int_{-\pi/4}^0 \tan x \sec^2 x\,dx$

4. *a)* $\int_0^{\pi} 3\cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx$ *b)* $\int_{2\pi}^{3\pi} 3\cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx$

5. *a)* $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$ *b)* $\int_{-1}^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$

6. *a)* $\int_0^{\sqrt{7}} t(t^2+1)^{1/3}\,dt$ *b)* $\int_{-\sqrt{7}}^0 t(t^2+1)^{1/3}\,dt$

7. *a)* $\int_{-1}^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}dr$ *b)* $\int_0^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}dr$

8. *a)* $\int_0^1 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}dv$ *b)* $\int_1^4 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}dv$

9. *a)* $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ *b)* $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

10. *a)* $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}dx$ *b)* $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}dx$

11. *a)* $\int_0^1 t\sqrt{4+5t}\,dt$ *b)* $\int_1^9 t\sqrt{4+5t}\,dt$

12. *a)* $\int_0^{\pi/6} (1-\cos 3t)\operatorname{sen} 3t\,dt$ *b)* $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1-\cos 3t)\operatorname{sen} 3t\,dt$

13. *a)* $\int_0^{2\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\operatorname{sen} z}}dz$ *b)* $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\operatorname{sen} z}}dz$

14. *a)* $\int_{-\pi/2}^0 \left(2+\tan\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2}dt$ *b)* $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2+\tan\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2}\,dt$

15. $\int_0^1 \sqrt{t^5+2t}(5t^4+2)\,dt$ **16.** $\int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}\left(1+\sqrt{y}\right)^2}$

17. $\int_0^{\pi/6} \cos^{-3} 2\theta \operatorname{sen} 2\theta\,d\theta$ **18.** $\int_{\pi}^{3\pi/2} \cot^5\left(\frac{\theta}{6}\right)\sec^2\left(\frac{\theta}{6}\right)d\theta$

19. $\int_0^{\pi} 5(5-4\cos t)^{1/4}\operatorname{sen} t\,dt$ **20.** $\int_0^{\pi/4} (1-\operatorname{sen} 2t)^{3/2}\cos 2t\,dt$

21. $\int_0^1 (4y-y^2+4y^3+1)^{-2/3}(12y^2-2y+4)\,dy$

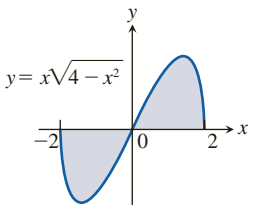
22. $\int_0^1 (y^3+6y^2-12y+9)^{-1/2}(y^2+4y-4)\,dy$

23. $\int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{\theta}\cos^2(\theta^{3/2})\,d\theta$ **24.** $\int_{-1}^{-1/2} t^{-2}\operatorname{sen}^2\left(1+\frac{1}{t}\right)dt$

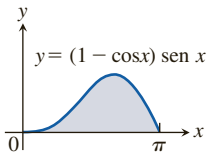
Área

Determine las áreas totales de las regiones sombreadas en los ejercicios 25 a 40.

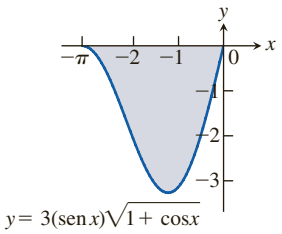
25.



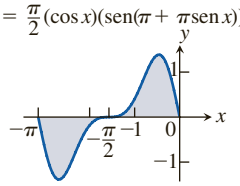
26.



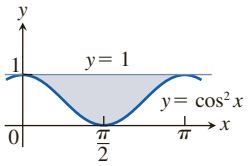
27.



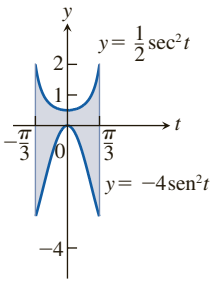
28. $y = \frac{\pi}{2}(\cos x)(\operatorname{sen}(\pi + \pi \operatorname{sen} x))$



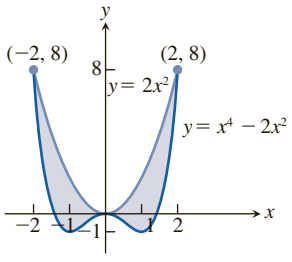
29.



30.

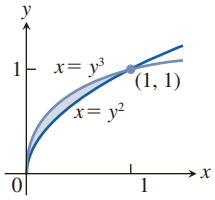


31.

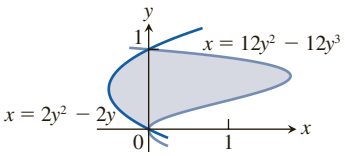


NO ESTÁ A ESCALA

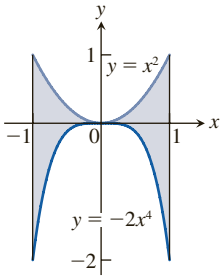
32.



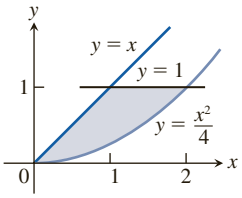
33.



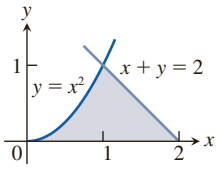
34.



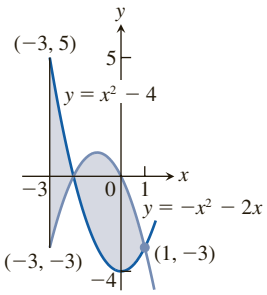
35.



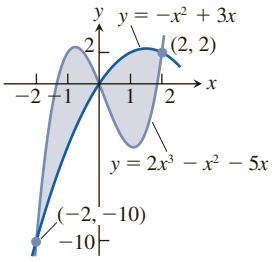
36.



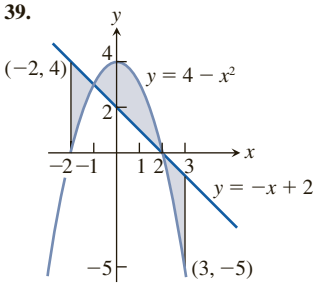
37.



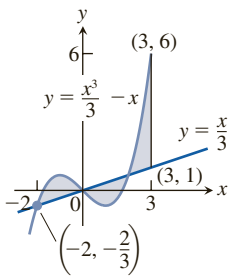
38.



39.



40.



Determine las áreas de las regiones acotadas por las rectas y curvas en los ejercicios 41 a 50.

41. $y = x^2 - 2$ y $y = 2$

42. $y = 2x - x^2$ y $y = -3$

43. $y = x^4$ y $y = 8$

44. $y = x^2 - 2x$ y $y = x$

45. $y = x^2$ y $y = -x^2 + 4x$

46. $y = 7 - 2x^2$ y $y = x^2 + 4$

47. $y = x^4 - 4x^2 + 4$ y $y = x^2$

48. $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$, y $y = 0$

49. $y = \sqrt{|x|}$ y $5y = x + 6$ (¿Cuántos puntos de intersección hay?).

50. $y = |x^2 - 4|$ y $y = (x^2/2) + 4$

Determine las áreas de las regiones acotadas por las rectas y curvas en los ejercicios 51 a 58.

51. $x = 2y^2$, $x = 0$, y $y = 3$

52. $x = y^2$ y $x = y + 2$

53. $y^2 - 4x = 4$ y $4x - y = 16$

54. $x - y^2 = 0$ y $x + 2y^2 = 3$

55. $x + y^2 = 0$ y $x + 3y^2 = 2$

56. $x - y^{2/3} = 0$ y $x + y^4 = 2$

57. $x = y^2 - 1$ y $x = |y|\sqrt{1 - y^2}$

58. $x = y^3 - y^2$ y $x = 2y$

Determine las áreas de las regiones acotadas por las curvas en los ejercicios 59 a 62.

59. $4x^2 + y = 4$ y $x^4 - y = 1$

60. $x^3 - y = 0$ y $3x^2 - y = 4$

61. $x + 4y^2 = 4$ y $x + y^4 = 1$, para $x \geq 0$

62. $x + y^2 = 3$ y $4x + y^2 = 0$

Determine las áreas de las regiones acotadas por las rectas y curvas en los ejercicios 63 a 70.

63. $y = 2\,\text{sen}\,x$ y $y = \text{sen}\,2x$, $0 \leq x \leq \pi$

64. $y = 8\cos x$ y $y = \sec^2 x$, $-\pi/3 \leq x \leq \pi/3$

65. $y = \cos(\pi x/2)$ y $y = 1 - x^2$

66. $y = \text{sen}(\pi x/2)$ y $y = x$

67. $y = \sec^2 x$, $y = \tan^2 x$, $x = -\pi/4$, y $x = \pi/4$

68. $x = \tan^2 y$ y $x = -\tan^2 y$, $-\pi/4 \leq y \leq \pi/4$

69. $x = 3\,\text{sen}\,y\sqrt{\cos y}$ y $x = 0$, $0 \leq y \leq \pi/2$

70. $y = \sec^2(\pi x/3)$ y $y = x^{1/3}$, $-1 \leq x \leq 1$

Área entre curvas

71. Determine el área de la región, en forma de hélice, acotada por la curva $x - y^3 = 0$ y la recta $x - y = 0$.

72. Determine el área de la región, en forma de hélice, acotada por las curvas $x - y^{1/3} = 0$ y $x - y^{1/5} = 0$.

73. Determine el área de la región en el primer cuadrante, acotada por la recta $y = x$, la recta $x = 2$, la curva $y = 1/x^2$ y el eje x.

74. Determine el área de la región "triangular" en el primer cuadrante, acotada a la izquierda por el eje y y a la derecha por las curvas $y = \text{sen}\,x$ y $y = \cos x$.

75. La región acotada en su parte inferior por la parábola $y = x^2$ y en su parte superior por la recta $y = 4$ se tiene que dividir en dos subregiones de áreas iguales, cortándolas con una recta horizontal $y = c$.

a) Trace la región y dibuje, a través de ella, la recta $y = c$ de manera que divida aproximadamente la región en áreas iguales. En términos de c, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos donde se intersecan la recta y la parábola? Agréguelos a su gráfica.

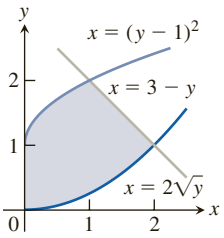
b) Obtenga c integrando con respecto a y. (Esto coloca a c en los límites de integración).

c) Obtenga c integrando con respecto a x. (Esto también coloca a c en el integrando).

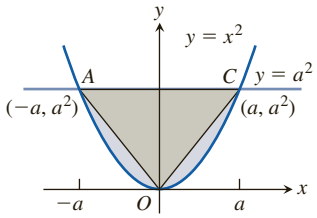
76. Determine el área de la región que se encuentra entre la curva $y = 3 - x^2$ y la recta $y = -1$ integrando con respecto a ***a)*** x y ***b)*** y.

77. Determine el área de la región en el primer cuadrante acotada a la izquierda por el eje y, abajo por la recta $y = x/4$, arriba y a la izquierda por la curva $y = 1 + \sqrt{x}$, y arriba a la derecha por la curva $y = 2/\sqrt{x}$.

78. Obtenga el área de la región en el primer cuadrante, acotada a la izquierda por el eje y, abajo por la curva $x = 2\sqrt{y}$, arriba a la izquierda por la curva $x = (y-1)^2$, y arriba a la derecha por la recta $x = 3 - y$.



79. La figura muestra al triángulo OAC inscrito en la región acotada por la parábola $y = x^2$ y por la recta $y = a^2$. Determine el límite de la razón del área del triángulo al área de la región parabólica cuando a tiende a cero.

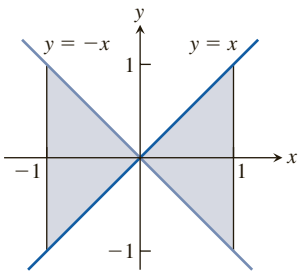


80. Suponga que el área de la región entre la gráfica de una función f continua y positiva y el eje x de $x = a$ a $x = b$ es de 4 unidades cuadradas. Determine el área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = 2f(x)$ de $x = a$ a $x = b$.

81. ¿Cuál de las siguientes integrales, si acaso, calcula el área de la región sombreada que se muestra aquí? Justifique su respuesta.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x - (-x))\,dx = \int_{-1}^{1} 2x\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (-x - (x))\,dx = \int_{-1}^{1} -2x\,dx$



82. ¿Verdadero, algunas veces verdadero o falso? El área de la región entre las gráficas de las funciones continuas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ $(a < b)$ es

$$\int_a^b [\,f(x) - g(x)\,]\,dx.$$

Justifique su respuesta.

Teoría y ejemplos

83. Suponga que $F(x)$ es una antiderivada de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$, $x > 0$. Exprese

$$\int_1^3 \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\,dx$$

en términos de F.

84. Demuestre que si f es continua, entonces,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(1 - x)\,dx.$$

85. Suponga que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 3.$$

Obtenga

$$\int_{-1}^0 f(x)\,dx$$

si ***a)*** f es impar, ***b)*** f es par.

86. ***a)*** Demuestre que si f es impar en $[-a, a]$, entonces,

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

b) Compruebe el resultado del inciso *a)* con $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $a = \pi/2$.

87. Si f es una función continua, obtenga el valor de la integral

$$I = \int_0^a \frac{f(x)\,dx}{f(x) + f(a - x)}$$

efectuando la sustitución $u = a - x$ y sumando la integral resultante a I.

88. Por medio de una sustitución, demuestre que para todos los números positivos x y y,

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t}dt = \int_1^y \frac{1}{t}dt.$$

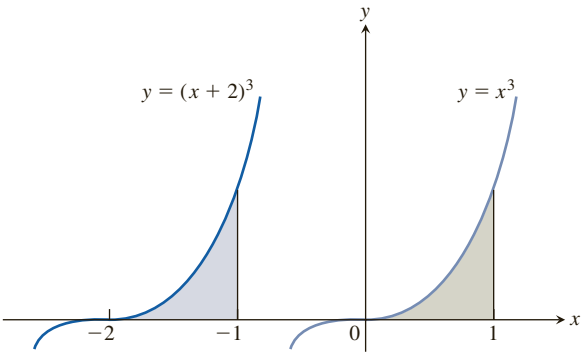
Propiedades de desplazamiento para integrales definidas Una propiedad básica de las integrales definidas es su invarianza en las traslaciones, como lo expresa la ecuación

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x + c)\,dx. \tag{1}$$

La ecuación se satisface siempre que f sea integrable y esté definida para los valores necesarios de x. Por ejemplo, la siguiente figura muestra que

$$\int_{-2}^{-1} (x + 2)^3\,dx = \int_0^1 x^3\,dx$$

porque las áreas sombreadas son congruentes.



89. Realice una sustitución para verificar la ecuación (1).

90. Para cada una de las siguientes funciones, grafique $f(x)$ en $[a, b]$ y $f(x+c)$ en $[a-c, b-c]$ para que se convenza de que la ecuación (1) es razonable.

a) $f(x) = x^2, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad c = 1$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = 0, \quad b = \pi, \quad c = \pi/2$

c) $f(x) = \sqrt{x-4}, \quad a = 4, \quad b = 8, \quad c = 5$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 91 a 94, obtendrá el área entre curvas en el plano cuando no se puedan determinar sus puntos de intersección con álgebra elemental. Use un software matemático para ejecutar los siguientes pasos:

a) Trace juntas las gráficas para ver cómo son y cuántos puntos de intersección tienen.

b) Use la opción de solución numérica de ecuaciones de su software para obtener todos los puntos de intersección.

c) Integre $|f(x) - g(x)|$ en pares consecutivos de valores de intersección.

d) Sume las integrales obtenidas en el inciso *c*).

91. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x + \dfrac{1}{3}, \quad g(x) = x - 1$

92. $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - 3x^3 + 10, \quad g(x) = 8 - 12x$

93. $f(x) = x + \operatorname{sen}(2x), \quad g(x) = x^3$

94. $f(x) = x^2 \cos x, \quad g(x) = x^3 - x$

Capítulo 5 Preguntas de repaso

1. ¿Cómo se pueden estimar con sumas finitas cantidades como la distancia recorrida, el área y el valor promedio? ¿Para qué sería necesario hacerlo?

2. ¿Qué es la notación sigma? ¿Qué ventajas ofrece? Dé ejemplos.

3. ¿Qué es una suma de Riemann? ¿Por qué resulta útil considerar este tipo de sumas?

4. ¿Qué es la norma de una partición en un intervalo cerrado?

5. ¿Qué es la integral definida de una función f en un intervalo cerrado $[a, b]$? ¿Cuándo se sabe que tal integral existe?

6. ¿Cuál es la relación entre integrales definidas y área? Describa otras interpretaciones de las integrales definidas.

7. ¿Qué es el valor promedio de una función integrable en un intervalo cerrado? ¿La función debe alcanzar su valor promedio? Explique.

8. Describa las reglas para trabajar con integrales definidas (tabla 5.6). Dé ejemplos.

9. ¿Qué es el teorema fundamental del cálculo? ¿Por qué es tan importante? Ilustre cada parte del teorema con un ejemplo.

10. ¿Qué es el teorema del cambio neto? ¿Qué dice acerca de la integral de velocidad? ¿Y de la integral del costo marginal?

11. Explique cómo los procesos de integración y diferenciación se pueden considerar como "inversos" uno del otro.

12. ¿Cómo es que el teorema fundamental del cálculo da una solución al problema con valor inicial $dy/dx = f(x)$, $y(x_0) = y_0$, cuando f es continua?

13. ¿Cómo se relacionan la integración por sustitución y la regla de la cadena?

14. ¿Cómo se pueden evaluar por sustitución las integrales indefinidas? Dé ejemplos.

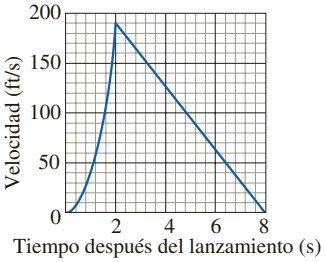
15. ¿Cómo funciona el método de sustitución en integrales definidas? Dé ejemplos.

16. ¿Cómo se define y se calcula el área de la región entre las gráficas de dos funciones continuas? Dé un ejemplo.

Capítulo 5 Ejercicios de práctica

Sumas finitas y estimaciones

1. La siguiente figura muestra la gráfica de la velocidad (ft/s) de un cohete a escala durante los primeros 8 s después del lanzamiento. El cohete acelera hacia arriba durante los primeros 2 s y, después, sin empuje, hasta alcanzar su máxima altura en $t = 8$ s.

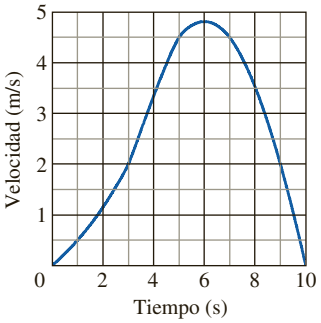


a) Suponiendo que el cohete fue lanzado desde el nivel del suelo, ¿aproximadamente qué altura alcanzó? (Éste es el cohete del ejercicio 17 de la sección 3.3, pero no necesita realizar aquél para resolver éste).

b) Dibuje una gráfica de la altura del cohete sobre el suelo como una función del tiempo para $0 \le t \le 8$.

2. ***a)*** La siguiente figura representa la velocidad (m/s) de un cuerpo que se desplaza a lo largo de un eje s durante el intervalo de tiempo $t = 0$ a $t = 10$ s. ¿Aproximadamente qué distancia recorre el cuerpo durante esos 10 s?

b) Dibuje la gráfica de s como función de t para $0 \le t \le 10$, suponiendo que $s(0) = 0$.



3. Suponga que $\sum_{k=1}^{10} a_k = -2$ y $\sum_{k=1}^{10} b_k = 25$. Obtenga el valor de

a) $\sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{4}$ ***b)*** $\sum_{k=1}^{10} (b_k - 3a_k)$

c) $\sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k - 1)$ ***d)*** $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{5}{2} - b_k\right)$

4. Suponga que $\sum_{k=1}^{20} a_k = 0$ y $\sum_{k=1}^{20} b_k = 7$. Obtenga los valores de

a) $\sum_{k=1}^{20} 3a_k$ ***b)*** $\sum_{k=1}^{20} (a_k + b_k)$

c) $\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{2} - \frac{2b_k}{7}\right)$ ***d)*** $\sum_{k=1}^{20} (a_k - 2)$

Integrales definidas

En los ejercicios 5 a 8, exprese cada límite como una integral definida. Después, evalúe la integral para obtener el valor del límite. En cada caso, P es una partición del intervalo dado y los números c_k se eligen de los subintervalos de P.

5. $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (2c_k - 1)^{-1/2} \, \Delta x_k$, donde P es una partición de $[1, 5]$

6. $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k (c_k{}^2 - 1)^{1/3} \, \Delta x_k$, donde P es una partición de $[1, 3]$

7. $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(\frac{c_k}{2}\right)\right) \Delta x_k$, donde P es una partición de $[-\pi, 0]$

8. $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (\text{sen } c_k)(\cos c_k) \, \Delta x_k$, donde P es una partición de $[0, \pi/2]$

9. Si $\int_{-2}^{2} 3f(x)\,dx = 12$, $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = 6$, y $\int_{-2}^{5} g(x)\,dx = 2$, obtenga los valores de lo siguiente.

a) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ ***b)*** $\int_{2}^{5} f(x)\,dx$

c) $\int_{5}^{-2} g(x)\,dx$ ***d)*** $\int_{-2}^{5} (-\pi g(x))\,dx$

e) $\int_{-2}^{5} \left(\frac{f(x) + g(x)}{5}\right) dx$

10. Si $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \pi$, $\int_{0}^{2} 7g(x)\,dx = 7$, y $\int_{0}^{1} g(x)\,dx = 2$, obtenga los valores de lo siguiente.

a) $\int_{0}^{2} g(x)\,dx$ ***b)*** $\int_{1}^{2} g(x)\,dx$

c) $\int_{2}^{0} f(x)\,dx$ ***d)*** $\int_{0}^{2} \sqrt{2} f(x)\,dx$

e) $\int_{0}^{2} (g(x) - 3f(x))\,dx$

Área

En los ejercicios 11 a 14, obtenga el área total de la región entre la gráfica de f y el eje x.

11. $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad 0 \le x \le 3$

12. $f(x) = 1 - (x^2/4), \quad -2 \le x \le 3$

13. $f(x) = 5 - 5x^{2/3}, \quad -1 \le x \le 8$

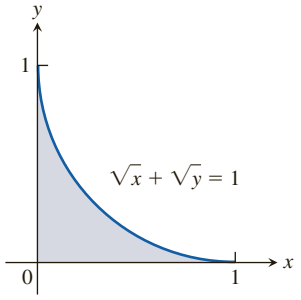
14. $f(x) = 1 - \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 4$

En los ejercicios 15 a 26, determine las áreas de las regiones acotadas por las curvas y las rectas.

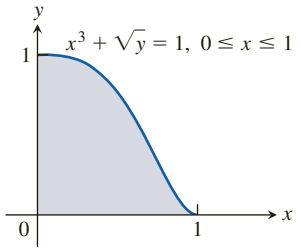
15. $y = x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$

16. $y = x, \quad y = 1/\sqrt{x}, \quad x = 2$

17. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0$



18. $x^3 + \sqrt{y} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad \text{para} \quad 0 \le x \le 1$



19. $x = 2y^2, \quad x = 0, \quad y = 3$ **20.** $x = 4 - y^2, \quad x = 0$

21. $y^2 = 4x, \quad y = 4x - 2$

22. $y^2 = 4x + 4, \quad y = 4x - 16$

23. $y = \text{sen } x, \quad y = x, \quad 0 \le x \le \pi/4$

24. $y = |\text{sen } x|, \quad y = 1, \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2$

25. $y = 2 \text{ sen } x, \quad y = \text{sen } 2x, \quad 0 \le x \le \pi$

26. $y = 8 \cos x, \quad y = \sec^2 x, \quad -\pi/3 \le x \le \pi/3$

27. Determine el área de la región "triangular" acotada a la izquierda por $x + y = 2$, a la derecha por $y = x^2$, y arriba por $y = 2$.

28. Determine el área de la región "triangular" acotada a la izquierda por $y = \sqrt{x}$, a la derecha por $y = 6 - x$, y abajo por $y = 1$.

29. Obtenga los valores extremos de $f(x) = x^3 - 3x^2$ y determine el área de la región acotada por la gráfica de f y el eje x.

30. Determine el área de la región cortada en el primer cuadrante por la curva $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$.

31. Determine el área total de la región encerrada por la curva $x = y^{2/3}$ y las rectas $x = y$ y $y = -1$.

32. Determine el área total de la región entre las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ para $0 \le x \le 3\pi/2$.

Problemas con valor inicial

33. Demuestre que $y = x^2 + \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ resuelve el problema con valor inicial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - \frac{1}{x^2}; \quad y'(1) = 3, \quad y(1) = 1.$$

34. Demuestre que $y = \displaystyle\int_0^x \left(1 + 2\sqrt{\sec t}\right) dt$ resuelve el problema con valor inicial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{\sec x}\tan x; \quad y'(0) = 3, \quad y(0) = 0.$$

Exprese las soluciones de los problemas con valor inicial en los ejercicios 35 y 36 en términos de integrales.

35. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad y(5) = -3$

36. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{2 - \operatorname{sen}^2 x}, \quad y(-1) = 2$

Evaluación de integrales indefinidas

Evalúe las integrales en los ejercicios 37 a 44.

37. $\displaystyle\int 2(\cos x)^{-1/2} \operatorname{sen} x\,dx$ **38.** $\displaystyle\int (\tan x)^{-3/2} \sec^2 x\,dx$

39. $\displaystyle\int (2\theta + 1 + 2\cos(2\theta + 1))\,d\theta$

40. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{2\theta - \pi}} + 2\sec^2(2\theta - \pi)\right) d\theta$

41. $\displaystyle\int \left(t - \frac{2}{t}\right)\left(t + \frac{2}{t}\right) dt$ **42.** $\displaystyle\int \frac{(t+1)^2 - 1}{t^4}\,dt$

43. $\displaystyle\int \sqrt{t}\,\operatorname{sen}(2t^{3/2})\,dt$ **44.** $\displaystyle\int (\sec\theta\tan\theta)\sqrt{1 + \sec\theta}\,d\theta$

Evaluación de integrales definidas

Evalúe las integrales en los ejercicios 45 a 66.

45. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (3x^2 - 4x + 7)\,dx$ **46.** $\displaystyle\int_0^1 (8s^3 - 12s^2 + 5)\,ds$

47. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4}{v^2}\,dv$ **48.** $\displaystyle\int_1^{27} x^{-4/3}\,dx$

49. $\displaystyle\int_1^4 \frac{dt}{t\sqrt{t}}$ **50.** $\displaystyle\int_1^4 \frac{\left(1 + \sqrt{u}\right)^{1/2}}{\sqrt{u}}\,du$

51. $\displaystyle\int_0^1 \frac{36\,dx}{(2x+1)^3}$ **52.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt[3]{(7 - 5r)^2}}$

53. $\displaystyle\int_{1/8}^1 x^{-1/3}(1 - x^{2/3})^{3/2}\,dx$ **54.** $\displaystyle\int_0^{1/2} x^3(1 + 9x^4)^{-3/2}\,dx$

55. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 5r\,dr$ **56.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^2\left(4t - \frac{\pi}{4}\right) dt$

57. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sec^2\theta\,d\theta$ **58.** $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc^2 x\,dx$

59. $\displaystyle\int_{\pi}^{3\pi} \cot^2\frac{x}{6}\,dx$ **60.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \tan^2\frac{\theta}{3}\,d\theta$

61. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{0} \sec x\tan x\,dx$ **62.** $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc z\cot z\,dz$

63. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 5(\operatorname{sen} x)^{3/2}\cos x\,dx$ **64.** $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 15\operatorname{sen}^4 3x\cos 3x\,dx$

65. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{3\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{1 + 3\operatorname{sen}^2 x}}\,dx$ **66.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x}{(1 + 7\tan x)^{2/3}}\,dx$

Valores promedio

67. Obtenga el valor promedio de $f(x) = mx + b$

a) en $[-1, 1]$ ***b)*** en $[-k, k]$

68. Obtenga el valor promedio de

a) $y = \sqrt{3x}$ en $[0, 3]$ ***b)*** $y = \sqrt{ax}$ en $[0, a]$

69. Sea f una función diferenciable en $[a, b]$. En el capítulo 2 definimos la razón promedio de cambio de f en $[a, b]$ como

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y la razón instantánea de cambio de f en x como $f'(x)$. En este capítulo definimos el valor promedio de una función. Para que la nueva definición sea consistente con la anterior, deberíamos tener

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \text{valor promedio de } f' \text{ en } [a, b].$$

¿Es éste el caso? Justifique su respuesta.

70. ¿Es verdad que el valor promedio de una función integrable en un intervalo de longitud 2 es la mitad de la integral de la función en el intervalo? Justifique su respuesta.

T 71. Calcule el valor promedio de la función temperatura

$$f(x) = 37\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right) + 25$$

para un año de 365 días. (Vea el ejercicio 84 de la sección 3.6). Ésta es una manera de estimar la temperatura media anual del aire en Fairbanks, Alaska. El valor numérico oficial del promedio de las temperaturas diarias durante un año, según datos del Servicio Meteorológico Nacional de Estados Unidos, es de 25.7°F, que es ligeramente mayor que el valor promedio de $f(x)$.

T 72. Calor específico de un gas El calor específico C_v es la cantidad de calor requerida para elevar 1°C la temperatura de un mol (molécula-gramo) de un gas a volumen constante. El calor específico del oxígeno depende de su temperatura T y satisface la fórmula

$$C_v = 8.27 + 10^{-5}(26T - 1.87T^2).$$

Obtenga el valor promedio del C_v para $20° \le T \le 675°$C y la temperatura a la cual se alcanza.

Derivación de integrales

En los ejercicios 73 a 76, obtenga dy/dx.

73. $y = \int_2^x \sqrt{2 + \cos^3 t}\, dt$ **74.** $y = \int_2^{7x^2} \sqrt{2 + \cos^3 t}\, dt$

75. $y = \int_x^1 \frac{6}{3 + t^4} dt$ **76.** $y = \int_{\sec x}^2 \frac{1}{t^2 + 1} dt$

Teoría y ejemplos

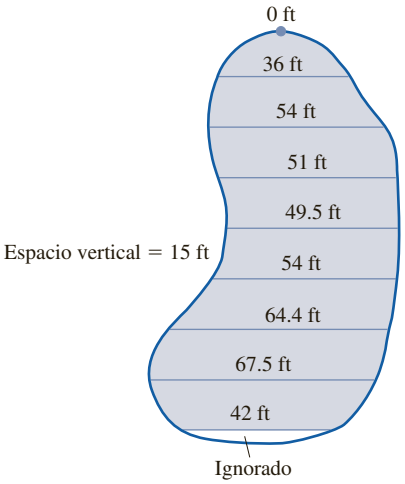
77. ¿Es verdad que toda función $y = f(x)$ que es diferenciable en $[a, b]$ es, a la vez, la derivada de alguna función en $[a, b]$? Justifique su respuesta.

78. Suponga que $F(x)$ es una antiderivada de $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$. Exprese $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx$ en términos de F y justifique su respuesta.

79. Obtenga dy/dx si $y = \int_x^1 \sqrt{1 + t^2}\, dt$. Explique los pasos principales de su cálculo.

80. Obtenga dy/dx si $y = \int_{\cos x}^0 (1/(1 - t^2))\, dt$. Explique los pasos principales de su cálculo.

81. Nuevo estacionamiento Para satisfacer la demanda de estacionamiento, la localidad donde usted vive ha asignado el área que se muestra aquí para instalar un nuevo estacionamiento. Como ingeniero de la localidad, el ayuntamiento le pidió que averiguara si el solar se puede construir con $10,000. El costo por limpiar el terreno será de $0.10 por pie cuadrado, y costará $2.00 pavimentar cada pie cuadrado. ¿Se podrá realizar el trabajo con $10,000? Use una estimación con sumas inferiores para averiguarlo. (Las respuestas pueden variar ligeramente, dependiendo de la estimación considerada).



82. Los paracaidistas A y B están a bordo de un helicóptero que vuela a 6400 ft. El paracaidista A salta y desciende durante 4 s antes de abrir su paracaídas. Entonces, el helicóptero sube a 7000 ft y se queda ahí. Cuarenta y cinco segundos después de que A abandonó la nave, B salta y desciende 13 s antes de abrir su paracaídas. Ambos paracaidistas descienden a 16 ft/s con los paracaídas abiertos. Suponga que los paracaidistas caen libremente (sin resistencia efectiva del aire) antes de abrir sus paracaídas.

a) ¿A qué altitud se abrió el paracaídas de A?

b) ¿A qué altitud se abrió el paracaídas de B?

c) ¿Qué paracaidista aterriza primero?

Capítulo 5 Ejercicios adicionales y avanzados

Teoría y ejemplos

1. ***a)*** Si $\int_0^1 7f(x)\, dx = 7$, ¿es verdad que $\int_0^1 f(x)\, dx = 1$?

b) Si $\int_0^1 f(x)\, dx = 4$ y $f(x) \geq 0$, ¿es verdad que

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)}\, dx = \sqrt{4} = 2?$$

Justifique sus respuestas.

2. Suponga que $\int_{-2}^2 f(x)\, dx = 4$, $\int_2^5 f(x)\, dx = 3$, $\int_{-2}^5 g(x)\, dx = 2$.

¿Cuáles, si acaso, de los siguientes enunciados son verdaderos?

a) $\int_5^2 f(x)\, dx = -3$ ***b)*** $\int_{-2}^5 (f(x) + g(x)) = 9$

c) $f(x) \leq g(x)$ en el intervalo $-2 \leq x \leq 5$

3. Problema con valor inicial Demuestre que

$$y = \frac{1}{a}\int_0^x f(t) \operatorname{sen} a(x - t)\, dt$$

resuelve el problema con valor inicial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = f(x), \qquad \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{y} \quad y = 0 \text{ cuando } x = 0.$$

(*Sugerencia:* Considere $\operatorname{sen}(ax - at) = \operatorname{sen} ax \cos at - \cos ax \operatorname{sen} at$).

4. Proporcionalidad Suponga que x y y están relacionadas por la ecuación

$$x = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}} dt.$$

Demuestre que d^2y/dx^2 es proporcional a y y obtenga la constante de proporcionalidad.

5. Obtenga $f(4)$, si

a) $\int_0^{x^2} f(t)\, dt = x \cos \pi x$ ***b)*** $\int_0^{f(x)} t^2\, dt = x \cos \pi x$.

6. Obtenga $f(\pi/2)$ partiendo de la siguiente información.

i. f es positiva y continua.

ii. El área bajo la curva $y = f(x)$ de $x = 0$ a $x = a$ es

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} \operatorname{sen} a + \frac{\pi}{2} \cos a.$$

7. El área de la región en el plano xy acotada por el eje x, la curva $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, y las rectas $x = 1$ y $x = b$ es igual a $\sqrt{b^2 + 1} - \sqrt{2}$ para toda $b > 1$. Obtenga $f(x)$.

8. Demuestre que

$$\int_0^x \left(\int_0^u f(t)\, dt \right) du = \int_0^x f(u)(x - u)\, du.$$

(*Sugerencia:* Exprese la integral del lado derecho como la diferencia de dos integrales. Luego, demuestre que ambos lados de la igualdad tienen la misma derivada con respecto a x).

9. Obtención de una curva Obtenga la ecuación de la curva en el plano xy que pasa por el punto $(1, -1)$ si su pendiente en x siempre es $3x^2 + 2$.

10. Desplazamiento de tierra Usted lanza una palada de tierra desde el fondo de una oquedad, con una velocidad inicial de 32 ft/s. La tierra debe elevarse 17 ft por arriba del punto donde la lanza para rebasar el borde de la oquedad. ¿Es suficiente la velocidad con la que la está lanzando para sacarla de la oquedad, o la deberá lanzar con mayor rapidez para esquivar el borde?

Funciones continuas por partes

Aun cuando estamos más interesados en funciones continuas, en la práctica, muchas funciones son continuas por partes. Una función $f(x)$ es **continua por partes en un intervalo cerrado I** si f tiene sólo un número finito de discontinuidades en I, los límites

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to c^+} f(x)$$

existen y son finitos en todo punto interior de I, y los límites laterales adecuados existen y son finitos en los extremos de I. Todas las funciones continuas por partes son integrables. Los puntos de discontinuidad subdividen a I en subintervalos abiertos y semiabiertos, en los cuales f es continua, y los anteriores criterios de límites garantizan que f tenga una extensión continua en la cerradura de cada subintervalo. Para integrar una función continua por partes, integramos las extensiones individuales y sumamos los resultados. La integral de

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & -1 \leq x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 2 \\ -1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

(figura 5.32) en $[-1, 3]$ es

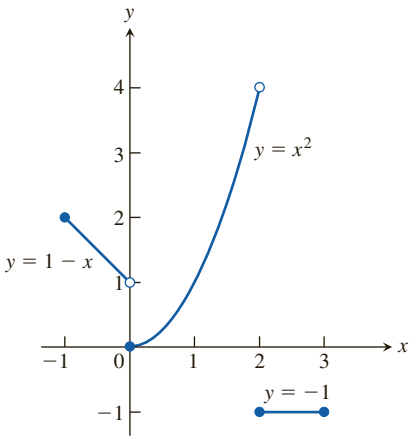


FIGURA 5.32 Las funciones continuas por partes, como ésta, se integran parte por parte.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{3} f(x)\, dx &= \int_{-1}^{0} (1 - x)\, dx + \int_{0}^{2} x^2\, dx + \int_{2}^{3} (-1)\, dx \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} \right]_{0}^{2} + \left[-x \right]_{2}^{3} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{8}{3} - 1 = \frac{19}{6}. \end{aligned}$$

El teorema fundamental se aplica a las funciones continuas por partes con la restricción de que se espera que $(d/dx) \int_a^x f(t)\, dt$ sea igual a $f(x)$ sólo en los valores de x donde f es continua. Existe una restricción similar en la regla de Leibniz (vea los ejercicios 27 a 29).

Grafique las funciones de los ejercicios 11 a 16, e intégrelas en sus dominios.

11. $f(x) = \begin{cases} x^{2/3}, & -8 \leq x < 0 \\ -4, & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & -4 \leq x < 0 \\ x^2 - 4, & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

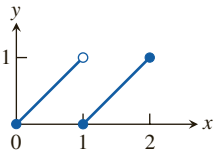
13. $g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ \operatorname{sen} \pi t, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$

14. $h(z) = \begin{cases} \sqrt{1 - z}, & 0 \leq z < 1 \\ (7z - 6)^{-1/3}, & 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$

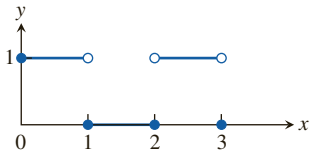
15. $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < -1 \\ 1 - x^2, & -1 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

16. $h(r) = \begin{cases} r, & -1 \leq r < 0 \\ 1 - r^2, & 0 \leq r < 1 \\ 1, & 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$

17. Obtenga el valor promedio de la función graficada en la siguiente figura.



18. Obtenga el valor promedio de la función graficada en la siguiente figura.



Aproximación de sumas finitas con integrales

En muchas aplicaciones de cálculo, las integrales se usan para aproximar sumas finitas, es decir, el procedimiento inverso del habitual, que consiste en efectuar sumas finitas para aproximar integrales.

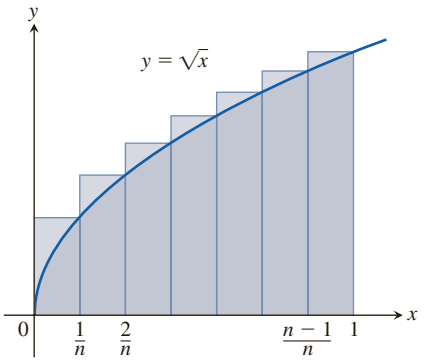
Por ejemplo, estimemos las sumas de las raíces cuadradas de los primeros n enteros positivos, $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}$. La integral

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

es el límite de las sumas superiores

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{3/2}}.$$



Por lo tanto, cuando n es grande, S_n estará cerca de $2/3$ y tendremos

$$\text{Suma de las raíces} = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} = S_n \cdot n^{3/2} \approx \frac{2}{3}n^{3/2}.$$

La siguiente tabla indica qué tan acertada puede ser la aproximación.

n	Suma de las raíces	$(2/3)n^{3/2}$	Error relativo
10	22.468	21.082	$1.386/22.468 \approx 6\%$
50	239.04	235.70	1.4%
100	671.46	666.67	0.7%
1000	21,097	21,082	0.07%

19. Evalúe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5}{n^6}$$

mostrando que el límite es

$$\int_0^1 x^5\,dx$$

y evaluando la integral.

20. Vea el ejercicio 19. Evalúe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3).$$

21. Sea $f(x)$ una función continua. Exprese

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

como una integral definida.

22. Con base en el resultado del ejercicio 21, evalúe

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(2 + 4 + 6 + \cdots + 2n)$,

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{16}}(1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \cdots + n^{15})$,

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{n}\right)$.

¿Qué se puede decir acerca de los siguientes límites?

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{17}}(1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \cdots + n^{15})$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{15}}(1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \cdots + n^{15})$

23. ***a)*** Demuestre que el área A_n de un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio r es

$$A_n = \frac{nr^2}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}.$$

b) Obtenga el límite de A_n cuando $n \to \infty$. ¿La respuesta es consistente con lo que sabe acerca del área de un círculo?

24. Sea

$$S_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3}.$$

Para calcular $\lim_{n\to\infty} S_n$, demuestre que

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$

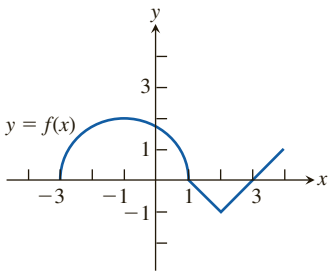
e interprete S_n como una suma de aproximación a la integral

$$\int_0^1 x^2\,dx.$$

(*Sugerencia:* Divida [0, 1] en n intervalos de igual longitud y escriba la suma de aproximación de los rectángulos inscritos).

Definición de funciones mediante el teorema fundamental

25. Función definida por una integral La gráfica de una función f es un semicírculo y dos segmentos de recta, como se muestra. Sea $g(x) = \int_1^x f(t)\,dt$.



a) Obtenga $g(1)$. ***b)*** Obtenga $g(3)$. ***c)*** Obtenga $g(-1)$.

d) Obtenga todos los valores de x en el intervalo abierto $(-3, 4)$, donde g tiene un máximo relativo.

e) Escriba una ecuación para la recta tangente a la gráfica de g en $x = -1$.

f) Obtenga la coordenada x de cada punto de inflexión de la gráfica de g en el intervalo abierto $(-3, 4)$.

g) Obtenga el rango de g.

26. Una ecuación diferencial Demuestre que $y = \operatorname{sen} x + \int_x^\pi \cos 2t\,dt + 1$ satisface las dos condiciones siguientes:

i. $y'' = -\operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} 2x$

ii. $y = 1$ y $y' = -2$ cuando $x = \pi$.

Regla de Leibniz En aplicaciones, algunas veces encontramos funciones definidas por integrales que tienen, al mismo tiempo, límites superiores de integración variables y límites inferiores de integración variables. La derivada de esta integral se obtiene mediante una fórmula conocida como **regla de Leibniz**.

Regla de Leibniz
Si f es continua en $[a, b]$, y si $u(x)$ y $v(x)$ son funciones diferenciables de x cuyos valores están en $[a, b]$, entonces,

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.$$

Para demostrar esta regla, sea F una antiderivada de f en $[a, b]$. Así,

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = F(v(x)) - F(u(x)).$$

Al diferenciar ambos lados de esta ecuación con respecto a x, se obtiene la ecuación que buscamos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt &= \frac{d}{dx}\left[F(v(x)) - F(u(x))\right]\\ &= F'(v(x))\frac{dv}{dx} - F'(u(x))\frac{du}{dx} \quad \text{Regla de la cadena}\\ &= f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.\end{aligned}$$

Utilice la regla de Leibniz para obtener las derivadas de las funciones en los ejercicios 27 a 29.

27. $f(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{1}{t}\,dt$

28. $f(x) = \displaystyle\int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1-t^2}\,dt$

29. $g(y) = \displaystyle\int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} \operatorname{sen} t^2\,dt$

30. Emplee la regla de Leibniz para obtener el valor de x que maximiza el valor de la integral

$$\int_{x}^{x+3} t(5-t)\,dt.$$

Capítulo 5 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulos Mathematica/Maple

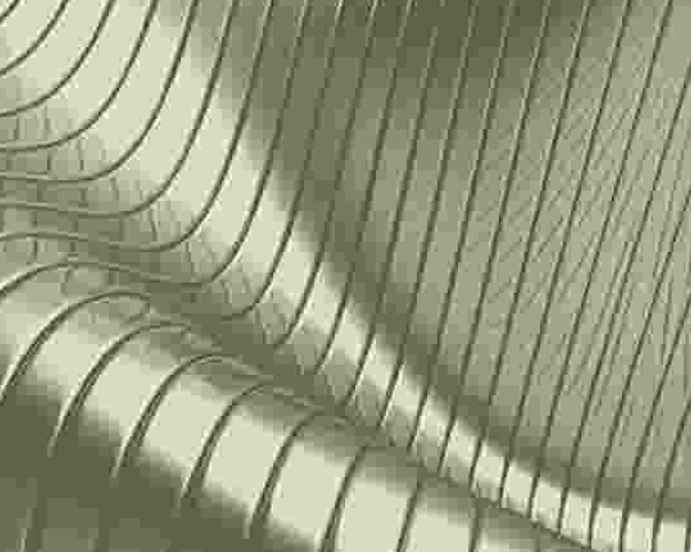
Uso de las sumas de Riemann para estimar áreas, volúmenes y longitudes de curvas
Visualice y aproxime áreas y volúmenes en la parte I.

Sumas de Riemann, integrales definidas y el teorema fundamental del cálculo
Las partes I, II y III desarrollan sumas de Riemann e integrales definidas. La parte IV continúa con el desarrollo de sumas de Riemann e integrales definidas, usando el teorema fundamental para resolver problemas investigados con anterioridad.

Recolectores de agua de lluvia, elevadores y cohetes
La parte I ilustra que el área debajo de la curva es la misma que el área de un rectángulo adecuado para ejemplos tomados del capítulo. Calculará la cantidad de agua acumulada en recipientes de distintas formas conforme éstos se llenan y se vacían.

Movimiento a lo largo de una recta, parte II
Observará la forma de la gráfica a través de animaciones de las relaciones entre posición, velocidad y aceleración. Las figuras del texto pueden animarse usando este software.

Deformación de vigas
Estudiará la forma en que se deforman las vigas, determinará sus máximas deformaciones, concavidades y puntos de inflexión, e interpretará los resultados en términos de la compresión y tensión de la viga.



6 Aplicaciones de las integrales definidas

INTRODUCCIÓN En el capítulo 5 vimos que una función continua en un intervalo cerrado tiene una integral definida, la cual es el límite de sumas de Riemann de la función. Demostramos que es posible evaluar integrales definidas utilizando el teorema fundamental del cálculo. También descubrimos que el área debajo de una curva y el área entre dos curvas pueden definirse y calcularse como integrales definidas.

En este capítulo extenderemos las aplicaciones de las integrales definidas a la obtención y definición de volúmenes, longitudes de curvas planas y áreas de superficies de revolución. También usaremos las integrales para resolver problemas físicos relacionados con el trabajo realizado por una fuerza, y para obtener la ubicación del centro de masa de un objeto. Cada aplicación es el resultado de un proceso que nos conduce a una aproximación mediante una suma de Riemann, y a un proceso de límite para obtener una integral definida adecuada. Estas aplicaciones son importantes en matemáticas, ciencia e ingeniería. También usamos integrales para calcular probabilidades y sus aplicaciones a las ciencias de la vida, como veremos en el capítulo 8.

6.1 Cálculo de volúmenes mediante secciones transversales

En esta sección se definen volúmenes de sólidos utilizando áreas de secciones transversales. La **sección transversal** de un sólido S es la región plana formada por la intersección de S con un plano (figura 6.1). Presentaremos tres métodos para obtener la sección transversal adecuada que permita determinar el volumen de un sólido particular: el método por rebanadas, el método de los discos y el método de las arandelas.

Suponga que deseamos obtener el volumen de un sólido S como el de la figura 6.1. Iniciamos extendiendo la definición de cilindro de la geometría clásica a sólidos cilíndricos con bases arbitrarias (figura 6.2). Si se conocen el área de la base A y la altura h del sólido cilíndrico, su volumen se obtiene mediante la fórmula

$$\text{Volumen} = \text{área} \times \text{altura} = A \cdot h.$$

Con base en esta ecuación, se definen los volúmenes de muchos sólidos que no son cilíndricos, como el de la figura 6.1. Si la sección transversal del sólido S en todo punto x del intervalo $[a, b]$ es una región $S(x)$ de área $A(x)$, y A es una función continua de x, podemos definir

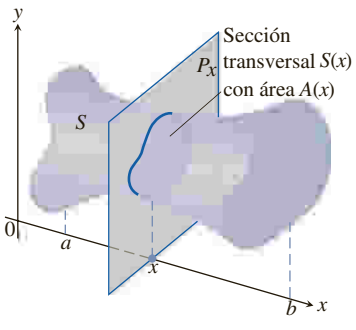
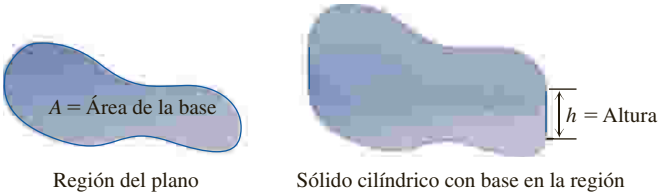


FIGURA 6.1 Una sección transversal $S(x)$ del sólido S formado por la intersección de S con un plano P_x perpendicular al eje x y que pasa por el punto x en el intervalo $[a, b]$.



Región del plano cuya área conocemos

Sólido cilíndrico con base en la región
Volumen = área de la base × altura = Ah

FIGURA 6.2 El volumen de un sólido cilíndrico siempre se define como el área de su base por su altura.

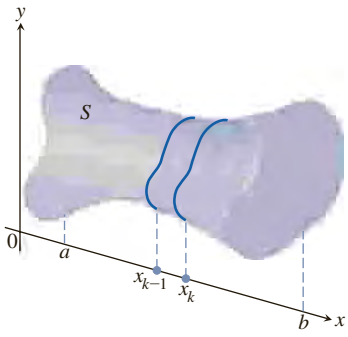


FIGURA 6.3 Una rebanada delgada típica en el sólido S.

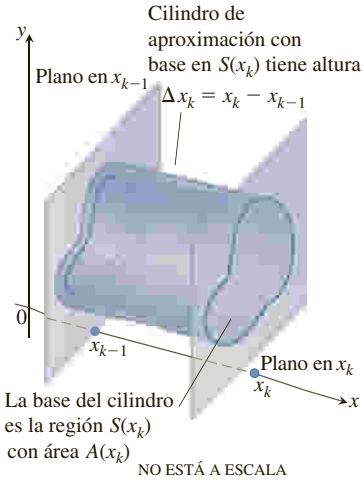


FIGURA 6.4 La rebanada sólida y delgada de la figura 6.3 ampliada. Es aproximada por el sólido cilíndrico con base $S(x_k)$ de área $A(x_k)$ y altura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

y calcular el volumen del sólido S como la integral definida de $A(x)$. Ahora veremos cómo se obtiene esta integral con el **método por rebanadas**.

Obtención de rebanadas por planos paralelos

Dividimos $[a, b]$ en subintervalos de longitud Δx_k y cortamos el sólido como si fuera una hogaza de pan, con planos perpendiculares al eje x en los puntos de partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Los planos P_{x_k}, perpendiculares al eje x en los puntos de partición, dividen a S en rebanadas delgadas (como si se tratara de finas rebanadas de una hogaza de pan). En la figura 6.3 se muestra una rebanada típica. Aproximamos el volumen de la rebanada entre el plano en x_{k-1} y el plano en x_k mediante un sólido cilíndrico con una base de área igual a $A(x_k)$ y altura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (figura 6.4). El volumen V_k de este sólido cilíndrico es $A(x_k) \cdot \Delta x_k$, que es aproximadamente el mismo volumen que el de la rebanada:

$$\text{Volumen de la } k\text{-ésima rebanada} \approx V_k = A(x_k)\,\Delta x_k.$$

Por lo tanto, el volumen V del sólido completo S se aproxima con la suma de estos volúmenes cilíndricos:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\,\Delta x_k.$$

Ésta es una suma de Riemann para la función $A(x)$ en $[a, b]$. Es de esperar que las aproximaciones realizadas mediante estas sumas mejoren conforme la norma de la partición de $[a, b]$ se aproxime a cero. Tomando una partición de $[a, b]$ de n subintervalos con $\|P\| \to 0$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\,\Delta x_k = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Así, definimos el volumen del sólido S como la integral definida que es límite de la suma de Riemann.

DEFINICIÓN El **volumen** de un sólido de área transversal integrable $A(x)$ de $x = a$ a $x = b$ es la integral de A de a a b,

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Esta definición se aplica siempre que $A(x)$ sea integrable, y en particular cuando es continua. Para aplicar la definición en el cálculo del volumen de un sólido usando secciones transversales perpendiculares al eje x, se ejecutan los siguientes pasos:

Cálculo del volumen de un sólido

1. *Dibuje el sólido y una sección transversal típica.*
2. *Obtenga una fórmula para* $A(x)$, el área de la sección transversal típica.
3. *Determine los límites de integración.*
4. *Integre* $A(x)$ para obtener el volumen.

EJEMPLO 1 Una pirámide de 3 metros de altura tiene una base cuadrada de 3 metros por lado. La sección transversal de la pirámide, perpendicular a la altura a x metros debajo del vértice, es un cuadrado de x metros por lado. Obtenga el volumen de la pirámide.

Solución

1. *Dibujo*. Dibuje la pirámide con su altura a lo largo del eje x y su vértice en el origen, e incluya una sección transversal típica (figura 6.5).

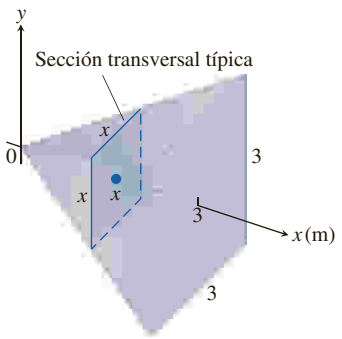


FIGURA 6.5 Las secciones transversales de la pirámide del ejemplo 1 son cuadrados.

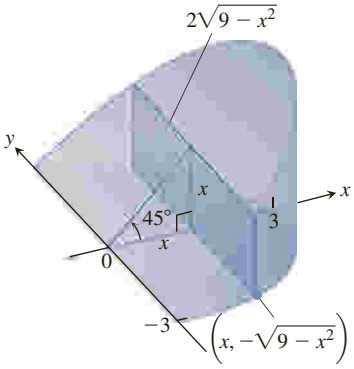


FIGURA 6.6 La cuña del ejemplo 2, con rebanadas perpendiculares al eje x. Las secciones transversales son rectángulos.

2. *Fórmula para $A(x)$.* La sección transversal en x es un cuadrado de x metros por lado, de modo que el área es

$$A(x) = x^2.$$

3. *Límites de la integración.* Los cuadrados se encuentran en los planos de $x = 0$ a $x = 3$.

4. *Se integra para obtener el volumen*:

$$V = \int_0^3 A(x)\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^3 = 9 \text{ m}^3. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Se corta con dos planos, de un cilindro de radio 3, una cuña curva. Un plano es perpendicular al eje del cilindro. El segundo plano cruza al primero formando un ángulo de 45° en el centro del cilindro. Obtenga el volumen de la cuña.

Solución Dibujamos la cuña y una sección transversal típica, perpendicular al eje x (figura 6.6). La base de la cuña en la figura es un semicírculo con $x \geq 0$ recortado del círculo $x^2 + y^2 = 9$ por el plano a 45° cuando interseca el eje y. Para cualquier x en el intervalo $[0, 3]$, los valores de y en esta base semicircular varían de $y = -\sqrt{9 - x^2}$ a $y = \sqrt{9 - x^2}$. Cuando cortamos la cuña con un plano perpendicular al eje x, se obtiene una sección transversal en x en forma de un rectángulo de altura x cuyo ancho se extiende a través de la base semicircular. El área de esta sección transversal es

$$\begin{aligned} A(x) &= (\text{altura})(\text{ancho}) = (x)\left(2\sqrt{9 - x^2}\right) \\ &= 2x\sqrt{9 - x^2}\,. \end{aligned}$$

Los rectángulos van de $x = 0$ a $x = 3$, de modo que tenemos

$$\begin{aligned} V = \int_a^b A(x)\,dx &= \int_0^3 2x\sqrt{9 - x^2}\,dx \\ &= -\frac{2}{3}(9 - x^2)^{3/2}\Big]_0^3 \\ &= 0 + \frac{2}{3}(9)^{3/2} \\ &= 18. \end{aligned}$$

Sea $u = 9 - x^2$, $du = -2x\,dx$, se integra y se sustituye usando la variable original.

$\blacksquare$

EJEMPLO 3 El principio de Cavalieri establece que sólidos con alturas iguales e idénticas secciones transversales en cada altura tienen el mismo volumen (figura 6.7). Esto es consecuencia directa de la definición de volumen, ya que la función del área de la sección transversal $A(x)$ y el intervalo $[a, b]$ son los mismos para ambos sólidos.

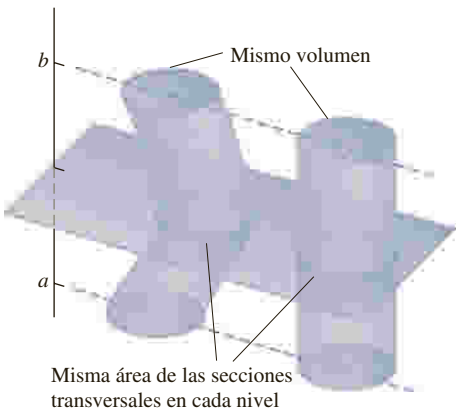


FIGURA 6.7 *Principio de Cavalieri:* Estos sólidos tienen el mismo volumen, lo que puede ilustrarse con una pila de monedas.

$\blacksquare$

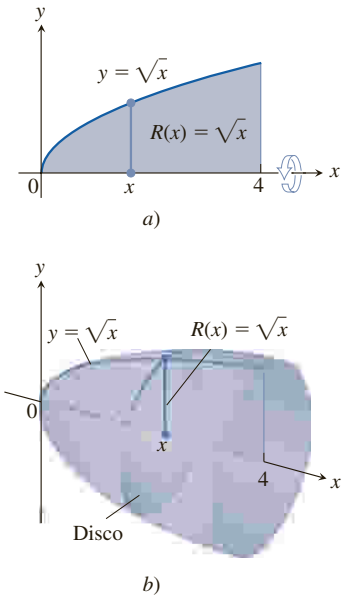


FIGURA 6.8 *a*) La región y *b*) el sólido de revolución del ejemplo 4.

Sólidos de revolución: El método de los discos

El sólido generado al hacer girar una región plana alrededor de un eje que se encuentra en el plano que la contiene se denomina **sólido de revolución**. Para obtener el volumen de un sólido como el que se ilustra en la figura 6.8, sólo necesitamos tener en cuenta que el área de la sección transversal $A(x)$ es el área de un disco de radio $R(x)$, la distancia entre la frontera de la región plana y el eje de rotación. De esta forma, el área es

$$A(x) = \pi(\text{radio})^2 = \pi[\,R(x)\,]^2.$$

Entonces, la definición de volumen en este caso nos da

Volumen por discos para rotaciones alrededor del eje *x*

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi[\,R(x)\,]^2\,dx.$$

Este método para calcular el volumen de un sólido de revolución se conoce como **método de los discos** porque la sección transversal es un disco circular de radio $R(x)$.

EJEMPLO 4 La región entre la curva $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$, y el eje x se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Obtenga su volumen.

Solución Dibujamos la figura que muestre la región, un radio típico y el sólido generado (figura 6.8). El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi[\,R(x)\,]^2\,dx \\ &= \int_0^4 \pi\left[\,\sqrt{x}\,\right]^2 dx \qquad \text{Radio } R(x) = \sqrt{x} \text{ para la rotación alrededor del eje } x. \\ &= \pi\int_0^4 x\,dx = \pi\frac{x^2}{2}\Big]_0^4 = \pi\frac{(4)^2}{2} = 8\pi. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 La circunferencia

$$x^2 + y^2 = a^2$$

gira alrededor del eje x para generar una esfera. Obtenga su volumen.

Solución Imagine que cortamos la esfera en discos delgados por planos perpendiculares al eje x (figura 6.9). El área de la sección transversal en un punto representativo x entre $-a$ y a es

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(a^2 - x^2). \qquad R(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \text{ para la rotación alrededor del eje } x$$

Por lo tanto, el volumen es

$$V = \int_{-a}^{a} A(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \pi(a^2 - x^2)\,dx = \pi\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

■

El eje de revolución en el siguiente ejemplo no es el eje x, pero la regla para calcular el volumen es la misma: integración de $\pi(\text{radio})^2$ entre los límites apropiados.

EJEMPLO 6 Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar alrededor de la recta $y = 1$ la región acotada por $y = \sqrt{x}$ y las rectas $y = 1$ y $x = 4$.

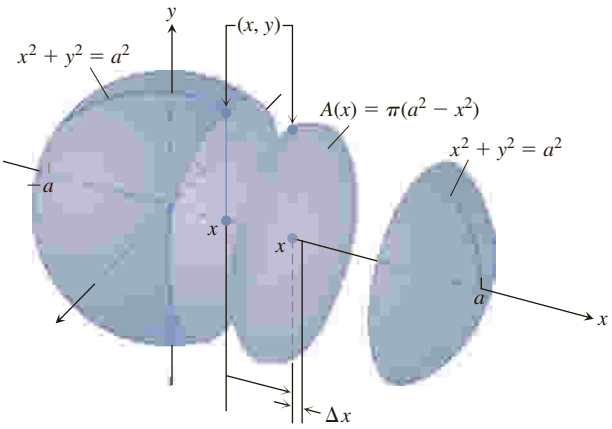


FIGURA 6.9 Esfera generada al hacer girar la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ alrededor del eje x. El radio es $R(x) = y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (ejemplo 5).

Solución Dibujamos las figuras que muestran la región, un radio típico y el sólido generado (figura 6.10). El volumen es

$$V = \int_1^4 \pi [R(x)]^2 \, dx$$

$$= \int_1^4 \pi \left[\sqrt{x} - 1\right]^2 dx \qquad \text{Radio } R(x) = \sqrt{x} - 1 \text{ para la rotación alrededor de } y = 1.$$

$$= \pi \int_1^4 \left[x - 2\sqrt{x} + 1\right] dx \qquad \text{Se desarrolla el integrando.}$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + x\right]_1^4 = \frac{7\pi}{6}. \qquad \text{Se integra.}$$

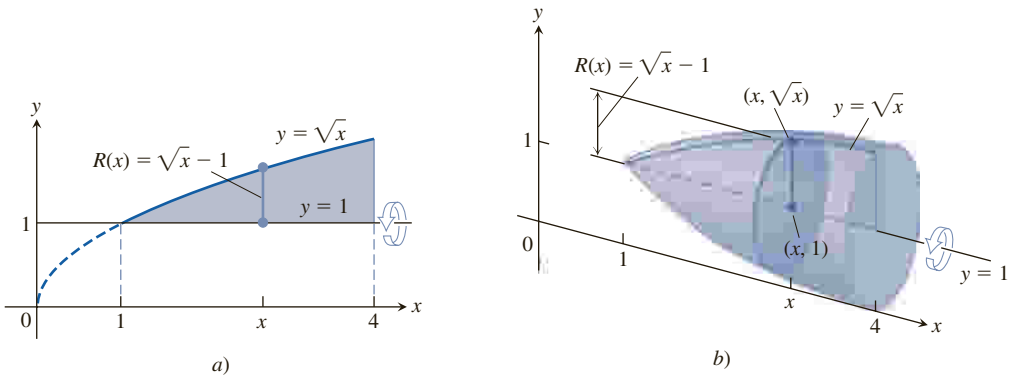


FIGURA 6.10 *a*) La región y *b*) el sólido de revolución del ejemplo 6. ■

Para obtener el volumen de un sólido generado al hacer girar una región entre el eje y y la curva $x = R(y)$, $c \le y \le d$, alrededor del eje y, se usa el mismo método, sustituyendo x por y. En este caso, el área de la sección transversal circular es

$$A(y) = \pi [\text{radio}]^2 = \pi [R(y)]^2,$$

y la definición del volumen es

Volumen por discos para rotaciones alrededor del eje *y*

$$V = \int_c^d A(y)\,dy = \int_c^d \pi[R(y)]^2\,dy.$$

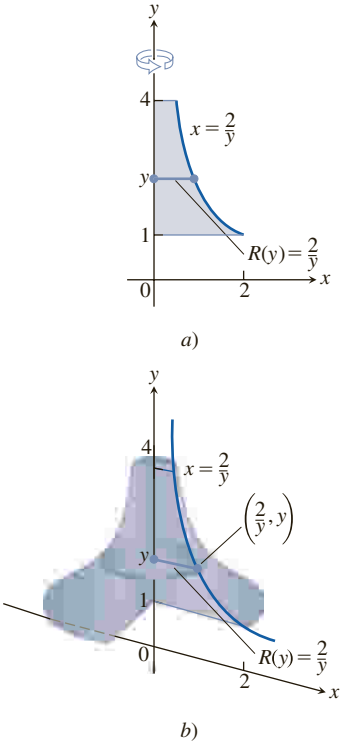


FIGURA 6.11 *a*) La región y *b*) parte del sólido de revolución del ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región entre el eje y y la curva $x = 2/y$, $1 \le y \le 4$, alrededor del eje y.

Solución Dibujamos las figuras que muestren la región, un radio típico y el sólido generado (figura 6.11). El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 \pi[R(y)]^2\,dy \\ &= \int_1^4 \pi\left(\frac{2}{y}\right)^2 dy && \text{Radio } R(y) = \frac{2}{y} \text{ para rotación alrededor del eje } y. \\ &= \pi\int_1^4 \frac{4}{y^2}\,dy = 4\pi\left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 = 4\pi\left[\frac{3}{4}\right] = 3\pi. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 8 Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región entre la parábola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$ alrededor de la recta $x = 3$.

Solución Dibujamos las figuras que muestren la región, un radio típico y el sólido generado (figura 6.12). Observe que las secciones transversales son perpendiculares a la recta $x = 3$ y tienen coordenadas y de $y = -\sqrt{2}$ a $y = \sqrt{2}$. El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[R(y)]^2\,dy && y = \pm\sqrt{2} \text{ cuando } x = 3 \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[2 - y^2]^2\,dy && \text{Radio } R(y) = 3 - (y^2 + 1) \text{ para rotación alrededor del eje } x = 3. \\ &= \pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4 - 4y^2 + y^4]\,dy && \text{Se desarrolla el integrando.} \\ &= \pi\left[4y - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} && \text{Se integra.} \\ &= \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}. \end{aligned}$$

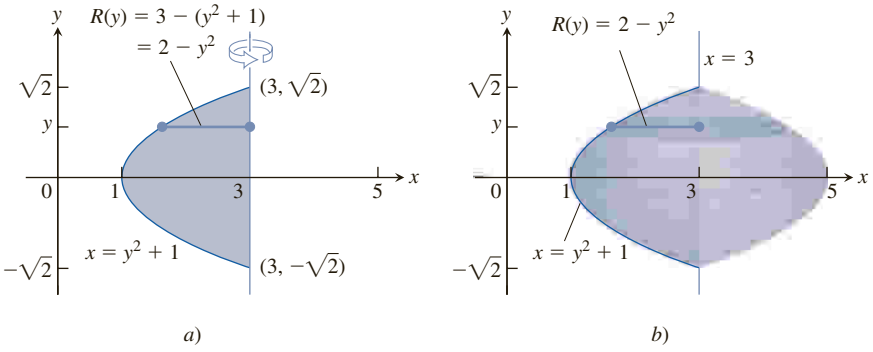


FIGURA 6.12 *a*) La región y *b*) el sólido de revolución del ejemplo 8. ■

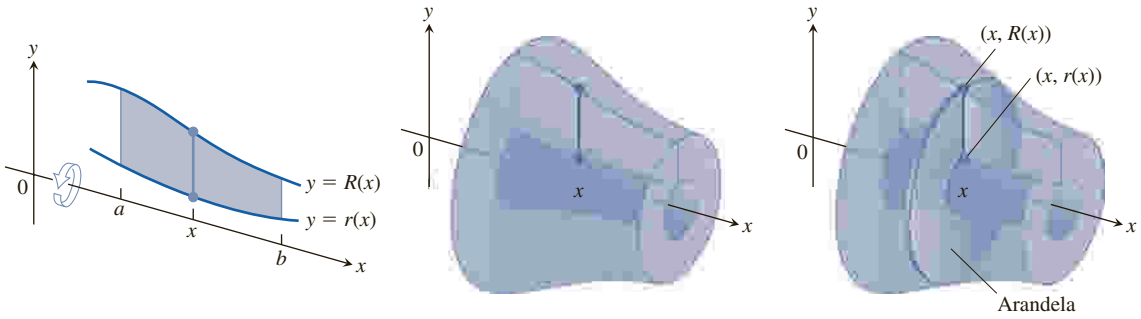


FIGURA 6.13 Las secciones transversales del sólido de revolución generado son arandelas, no discos, por lo que la integral $\int_a^b A(x)\,dx$ nos lleva a una fórmula ligeramente distinta.

Sólidos de revolución: El método de las arandelas

Si la región que se hace girar para generar un sólido no se acerca al eje de rotación ni lo cruza, el sólido tiene un hueco (figura 6.13). Las secciones transversales perpendiculares al eje de revolución son *arandelas* (la superficie circular sombreada en la parte central de la última imagen de la figura 6.13). Las dimensiones de una arandela típica son

$$\text{Radio exterior: } R(x)$$
$$\text{Radio interior: } r(x)$$

El área de la arandela es

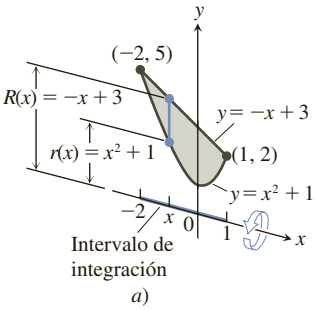
$$A(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2 = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2).$$

En consecuencia, en este caso, la definición de volumen es

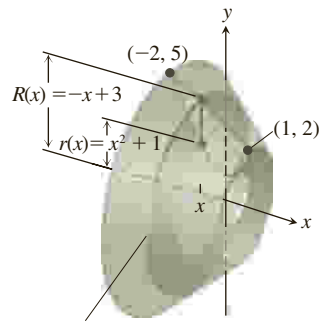
Volumen por arandelas para rotaciones alrededor del eje x

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx.$$

Este método para calcular el volumen de un sólido de revolución se denomina **método de las arandelas**, ya que cada pieza es una arandela circular con radio exterior $R(x)$ y radio interior $r(x)$.



a)



La sección transversal es una arandela
Radio exterior: $R(x) = -x + 3$
Radio interior: $r(x) = x^2 + 1$

b)

FIGURA 6.14 *a)* La región del ejemplo 9 generada por el segmento de recta perpendicular al eje de rotación. *b)* Cuando la región se hace girar alrededor del eje x, el segmento de recta genera una arandela.

EJEMPLO 9 Para generar un sólido, se hace girar alrededor del eje x la región acotada por la curva $y = x^2 + 1$ y la recta $y = -x + 3$. Determine el volumen del sólido.

Solución Se siguen los cuatro pasos para calcular el volumen de un sólido, como se hizo al principio de esta sección.

1. Dibuje la región y grafique un segmento de recta que la cruce y sea perpendicular al eje de rotación (el segmento resaltado en color en la parte central de la figura 6.14*a*).
2. Obtenga los radios exterior e interior de la arandela que se genera al hacer girar el segmento de recta alrededor del eje x junto con la región.

   Estos radios son las distancias entre los extremos del segmento de recta y el eje de rotación (figura 6.14).

$$\text{Radio exterior: } R(x) = -x + 3$$
$$\text{Radio interior: } r(x) = x^2 + 1$$

3. Determine los límites de integración obteniendo las coordenadas x de los puntos de intersección de la curva y la recta de la figura 6.14*a*).

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= -x + 3 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x + 2)(x - 1) &= 0 \\ x &= -2, \quad x = 1 \end{aligned}$$

Límites de integración

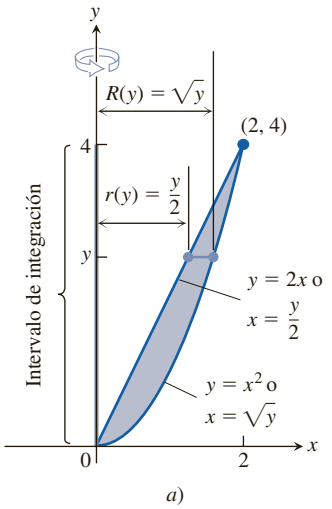
4. Evalúe la integral de volumen.

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx$$ Rotación alrededor del eje x

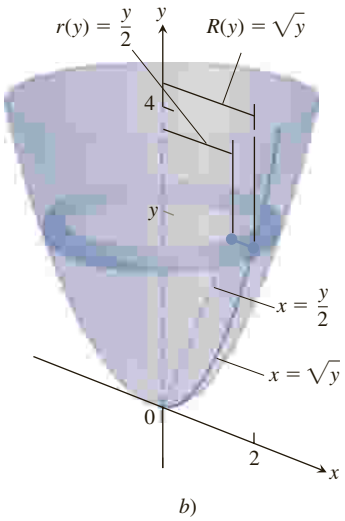
$$= \int_{-2}^{1} \pi((-x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2)\,dx$$ Valores de los pasos 2 y 3

$$= \pi \int_{-2}^{1} (8 - 6x - x^2 - x^4)\,dx$$ Simplificación algebraica

$$= \pi\left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} = \frac{117\pi}{5}$$ Se integra. ■



a)



b)

FIGURA 6.15 *a*) La región que gira alrededor del eje y, los radios de la arandela y los límites de integración del ejemplo 10. *b*) La arandela generada por el segmento de recta del inciso *a*).

Para obtener el volumen de un sólido formado al hacer girar una región alrededor de un eje y, utilizamos el mismo procedimiento que en el ejemplo 9, pero integramos con respecto a y en lugar de hacerlo con respecto a x. En esta situación, el segmento de recta que genera una arandela típica es perpendicular al eje y (el eje de rotación), y los radios exterior e interior de la arandela son funciones de y.

EJEMPLO 10 Para generar un sólido, se hace girar, alrededor del eje y, la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2x$ en el primer cuadrante. Determine el volumen del sólido.

Solución Primero dibujamos la región y trazamos un segmento de recta que la cruce y sea perpendicular al eje de rotación (el eje y). Vea la figura 6.15*a*).

Los radios de la arandela generada por el segmento de recta son $R(y) = \sqrt{y}$, $r(y) = y/2$ (figura 6.15).

La recta y la parábola se intersecan en $y = 0$ y $y = 4$, por lo que los límites de integración son $c = 0$ y $d = 4$. Integramos para obtener el volumen:

$$V = \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\,dy$$ Rotación alrededor del eje y

$$= \int_0^4 \pi\left([\sqrt{y}]^2 - \left[\frac{y}{2}\right]^2\right)dy$$ Se sustituyen los radios y límites de integración.

$$= \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right)dy = \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8}{3}\pi.$$ ■

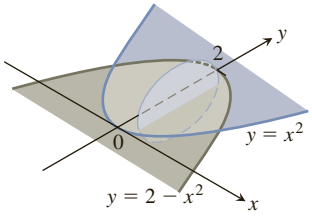
Ejercicios 6.1

Cálculo de volúmenes por rebanadas

Obtenga el volumen de los sólidos en los ejercicios 1 a 10.

1. El sólido que se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = 0$ y $x = 4$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x en el intervalo $0 \le x \le 4$ son cuadrados cuyas diagonales van de la parábola $y = -\sqrt{x}$ a la parábola $y = \sqrt{x}$.

2. El sólido que se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = -1$ y $x = 1$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son discos cuyos diámetros van de la parábola $y = x^2$ a la parábola $y = 2 - x^2$.

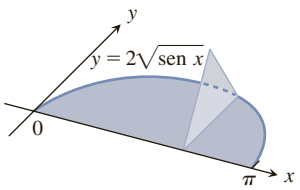


3. El sólido que se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = -1$ y $x = 1$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x entre esos planos son cuadrados cuyas bases van del semicírculo $y = -\sqrt{1 - x^2}$ al semicírculo $y = \sqrt{1 - x^2}$.

4. El sólido que se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = -1$ y $x = 1$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x entre esos planos son cuadrados cuyas diagonales van del semicírculo $y = -\sqrt{1 - x^2}$ al semicírculo $y = \sqrt{1 - x^2}$.

5. La base de un sólido es la región entre la curva $y = 2\sqrt{\operatorname{sen} x}$ y el intervalo $[0, \pi]$ en el eje x. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son

a) triángulos equiláteros con bases que van del eje x a la curva que se muestra en la figura.



b) cuadrados con bases que van del eje x a la curva.

6. El sólido que se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = -\pi/3$ y $x = \pi/3$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son

a) discos circulares con diámetros que van de la curva $y = \tan x$ a la curva $y = \sec x$.

b) cuadrados cuyas bases van de la curva $y = \tan x$ a la curva $y = \sec x$.

7. La base de un sólido es la región acotada por las gráficas de $y = 3x$, $y = 6$, y $x = 0$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son

a) rectángulos de altura igual a 10.

b) rectángulos de perímetro igual a 20.

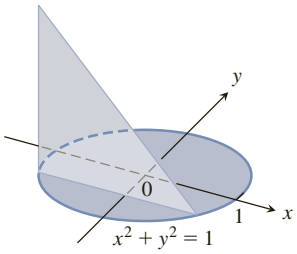
8. La base de un sólido es la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x/2$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son

a) triángulos isósceles de altura igual a 6.

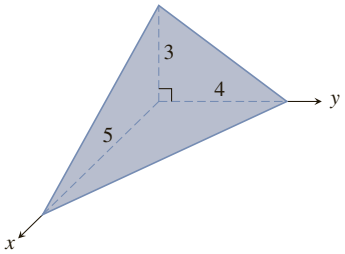
b) semicírculos con diámetros que cruzan la base del sólido.

9. El sólido que se encuentra entre los planos perpendiculares al eje y en $y = 0$ y $y = 2$. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son discos circulares cuyos diámetros van del eje y a la parábola $x = \sqrt{5}y^2$.

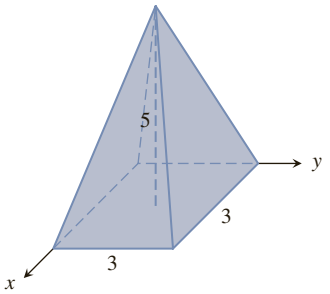
10. La base del sólido es el disco $x^2 + y^2 \le 1$. Las secciones transversales determinadas por planos perpendiculares al eje y entre $y = -1$ y $y = 1$ son triángulos rectángulos isósceles con un cateto en el disco.



11. Obtenga el volumen del tetraedro recto que se representa. (*Sugerencia:* Considere partes perpendiculares a una de las aristas etiquetadas).



12. Obtenga el volumen de la pirámide ilustrada, la cual tiene una base cuadrada de área igual a 9 y altura igual a 5.

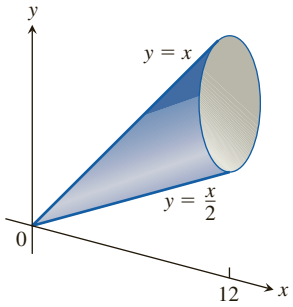


13. Sólido retorcido Un cuadrado de longitud s por lado se encuentra en un plano perpendicular a la recta L. Un vértice del cuadrado se encuentra en L. Conforme este cuadrado se mueve una distancia h a lo largo de L, el cuadrado da una revolución alrededor de L para generar una columna en forma de sacacorchos con secciones transversales cuadradas.

a) Obtenga el volumen de la columna.

b) ¿Cuál será el volumen si el cuadrado da dos vueltas en lugar de una? Justifique su respuesta.

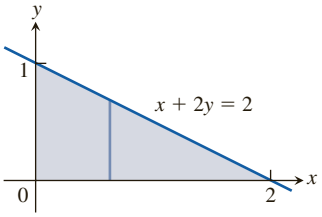
14. Principio de Cavalieri Un sólido se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = 0$ y $x = 12$. Las secciones transversales son discos circulares determinados por planos perpendiculares al eje x, cuyos diámetros van de la recta $y = x/2$ a la recta $y = x$, como se muestra en la figura. Explique por qué el sólido tiene el mismo volumen que un cono circular recto con base de radio igual a 3 y altura igual a 12.



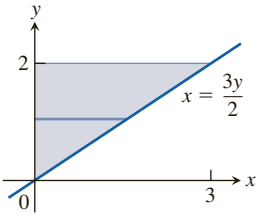
Cálculo de volúmenes por el método de los discos

En los ejercicios 15 a 18, obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región sombreada alrededor del eje dado.

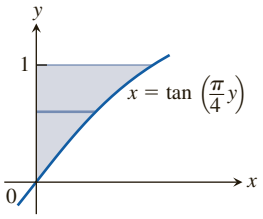
15. Alrededor del eje x



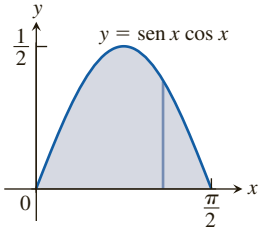
16. Alrededor del eje y



17. Alrededor del eje y



18. Alrededor del eje x



En los ejercicios 19 a 24, obtenga los volúmenes de los sólidos generados al hacer girar las regiones acotadas por las rectas y curvas alrededor del eje x.

19. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 2$

20. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 2$

21. $y = \sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0$

22. $y = x - x^2, \quad y = 0$

23. $y = \sqrt{\cos x}, \quad 0 \le x \le \pi/2, \quad y = 0, \quad x = 0$

24. $y = \sec x, \quad y = 0, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/4$

En los ejercicios 25 y 26, obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor de la recta dada.

25. La región en el primer cuadrante acotada arriba por la recta $y = \sqrt{2}$, abajo por la curva $y = \sec x \tan x$, y a la izquierda por el eje y, alrededor de la recta $y = \sqrt{2}$.

26. La región en el primer cuadrante acotada arriba por la recta $y = 2$, abajo por la curva $y = 2 \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi/2$, y a la izquierda por el eje y, alrededor de la recta $y = 2$.

Obtenga los volúmenes de los sólidos generados al hacer girar las regiones acotadas por las rectas y curvas de los ejercicios 27 a 32, alrededor del eje y.

27. La región acotada por $x = \sqrt{5}y^2, \quad x = 0, \quad y = -1, \quad y = 1$

28. La región acotada por $x = y^{3/2}, \quad x = 0, \quad y = 2$

29. La región acotada por $x = \sqrt{2 \operatorname{sen} 2y}, \quad 0 \le y \le \pi/2, \quad x = 0$

30. La región acotada por $x = \sqrt{\cos(\pi y/4)}, \quad -2 \le y \le 0, \quad x = 0$

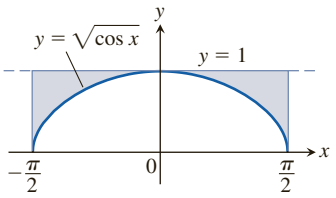
31. $x = y^{1/3}, \quad x = y^3, \quad 0 \le y \le 1$

32. $x = \sqrt{2y}/(y^2 + 1), \quad x = 0, \quad y = 1$

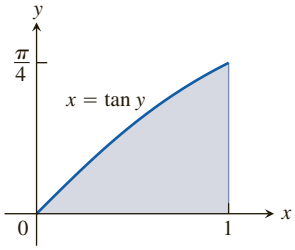
Cálculo de volúmenes por el método de las arandelas

Obtenga los volúmenes de los sólidos generados al hacer girar las regiones sombreadas en los ejercicios 33 y 34 alrededor de los ejes indicados.

33. Alrededor del eje x



34. Alrededor del eje y



En los ejercicios 35 a 40, obtenga los volúmenes de los sólidos generados al hacer girar las regiones acotadas por las rectas y curvas alrededor del eje x.

35. $y = x, \quad y = 1, \quad x = 0$

36. $y = 2\sqrt{x}, \quad y = 2, \quad x = 0$

37. $y = x^2 + 1, \quad y = x + 3$

38. $y = 4 - x^2, \quad y = 2 - x$

39. $y = \sec x, \quad y = \sqrt{2}, \quad -\pi/4 \le x \le \pi/4$

40. $y = \sec x, \quad y = \tan x, \quad x = 0, \quad x = 1$

En los ejercicios 41 a 44, obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar cada región alrededor del eje y.

41. La región acotada por el triángulo con vértices en (1, 0), (2, 1) y (1, 1).

42. La región acotada por el triángulo con vértices en (0, 1), (1, 0) y (1, 1).

43. La región en el primer cuadrante acotada arriba por la parábola $y = x^2$, abajo por el eje x, y a la derecha por la recta $x = 2$.

44. La región en el primer cuadrante acotada a la izquierda por el círculo $x^2 + y^2 = 3$, a la derecha por la recta $x = \sqrt{3}$, y arriba por la recta $y = \sqrt{3}$.

En los ejercicios 45 y 46, obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar cada región alrededor del eje que se indica.

45. La región en el primer cuadrante acotada arriba por la curva $y = x^2$, abajo por el eje x, y a la derecha por la recta $x = 1$, alrededor de la recta $x = -1$.

46. La región en el segundo cuadrante acotada arriba por la curva $y = -x^3$, abajo por el eje x, y a la izquierda por la recta $x = -1$, alrededor de la recta $x = -2$.

Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución

47. Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por $y = \sqrt{x}$ y las rectas $y = 2$ y $x = 0$, alrededor de

a) el eje x. ***b***) el eje y.
c) la recta $y = 2$. ***d***) la recta $x = 4$.

48. Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región triangular acotada por las rectas $y = 2x$, $y = 0$, y $x = 1$, alrededor de

a) la recta $x = 1$. ***b***) la recta $x = 2$.

49. Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$, alrededor de

a) la recta $y = 1$. ***b***) la recta $y = 2$.
c) la recta $y = -1$.

50. Por integración, obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región triangular con vértices en $(0, 0)$, $(b, 0)$ y $(0, h)$ alrededor de

a) el eje x. ***b***) el eje y.

Teoría y aplicaciones

51. Volumen de un toro El disco $x^2 + y^2 \le a^2$ se hace girar alrededor de la recta $x = b$ $(b > a)$ para generar un sólido en forma de rosquilla conocido como *toro*. Obtenga su volumen. (*Sugerencia:* Considere $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = \pi a^2/2$, ya que es el área de un semicírculo de radio a).

52. Volumen de un tazón Un tazón tiene una forma que se puede generar al hacer girar la gráfica de $y = x^2/2$ entre $y = 0$ y $y = 5$ alrededor del eje y.

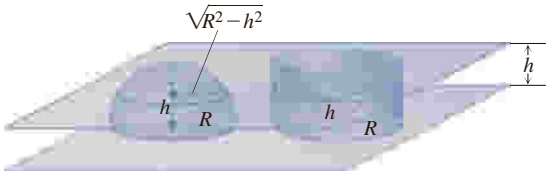
a) Obtenga el volumen del tazón.
b) **Tasas relacionadas** Si llenamos el tazón con agua a una velocidad constante de 3 unidades cúbicas por segundo, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua en el tazón cuando ésta tiene una profundidad de 4 unidades?

53. Volumen de un tazón

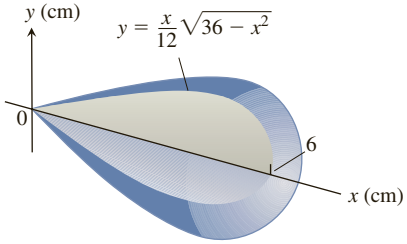
a) Un tazón semiesférico de radio a contiene agua con una profundidad h. Determine el volumen del agua en el tazón.
b) **Tasas relacionadas** En un tazón semiesférico de concreto con radio de 5 m, entra agua a una velocidad de 0.2 m^3/s. ¿Qué tan rápido se eleva el nivel del agua cuando tiene una profundidad de 4 m?

54. Explique cómo se puede estimar el volumen de un sólido de revolución midiendo la sombra proyectada sobre una mesa paralela a su eje de rotación por una fuente de luz ubicada directamente sobre el sólido.

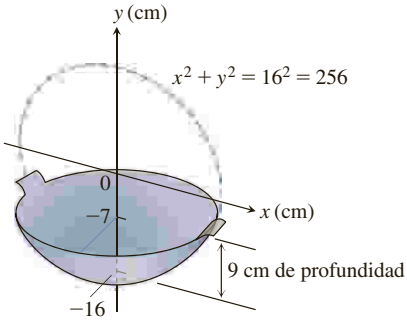
55. Volumen de una semiesfera Deduzca la fórmula $V = (2/3)\pi R^3$ para calcular el volumen de una semiesfera de radio R, comparando sus secciones transversales con las secciones transversales de un cilindro circular recto sólido de radio R y altura R, al cual se quita un cono circular recto sólido de base R y altura R, como se indica en la siguiente figura.



56. Diseño de una plomada Se le ha pedido que diseñe una plomada que pesa alrededor de 190 gr. Para cumplir su cometido, decide que su forma debe ser parecida a la del sólido de revolución que se muestra a continuación. Determine el volumen de la plomada. Si para su fabricación elige latón que tiene un peso de 8.5 gr/cm^3, ¿cuánto pesará la plomada? (Redondee al gramo más cercano).

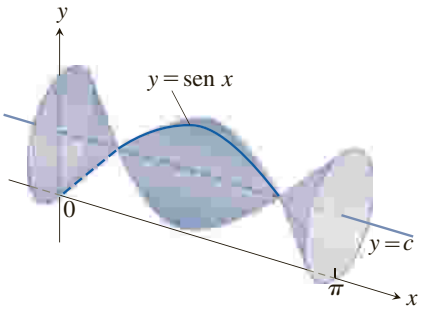


57. Diseño de una sartén Se le pide diseñar una sartén en forma de tazón esférico con asas. Su experiencia doméstica le indica que puede obtener una sartén con capacidad para 3 L si la diseña con 9 cm de profundidad y un radio de 16 cm. Para estar seguros, imagine la sartén como un sólido de revolución como el que se muestra a continuación y calcule su volumen con una integral. ¿Qué volumen tiene la sartén realmente? Redondee la respuesta al centímetro cúbico más cercano (1 L = 1000 cm^3).

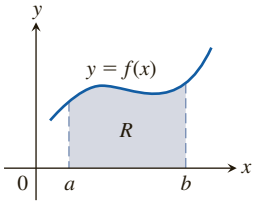


58. Máximo-mínimo El arco $y = \text{sen } x$, $0 \le x \le \pi$, se hace girar alrededor de la recta $y = c$, $0 \le c \le 1$, para generar el sólido mostrado en la figura.

a) Obtenga el valor de c que minimiza el volumen del sólido. ¿Cuál es el volumen mínimo?
b) ¿Cuál es el valor de c en $[0, 1]$ que maximiza el volumen del sólido?
T ***c***) Grafique el volumen del sólido como una función de c, primero para $0 \le c \le 1$, y después en un dominio más grande. ¿Qué le sucede al volumen del sólido cuando c se aleja de $[0, 1]$? ¿Esto tiene sentido desde el punto de vista físico? Justifique sus respuestas.



59. Considere la región R acotada por las gráficas de $y = f(x) > 0$, $x = a > 0$, $x = b > a$, y $y = 0$ (vea la figura). Si el volumen del sólido formado al hacer girar R alrededor del eje x es de 4π, y el volumen del sólido formado al hacer girar R alrededor de la recta $y = -1$ es 8π, calcule el área de R.



60. Considere la región R descrita en el ejercicio 59. Si el volumen del sólido formado al hacer girar R alrededor del eje x es 6π, y el volumen del sólido formado al hacer girar R alrededor de la recta $y = -2$ es 10π, determine el área de R.

6.2 Cálculo de volúmenes por medio de casquillos cilíndricos

En la sección 6.1 determinamos el volumen de un sólido como la integral definida $V = \int_a^b A(x)\,dx$, donde $A(x)$ es el área de una sección transversal integrable del sólido de $x = a$ a $x = b$. El área $A(x)$ se obtuvo rebanando al sólido con un plano perpendicular al eje x. Sin embargo, este método de división algunas veces es difícil de aplicar, como veremos en el primer ejemplo. Para superar esta dificultad, utilizamos la misma definición de integral para calcular el volumen, pero obtendremos el área rebanando el sólido de una manera diferente.

División con cilindros

Suponga que rebanamos el sólido utilizando cilindros circulares de radios crecientes, como si empleáramos cortadoras de galletas. El sólido se corta hacia abajo, de manera que el eje de cada cilindro sea paralelo al eje y. El eje vertical de todos los cilindros es la misma recta, pero los radios de los cilindros se incrementan con cada corte. De esta manera, el sólido se corta en casquillos cilíndricos delgados de espesor constante, que crecen hacia fuera cuando se alejan del eje común, como los anillos circulares de un árbol. Al desenrollar un casquillo cilíndrico, vemos que su volumen es aproximadamente el de una placa rectangular de área $A(x)$ y espesor Δx. Esta interpretación nos permite aplicar la misma definición de integral que hemos utilizado para obtener el volumen. El siguiente ejemplo brinda un primer acercamiento antes de presentar el método general.

EJEMPLO 1 La región acotada por el eje x y la parábola $y = f(x) = 3x - x^2$ se hace girar alrededor de la recta vertical $x = -1$ para generar un sólido (figura 6.16). Obtenga el volumen del sólido.

Solución En este caso, utilizar el método de las arandelas de la sección 6.1 sería complicado, ya que necesitaríamos expresar los valores de x de los lados izquierdo y derecho de la parábola de la figura 6.16*a*) en términos de y. (Estos valores de x son los radios interno y externo de una arandela típica, lo que requiere resolver $y = 3x - x^2$ para despejar x llevándonos a fórmulas complicadas). En lugar de hacer girar una banda horizontal de espesor Δy, hacemos girar una *banda vertical* de espesor Δx. Esta rotación produce un *casquillo cilíndrico* de altura y_k por arriba de un punto x_k en la base de la banda vertical de grosor Δx. La parte central sombreada de la figura 6.17 muestra un ejemplo de casquillo cilíndrico. Podemos considerar dicho casquillo cilíndrico como una aproximación a una porción del sólido, obtenida haciendo un corte recto y paralelo al eje de rotación, muy cerca del hueco. Luego, cortamos otra parte cilíndrica, haciendo mayor el hueco central, luego otra, y así sucesivamente, hasta obtener n cilindros. Los radios de los cilindros crecen de forma gradual, y sus alturas siguen el contorno de la parábola: primero son crecientes y, luego, decrecientes (figura 6.16*a*).

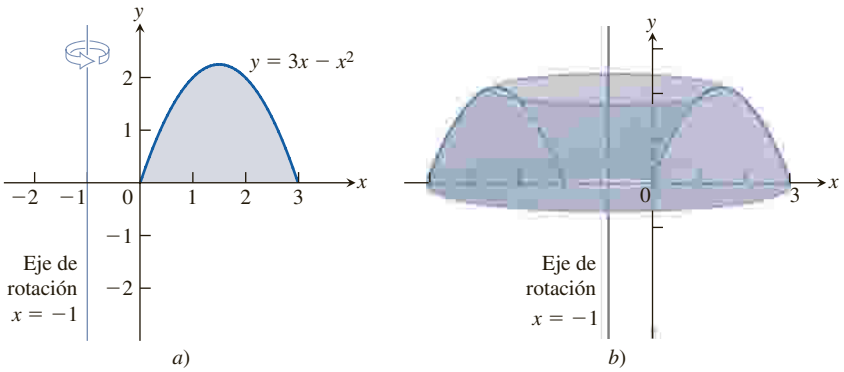


FIGURA 6.16 *a*) Gráfica de la región del ejemplo 1, antes de hacerla girar. *b*) El sólido formado cuando la región del inciso *a*) se hace girar alrededor del eje de rotación $x = -1$.

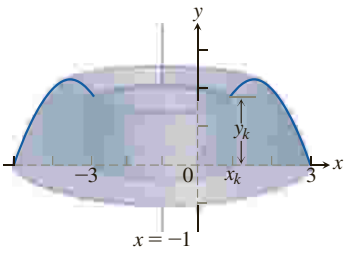


FIGURA 6.17 Un casquillo cilíndrico de altura y_k obtenido al hacer girar una banda vertical de espesor Δx_k alrededor de la recta $x = -1$. El radio exterior del cilindro está en x_k, donde la altura de la parábola es $y_k = 3x_k - x_k^2$ (ejemplo 1).

Cada parte se encuentra en un subintervalo del eje x, de longitud igual a Δx_k. Su radio es aproximadamente $(1 + x_k)$, y su altura es alrededor de $3x_k - x_k^2$. Si desenrollamos el cilindro en x_k y lo extendemos, se convierte en (aproximadamente) una placa rectangular de espesor Δx_k (figura 6.18). La circunferencia exterior del k-ésimo cilindro es $2\pi \cdot \text{radio} = 2\pi(1 + x_k)$, que es el largo de la placa rectangular. Por lo tanto, el volumen del casquillo cilíndrico es aproximadamente el de este sólido rectangular, es decir, el área del rectángulo multiplicada por su espesor,

$$\begin{aligned} \Delta V_k &= \text{circunferencia} \cdot \text{altura} \cdot \text{espesor} \\ &= 2\pi(1 + x_k) \cdot \left(3x_k - x_k^2\right) \cdot \Delta x_k. \end{aligned}$$

Al sumar todos los volúmenes ΔV_k de los casquillos cilíndricos en el intervalo [0, 3], se obtiene la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi(x_k + 1)\left(3x_k - x_k^2\right)\Delta x_k.$$

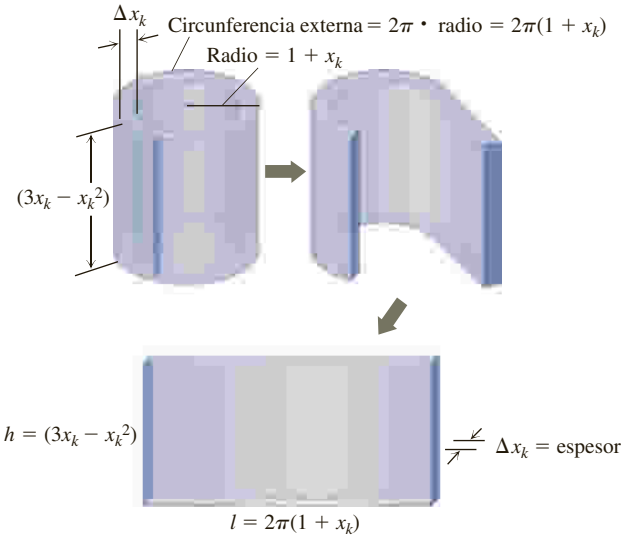


FIGURA 6.18 Imagine que corta y desenrolla un casquillo cilíndrico para obtener aproximadamente un sólido rectangular (ejemplo 1).

Tomando el límite cuando el espesor $\Delta x_k \to 0$ y $n \to \infty$ se obtiene la integral del volumen

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2\pi(x_k + 1)\left(3x_k - x_k^2\right) \Delta x_k \\ &= \int_0^3 2\pi(x + 1)(3x - x^2)\, dx \\ &= \int_0^3 2\pi(3x^2 + 3x - x^3 - x^2)\, dx \\ &= 2\pi \int_0^3 (2x^2 + 3x - x^3)\, dx \\ &= 2\pi\left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^3 = \frac{45\pi}{2}. \end{aligned}$$

■

A continuación, se generaliza el procedimiento utilizado en el ejemplo 1.

Método de los casquillos

Suponga que la región acotada por la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo finito cerrado $[a, b]$ se encuentra a la derecha de la recta vertical $x = L$ (figura 6.19*a*). Suponemos que $a \geq L$, por lo que la recta vertical podría tocar la región, pero no atravesarla. Generamos un sólido, S, al hacer girar esta región alrededor de la recta vertical L.

Sea P una partición del intervalo $[a, b]$, dada por los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, y sea c_k el punto medio del k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. La región de la figura 6.19*a*) se aproxima por medio de rectángulos con base en esta partición de $[a, b]$. Un rectángulo típico que aproxima tiene una altura $f(c_k)$ y un ancho $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Si este rectángulo se hace girar alrededor de la recta vertical $x = L$, genera un casquillo, como el de la figura 6.19*b*). Una fórmula geométrica nos indica que el volumen del casquillo obtenido a partir del rectángulo es

El volumen de un casquillo cilíndrico de altura h con radio interior r y radio exterior R es

$$\pi R^2 h - \pi r^2 h = 2\pi\left(\frac{R + r}{2}\right)(h)(R - r).$$

$$\begin{aligned} \Delta V_k &= 2\pi \times \text{radio promedio del casquillo} \times \text{altura del casquillo} \times \text{espesor} \\ &= 2\pi \cdot (c_k - L) \cdot f(c_k) \cdot \Delta x_k. \qquad R = x_k - L \text{ y } r = x_{k-1} - L \end{aligned}$$

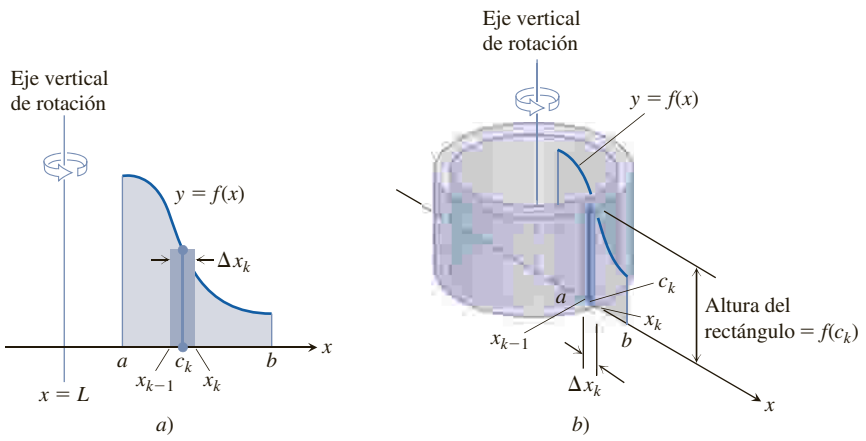


FIGURA 6.19 Cuando la región que se muestra en *a*) se hace girar alrededor de la recta vertical $x = L$, se produce un sólido que puede dividirse en casquillos cilíndricos. Un casquillo típico se muestra en *b*).

Aproximamos el volumen del sólido S por medio de la suma de los volúmenes de los casquillos generados por los n rectángulos basados en P:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k.$$

El límite de esta suma de Riemann cuando $\Delta x_k \to 0$ y $n \to \infty$ proporciona el volumen del sólido como una integral definida:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \int_a^b 2\pi(\text{radio del casquillo})(\text{altura del casquillo})\, dx$$
$$= \int_a^b 2\pi(x - L)f(x)\, dx.$$

Nos referimos a la variable de integración, en este caso x, como la **variable del espesor**. Usaremos la primera integral, en lugar de la segunda que tiene una fórmula para el integrando, para enfatizar el *proceso* del método de los casquillos. Esto permitirá también usar la integral para rotaciones alrededor de una recta horizontal L.

Fórmula de los casquillos para rotación alrededor de una recta vertical
El volumen del sólido generado al hacer girar la región entre el eje x y la gráfica de una función continua $y = f(x) \geq 0$, $L \leq a \leq x \leq b$, alrededor de la recta vertical $x = L$ es

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{radio del}\\ \text{casquillo}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{altura del}\\ \text{casquillo}\end{pmatrix} dx.$$

EJEMPLO 2 La región acotada por la curva $y = \sqrt{x}$, el eje x y la recta $x = 4$ se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. Obtenga el volumen del sólido.

Solución Dibuje la región y un segmento de recta que la cruce en forma *paralela* al eje de rotación (figura 6.20*a*). Anote en el dibujo cuál es la altura del segmento (altura del casquillo) y cuál es la distancia al eje de giro (radio del casquillo). [Dibujamos el casquillo en la figura 6.20*b*), pero no necesita hacerlo ahora].

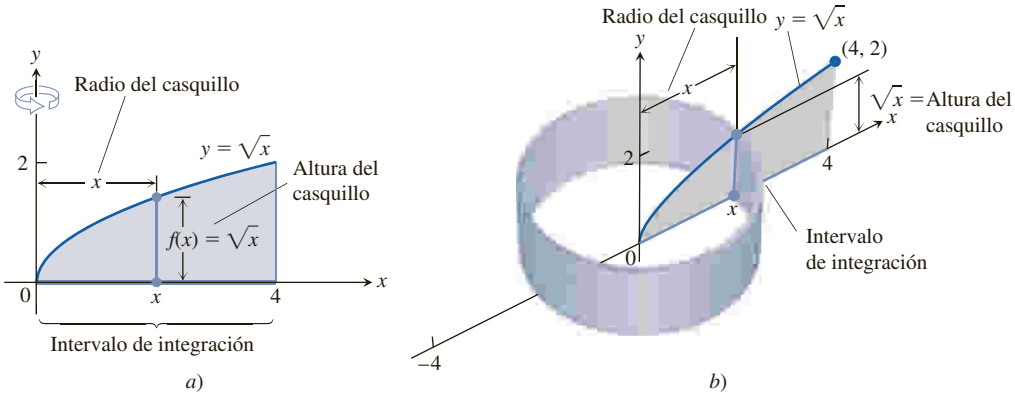


FIGURA 6.20 *a*) La región, las dimensiones del casquillo y el intervalo de integración del ejemplo 2. *b*) El casquillo generado por el segmento vertical del inciso *a*), con un ancho Δx.

La variable del espesor del casquillo es x, de modo que los límites de integración para la fórmula del casquillo son $a = 0$ y $b = 4$ (figura 6.20). Entonces, el volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{radio del}\\ \text{casquillo}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{altura del}\\ \text{casquillo}\end{pmatrix} dx \\ &= \int_0^4 2\pi(x)\left(\sqrt{x}\right) dx \\ &= 2\pi\int_0^4 x^{3/2}\, dx = 2\pi\left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^4 = \frac{128\pi}{5}. \end{aligned}$$

Hasta ahora hemos utilizado ejes de rotación verticales. Para ejes horizontales, reemplazamos la x por y.

EJEMPLO 3 La región acotada por la curva $y = \sqrt{x}$, el eje x y la recta $x = 4$ se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Obtenga el volumen del sólido por el método de los casquillos.

Solución Éste es el sólido cuyo volumen se obtuvo con el método de discos en el ejemplo 4 de la sección 6.1. Ahora obtendremos su volumen con el método de los casquillos. Primero se dibuja la región y un segmento de recta, que la cruce, *paralelo* al eje de revolución (figura 6.21*a*). Anote en el dibujo cuál es la longitud del segmento (altura del casquillo) y cuál es la distancia al eje de revolución (radio del casquillo). [Se dibujó el casquillo en la figura 6.21*b*), pero no es necesario que usted lo haga].

En este caso, la variable del espesor del casquillo es y, de modo que los límites de integración para la fórmula del método de casquillos son $a = 0$ y $b = 2$ (a lo largo del eje y en la figura 6.21). El volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{radio del}\\ \text{casquillo}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{altura del}\\ \text{casquillo}\end{pmatrix} dy \\ &= \int_0^2 2\pi(y)(4 - y^2)\, dy \\ &= 2\pi\int_0^2 (4y - y^3)\, dy \\ &= 2\pi\left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi. \end{aligned}$$

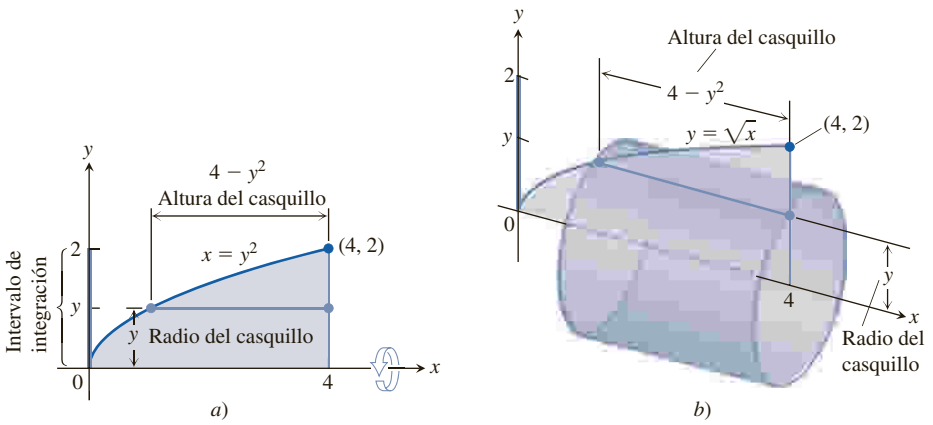


FIGURA 6.21 *a*) La región, las dimensiones del casquillo y el intervalo de integración del ejemplo 3. *b*) El casquillo generado por el segmento horizontal del inciso *a*), con un ancho igual a Δy.

Resumen del método de los casquillos

Sin importar la posición del eje de rotación (horizontal o vertical), los pasos para ejecutar el método de los casquillos son:

1. *Dibuje la región y un segmento de recta* que la cruce de forma *paralela* al eje de rotación. *Indique* en el dibujo cuál es la altura o longitud del segmento (altura del casquillo) y cuál es la distancia al eje de revolución (radio del casquillo).
2. *Obtenga los límites de integración* para la variable del espesor.
3. *Integre* el producto 2π (radio del casquillo)(altura del casquillo) con respecto a la variable del espesor (x o y) para determinar el volumen.

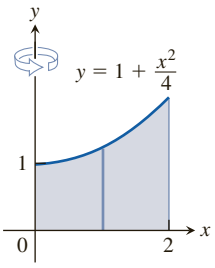
El método de los casquillos proporciona la misma respuesta que el de las arandelas al calcular el volumen de una región. No demostramos ese resultado aquí, pero se ilustra en los ejercicios 37 y 38. (El ejercicio 45 describe una demostración). Ambas fórmulas del volumen son, en realidad, casos especiales de una fórmula general que veremos al estudiar las integrales dobles y triples en el capítulo 15. La fórmula general también permite calcular volúmenes de otros sólidos, además de los que se obtienen al hacer girar una región.

Ejercicios 6.2

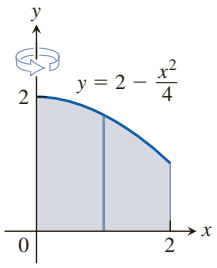
Rotación alrededor de ejes

En los ejercicios 1 a 6, utilice el método de los casquillos para obtener los volúmenes de los sólidos que se generan al hacer girar la región sombreada alrededor del eje que se indica.

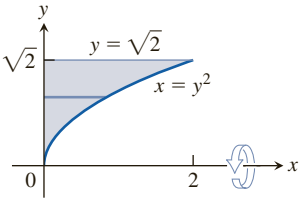
1.



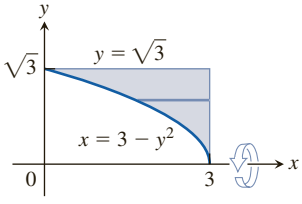
2.



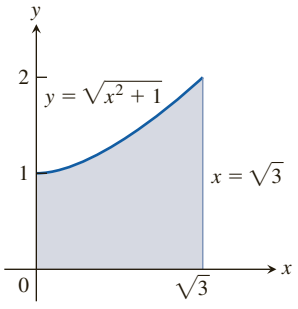
3.



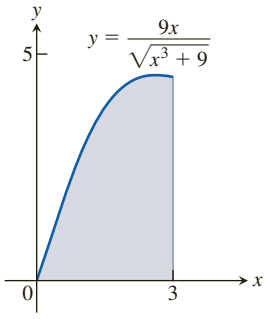
4.



5. El eje y



6. El eje y



Rotación alrededor del eje y

Utilice el método de los casquillos para obtener los volúmenes de los sólidos generados al hacer girar las regiones acotadas por las curvas y rectas en los ejercicios 7 a 12, alrededor del eje y.

7. $y = x, \quad y = -x/2, \quad x = 2$

8. $y = 2x, \quad y = x/2, \quad x = 1$

9. $y = x^2, \quad y = 2 - x, \quad x = 0, \quad$ para $x \geq 0$

10. $y = 2 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = 0$

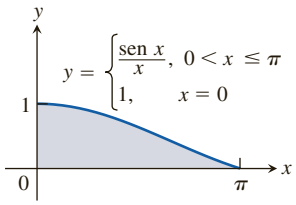
11. $y = 2x - 1, \quad y = \sqrt{x}, \quad x = 0$

12. $y = 3/(2\sqrt{x}), \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$

13. Sea $f(x) = \begin{cases} (\operatorname{sen} x)/x, & 0 < x \le \pi \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

a) Demuestre que $xf(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$.

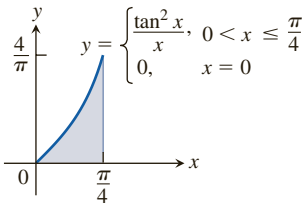
b) Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región sombreada alrededor del eje y en la siguiente figura.



14. Sea $g(x) = \begin{cases} (\tan x)^2/x, & 0 < x \le \pi/4 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

a) Demuestre que $xg(x) = (\tan x)^2$, $0 \le x \le \pi/4$.

b) Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región sombreada alrededor del eje y en la siguiente figura.



Rotación alrededor del eje *x*

Utilice el método de los casquillos para obtener los volúmenes de los sólidos generados al hacer girar las regiones acotadas por las curvas y rectas de los ejercicios 15 a 22, alrededor del eje x.

15. $x = \sqrt{y}$, $x = -y$, $y = 2$

16. $x = y^2$, $x = -y$, $y = 2$, $y \ge 0$

17. $x = 2y - y^2$, $x = 0$

18. $x = 2y - y^2$, $x = y$

19. $y = |x|$, $y = 1$

20. $y = x$, $y = 2x$, $y = 2$

21. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = x - 2$

22. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = 2 - x$

Rotación alrededor de rectas horizontales y verticales

En los ejercicios 23 a 26, utilice el método de los casquillos para obtener los volúmenes de los sólidos generados al hacer girar las regiones acotadas por las curvas dadas, alrededor de las rectas que se indican.

23. $y = 3x$, $y = 0$, $x = 2$

a) El eje y ***b)*** La recta $x = 4$

c) La recta $x = -1$ ***d)*** El eje x

e) La recta $y = 7$ ***f)*** La recta $y = -2$

24. $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$

a) El eje y ***b)*** La recta $x = 3$

c) La recta $x = -2$ ***d)*** El eje x

e) La recta $y = 8$ ***f)*** La recta $y = -1$

25. $y = x + 2$, $y = x^2$

a) La recta $x = 2$ ***b)*** La recta $x = -1$

c) El eje x ***d)*** La recta $y = 4$

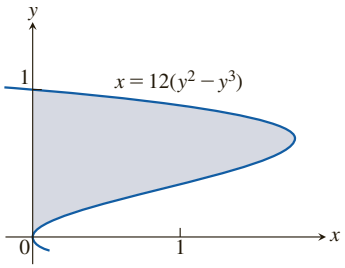
26. $y = x^4$, $y = 4 - 3x^2$

a) La recta $x = 1$ ***b)*** El eje x

En los ejercicios 27 y 28, utilice el método de los casquillos para obtener los volúmenes de los sólidos generados al hacer girar, alrededor de los ejes indicados, las regiones sombreadas.

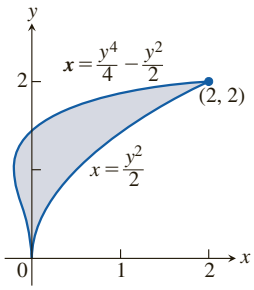
27. ***a)*** El eje x ***b)*** La recta $y = 1$

c) La recta $y = 8/5$ ***d)*** La recta $y = -2/5$



28. ***a)*** El eje x ***b)*** La recta $y = 2$

c) La recta $y = 5$ ***d)*** La recta $y = -5/8$



Elección entre el método de las arandelas y el método de los casquillos

Aunque no sucede así en todos los casos, tanto el método de las arandelas como el de los casquillos podrían funcionar bien al determinar el volumen de un sólido que se genera haciendo girar una región alrededor de los ejes de coordenadas. Por ejemplo, cuando una región se hace girar alrededor del eje y y se utiliza el método de las arandelas para determinar su volumen, es necesario integrar con respecto a y; sin embargo, tal vez sea imposible expresar el integrando en términos de y. En tal caso, el método de los casquillos nos permitirá integrar con respecto a x. Los ejercicios 29 y 30 dan una idea.

29. Calcule el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por $y = x$ y $y = x^2$ alrededor de cada eje de coordenadas, utilizando

a) el método de los casquillos.

b) el método de las arandelas.

30. Calcule el volumen del sólido generado al hacer girar la región triangular acotada por las rectas $2y = x + 4$, $y = x$, y $x = 0$ alrededor de

a) el eje x usando el método de las arandelas.

b) el eje y usando el método de los casquillos.

c) la recta $x = 4$ usando el método de los casquillos.

d) la recta $y = 8$ usando el método de las arandelas.

En los ejercicios 31 a 36, determine el volumen de los sólidos generados al hacer girar las regiones alrededor de los ejes indicados. Si cree que es mejor usar el método de las arandelas en alguno de ellos, hágalo.

31. El triángulo con vértices en (1, 1), (1, 2), y (2, 2) alrededor de

a) el eje x ***b***) el eje y

c) la recta $x = 10/3$ ***d***) la recta $y = 1$

32. La región acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$ alrededor de

a) el eje x ***b***) el eje y

c) la recta $x = 4$ ***d***) la recta $y = 2$

33. La región en el primer cuadrante acotada por la curva $x = y - y^3$ y el eje y alrededor de

a) el eje x ***b***) la recta $y = 1$

34. La región en el primer cuadrante acotada por $x = y - y^3$, $x = 1$ y $y = 1$ alrededor de

a) el eje x ***b***) el eje y

c) la recta $x = 1$ ***d***) la recta $y = 1$

35. La región acotada por $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2/8$ alrededor de

a) el eje x ***b***) el eje y

36. La región acotada por $y = 2x - x^2$ y $y = x$ alrededor de

a) el eje y ***b***) la recta $x = 1$

37. La región en el primer cuadrante, que está acotada arriba por la curva $y = 1/x^{1/4}$, a la izquierda por la recta $x = 1/16$, y abajo por la recta $y = 1$, se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Obtenga el volumen del sólido por

a) el método de las arandelas.

b) el método de los casquillos.

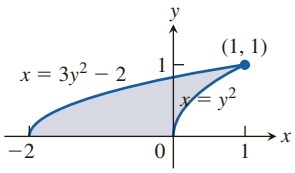
38. La región en el primer cuadrante, que está acotada arriba por la curva $y = 1/\sqrt{x}$, a la izquierda por la recta $x = 1/4$, y abajo por la recta $y = 1$, se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. Obtenga el volumen del sólido por

a) el método de las arandelas.

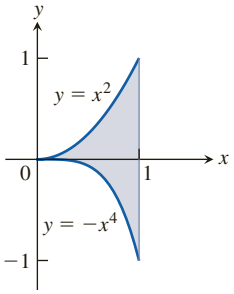
b) el método de los casquillos.

Teoría y ejemplos

39. La región mostrada en la figura se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. ¿Cuál de los métodos (el de discos, el de arandelas o el de casquillos) podría utilizarse para determinar el volumen del sólido? ¿Cuántas integrales son necesarias en cada caso? Explique.



40. La región mostrada en la figura se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. ¿Cuál de los métodos (el de discos, el de arandelas o el de casquillos) podría utilizarse para determinar el volumen del sólido? ¿Cuántas integrales son necesarias en cada caso? Justifique su respuesta.



41. La cuenta de un collar se forma con una esfera de radio igual a 5, taladrando a lo largo de un diámetro con una broca de radio igual a 3.

a) Obtenga el volumen de la cuenta.

b) Obtenga el volumen de la parte removida de la esfera.

42. Un pastel Bundt, conocido por tener una forma de anillo, se forma haciendo girar alrededor del eje y la región acotada por la gráfica de $y = \text{sen}\,(x^2 - 1)$ y el eje x en el intervalo $1 \le x \le \sqrt{1 + \pi}$. Obtenga el volumen del pastel.

43. Deduzca la fórmula del volumen de un cono circular recto de altura h y radio r usando un sólido de revolución adecuado.

44. Deduzca la ecuación del volumen de una esfera de radio r mediante el método de los casquillos.

6.3 Longitud de arco

Sabemos qué se entiende por longitud de un segmento de recta, pero sin el cálculo no tenemos una definición precisa de la longitud de una curva en general. Si la curva es la gráfica de una función continua definida en un intervalo, entonces podemos tratar de obtener la longitud de la curva usando un procedimiento similar al que empleamos para definir el área entre la curva y el eje x. Este procedimiento consiste en dividir en muchas partes la curva que va del punto A al punto B, uniendo después los puntos sucesivos de la división mediante segmentos de recta. Luego, se suman las longitudes de todos estos segmentos de recta y se define la longitud de la curva como el valor límite de esta suma cuando el número de segmentos tiende a infinito.

Longitud de una curva $y = f(x)$

Suponga que la curva cuya longitud se desea obtener es la gráfica de la función $y = f(x)$ de $x = a$ a $x = b$. Para deducir una fórmula integral para la longitud de la curva, suponemos que f tiene derivada continua en todos los puntos de $[a, b]$. Esta función se conoce como **suave**, y su gráfica es una **curva suave** porque no tiene cortes, esquinas ni cúspides.

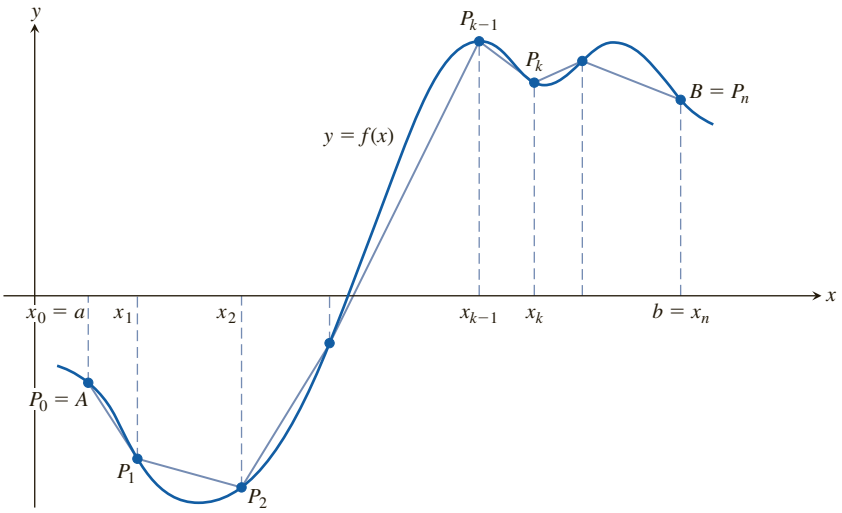


FIGURA 6.22 La longitud de la trayectoria poligonal $P_0P_1P_2 \cdots P_n$ aproxima la longitud de la curva $y = f(x)$ del punto A al punto B.

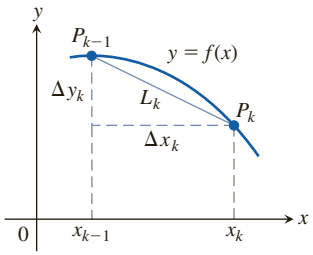


FIGURA 6.23 El arco $P_{k-1}P_k$ de la curva $y = f(x)$ se aproxima mediante el segmento de recta que se muestra aquí, y tiene una longitud $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$.

Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Si $y_k = f(x_k)$, entonces, el punto correspondiente $P_k(x_k, y_k)$ se encuentra sobre la curva. En seguida, unimos los puntos sucesivos P_{k-1} y P_k con segmentos de recta que, en conjunto, forman una trayectoria poligonal cuya longitud aproxima la longitud de la curva (figura 6.22). Si $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ y $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, entonces, un segmento representativo en la trayectoria (vea la figura 6.23) tiene una longitud de

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2},$$

de modo que la longitud de la curva se aproxima mediante la suma

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}. \tag{1}$$

Se espera que la aproximación mejore conforme la partición de $[a, b]$ se vuelva más fina. Ahora, según el teorema del valor medio, existe un punto c_k, con $x_{k-1} < c_k < x_k$, tal que

$$\Delta y_k = f'(c_k)\,\Delta x_k.$$

Con esta sustitución de Δy_k, las sumas de la ecuación (1) toman la forma

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k)\Delta x_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}\,\Delta x_k. \tag{2}$$

Como $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ es continua en $[a, b]$, el límite de la suma de Riemann en el lado derecho de la ecuación (2) existe cuando la norma de la partición tiende a cero, dando

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} L_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}\,\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Definimos el valor de esta integral límite como la longitud de la curva.

DEFINICIÓN Si f' es continua en $[a, b]$, entonces, la **longitud (longitud de arco)** de la curva $y = f(x)$ del punto $A = (a, f(a))$ al punto $B = (b, f(b))$ es el valor de la integral

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \tag{3}$$

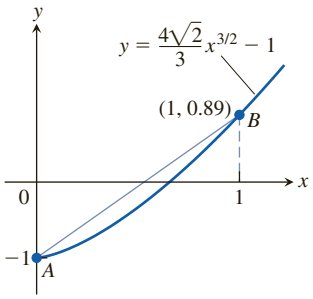


FIGURA 6.24 La longitud de la curva es ligeramente mayor que la longitud del segmento de recta que une los puntos A y B (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Obtenga la longitud de la curva (figura 6.24).

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Solución Se emplea la ecuación (3) con $a = 0$, $b = 1$ y

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1 \qquad x = 1, y \approx 0.89$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{2}x^{1/2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}x^{1/2}\right)^2 = 8x.$$

La longitud de la curva entre $x = 0$ y $x = 1$ es

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 8x}\, dx$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}(1 + 8x)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{13}{6} \approx 2.17.$$

Ecuación 3 con $a = 0, b = 1$. Sea $u = 1 + 8x$, se integra y se sustituye u por $1 + 8x$.

Observe que la longitud de la curva es ligeramente mayor que la longitud del segmento de recta que une los puntos $A = (0, -1)$ y $B = \left(1, 4\sqrt{2}/3 - 1\right)$ de la curva (vea la figura 6.24):

$$2.17 > \sqrt{1^2 + (1.89)^2} \approx 2.14.$$ Aproximaciones decimales ■

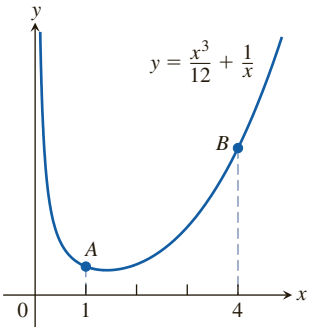


FIGURA 6.25 La curva del ejemplo 2, donde $A = (1, 13/12)$ y $B = (4, 67/12)$.

EJEMPLO 2 Obtenga la longitud de la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}, \qquad 1 \le x \le 4.$$

Solución En la figura 6.25 se presenta la gráfica de la función. Para usar la ecuación (3), obtenemos

$$f'(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2}$$

de manera que

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{x^4}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4}\right)$$

$$= \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4} = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)^2.$$

La longitud de la gráfica en $[1, 4]$ es

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_1^4 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{12} - \frac{1}{x}\right]_1^4 = \left(\frac{64}{12} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{12} - 1\right) = \frac{72}{12} = 6.$$ ■

Manejo de discontinuidades en *dy/dx*

En un punto de la curva donde dy/dx no existe, dx/dy puede existir. En este caso, es posible obtener la longitud de la curva expresando x como una función de y y aplicando la siguiente ecuación análoga de la ecuación (3).

Fórmula para la longitud de $x = g(y), c \le y \ge d$

Si g' es continua en $[c, d]$, la longitud de la curva $x = g(y)$ de $A = (g(c), c)$ a $B(g(d), d)$ es

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy. \tag{4}$$

EJEMPLO 3 Obtenga la longitud de la curva $y = (x/2)^{2/3}$ de $x = 0$ a $x = 2$.

Solución La derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$$

no está definida en $x = 0$, de modo que no podemos obtener la longitud de la curva con la ecuación (3).

Por lo tanto, rescribimos la ecuación para expresar x en términos de y:

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$$

$$y^{3/2} = \frac{x}{2} \qquad \text{Ambos lados se elevan a la potencia } 3/2.$$

$$x = 2y^{3/2}. \qquad \text{Se despeja } x.$$

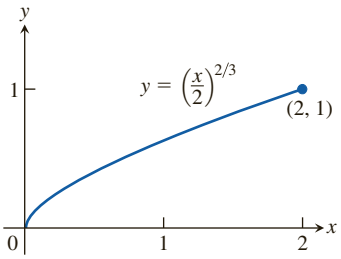


FIGURA 6.26 La gráfica de $y = (x/2)^{2/3}$ de $x = 0$ a $x = 2$ también es la gráfica de $x = 2y^{3/2}$ de $y = 0$ a $y = 1$ (ejemplo 3).

A partir de esto, vemos que la curva cuya longitud queremos calcular también es la gráfica de $x = 2y^{3/2}$, de $y = 0$ a $y = 1$ (figura 6.26).

La derivada

$$\frac{dx}{dy} = 2\left(\frac{3}{2}\right)y^{1/2} = 3y^{1/2}$$

es continua en $[0, 1]$. Por lo tanto, podemos usar la ecuación (4) para obtener la longitud de la curva:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 9y}\, dy \qquad \text{Ecuación (4) con } c = 0, d = 1.$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3}(1 + 9y)^{3/2}\Big]_0^1 \qquad \text{Sea } u = 1 + 9y, \; du/9 = dy, \text{ se integra y se regresa a la variable original para evaluar.}$$

$$= \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \approx 2.27.$$

■

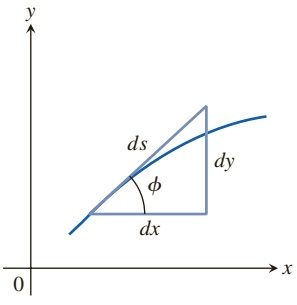
Fórmula diferencial de la longitud de un arco

Si $y = f(x)$ y f' es continua en $[a, b]$, entonces, según el teorema fundamental del cálculo, se puede definir una nueva función

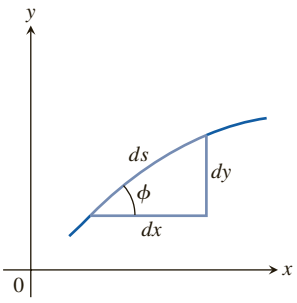
$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt. \tag{5}$$

A partir de la ecuación (3) y de la figura 6.22, vemos que esta función $s(x)$ es continua y mide la longitud a lo largo de la curva $y = f(x)$ desde el punto inicial $P_0(a, f(a))$ hasta el punto $Q(x, f(x))$ para cada $x \in [a, b]$. La función se conoce como la **función de longitud de arco** de $y = f(x)$. Según el teorema fundamental, la función s es diferenciable en (a, b) y

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$



a)



b)

FIGURA 6.27 Diagramas para recordar la ecuación $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Entonces, la diferencial de la longitud de arco es

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{6}$$

Una manera de recordar la ecuación (6) es escribiéndola como

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \tag{7}$$

que se puede integrar entre los límites adecuados para obtener la longitud total de una curva. Desde este punto de vista, todas las fórmulas de las longitudes de arco son expresiones diferentes de la ecuación $L = \int ds$. La figura 6.27*a*) muestra la interpretación exacta de ds correspondiente a la ecuación (7). La figura 6.27*b*) no es estrictamente precisa, pero se debe visualizar como una aproximación simplificada de la figura 6.27*a*). Es decir, $ds \approx \Delta s$.

EJEMPLO 4 Obtenga la función de longitud de arco de la curva del ejemplo 2, tomando a $A = (1, 13/12)$ como el punto inicial (vea la figura 6.25).

Solución En la solución del ejemplo 2, vimos que

$$1 + [f'(x)]^2 = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)^2.$$

Por lo tanto, la función de longitud de arco está dada por

$$s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt = \int_1^x \left(\frac{t^2}{4} + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{12} - \frac{1}{t}\right]_1^x = \frac{x^3}{12} - \frac{1}{x} + \frac{11}{12}.$$

Para calcular la longitud de arco a lo largo de la curva de $A = (1, 13/12)$ a $B = (4, 67/12)$, por ejemplo, simplemente calculamos

$$s(4) = \frac{4^3}{12} - \frac{1}{4} + \frac{11}{12} = 6.$$

Éste es el mismo resultado que se obtuvo en el ejemplo 2. ■

Ejercicios 6.3

Obtención de longitudes de curvas

En los ejercicios 1 a 12, obtenga las longitudes de las curvas. Si tiene una calculadora graficadora, tal vez desee graficar las curvas para ver su apariencia.

1. $y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 3$
2. $y = x^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 4$
3. $x = (y^3/3) + 1/(4y)$ de $y = 1$ a $y = 3$
4. $x = (y^{3/2}/3) - y^{1/2}$ de $y = 1$ a $y = 9$
5. $x = (y^4/4) + 1/(8y^2)$ de $y = 1$ a $y = 2$
6. $x = (y^3/6) + 1/(2y)$ de $y = 2$ a $y = 3$
7. $y = (3/4)x^{4/3} - (3/8)x^{2/3} + 5, \quad 1 \le x \le 8$
8. $y = (x^3/3) + x^2 + x + 1/(4x + 4), \quad 0 \le x \le 2$
9. $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{4x}, \quad 1 \le x \le 3$
10. $y = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1}{12x^3}, \quad \dfrac{1}{2} \le x \le 1$
11. $x = \displaystyle\int_0^y \sqrt{\sec^4 t - 1}\, dt, \quad -\pi/4 \le y \le \pi/4$
12. $y = \displaystyle\int_{-2}^x \sqrt{3t^4 - 1}\, dt, \quad -2 \le x \le -1$

T Determinación de integrales para longitudes de curvas

En los ejercicios 13 a 20, realice lo siguiente:

a) Obtenga una integral para calcular la longitud de la curva.

b) Grafique la curva para ver su forma.

c) Utilice el evaluador de integrales de su calculadora graficadora o computadora, para determinar de forma numérica la longitud de la curva.

13. $y = x^2, \quad -1 \le x \le 2$
14. $y = \tan x, \quad -\pi/3 \le x \le 0$
15. $x = \operatorname{sen} y, \quad 0 \le y \le \pi$
16. $x = \sqrt{1 - y^2}, \quad -1/2 \le y \le 1/2$

17. $y^2 + 2y = 2x + 1$ de $(-1, -1)$ a $(7, 3)$

18. $y = \operatorname{sen} x - x \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

19. $y = \displaystyle\int_0^x \tan t\, dt, \quad 0 \le x \le \pi/6$

20. $x = \displaystyle\int_0^y \sqrt{\sec^2 t - 1}\, dt, \quad -\pi/3 \le y \le \pi/4$

Teoría y ejemplos

21. ***a)*** Obtenga una curva, con derivada positiva, que pase por el punto (1, 1) y cuya integral de longitud (ecuación 3) sea

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx.$$

b) ¿Cuántas curvas cumplen con lo anterior? Justifique su respuesta.

22. ***a)*** Obtenga una curva, con derivada positiva, que pase por el punto (0, 1) y cuya integral de longitud (ecuación 4) sea

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{y^4}}\, dy.$$

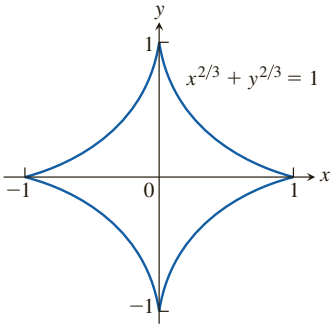
b) ¿Cuántas curvas cumplen con lo anterior? Justifique su respuesta.

23. Obtenga la longitud de la curva

$$y = \int_0^x \sqrt{\cos 2t}\, dt$$

de $x = 0$ a $x = \pi/4$.

24. Longitud de un astroide La gráfica de la ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ pertenece a la familia de curvas conocidas como *astroides* (no "asteroides") debido a su parecido con una estrella (vea la figura). Determine la longitud de este astroide en particular obteniendo la longitud de la mitad de la parte en el primer cuadrante, $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$, $\sqrt{2}/4 \le x \le 1$, y multiplicándola por 8.



25. Longitud de un segmento rectilíneo Use la fórmula de longitud de arco (ecuación 3) para obtener la longitud del segmento de recta $y = 3 - 2x$, $0 \le x \le 2$. Verifique su respuesta obteniendo la longitud del segmento como la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

26. Circunferencia de un círculo Defina una integral para obtener la circunferencia de un círculo de radio r con centro en el origen. En la sección 8.4 aprenderá cómo evaluar la integral.

27. Si $9x^2 = y(y - 3)^2$, demuestre que

$$ds^2 = \frac{(y + 1)^2}{4y}\, dy^2.$$

28. Si $4x^2 - y^2 = 64$, demuestre que

$$ds^2 = \frac{4}{y^2}(5x^2 - 16)\, dx^2.$$

29. ¿Existe una curva suave (continuamente diferenciable), $y = f(x)$, cuya longitud en el intervalo $0 \le x \le a$ sea siempre $\sqrt{2}a$? Justifique su respuesta.

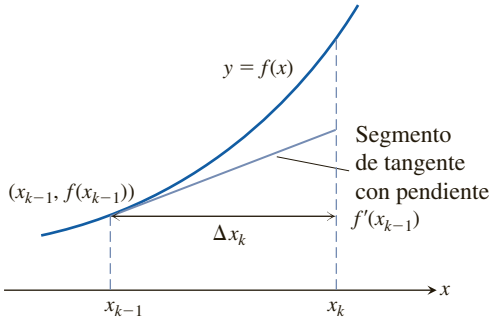
30. Uso de tangentes para deducir la fórmula de la longitud de una curva Suponga que f es suave en $[a, b]$ y que dividimos este intervalo en la forma usual. En cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, construimos un pequeño *segmento de tangente* en el punto $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, como se muestra en la siguiente figura.

a) Demuestre que la longitud del k-ésimo segmento de tangente en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es igual a $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(x_{k-1})\,\Delta x_k)^2}$

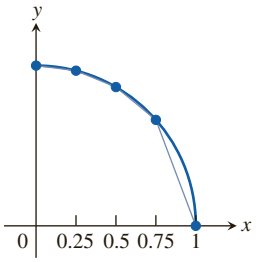
b) Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\text{longitud del } k\text{-ésimo segmento de tangente}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

que es la longitud L de la curva $y = f(x)$ de a a b.



31. Aproxime la longitud de arco de un cuarto de la circunferencia unitaria (que es de $\pi/2$) calculando la longitud de la aproximación poligonal con $n = 4$ segmentos (vea la figura).



32. Distancia entre dos puntos Suponga que los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se encuentran sobre la gráfica de la recta $y = mx + b$. Utilice la fórmula de longitud de arco (ecuación 3) para obtener la distancia entre los dos puntos.

33. Obtenga la función de longitud de arco de la gráfica de $f(x) = 2x^{3/2}$ usando (0, 0) como el punto inicial. ¿Cuál es la longitud de la curva de (0, 0) a (1, 2)?

34. Obtenga la función de longitud de arco de la curva del ejercicio 8, usando (0, 1/4) como el punto inicial. ¿Cuál es la longitud de la curva de (0, 1/4) a (1, 59/24)?

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 35 a 40, utilice un software matemático para ejecutar los siguientes pasos, considerando la gráfica dada de la función, en el intervalo cerrado.

a) Trace la curva junto con las trayectorias poligonales aproximadas para los puntos $n = 2, 4, 8$ en la partición del intervalo. (Vea la figura 6.22).

b) Determine la aproximación correspondiente a la longitud de la curva, sumando las longitudes de los segmentos de recta.

c) Evalúe la longitud de la curva con una integral. Compare sus aproximaciones para $n = 2, 4, 8$ con la longitud real dada por la integral. ¿Cómo se compara la longitud real con las aproximaciones a medida que n crece? Explique su respuesta.

35. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \le x \le 1$

36. $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}, \quad 0 \le x \le 2$

37. $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2), \quad 0 \le x \le \sqrt{2}$

38. $f(x) = x^2 \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

39. $f(x) = \dfrac{x - 1}{4x^2 + 1}, \quad -\dfrac{1}{2} \le x \le 1$

40. $f(x) = x^3 - x^2, \quad -1 \le x \le 1$

6.4 Áreas de superficies de revolución

Cuando salta una cuerda, ésta genera una superficie en el espacio alrededor de usted similar a lo que se conoce como *superficie de revolución*. La superficie rodea un volumen de revolución, y en muchas aplicaciones se requiere que conozcamos el área de la superficie en lugar del volumen que contiene. En esta sección, definiremos las áreas de las superficies de revolución. En el capítulo 16 nos ocuparemos de superficies más generales.

Definición del área de una superficie

Si en el plano se hace girar una región que está acotada por la gráfica de una función en un intervalo, genera un sólido de revolución, como vimos antes en este capítulo. Sin embargo, si se hace girar sólo la curva frontera, no genera ningún volumen interior, sino una superficie que rodea el sólido y forma parte de su frontera. Así como estuvimos interesados en la definición y obtención de la longitud de una curva en la sección anterior, ahora estamos interesados en la definición y obtención del área de una superficie generada por una curva que gira alrededor de un eje.

Antes de considerar curvas generales, iniciaremos nuestro análisis haciendo girar alrededor del eje x segmentos de recta horizontales e inclinados. Si hacemos girar el segmento de recta horizontal AB que tiene una longitud Δx (figura 6.28*a*), alrededor del eje x, generamos un cilindro con área superficial de $2\pi y \Delta x$. Esta área es la misma que la de un rectángulo cuyos lados miden Δx y $2\pi y$ (figura 6.28*b*). La longitud $2\pi y$ es el perímetro de la circunferencia de radio y generada al hacer girar, alrededor del eje x, el punto (x, y) de la línea AB.

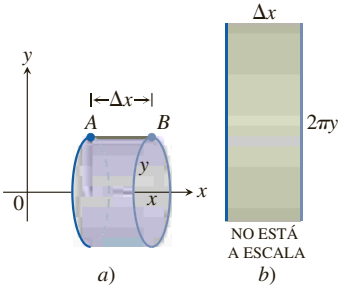


FIGURA 6.28 *a)* Una superficie cilíndrica generada al hacer girar el segmento de recta horizontal AB, de longitud Δx, alrededor del eje x, tiene un área $2\pi y \Delta x$. *b)* Al cortar y desenrollar la superficie cilíndrica, se obtiene un rectángulo.

Suponga que el segmento AB tiene una longitud L y está inclinado en lugar de ser horizontal. Ahora, cuando AB se hace girar alrededor del eje x, genera un cono truncado (figura 6.29*a*). Según la geometría clásica, el área de la superficie del cono truncado es $2\pi y^* L$, donde $y^* = (y_1 + y_2)/2$ es la altura promedio, por encima del eje x, del segmento inclina-

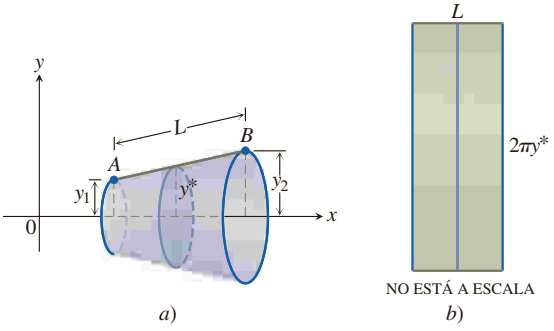


FIGURA 6.29 *a)* El cono truncado generado por la rotación alrededor del eje x del segmento de recta inclinado AB, de longitud L, tiene un área igual a $2\pi y^* L$. *b)* El área de un rectángulo para $y^* = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, la altura promedio de AB arriba del eje x.

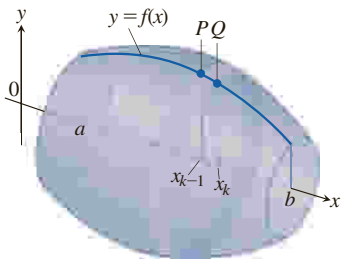


FIGURA 6.30 Superficie generada al hacer girar, alrededor del eje x, la gráfica de la función no negativa $y = f(x)$, $a \le x \le b$. La superficie es una unión de bandas, como la que genera el arco PQ.

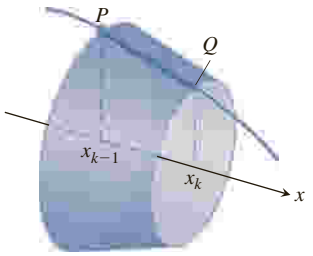


FIGURA 6.31 El segmento de recta que une P y Q genera un cono truncado.

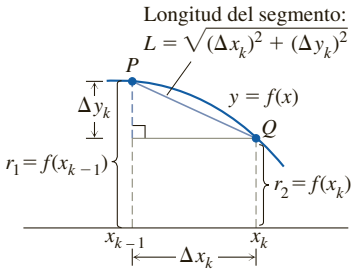


FIGURA 6.32 Dimensiones asociadas con el arco y el segmento PQ.

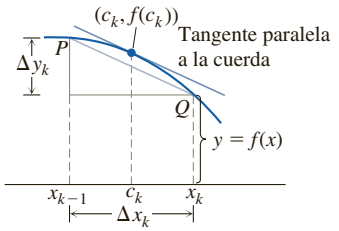


FIGURA 6.33 Si f es suave, el teorema del valor medio asegura la existencia de un punto c_k donde la tangente es paralela al segmento PQ.

do AB. Esta área superficial es la misma que la de un rectángulo con lados de longitud L y $2\pi y^*$ (figura 6.29*b*).

Trabajemos con estos principios geométricos para definir el área de la superficie que se genera al hacer girar, alrededor del eje x, curvas más generales. Suponga que deseamos obtener el área de la superficie que se genera al hacer girar, alrededor del eje x, la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Dividimos el intervalo cerrado $[a, b]$ de la manera usual, y utilizamos los puntos de la partición para subdividir la gráfica en pequeños arcos. La figura 6.30 muestra un arco típico PQ y la banda que genera como parte de la gráfica de f.

Conforme el arco PQ gira alrededor del eje x, el segmento que une P con Q genera el cono truncado cuyo eje se encuentra en el eje x (figura 6.31). El área de la superficie de este cono aproxima el área de la superficie de la banda generada por el arco PQ. El área de la superficie del cono truncado que se muestra en la figura 6.31 es $2\pi y^* L$, donde y^* es la altura promedio del segmento que une P con Q, y L es su longitud (igual que antes). Como $f \ge 0$, al analizar la figura 6.32, vemos que la altura promedio del segmento de recta es $y^* = (f(x_{k-1}) + f(x_k))/2$, y la longitud del segmento inclinado es $L = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$. Por lo tanto,

$$\text{Área de la superficie del cono} = 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$
$$= \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}.$$

Como el área de la superficie original es la suma de las áreas de las bandas generadas por arcos como PQ, ésta se aproxima por medio de la suma de las áreas de los conos truncados

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}. \tag{1}$$

Se espera que la aproximación mejore conforme la partición de $[a, b]$ sea más fina. Además, si la función f es diferenciable, entonces, según el teorema del valor medio, existe un punto $(c_k, f(c_k))$ en la curva, entre P y Q, donde la tangente es paralela al segmento PQ (figura 6.33). En este punto,

$$f'(c_k) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k},$$
$$\Delta y_k = f'(c_k)\,\Delta x_k.$$

Con esta sustitución de Δy_k, las sumas en la ecuación (1) toman la forma

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k)\,\Delta x_k)^2}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\,\Delta x_k. \tag{2}$$

Estas sumas no son las sumas de Riemann de alguna función, ya que los puntos x_{k-1}, x_k y c_k no son los mismos. Sin embargo, se puede probar que cuando la norma de la partición de $[a, b]$ tiende a cero, las sumas de la ecuación (2) convergen hacia la integral

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Por lo tanto, definimos esta integral como el área de la superficie generada por la gráfica de f, de a a b.

DEFINICIÓN Si la función $f(x) \ge 0$ es continuamente diferenciable en $[a, b]$, el **área de la superficie** generada al hacer girar la gráfica de $y = f(x)$ alrededor del eje x es

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \tag{3}$$

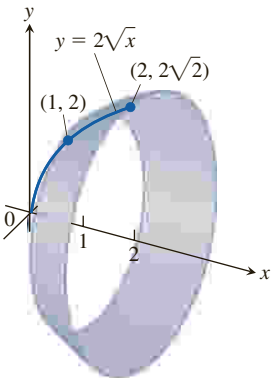


FIGURA 6.34 En el ejemplo 1 se calculó el área de esta superficie.

La raíz cuadrada de la ecuación (3) es la misma que aparece en la fórmula de la diferencial de longitud de arco de la curva generadora en la ecuación (6) de la sección 6.3.

EJEMPLO 1 Obtenga el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = 2\sqrt{x}$, $1 \le x \le 2$, alrededor del eje x (figura 6.34).

Solución Evaluamos la fórmula

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \text{Ecuación (3)}$$

con

$$a = 1, \qquad b = 2, \qquad y = 2\sqrt{x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Primero usamos algo de álgebra en el radical del integrando, para transformarlo en una expresión que sea más fácil de integrar.

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

Con estas sustituciones, tenemos

$$S = \int_1^2 2\pi \cdot 2\sqrt{x}\,\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\, dx = 4\pi \int_1^2 \sqrt{x+1}\, dx$$

$$= 4\pi \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big]_1^2 = \frac{8\pi}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right).$$

■

Rotación alrededor del eje *y*

Para rotaciones alrededor del eje y, intercambiamos x y y en la ecuación (3).

Área superficial para rotaciones alrededor del eje y

Si $x = g(y) \ge 0$ es continuamente diferenciable en $[c, d]$, el área de la superficie generada al hacer girar la gráfica de $x = g(y)$ alrededor del eje y es

$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy. \qquad (4)$$

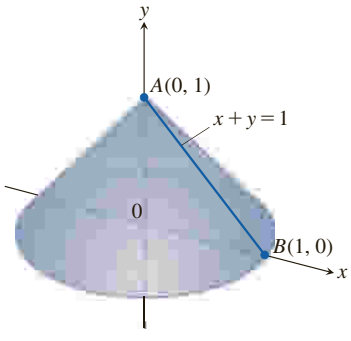


FIGURA 6.35 Al hacer girar el segmento de recta AB alrededor del eje y se genera un cono, cuya superficie lateral se puede calcular de dos formas distintas (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 El segmento de recta $x = 1 - y$, $0 \le y \le 1$, se hace girar alrededor del eje y para generar el cono de la figura 6.35. Obtenga su superficie lateral (la cual excluye el área de la base).

Solución En este caso, tenemos un cálculo que podemos comprobar con una fórmula geométrica:

$$\text{Área de la superficie lateral} = \frac{\text{circunferencia de la base}}{2} \times \text{altura inclinada} = \pi\sqrt{2}.$$

Para ver cómo la ecuación (4) da el mismo resultado, consideramos

$$c = 0, \qquad d = 1, \qquad x = 1 - y, \qquad \frac{dx}{dy} = -1,$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

y calculamos

$$S = \int_c^d 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_0^1 2\pi(1 - y)\sqrt{2}\,dy$$
$$= 2\pi\sqrt{2}\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \pi\sqrt{2}.$$

Los resultados coinciden, como debe ser. ■

Ejercicios 6.4

Obtención de integrales para calcular áreas de superficies

En los ejercicios 1 a 8:

a) Determine una integral para calcular el área de la superficie generada al hacer girar la curva dada, alrededor del eje indicado.

T ***b)*** Grafique la curva para observar su apariencia. Si es posible, grafique también la superficie.

T ***c)*** Utilice el evaluador de integrales de su calculadora para obtener numéricamente el área de la superficie.

1. $y = \tan x, \quad 0 \le x \le \pi/4; \quad$ eje x

2. $y = x^2, \quad 0 \le x \le 2; \quad$ eje x

3. $xy = 1, \quad 1 \le y \le 2; \quad$ eje y

4. $x = \operatorname{sen} y, \quad 0 \le y \le \pi; \quad$ eje y

5. $x^{1/2} + y^{1/2} = 3 \quad$ de $(4, 1)$ a $(1, 4); \quad$ eje x

6. $y + 2\sqrt{y} = x, \quad 1 \le y \le 2; \quad$ eje y

7. $x = \displaystyle\int_0^y \tan t\,dt, \quad 0 \le y \le \pi/3; \quad$ eje y

8. $y = \displaystyle\int_1^x \sqrt{t^2 - 1}\,dt, \quad 1 \le x \le \sqrt{5}; \quad$ eje x

Obtención de áreas de superficies

9. Determine el área de la superficie lateral del cono generado al hacer girar el segmento de recta $y = x/2$, $0 \le x \le 4$, alrededor del eje x. Compruebe su respuesta con la fórmula geométrica

$$\text{Área de la superficie lateral} = \frac{1}{2} \times \text{circunferencia de la base} \times \text{altura inclinada.}$$

10. Determine el área de la superficie lateral del cono generado al hacer girar el segmento de recta $y = x/2$, $0 \le x \le 4$, alrededor del eje y. Compruebe su respuesta con la fórmula geométrica

$$\text{Área de la superficie lateral} = \frac{1}{2} \times \text{circunferencia de la base} \times \text{altura inclinada.}$$

11. Determine el área del cono truncado que se genera al hacer girar el segmento de recta $y = (x/2) + (1/2)$, $1 \le x \le 3$, alrededor del eje x. Compruebe su respuesta con la fórmula geométrica

$$\text{Área de la superficie del cono truncado} = \pi(r_1 + r_2) \times \text{altura inclinada.}$$

12. Determine el área de la superficie del cono truncado que se genera al hacer girar el segmento de recta $y = (x/2) + (1/2)$, $1 \le x \le 3$, alrededor del eje y. Compruebe su respuesta con la fórmula geométrica

$$\text{Área de la superficie del cono truncado} = \pi(r_1 + r_2) \times \text{altura inclinada.}$$

Obtenga las áreas de las superficies generadas al hacer girar las curvas en los ejercicios 13 a 23 alrededor de los ejes indicados. Si tiene una calculadora graficadora, tal vez desee graficar estas curvas para ver su apariencia.

13. $y = x^3/9, \quad 0 \le x \le 2; \quad$ eje x

14. $y = \sqrt{x}, \quad 3/4 \le x \le 15/4; \quad$ eje x

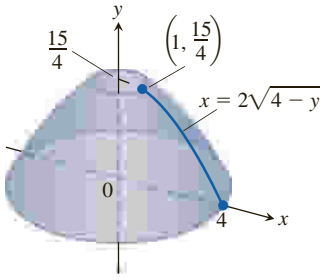
15. $y = \sqrt{2x - x^2}, \quad 0.5 \le x \le 1.5; \quad$ eje x

16. $y = \sqrt{x + 1}, \quad 1 \le x \le 5; \quad$ eje x

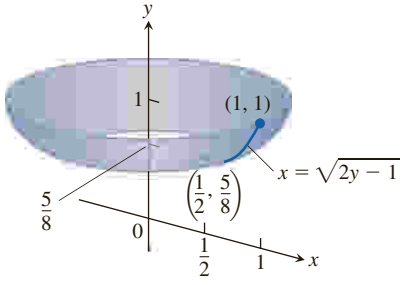
17. $x = y^3/3, \quad 0 \le y \le 1; \quad$ eje y

18. $x = (1/3)y^{3/2} - y^{1/2}, \quad 1 \le y \le 3; \quad$ eje y

19. $x = 2\sqrt{4 - y}, \quad 0 \le y \le 15/4; \quad$ eje y



20. $x = \sqrt{2y - 1}, \quad 5/8 \le y \le 1; \quad$ eje y



21. $y = (1/2)(x^2 + 1)$, $0 \le x \le 1$; eje y

22. $y = (1/3)(x^2 + 2)^3/^2$, $0 \le x \le \sqrt{2}$; eje y (*Sugerencia:* Exprese $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ en términos de dx, y evalúe la integral $S = \int 2\pi x\, ds$ con límites adecuados).

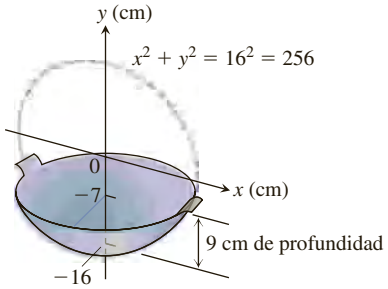
23. $x = (y^4/4) + 1/(8y^2)$, $1 \le y \le 2$; eje x (*Sugerencia:* Exprese $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ en términos de dy, y evalúe la integral $S = \int 2\pi y\, ds$ con límites adecuados).

24. Escriba una integral para el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = \cos x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, alrededor del eje x. En la sección 8.4 veremos cómo evaluar estas integrales.

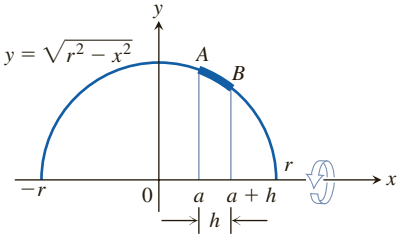
25. Poner a prueba la nueva definición Demuestre que el área de la superficie de una esfera de radio a sigue siendo $4\pi a^2$ utilizando la ecuación (3) para determinar el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \le x \le a$, alrededor del eje x.

26. Poner a prueba la nueva definición El área de la superficie lateral de un cono de altura h y radio de la base igual a r debe ser $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$, el semiperímetro de la base por la altura inclinada. Demuestre que éste es el caso, determinando el área de la superficie generada al hacer girar, alrededor del eje x, el segmento de recta $y = (r/h)x$, $0 \le x \le h$.

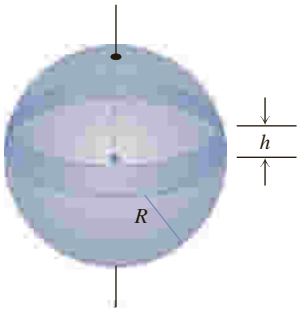
T **27. Esmaltado de sartenes** La compañía donde trabaja decidió producir una versión de lujo de la exitosa sartén que usted diseñó. El plan es recubrir la parte interior con un esmalte blanco y la exterior con un esmalte azul. Cada esmalte se aplicará en una capa de 0.5 mm de espesor antes de hornear la sartén (vea la figura). El departamento de manufactura necesita saber cuánto esmalte debe tener disponible para producir 5000 sartenes. ¿Qué les diría? (Ignore el material que se desperdicia y el que no se usa, y dé su respuesta en litros. Recuerde que $1\ \text{cm}^3 = 1\ \text{mL}$, de modo que $1\ \text{L} = 1000\ \text{cm}^3$).



28. Rebanadas de pan ¿Sabía que si corta una pieza esférica de pan, en rebanadas del mismo ancho, cada una tendrá la misma cantidad de corteza? Para ver por qué, suponga que el semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ que se muestra aquí, se hace girar alrededor del eje x para generar una esfera. Sea AB un arco del semicírculo que está arriba del intervalo de longitud h en el eje x. Demuestre que el área generada por AB no depende de la ubicación del intervalo (pero sí depende de la longitud del intervalo).



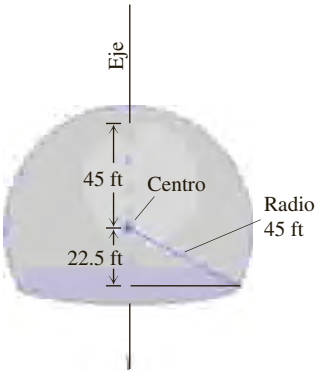
29. La banda sombreada que se muestra a continuación se corta de una esfera de radio R, por medio de planos paralelos separados una distancia h. Demuestre que el área de la superficie de la banda es $2\pi Rh$.



30. A continuación se presenta un diagrama del domo de 90 ft, utilizado por el Servicio Meteorológico Nacional de Estados Unidos para alojar un radar en Boseman, Montana.

a) ¿A cuánto equivale la superficie exterior que se requiere pintar (sin tomar en cuenta la parte inferior)?

T ***b)*** Redondee la respuesta al pie cuadrado más cercano.

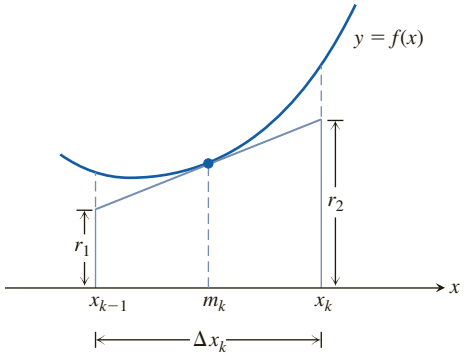


31. Deducción alternativa de la fórmula para calcular el área de una superficie Suponga que f es suave en $[a, b]$ y que $[a, b]$ se divide en la forma usual. En el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se construye la recta tangente a la curva en el punto medio $m_k = (x_{k-1} + x_k)/2$, como se muestra en la siguiente figura.

a) Demuestre que

$$r_1 = f(m_k) - f'(m_k)\frac{\Delta x_k}{2} \quad \text{y} \quad r_2 = f(m_k) + f'(m_k)\frac{\Delta x_k}{2}.$$

b) Demuestre que la longitud L_k del segmento de recta tangente en el k-ésimo subintervalo es $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(m_k)\,\Delta x_k)^2}$.

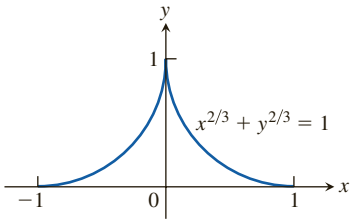


c) Demuestre que el área de la superficie lateral del cono truncado que se genera al hacer girar el segmento de recta tangente, alrededor del eje x, es $2\pi f(m_k)\sqrt{1 + (f'(m_k))^2}\,\Delta x_k$.

d) Demuestre que el área de la superficie generada al hacer girar $y = f(x)$ alrededor del eje x en $[a, b]$ es

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix}\text{área de la superficie}\\ \text{lateral del } k\text{-ésimo cono}\end{pmatrix} = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

32. Superficie de un astroide Determine el área de la superficie generada al hacer girar, alrededor del eje x, la parte de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ que se muestra a continuación. (*Sugerencia:* Haga girar la parte del primer cuadrante $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$, $0 \le x \le 1$, alrededor del eje x, y multiplique su resultado por 2).



6.5 Trabajo y fuerzas de fluidos

En la vida cotidiana, el término *trabajo* hace referencia a una actividad que requiere esfuerzo muscular o mental. En la ciencia, este concepto alude específicamente a una fuerza que actúa sobre un cuerpo y al consecuente desplazamiento del cuerpo. En esta sección veremos cómo se calcula el trabajo. Las aplicaciones van desde la compresión de resortes en vagones de ferrocarril y el drenado de tanques subterráneos, hasta la colisión inducida de partículas subatómicas y la puesta en órbita de satélites.

Trabajo realizado por una fuerza constante

Cuando un objeto se desplaza una distancia d a lo largo de una recta como resultado de la aplicación de una fuerza de magnitud constante F, en la dirección del movimiento, el **trabajo** W realizado por la fuerza sobre el objeto se define con la fórmula

$$W = Fd \quad \text{(Fórmula para calcular el trabajo con una fuerza constante).} \tag{1}$$

En la ecuación (1) vemos que la unidad de trabajo en cualquier sistema es la unidad de fuerza multiplicada por la unidad de distancia. En unidades del Sistema Internacional (SI), la unidad de fuerza es el newton y la unidad de distancia es el metro, por lo que la unidad de trabajo es el newton-metro (N · m). Esta combinación aparece con frecuencia y tiene un nombre especial: **joule**. En el sistema inglés la unidad de trabajo es la libra-pie, que algunas veces se usa en las aplicaciones.

Joules
El joule (abreviado como J) recibió ese nombre en honor del físico británico James Prescott Joule (1818-1889). La ecuación que lo define es

1 joule = (1 newton)(1 metro).

En símbolos, 1 J = 1 N · m.

EJEMPLO 1 Suponga que usted emplea un gato hidráulico para levantar un lado de su automóvil de 2000 lb, una distancia de 1.25 ft, para cambiar un neumático. El gato aplica una fuerza vertical constante de 1000 lb aproximadamente para levantar el lado del automóvil (pero debido a la ventaja mecánica del gato, la fuerza que usted aplica es sólo de 30 lb). El trabajo total realizado por el gato sobre el automóvil es de $1000 \times 1.25 = 1250$ lb-ft. En unidades del SI, el gato aplicó una fuerza de 4448 N a lo largo de una distancia de 0.381 m para realizar $4448 \times 0.381 \approx 1695$ J de trabajo. ■

Trabajo realizado por una fuerza variable a lo largo de una recta

Si la fuerza que se aplica varía durante el proceso, como ocurre al comprimir o estirar un resorte, la fórmula $W = Fd$ tiene que sustituirse por una fórmula integral que tome en cuenta la variación de F.

Suponga que la fuerza que realiza el trabajo actúa sobre un objeto que se desplaza a lo largo de una recta que consideraremos como el eje x; la magnitud de la fuerza es una función continua F de la posición x. Queremos determinar el trabajo realizado en el intervalo de $x = a$ a $x = b$. Hacemos una partición de $[a, b]$ en la forma usual, y elegimos un punto arbitrario c_k en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Si el subintervalo es suficientemente pequeño, la función continua F no variará mucho de x_{k-1} a x_k. La cantidad de trabajo realizada a través

del intervalo será aproximadamente $F(c_k)$ por la distancia Δx_k, la misma que obtendríamos si F fuera constante y aplicáramos la ecuación (1). Por lo tanto, el trabajo total realizado de a a b es aproximado por la suma de Riemann

$$\text{Trabajo} \approx \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\,\Delta x_k.$$

Se espera que la aproximación mejore cuando la norma de la partición tienda a cero, por lo que definimos el trabajo realizado por la fuerza de a a b como la integral de F de a a b:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\,\Delta x_k = \int_a^b F(x)\,dx.$$

DEFINICIÓN El **trabajo** realizado por una fuerza variable $F(x)$ al mover un objeto a lo largo del eje x de $x = a$ a $x = b$ es

$$W = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{2}$$

Las unidades de la integral son joules si F está en newtons y x en metros, y libras-pie si F está en libras y x en pies. Entonces, el trabajo realizado por la fuerza $F(x) = 1/x^2$ newtons al mover un objeto a lo largo del eje x de $x = 1$ m a $x = 10$ m es

$$W = \int_1^{10} \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = 0.9 \text{ J}.$$

Ley de Hook para resortes: $F = kx$

Con frecuencia se tiene que calcular el trabajo requerido para estirar o comprimir un resorte. La **ley de Hook** afirma que la fuerza requerida para estirar o comprimir un resorte x unidades de longitud, a partir de su longitud natural (esto es, sin estirar) es proporcional a x. En símbolos,

$$F = kx. \tag{3}$$

La constante k se mide en unidades de fuerza por unidad de longitud, y es una característica del resorte conocida como **constante de fuerza** del resorte (o **constante del resorte**). La ley de Hooke (ecuación 3) da buenos resultados siempre que la fuerza no distorsione el metal del resorte. En esta sección supondremos que las fuerzas son muy pequeñas para hacerlo.

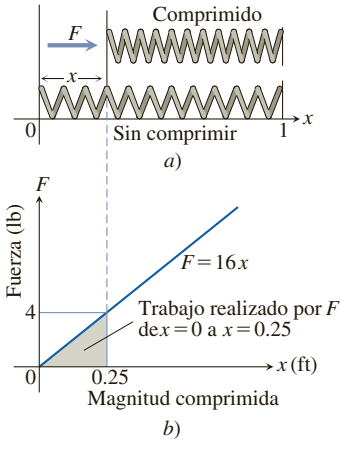


FIGURA 6.36 La fuerza necesaria F para mantener un resorte bajo compresión aumenta linealmente conforme se comprime el resorte (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Calcule el trabajo requerido para comprimir un resorte desde su longitud natural de 1 ft a una longitud de 0.75 ft, si la constante de fuerza es $k = 16$ lb/ft.

Solución Dibujamos el resorte sin comprimir sobre el eje x con el extremo que se mueve ubicado en el origen y el extremo fijo en $x = 1$ ft (figura 6.36). Esto nos facilita describir la fuerza requerida para comprimir el resorte de 0 a x con la fórmula $F = 16x$. Para comprimir el resorte de 0 a 0.25 ft, la fuerza se debe incrementar de

$$F(0) = 16 \cdot 0 = 0 \text{ lb} \quad \text{a} \quad F(0.25) = 16 \cdot 0.25 = 4 \text{ lb}.$$

El trabajo realizado por F en este intervalo es

$$W = \int_0^{0.25} 16x\,dx = 8x^2\Big]_0^{0.25} = 0.5 \text{ lb-ft}.$$

Ecuación (2) con $a = 0$, $b = 0.25$, $F(x) = 16x$

■

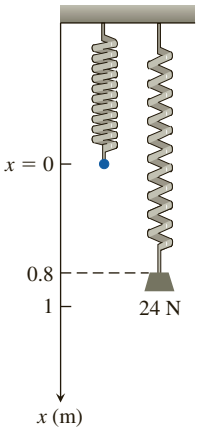


FIGURA 6.37 Un peso de 24 N estira este resorte 0.8 m más allá de su longitud natural (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Un resorte tiene una longitud natural de 1 m. Una fuerza de 24 N mantiene el resorte estirado hasta una longitud total de 1.8 m.

a) Obtenga la constante de fuerza k.

b) ¿Cuánto trabajo se requerirá para estirar el resorte hasta 2 m más allá de su longitud natural?

c) ¿Hasta qué longitud se estirará el resorte si le aplicamos una fuerza de 45 N?

Solución

a) *Constante de fuerza*. La constante de fuerza se obtiene con la ecuación (3). Una fuerza de 24 N estira el resorte 0.8 m a partir de su posición natural, de modo que

$$24 = k(0.8)$$
$$k = 24/0.8 = 30 \text{ N/m}.$$

Ecuación (3) con $F = 24$, $x = 0.8$

b) *Trabajo para estirar el resorte* 2 m. Imaginemos que el resorte sin estirar cuelga a lo largo del eje x con su extremo libre en $x = 0$ (figura 6.37). La fuerza requerida para estirar el resorte x m más allá de su longitud natural es la fuerza que se requiere para mantener el extremo libre del resorte a x unidades desde el origen. La ley de Hooke, con $k = 30$, establece que esta fuerza es

$$F(x) = 30x.$$

El trabajo realizado por F sobre el resorte desde $x = 0$ hasta $x = 2$ es

$$W = \int_0^2 30x\,dx = 15x^2\Big]_0^2 = 60 \text{ J}.$$

c) *¿Hasta qué longitud se estira el resorte con una fuerza de* 45 N? Sustituimos $F = 45$ en la ecuación $F = 30x$ para obtener

$$45 = 30x, \quad \text{o} \quad x = 1.5 \text{ m}.$$

Una fuerza de 45 N estirará el resorte 1.5 m más allá de su longitud natural. ■

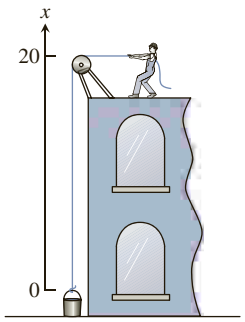


FIGURA 6.38 La elevación de un cubo del ejemplo 4.

Elevación de objetos y bombeo de líquidos desde contenedores

La integral de trabajo sirve para calcular el trabajo realizado en la elevación de objetos cuyos pesos varían con la elevación.

EJEMPLO 4 Se eleva un cubo de 5 lb desde el suelo tirando de él con una cuerda de 20 ft a una velocidad constante (figura 6.38). La cuerda pesa 0.08 lb/ft. ¿Cuánto trabajo se realiza al elevar el cubo con la cuerda?

Solución El cubo tiene peso constante, de manera que el trabajo realizado al elevarlo es sólo su peso × distancia = 5 · 20 = 100 lb-ft.

El peso de la cuerda varía con la elevación del cubo porque cada vez menos cuerda cuelga libremente. Cuando el cubo está a x ft del suelo, la parte restante de la cuerda que aún se está elevando pesa $(0.08) \cdot (20 - x)$ lb. Así, el trabajo realizado para elevar la cuerda es

$$\text{Trabajo sobre la cuerda} = \int_0^{20} (0.08)(20 - x)\,dx = \int_0^{20} (1.6 - 0.08x)\,dx$$
$$= \left[1.6x - 0.04x^2\right]_0^{20} = 32 - 16 = 16 \text{ lb-ft}.$$

El trabajo total realizado sobre el cubo y la cuerda es

$$100 + 16 = 116 \text{ lb-ft}.$$ ■

¿Cuánto trabajo se realiza al bombear todo o parte de un líquido desde un contenedor? Los ingenieros a menudo necesitan conocer la respuesta para diseñar o elegir la bomba correcta, o para calcular el costo de transportar agua o algún otro líquido de un lugar a otro. Para saber cuánto trabajo se requiere para bombear un líquido, imagine que se eleva una

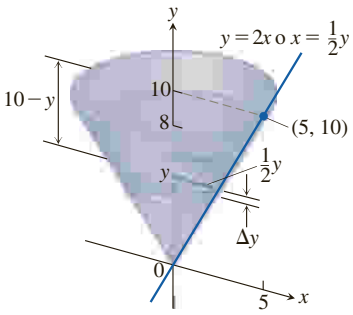


FIGURA 6.39 El aceite de olivo y el tanque del ejemplo 5.

capa delgada horizontal del líquido cada vez y aplique la fórmula $W = Fd$ a cada capa. Luego, evaluamos la integral que se obtiene cuando consideramos capas cada vez más delgadas y numerosas. La integral que obtenemos cada vez depende del peso del líquido y de las dimensiones del contenedor, pero la forma de determinar la integral siempre es la misma. El siguiente ejemplo muestra cómo hacerlo.

EJEMPLO 5 El tanque cónico de la figura 6.39 se llena hasta 2 ft por debajo de la parte superior con aceite de olivo, que pesa 57 lb/ft^3. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear el aceite hasta el borde del tanque?

Solución Imagine que el aceite se divide en capas delgadas con planos perpendiculares al eje y en los puntos de una partición del intervalo $[0, 8]$.

Una capa típica entre los planos en y y $y + \Delta y$ tiene un volumen aproximado de

$$\Delta V = \pi(\text{radio})^2(\text{espesor}) = \pi\left(\frac{1}{2}y\right)^2 \Delta y = \frac{\pi}{4}y^2\,\Delta y \text{ ft}^3.$$

La fuerza $F(y)$ requerida para elevar esta capa es igual a su peso,

$$F(y) = 57\,\Delta V = \frac{57\pi}{4}y^2\,\Delta y \text{ lb.} \qquad \begin{array}{l}\text{Peso = (peso por unidad}\\ \text{de volumen} \times \text{volumen)}\end{array}$$

La distancia a través de la cual $F(y)$ debe actuar para elevar esta capa al nivel del borde del cono es aproximadamente $(10 - y)$ ft, así que el trabajo realizado para elevar la capa es aproximadamente

$$\Delta W = \frac{57\pi}{4}(10 - y)y^2\,\Delta y \text{ lb-ft.}$$

Suponiendo que existen n capas asociadas con la partición de $[0, 8]$ y que $y = y_k$ denota el plano asociado con la k-ésima capa de espesor Δy_k, podemos aproximar el trabajo realizado al elevar todas las capas, mediante la suma de Riemann

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{57\pi}{4}(10 - y_k){y_k}^2\,\Delta y_k \text{ lb-ft.}$$

El trabajo de bombear el aceite hasta el borde es el límite de estas sumas, cuando la norma de la partición tiende a cero y el número de capas tiende a infinito:

$$\begin{aligned} W = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{57\pi}{4}(10 - y_k)y_k^2\,\Delta y_k &= \int_0^8 \frac{57\pi}{4}(10 - y)y^2\,dy \\ &= \frac{57\pi}{4}\int_0^8 (10y^2 - y^3)\,dy \\ &= \frac{57\pi}{4}\left[\frac{10y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^8 \approx 30{,}561 \text{ lb-ft.} \end{aligned}$$

■

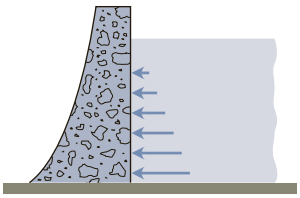


FIGURA 6.40 Para resistir la presión creciente, las cortinas de las presas se construyen más gruesas conforme se desciende a la base.

Presión y fuerzas en fluidos

Las cortinas de las presas se construyen más gruesas en la base que en la parte superior (figura 6.40), porque la presión del agua contra la pared se incrementa con la profundidad. La presión en cualquier punto de la cortina depende sólo de la profundidad y no de la inclinación que pueda tener la cortina en ese punto. En un punto ubicado a h pies por debajo de la superficie, la presión, en libras por pie cuadrado, siempre es igual a $62.4h$. El número 62.4 es el peso-densidad del agua dulce en libras por pie cúbico. La presión a los h pies por debajo de la superficie de cualquier fluido es el *peso-densidad* del fluido multiplicado por h.

Densidad

El peso-densidad w de un fluido es el peso por unidad de volumen. Algunos valores comunes de densidad son (en lb/ft^3).

Gasolina	42
Mercurio	849
Leche	64.5
Melaza	100
Aceite de olivo	57
Agua de mar	64
Agua	62.4

Ecuación de presión-profundidad

En un fluido en reposo, la presión p a una profundidad h es el peso-densidad del fluido, w, multiplicado por h:

$$p = wh. \tag{4}$$

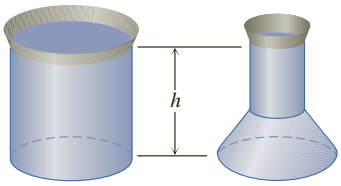


FIGURA 6.41 Estos contenedores están llenos de agua a la misma profundidad, y sus bases tienen la misma área. Por lo tanto, la fuerza total es la misma en la base de cada contenedor. Aquí no importa la forma de los contenedores.

En el contenedor de un fluido con base horizontal plana, la fuerza total ejercida por el fluido sobre la base se calcula multiplicando el área de la base por la presión en la base. Esto es posible porque la fuerza total es igual a la fuerza por unidad de área (presión) multiplicada por el área. (Vea la figura 6.41). Si F, p y A representan la fuerza total, la presión y el área, respectivamente, entonces,

$$\begin{aligned} F &= \text{fuerza total} = \text{fuerza por unidad de área} \times \text{área} \\ &= \text{presión} \times \text{área} = pA \\ &= whA. \end{aligned} \qquad p = wh \text{ según la ec. (4)}$$

Fuerza de un fluido sobre una superficie a profundidad constante

$$F = pA = whA \tag{5}$$

Por ejemplo, el peso-densidad del agua dulce es igual a 62.4 lb/ft^3, de modo que la fuerza del fluido en la parte inferior de una piscina rectangular de 10 ft $\times$ 20 ft y 3 ft de profundidad es

$$\begin{aligned} F = whA &= (62.4 \text{ lb/ft}^3)(3 \text{ ft})(10 \cdot 20 \text{ ft}^2) \\ &= 37{,}440 \text{ lb}. \end{aligned}$$

En el caso de una placa plana sumergida *horizontalmente*, como el fondo de la piscina que se acaba de describir, la fuerza hacia abajo que actúa sobre la cara superior de la placa, debida a la presión del líquido, está dada por la ecuación (5). Sin embargo, si la placa se sumerge *verticalmente*, la presión contra ella será distinta a diferentes profundidades, así que ya no es posible utilizar la ecuación (5) (ya que h varía).

Suponga que deseamos conocer la fuerza ejercida por un fluido contra una cara de una placa vertical sumergida en un fluido de peso-densidad w. Para calcularla, modelamos la placa como una región que se extiende de $y = a$ a $y = b$ en el plano xy (figura 6.42). Dividimos $[a, b]$ de la manera usual, e imaginamos que la región se divide, con planos perpendiculares al eje y, en bandas horizontales angostas, en los puntos de la partición. La banda típica de y a $y + \Delta y$ tiene Δy unidades de ancho por $L(y)$ unidades de largo. Suponemos que $L(y)$ es una función continua de y.

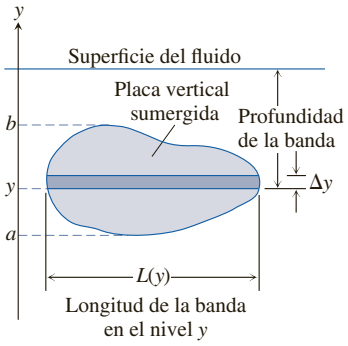


FIGURA 6.42 La fuerza ejercida por un fluido contra la cara de una banda delgada horizontal es aproximadamente $\Delta F = \text{presión} \times \text{área} = w \times (\text{profundidad de la banda}) \times L(y)\Delta y$.

La presión varía a través de la banda, de la parte superior a la parte inferior. Sin embargo, si la banda es lo suficientemente angosta, la presión permanecerá cerca del valor en el extremo inferior y ahí es igual a $w \times$ (profundidad de la banda). La fuerza ejercida por el fluido sobre una cara de la banda será aproximadamente de

$$\begin{aligned} \Delta F &= (\text{presión a lo largo del extremo inferior}) \times (\text{área}) \\ &= w \cdot (\text{profundidad de la banda}) \cdot L(y)\,\Delta y. \end{aligned}$$

Suponga que hay n bandas asociadas con la partición de $a \le y \le b$, y que y_k es el extremo inferior de la k-ésima banda de longitud igual a $L(y_k)$ y ancho Δy_k. La fuerza contra toda la placa es aproximadamente la suma de las fuerzas contra cada banda, lo que da la suma de Riemann

$$F \approx \sum_{k=1}^{n} (w \cdot (\text{profundidad de la banda})_k \cdot L(y_k))\,\Delta y_k. \tag{6}$$

La suma de la ecuación (6) es una suma de Riemann para una función continua en $[a, b]$, y se espera que las aproximaciones mejoren cuando la norma de la partición tienda a cero. La fuerza contra la placa es el límite de estas sumas:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(w \cdot \begin{pmatrix}\text{profundidad}\\ \text{de la banda}\end{pmatrix}_k \cdot L(y_k)\right) \Delta y_k = \int_a^b w \cdot \begin{pmatrix}\text{profundidad}\\ \text{de la banda}\end{pmatrix} \cdot L(y)\,dy.$$

Integral de la fuerza de un fluido contra una placa vertical plana
Suponga que una placa sumergida verticalmente en un fluido de densidad w va de $y = a$ a $y = b$ en el eje y. Sea $L(y)$ la longitud de la banda horizontal medida de izquierda a derecha a lo largo de la superficie de la placa en el nivel y. Entonces, la fuerza ejercida por el fluido contra una cara de la placa es

$$F = \int_a^b w \cdot (\text{profundidad de la banda}) \cdot L(y)\, dy. \tag{7}$$

EJEMPLO 6 Una placa plana en forma de triángulo rectángulo isósceles, con base de 6 ft y altura de 3 ft, se sumerge verticalmente, con la base hacia arriba, 2 ft por debajo de la superficie de una piscina. Determine la fuerza ejercida por el agua contra una cara de la placa.

Solución Establecemos un sistema de coordenadas para trabajar, colocando el origen en el vértice inferior de la placa y el eje y hacia arriba sobre el eje de simetría de la placa (figura 6.43). La superficie de la piscina está a lo largo de la recta $y = 5$ y el lado superior de la placa a lo largo de la recta $y = 3$. El lado derecho de la placa está a lo largo de la recta $y = x$, con el vértice superior derecho en (3, 3). La longitud de una banda delgada en el nivel y es

$$L(y) = 2x = 2y.$$

La profundidad de la banda por debajo de la superficie es $(5 - y)$. Por lo tanto, la fuerza ejercida por el agua contra una cara de la placa es

$$F = \int_a^b w \cdot \left(\begin{array}{c}\text{profundidad}\\ \text{de la banda}\end{array}\right) \cdot L(y)\, dy \qquad \text{Ecuación (7)}$$

$$= \int_0^3 62.4(5 - y)2y\, dy$$

$$= 124.8 \int_0^3 (5y - y^2)\, dy$$

$$= 124.8\left[\frac{5}{2}y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^3 = 1684.8 \text{ lb}. \quad \blacksquare$$

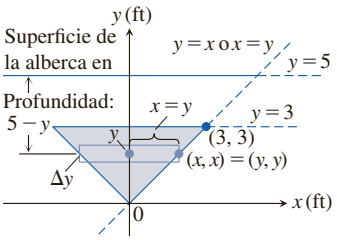


FIGURA 6.43 Para obtener la fuerza ejercida sobre una cara de la placa sumergida del ejemplo 6, podemos utilizar un sistema de coordenadas como el que se muestra aquí.

Ejercicios 6.5

Resortes

1. **Constante del resorte** Se necesitaron 1800 J de trabajo para estirar un resorte a partir de su longitud natural de 2 m a una longitud de 5 m. Determine la constante del resorte.
2. **Estiramiento de un resorte** Un resorte tiene una longitud natural de 10 in. Una fuerza de 800 lb lo estira hasta 14 in.
   a) Determine la constante del resorte.
   b) ¿Cuánto trabajo se requiere para alargar el resorte de 10 in a 12 in?
   c) ¿Qué tanto se estirará el resorte con respecto a su longitud natural si se aplica una fuerza de 1600 lb?
3. **Estiramiento de una banda elástica** Una fuerza de 2 N estira una banda elástica 2 cm (0.02 m). Suponiendo que en este caso se cumple la ley de Hooke, ¿cuánto se estirará la banda al aplicarle una fuerza de 4 N? ¿Cuánto trabajo se realizará para estirar la banda esa longitud?
4. **Estiramiento de un resorte** Si una fuerza de 90 N estira un resorte 1 m más allá de su longitud natural, ¿cuánto trabajo se requiere para estirarlo 5 m a partir de su longitud natural?
5. **Resortes de un tren subterráneo** Se requiere una fuerza de 21,714 lb para comprimir un resorte de bobina en el tren subterráneo de la ciudad de Nueva York, desde su altura original de 8 in hasta una altura completamente comprimida de 5 in.
   a) ¿Cuál es la constante del resorte?
   b) ¿Cuánto trabajo se requiere para comprimir el resorte la primera media pulgada? ¿Y para comprimirlo la segunda media pulgada? Redondee a la lb-in más cercana.
6. **Báscula de baño** Una báscula de baño se comprime 1/16 de in cuando se sube en ella una persona de 150 lb. Suponiendo que la báscula se comporta como un resorte que cumple la ley de Hooke, ¿cuánto pesa alguien que comprime la báscula 1/8 de in? ¿Cuánto trabajo se realiza al comprimir la báscula 1/8 de in?

Trabajo realizado por una fuerza variable

7. Elevación de una cuerda Un alpinista está a punto de recoger una cuerda de 50 m de longitud que cuelga. ¿Cuánto trabajo se requiere si la cuerda pesa 0.624 N/m?

8. Bolsa de arena agujerada Se eleva una bolsa de arena a una velocidad constante. La bolsa pesaba originalmente 144 lb; mientras se subía, la arena de su interior salía a un ritmo constante. Cuando la bolsa se había elevado 18 ft, la bolsa había perdido la mitad de la arena. ¿Cuánto trabajo se realizó al subir la arena hasta esa altura? (No tome en cuenta el peso de la bolsa ni el del equipo que se utiliza para subirla).

9. Elevación del cable de un elevador Un elevador eléctrico con el motor en la parte superior tiene un cable, con varios cabos, que pesa 4.5 lb/ft. Cuando el carro del elevador está en el primer piso, el cable se extiende 180 ft, y cuando está en el último piso, el cable se extiende 0 ft. ¿Cuánto trabajo realiza el motor para elevar sólo el cable, cuando sube el carro del primero al último piso?

10. Fuerza de atracción Cuando una partícula de masa m está en $(x, 0)$, es atraída hacia el origen con una fuerza de magnitud k/x^2. Si la partícula parte del reposo en $x = b$ y no actúa sobre ella ninguna otra fuerza, determine el trabajo realizado sobre ella cuando llega a $x = a$, $0 < a < b$.

11. Cubo perforado Suponga que el cubo del ejemplo 4 está perforado. Al principio, contiene 2 galones de agua (16 lb) y gotea a un ritmo constante. Justo cuando llega a la parte superior, termina de vaciarse. ¿Cuánto trabajo se realizó para subir sólo el agua? (*Sugerencia:* No tome en cuenta la cuerda ni el cubo y determine la proporción de agua que ha salido a la altura de x ft).

12. (*Continuación del ejercicio 11*). Los trabajadores del ejemplo 4 y el ejercicio 11 utilizaron un cubo más grande, que contenía 5 galones (40 libras) de agua, pero con un orificio de mayores dimensiones, así que también llegó vacío a la parte superior. Suponiendo que el agua sale a ritmo constante, ¿cuánto trabajo se realizó al subir sólo el agua? (No tome en cuenta la cuerda ni el cubo).

Bombeo de líquidos desde contenedores

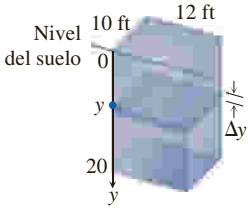
13. Bombeo de agua El tanque rectangular que se ilustra a continuación, con su parte superior al nivel del suelo, se utiliza para recolectar escurrimientos de agua. Suponga que el agua pesa 62.4 lb/ft^3.

a) Una vez que el tanque está lleno, ¿cuánto trabajo se requiere para vaciarlo, bombeando el agua al nivel del suelo?

b) Si el agua se bombea al nivel del suelo con un motor de (5/11) caballos de fuerza (hp) (con un rendimiento de 250 lb-ft/s), ¿cuánto tiempo tardará el tanque en vaciarse? (Redondee su respuesta al minuto más cercano).

c) Demuestre que la bomba del inciso *b)* hará bajar el nivel a 10 ft (la mitad) durante los primeros 25 minutos de bombeo.

***d)* Peso del agua** ¿Cuáles serían las respuestas a los incisos *a)* y *b)* si el agua pesa 62.26 lb/ft^3? ¿Cuáles serían cuando pesa 62.59 lb/ft^3?



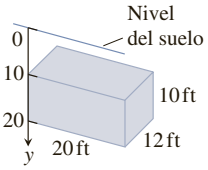
14. Vaciado de una cisterna La cisterna rectangular (un tanque de almacenamiento para recolectar el agua de lluvia) que se ilustra más adelante tiene su parte superior 10 ft por debajo del nivel del suelo. La cisterna, actualmente llena, se vaciará para inspeccionarla, bombeando su contenido al nivel del suelo.

a) ¿Cuánto trabajo se realizará para vaciar la cisterna?

b) ¿Cuánto tardará en vaciar el tanque una bomba de 1/2 hp, con una eficiencia de 275 lb-ft/s?

c) ¿Cuánto tardará la bomba del inciso *b)* en vaciar la mitad del tanque? (Es menos de la mitad del tiempo que se requiere para vaciarlo por completo).

***d)* Peso del agua** ¿Cuáles serían las respuestas a los incisos *a)* a *c)* cuando el agua pesa 62.26 lb/ft^3? ¿Cuáles serían cuando pesa 62.59 lb/ft^3?



15. Bombeo de aceite ¿Cuánto trabajo se requeriría para bombear el aceite del ejemplo 5 al nivel de la parte superior del tanque, si éste estuviera completamente lleno?

16. Bombeo de un tanque medio lleno Suponga que, en lugar de estar lleno, el tanque del ejemplo 5 sólo contiene aceite hasta la mitad de su capacidad. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear el aceite que queda a un nivel de 4 ft por encima de la parte superior del tanque?

17. Vaciado de un tanque Un tanque en forma de cilindro circular recto mide 30 ft de altura y 20 ft de diámetro. Está lleno de queroseno que pesa 51.2 lb/ft^3. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear el queroseno al nivel de la parte superior del tanque?

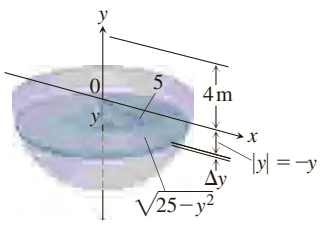
18. *a)* Bombeo de leche Suponga que el contenedor cónico del ejemplo 5 contiene leche (que pesa 64.5 lb/ft^3), en lugar de aceite de olivo. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear el contenido al borde del contenedor?

***b)* Bombeo de aceite** ¿Cuánto trabajo se requerirá para bombear el aceite del ejemplo 5 a un nivel de 3 ft por encima del borde del cono?

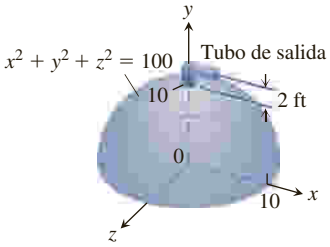
19. La gráfica de $y = x^2$ en $0 \le x \le 2$ gira alrededor del eje y para formar un tanque que se llena con agua salada del Mar Muerto (que pesa aproximadamente 73 lb/ft^3). ¿Cuánto trabajo se realiza al bombear toda el agua a la parte superior del tanque?

20. Un tanque en forma de cilindro circular recto con altura de 10 ft y radio igual a 5 ft se encuentra en posición horizontal y está lleno de diesel que pesa 53 lb/ft^3. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear todo el combustible a un punto a 15 ft por encima de la parte superior del tanque?

21. Vaciado de un depósito de agua Modelamos el bombeo de contenedores esféricos como lo hacemos para otros contenedores, con el eje de integración a lo largo del eje vertical de la esfera. Analice la siguiente figura y determine cuánto trabajo se requiere para vaciar el depósito semiesférico de radio igual a 5, si está lleno, y el agua se bombea a una altura de 4 m por encima de la parte superior del depósito. El agua pesa 9800 N/m^3.



22. Usted está a cargo del vaciado y reparación del tanque de almacenamiento que se ilustra a continuación. El tanque es una semiesfera de radio igual a 10 ft y está completamente lleno de benceno, que pesa 56 lb/ft^3. Una compañía le dice que puede vaciar el tanque cobrando 1/2 centavo por lb-ft de trabajo. Determine el trabajo requerido para vaciar el tanque bombeando el benceno hasta una salida a 2 ft por encima del nivel superior del tanque. Si tiene un presupuesto de $5000 para el trabajo, ¿podrá contratar a la compañía para que lo vacíe?



Trabajo y energía cinética

23. Energía cinética Si una fuerza variable de magnitud $F(x)$ mueve un objeto de masa m a lo largo del eje x desde x_1 hasta x_2, la velocidad del cuerpo v puede representarse como dx/dt (donde t representa el tiempo). Utilice la segunda ley de Newton para el movimiento $F = m(dv/dt)$ y la regla de la cadena

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

para demostrar que el trabajo neto realizado por la fuerza al mover el cuerpo de x_1 a x_2 es

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2,$$

donde v_1 y v_2 son las velocidades del objeto en x_1 y x_2. En física, la expresión $(1/2)mv^2$ se denomina *energía cinética* de un cuerpo de masa m que se mueve con una velocidad v. Por lo tanto, el *trabajo realizado por la fuerza es igual al cambio en la energía cinética del cuerpo*, y podemos determinar el trabajo calculando este cambio.

En los ejercicios 24 a 28, use el resultado del ejercicio 23.

24. Tenis Una pelota de tenis de 2 onzas fue lanzada en un servicio a 160 ft/s (casi 109 millas/hora). ¿Cuánto trabajo se realizó sobre la pelota para alcanzar esa velocidad? (Para determinar la masa de la pelota a partir de su peso, exprese este último en libras y divida entre 32 ft/s^2, que es la aceleración debida a la gravedad).

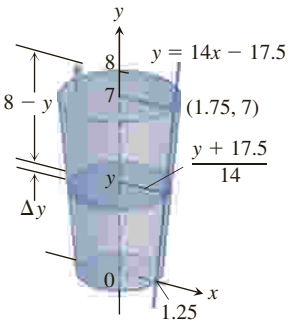
25. Béisbol ¿Cuántas lb-ft de trabajo se requieren para lanzar una pelota de béisbol a 90 millas/hora? Una pelota de béisbol pesa 5 onzas o 0.3125 lb.

26. Golf Una pelota de golf de 1.6 onzas se despeja del *tee* a una velocidad de 280 ft/s (casi 191 millas/hora). ¿Cuántas lb-ft de trabajo se realizaron sobre la pelota para lanzarla al aire?

27. El 11 de junio de 2004, en un partido de tenis entre Andy Roddick y Paradorn Srichaphan en el torneo Stella Artois de Londres, Inglaterra, Roddick lanzó un servicio con una velocidad de 153 millas/hora. ¿Cuánto trabajo realizó Andy para hacer el servicio con una pelota de tenis de 2 onzas a esa rapidez?

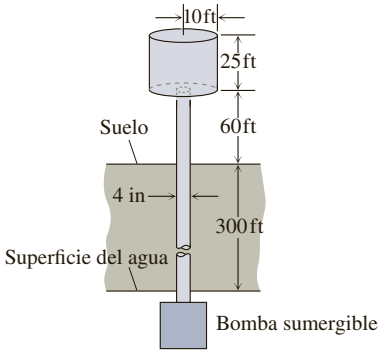
28. Softbol ¿Cuánto trabajo tiene que realizarse sobre una pelota de softbol de 6.5 onzas para lanzarla a 132 ft/s (90 millas/hora)?

29. Beber una malteada El contenedor en forma de cono truncado que se ilustra a continuación está lleno de malteada de fresa, que pesa 4/9 onzas/in^3. Como se observa, el contenedor mide 7 in de profundidad, 2.5 in de diámetro en la base y 3.5 in de diámetro en la parte superior (un tamaño estándar en una nevería de Boston). La pajilla sobresale una pulgada por encima de la parte superior. ¿Cuánto trabajo será necesario, aproximadamente, para succionar la malteada con la pajilla? (No tome en cuenta la fricción). Dé la respuesta en onzas-pulg.



Dimensiones en pulgadas

30. Torre de agua Se ha decidido cavar un pozo para incrementar el suministro de agua en su ciudad. Como ingeniero a cargo, usted ha determinado que será necesaria una torre de agua con la finalidad de alcanzar la presión que se requiere para su distribución, así que diseñó el sistema que se muestra a continuación. El agua se bombea desde un pozo que está a 300 ft de profundidad, utilizando un tubo vertical de 4 in integrado a la base de un tanque cilíndrico de 20 ft de diámetro y 25 ft de altura. La base del tanque estará a 60 ft por encima del suelo. La bomba es de 3 hp, con una eficiencia de 1650 lb-ft/s. Redondeando el resultado a la hora más cercana, ¿cuánto tardará el tanque en llenarse la primera vez? (Incluya el tiempo necesario para que se llene el tubo). Suponga que el agua pesa 62.4 lb/ft^3.



NO ESTÁ A ESCALA

31. Colocación de un satélite en órbita La fuerza del campo gravitacional de la Tierra varía según la distancia r al centro del planeta, y la magnitud de la fuerza gravitacional experimentada por un satélite de masa m durante y después del lanzamiento es

$$F(r) = \frac{mMG}{r^2}.$$

Aquí, $M = 5.975 \times 10^{24}$ kg es la masa de la Tierra, $G = 6.6720 \times 10^{-11}$ N $\cdot$ m^{2}kg^{-2} es la constante de gravitación universal, y r se mide en metros. Por lo tanto, el trabajo que se requiere para elevar un satélite de 1000 kg desde la superficie de la Tierra hasta una órbita circular a 35,780 km de distancia del centro de la Tierra está dado por la integral

$$\text{Trabajo} = \int_{6{,}370{,}000}^{35{,}780{,}000} \frac{1000MG}{r^2}\,dr \text{ joules.}$$

Evalúe la integral. El límite inferior de integración es el radio de la Tierra, en metros, en el sitio de lanzamiento. (Este cálculo no toma en cuenta la energía que se utiliza para lanzar el vehículo, ni la energía para que el satélite alcance su velocidad orbital).

32. Fuerza para unir electrones Dos electrones separados r metros se repelen mutuamente con una fuerza de

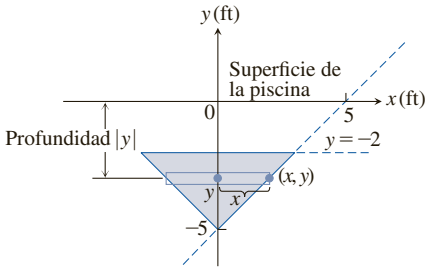
$$F = \frac{23 \times 10^{-29}}{r^2} \text{ newtons.}$$

a) Suponga que un electrón se mantiene fijo en el punto (1, 0) del eje x (unidades en metros). ¿Cuánto trabajo se requiere para mover un segundo electrón a lo largo del eje x, desde el punto (−1, 0) hasta el origen?

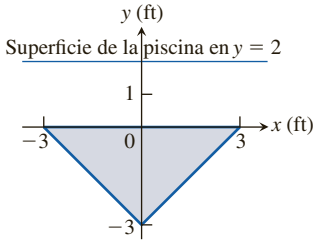
b) Suponga que los dos electrones se mantienen fijos, uno en el punto (−1, 0) y el otro en el punto (1, 0). ¿Cuánto trabajo se requiere para mover un tercer electrón a lo largo del eje x, de (5, 0) a (3, 0)?

Obtención de fuerzas de fluidos

33. Placa triangular Calcule la fuerza del fluido sobre una cara de la placa del ejemplo 6, utilizando el sistema de coordenadas que se muestra aquí.



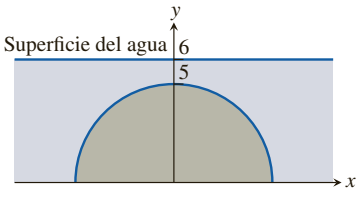
34. Placa triangular Calcule la fuerza del fluido sobre una cara de la placa del ejemplo 6, utilizando el sistema de coordenadas que se muestra aquí.



35. Placa rectangular En una piscina, llena de agua, con una profundidad de 10 ft, calcule la fuerza del fluido sobre una cara de una placa rectangular de 3 ft por 4 ft si la placa descansa verticalmente en el fondo de la piscina

a) sobre su extremo de 4 ft. ***b)*** sobre su extremo de 3 ft.

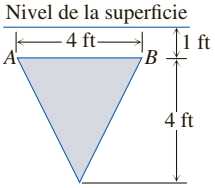
36. Placa semicircular Calcule la fuerza del fluido sobre una cara de una placa semicircular con radio de 5 ft que descansa verticalmente sobre su diámetro en el fondo de una piscina, llena de agua, a una profundidad de 6 ft.



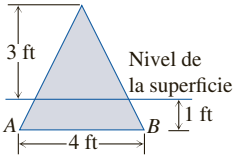
37. Placa triangular La placa en forma de triángulo isósceles que se muestra aquí está sumergida, verticalmente, 1 ft debajo de la superficie del agua de un lago.

a) Obtenga la fuerza del fluido contra una cara de la placa.

b) ¿Cuál será la fuerza del fluido sobre una cara de la placa, si el agua fuera de mar en lugar de agua dulce?



38. Placa triangular girada La placa del ejercicio 37 se hace girar 180° alrededor de la recta AB, de modo que parte de la placa sobresale del lago, como se muestra a continuación. ¿Cuál es ahora la fuerza que ejerce el agua sobre una cara de la placa?



39. Acuario de Nueva Inglaterra El visor de una ventana rectangular de vidrio en una pecera típica del acuario de Nueva Inglaterra, en Boston, mide 63 in de ancho y va de 0.5 in a 33.5 in debajo de la superficie del agua. Determine la fuerza del fluido contra esta parte de la ventana. La densidad del agua de mar es de 64 lb/ft^3. (En caso de que usted se lo pregunte, le diremos que el vidrio tiene un espesor de 3/4 de in y las paredes del tanque se extienden 4 in por arriba del nivel del agua para evitar que los peces salten al exterior).

40. Placa semicircular Una placa semicircular de 2 ft de diámetro se sumerge en agua colocando el diámetro paralelo a la superficie. Determine la fuerza ejercida por el agua sobre una cara de la placa.

41. Placa inclinada Calcule la fuerza del fluido sobre una cara de una placa cuadrada de 5 ft por lado, si la placa se encuentra en el fondo de una piscina llena de agua a una profundidad de 8 ft y

a) se encuentra sobre su cara de 5 ft por 5 ft.

b) descansa verticalmente sobre uno de sus extremos de 5 ft.

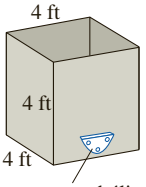
c) descansa sobre uno de sus extremos de 5 ft y se inclina 45° con respecto al fondo de la piscina.

42. Placa inclinada Calcule la fuerza del fluido sobre una cara de la placa en forma de triángulo rectángulo con lados de 3, 4 y 5 ft, si la placa descansa en el fondo de una piscina llena de agua a una profundidad de 6 ft sobre su lado de 3 ft e inclinada 60° con respecto al fondo de la piscina.

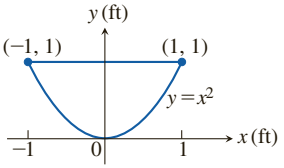
43. El tanque metálico cúbico que se ilustra a continuación tiene una compuerta parabólica, que se mantiene en su lugar por medio de tornillos, y fue diseñado para soportar una fuerza del fluido de 160 lb sin romperse. El líquido que se planea almacenar tiene una densidad de 50 lb/ft^3.

a) ¿Cuál es la fuerza del fluido sobre la compuerta cuando el líquido tiene 2 ft de profundidad?

b) ¿Cuál es la altura máxima a la que puede llenarse el depósito sin exceder sus limitaciones de diseño de la compuerta?

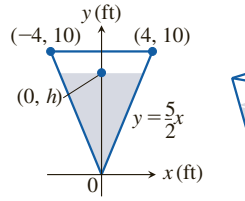


Compuerta parabólica

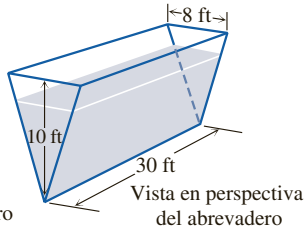


Vista ampliada de la compuerta parabólica

44. Las placas de los extremos del abrevadero que se muestra a continuación fueron diseñadas para soportar una fuerza de 6667 lb. ¿Cuántos pies cúbicos de agua puede contener el tanque sin exceder esta limitación? Redondee el resultado hacia abajo al pie cúbico más cercano. ¿Cuál es el valor de h?



Vista lateral del abrevadero

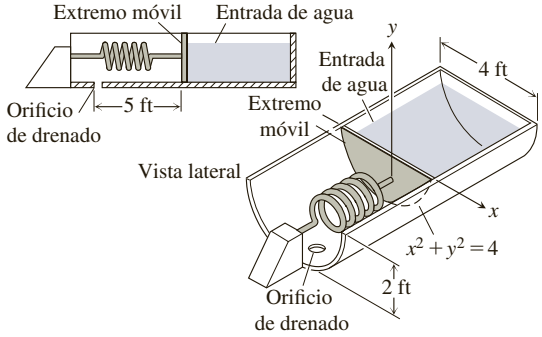


Vista en perspectiva del abrevadero

45. Una placa rectangular vertical de a unidades de largo y b unidades de ancho se encuentra sumergida en un fluido de densidad w, con sus aristas más largas paralelas a la superficie del fluido. Determine el valor promedio de la presión a lo largo de la dimensión vertical de la placa. Explique su respuesta.

46. (*Continuación del ejercicio 45*). Demuestre que la fuerza ejercida por el fluido sobre una cara de la placa es el valor promedio de la presión (obtenida en el ejercicio 45) por el área de la placa.

47. Se vierte agua en el tanque que se ilustra a continuación, a razón de 4 ft^3/min. Las secciones transversales del tanque son semicírculos de 4 ft de diámetro. Un extremo del tanque es móvil, pero al moverlo para aumentar el volumen comprime un resorte. La constante del resorte es $k = 100$ lb/ft. Si el extremo del tanque se mueve 5 ft contra el resorte, el agua se drenará por un orificio de seguridad que está en el fondo, a razón de 5 ft^3/min. ¿Alcanzará el extremo móvil el orificio antes de que el agua se derrame del tanque?



48. Abrevadero Los extremos verticales de un abrevadero son cuadrados de 3 ft por lado.

a) Determine la fuerza del fluido contra los extremos cuando el abrevadero está lleno.

b) ¿Cuántas pulgadas debe bajar el nivel del agua en el abrevadero para reducir en un 25% la fuerza del fluido?

6.6 Momentos y centros de masa

Muchas estructuras y sistemas mecánicos se comportan como si sus masas estuvieran concentradas en un solo punto, conocido como *centro de masa* (figura 6.44). Es importante saber cómo localizar este punto, y hacerlo es una tarea básicamente matemática. Por el momento, analizaremos masas distribuidas a lo largo de una recta o una región en el plano. Las masas distribuidas en regiones o curvas en el espacio tridimensional se estudiarán en los capítulos 15 y 16.

Masas a lo largo de una recta

Desarrollaremos nuestro modelo matemático por etapas. La primera consiste en imaginar las masas m_1, m_2 y m_3 en un eje x rígido apoyado por un fulcro en el origen.

Fulcro en el origen

El sistema resultante puede quedar balanceado o no, dependiendo del tamaño de las masas y de cómo estén distribuidas a lo largo del eje x.

Cada masa m_k ejerce una fuerza hacia abajo $m_k g$ (el peso de m_k) igual a la magnitud de la masa por la aceleración debida a la gravedad. Observe que la aceleración gravitacional es hacia abajo y, por lo tanto, es negativa. Cada una de estas fuerzas tiende a hacer girar el eje x alrededor del origen, del mismo modo que gira un juego de sube y baja al ponerse en acción. Este efecto de giro, denominado **torque**, se determina multiplicando la fuerza $m_k g$, por la distancia con signo, x_k, del punto de aplicación de la fuerza al origen. Por convención, un torque positivo induce un giro en contra del sentido de las manecillas del reloj. Las masas a la izquierda del origen ejercen un torque positivo (en sentido contrario al de las manecillas del reloj). Las masas a la derecha del origen ejercen un torque negativo (en el sentido de las manecillas del reloj).

La suma de los torques mide la tendencia de un sistema a girar alrededor del origen. Esta suma se conoce como **torque del sistema**.

$$\text{Torque del sistema} = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 \tag{1}$$

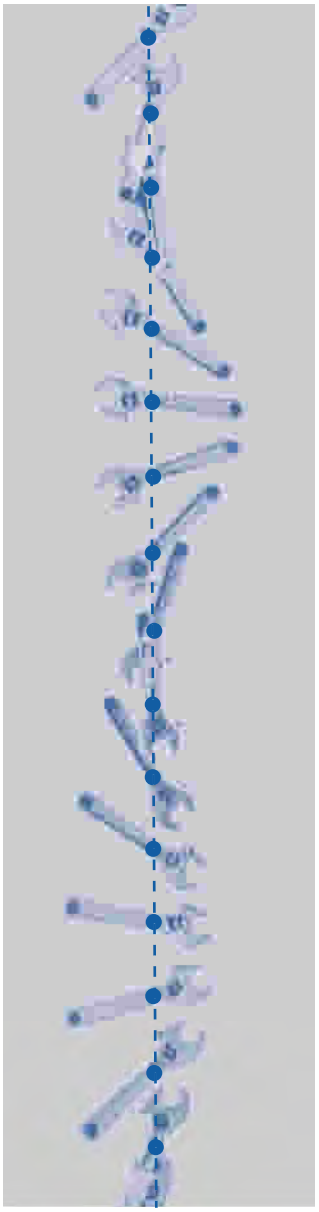


FIGURA 6.44 Una llave de tuercas deslizándose sobre el hielo alrededor de su centro de masa conforme el centro se desliza en una recta vertical. (*Fuente: PSSC Physics*, 2a. ed., reimpreso con autorización de Education Development Center, Inc.)

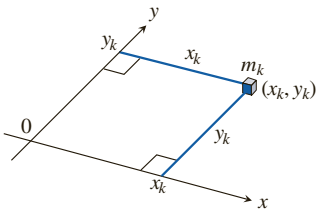


FIGURA 6.45 Cada masa m_k tiene un momento con respecto a cada eje.

El sistema quedará balanceado si y sólo si su torque es igual a cero.

Si factorizamos g en la ecuación (1), vemos que el torque del sistema es

$$\underbrace{g}_{\text{característica del medio ambiente}} \cdot \underbrace{(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)}_{\text{característica del sistema}}.$$

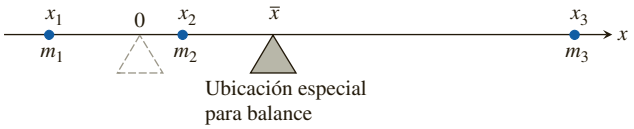
Así, el torque es el resultado de multiplicar la aceleración gravitacional g, que es una característica del medio ambiente donde se encuentre el sistema, por el número $(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$, que es una característica del sistema, una constante que es la misma sin importar dónde se ubique el sistema.

El número $(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$ se denomina **momento del sistema con respecto al origen** y es la suma de los **momentos** m_1x_1, m_2x_2, m_3x_3 de las masas individuales.

$$M_0 = \text{Momento del sistema con respecto al origen} = \sum m_kx_k$$

(Cambiamos a la notación sigma para permitir sumas con más términos).

Por lo general, se desea conocer dónde colocar el fulcro para que el sistema esté balanceado, es decir, nos interesa saber en qué punto colocar $\bar{x}$ para que la suma de los torques sea igual a cero.



En esta posición particular, el torque de cada masa con respecto al fulcro es

$$\text{Torque de } m_k \text{ con respecto a } \bar{x} = \begin{pmatrix}\text{distancia con}\\ \text{signo de } m_k \text{ a } \bar{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{fuerza}\\ \text{hacia abajo}\end{pmatrix}$$
$$= (x_k - \bar{x})m_kg.$$

Cuando escribimos la ecuación que indica que la suma de estos torques es igual a cero, obtenemos una ecuación donde se puede despejar $\bar{x}$:

$$\sum (x_k - \bar{x})m_kg = 0 \qquad \text{La suma de los torques es igual a cero.}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum m_kx_k}{\sum m_k}. \qquad \text{Se despeja } \bar{x}$$

Esta última ecuación nos permite obtener $\bar{x}$ dividiendo el momento del sistema con respecto al origen entre la masa total del sistema:

$$\bar{x} = \frac{\sum m_kx_k}{\sum m_k} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al origen}}{\text{masa del sistema}}. \tag{2}$$

El punto $\bar{x}$ se denomina **centro de masa** del sistema.

Masas distribuidas en una región plana

Suponga que tenemos una colección finita de masas ubicadas en el plano, con una masa m_k en el punto (x_k, y_k) (vea la figura 6.45). La masa del sistema es

$$\text{Masa del sistema:} \quad M = \sum m_k.$$

Cada masa m_k tiene un momento con respecto a cada eje. Su momento con respecto al eje x es m_ky_k, y su momento con respecto al eje y es m_kx_k. Los momentos del sistema completo con respecto a los dos ejes son

$$\text{Momento con respecto al eje } x: \quad M_x = \sum m_ky_k,$$
$$\text{Momento con respecto al eje } y: \quad M_y = \sum m_kx_k.$$

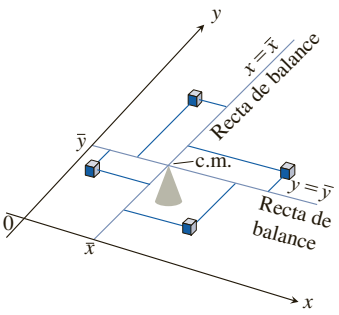


FIGURA 6.46 Un arreglo bidimensional de masas se balancea en su centro de masa.

La coordenada x del centro de masa del sistema se define como

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}. \tag{3}$$

Como en el caso unidimensional, con esta elección de $\bar{x}$, el sistema se balancea con respecto a la recta $x = \bar{x}$ (figura 6.46).

La coordenada y del centro de masa del sistema se define como

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}. \tag{4}$$

Con esta elección de $\bar{y}$, el sistema se balancea también con respecto a la recta $y = \bar{y}$. Los torques ejercidos por las masas con respecto a la recta $y = \bar{y}$ se cancelan. Así, en lo que se refiere a balanceo, el sistema se comporta como si toda su masa estuviera en un solo punto $(\bar{x}, \bar{y})$, el cual se denomina **centro de masa** del sistema.

Placas planas y delgadas

En muchas aplicaciones, es necesario determinar el centro de masa de una placa delgada y plana, por ejemplo, un disco de aluminio, o una lámina triangular de acero. En tales casos, suponemos que la distribución de masa es continua, y las fórmulas que utilizamos para calcular $(\bar{x}, \bar{y})$ contienen integrales en lugar de sumas finitas. Las integrales surgen de la siguiente manera.

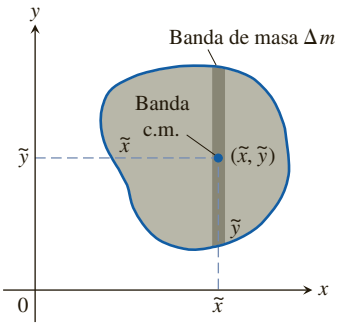


FIGURA 6.47 Una placa se corta en bandas delgadas paralelas al eje y. El momento ejercido por una banda típica con respecto a cada eje es el momento que su masa, Δm, ejercería si estuviera concentrada en el centro de masa de la banda $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Imagine que la placa que ocupa una región del plano xy se corta en bandas delgadas paralelas a uno de los ejes (en la figura 6.47, el eje y). El centro de masa de una banda típica es $(\tilde{x}, \tilde{y})$. La banda de la masa Δm se trata como si estuviera concentrada en $(\tilde{x}, \tilde{y})$. El momento de la banda con respecto al eje y es $\tilde{x}\,\Delta m$. El momento de la banda con respecto al eje x es $\tilde{y}\,\Delta m$. Entonces, las ecuaciones (3) y (4) se transforman en

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum \tilde{x}\,\Delta m}{\sum \Delta m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum \tilde{y}\,\Delta m}{\sum \Delta m}.$$

Las sumas son sumas de Riemann para integrales y aproximan estas integrales como valores límite, conforme el ancho de las bandas en que se corta la placa se vuelve cada vez más y más angosto. Al representar con símbolos estas integrales, tenemos

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,dm}{\int dm} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,dm}{\int dm}.$$

Momentos, masa y centro de masa de una placa delgada que cubre una región del plano xy

$$\begin{aligned} &\text{Momento con respecto al eje } x: && M_x = \int \tilde{y}\,dm \\ &\text{Momento con respecto al eje } y: && M_y = \int \tilde{x}\,dm \\ &\text{Masa:} && M = \int dm \\ &\text{Centro de masa:} && \bar{x} = \frac{M_y}{M},\quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} \end{aligned} \tag{5}$$

Densidad de una placa
La densidad de un material es su masa por unidad de área. Para alambres, varillas y bandas delgadas, se usa la masa por unidad de longitud.

La diferencial dm es la masa de la banda. En esta sección, supondremos que la densidad δ de la placa es constante o una función continua de x. Entonces, $dm = \delta\, dA$ es la masa por unidad de área δ por el área dA de la banda.

Para evaluar las integrales de las ecuaciones (5), imaginamos la placa en el plano de coordenadas y dibujamos una banda paralela a uno de los ejes de coordenadas. Luego, expresamos la masa de la banda dm y las coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y})$ del centro de masa de la banda en términos de x o y. Por último, integramos $\tilde{y}\, dm$, $\tilde{x}\, dm$ y dm entre los límites de integración determinados por la ubicación de la placa en el plano.

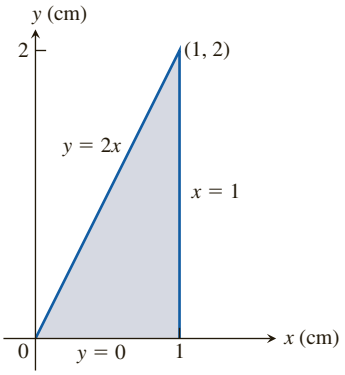


FIGURA 6.48 La placa del ejemplo 1.

EJEMPLO 1 La placa triangular mostrada en la figura 6.48 tiene una densidad constante de $\delta = 3\ \text{g/cm}^2$. Calcule

a) el momento M_y de la placa con respecto al eje y.

b) la masa M de la placa.

c) la coordenada x del centro de masa (c.m.) de la placa.

Solución **Método 1: Bandas verticales** (figura 6.49)

a) El momento M_y: Los datos relevantes de una banda vertical típica son:

centro de masa (c.m.):	$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, x)$
largo:	$2x$
ancho:	dx
área:	$dA = 2x\, dx$
masa:	$dm = \delta\, dA = 3 \cdot 2x\, dx = 6x\, dx$
distancia del c.m. al eje y:	$\tilde{x} = x$

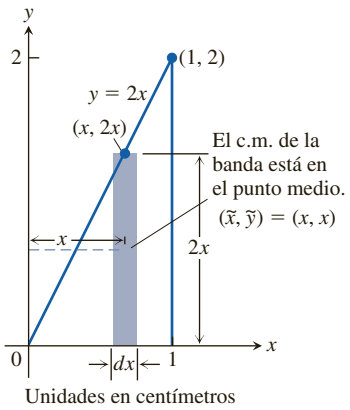


FIGURA 6.49 Modelo de la placa del ejemplo 1 con bandas verticales.

El momento de la banda con respecto al eje y es

$$\tilde{x}\, dm = x \cdot 6x\, dx = 6x^2\, dx.$$

Por lo tanto, el momento de la placa con respecto al eje y es

$$M_y = \int \tilde{x}\, dm = \int_0^1 6x^2\, dx = 2x^3 \Big]_0^1 = 2\ \text{g} \cdot \text{cm}.$$

b) La masa de la placa es:

$$M = \int dm = \int_0^1 6x\, dx = 3x^2 \Big]_0^1 = 3\ \text{g}.$$

c) La coordenada x del centro de masa de la placa es:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\ \text{g} \cdot \text{cm}}{3\ \text{g}} = \frac{2}{3}\ \text{cm}.$$

Con un cálculo similar, se determinan M_x y $\bar{y} = M_x/M$.

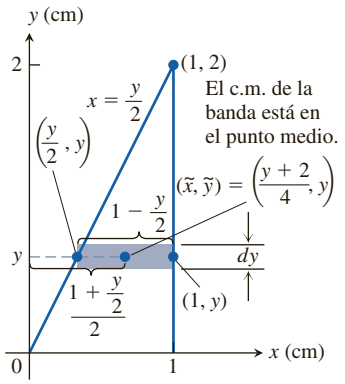


FIGURA 6.50 Modelo de la placa del ejemplo 1 con bandas horizontales.

Método 2: Bandas horizontales (figura 6.50)

a) El momento M_y: La coordenada y del centro de masa de una banda horizontal típica es y (vea la figura), de manera que

$$\tilde{y} = y.$$

La coordenada x es la coordenada x del punto medio del segmento que cruza el triángulo. Esto es, el promedio de $y/2$ (el valor x del lado izquierdo de la banda) más 1 (el valor x del lado derecho de la banda):

$$\tilde{x} = \frac{(y/2) + 1}{2} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2} = \frac{y + 2}{4}.$$

También tenemos que

$$\begin{aligned} \text{largo:} \quad & 1 - \frac{y}{2} = \frac{2 - y}{2} \\ \text{ancho:} \quad & dy \\ \text{área:} \quad & dA = \frac{2 - y}{2}\, dy \\ \text{masa:} \quad & dm = \delta\, dA = 3 \cdot \frac{2 - y}{2}\, dy \\ \text{distancia del c.m. al eje } y\text{:} \quad & \tilde{x} = \frac{y + 2}{4}. \end{aligned}$$

El momento de la banda con respecto al eje y es

$$\tilde{x}\, dm = \frac{y + 2}{4} \cdot 3 \cdot \frac{2 - y}{2}\, dy = \frac{3}{8}(4 - y^2)\, dy.$$

El momento de la placa con respecto al eje y es

$$M_y = \int \tilde{x}\, dm = \int_0^2 \frac{3}{8}(4 - y^2)\, dy = \frac{3}{8}\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{3}{8}\left(\frac{16}{3}\right) = 2 \text{ g} \cdot \text{cm}.$$

b) La masa de la placa es:

$$M = \int dm = \int_0^2 \frac{3}{2}(2 - y)\, dy = \frac{3}{2}\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{2}(4 - 2) = 3 \text{ g}.$$

c) La coordenada x del centro de masa de la placa es:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2 \text{ g} \cdot \text{cm}}{3 \text{ g}} = \frac{2}{3} \text{ cm}.$$

Con un cálculo similar, se determinan M_x y $\bar{y}$. ■

Si la distribución de masa en una placa delgada y plana tiene un eje de simetría, el centro de masa estará en este eje. Si tiene dos ejes de simetría, el centro de masa estará en la intersección de ambos ejes. Estos hechos a menudo nos ayudan a simplificar nuestro trabajo.

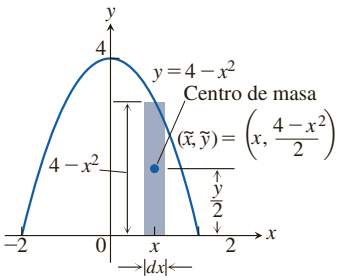


FIGURA 6.51 Modelo de la placa del ejemplo 2 con bandas verticales.

EJEMPLO 2 Determine el centro de masa de una placa delgada que cubre la región acotada arriba por la parábola $y = 4 - x^2$ y abajo por el eje x (figura 6.51). Suponga que la densidad de la placa en el punto (x, y) es $\delta = 2x^2$, que es el doble del cuadrado de la distancia del punto al eje y.

Solución La distribución de masa es simétrica con respecto al eje y, por lo que $\bar{x} = 0$. Modelamos la distribución de masa con bandas verticales, ya que la densidad está dada como una función de la variable x. Los datos relevantes de una banda vertical típica (figura 6.51) son:

$$\begin{aligned} \text{centro de masa (c.m.):} \quad & (\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(x, \frac{4 - x^2}{2}\right) \\ \text{largo:} \quad & 4 - x^2 \\ \text{ancho:} \quad & dx \\ \text{área:} \quad & dA = (4 - x^2)\, dx \\ \text{masa:} \quad & dm = \delta\, dA = \delta(4 - x^2)\, dx \\ \text{distancia del c.m. al eje } x\text{:} \quad & \tilde{y} = \frac{4 - x^2}{2} \end{aligned}$$

El momento de la banda con respecto al eje x es

$$\tilde{y}\, dm = \frac{4 - x^2}{2} \cdot \delta(4 - x^2)\, dx = \frac{\delta}{2}(4 - x^2)^2\, dx.$$

El momento de la placa con respecto al eje x es

$$M_x = \int \tilde{y}\, dm = \int_{-2}^{2} \frac{\delta}{2}(4 - x^2)^2\, dx = \int_{-2}^{2} x^2(4 - x^2)^2\, dx$$
$$= \int_{-2}^{2} (16x^2 - 8x^4 + x^6)\, dx = \frac{2048}{105}$$
$$M = \int dm = \int_{-2}^{2} \delta(4 - x^2)\, dx = \int_{-2}^{2} 2x^2(4 - x^2)\, dx$$
$$= \int_{-2}^{2} (8x^2 - 2x^4)\, dx = \frac{256}{15}.$$

Por lo tanto,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2048}{105} \cdot \frac{15}{256} = \frac{8}{7}.$$

El centro de masa de la placa es

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{7}\right).$$ ■

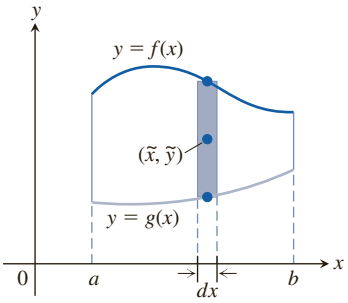


FIGURA 6.52 Modelo de la placa acotada por dos curvas, con bandas verticales. El c.m. de la banda está a la mitad de la misma, de modo que $\tilde{y} = \frac{1}{2}[\, f(x) + g(x)\,]$.

Placas acotadas por dos curvas

Suponga que una placa cubre una región que se encuentra entre las curvas $y = g(x)$ y $y = f(x)$, donde $f(x) \geq g(x)$ y $a \leq x \leq b$. La banda vertical típica (vea la figura 6.52) tiene

centro de masa (c.m.):	$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(x, \frac{1}{2}[\, f(x) + g(x)\,]\right)$
largo:	$f(x) - g(x)$
ancho:	dx
área:	$dA = [\, f(x) - g(x)\,]\, dx$
masa:	$dm = \delta\, dA = \delta[\, f(x) - g(x)\,]\, dx.$

El momento de la placa con respecto al eje y es

$$M_y = \int x\, dm = \int_a^b x\delta[\, f(x) - g(x)\,]\, dx,$$

y el momento con respecto al eje x es

$$M_x = \int y\, dm = \int_a^b \frac{1}{2}[\, f(x) + g(x)\,] \cdot \delta[\, f(x) - g(x)\,]\, dx$$
$$= \int_a^b \frac{\delta}{2}[\, f^2(x) - g^2(x)\,]\, dx.$$

Estos momentos tienen las fórmulas

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_a^b \delta x[\, f(x) - g(x)\,]\, dx \tag{6}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_a^b \frac{\delta}{2}[\, f^2(x) - g^2(x)\,]\, dx \tag{7}$$

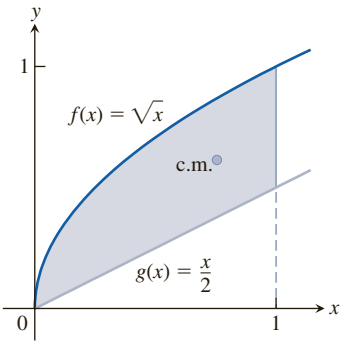


FIGURA 6.53 La región del ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Obtenga el centro de masa de la placa delgada acotada por las curvas $g(x) = x/2$ y $f(x) = \sqrt{x}$, $0, \le x \le 1$ (figura 6.53), usando las ecuaciones (6) y (7), con la función densidad $\delta(x) = x^2$.

Solución Primero calculamos la masa de la placa, donde $dm = \delta[f(x) - g(x)]\,dx$:

$$M = \int_0^1 x^2\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)dx = \int_0^1 \left(x^{5/2} - \frac{x^3}{2}\right)dx = \left[\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{1}{8}x^4\right]_0^1 = \frac{9}{56}.$$

Entonces, según las ecuaciones (6) y (7), tenemos

$$\bar{x} = \frac{56}{9}\int_0^1 x^2 \cdot x\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{56}{9}\int_0^1 \left(x^{7/2} - \frac{x^4}{2}\right)dx$$

$$= \frac{56}{9}\left[\frac{2}{9}x^{9/2} - \frac{1}{10}x^5\right]_0^1 = \frac{308}{405},$$

y

$$\bar{y} = \frac{56}{9}\int_0^1 \frac{x^2}{2}\left(x - \frac{x^2}{4}\right)dx$$

$$= \frac{28}{9}\int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^4}{4}\right)dx$$

$$= \frac{28}{9}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{20}x^5\right]_0^1 = \frac{252}{405}.$$

El centro de masa se muestra en la figura 6.53. ■

Centroides

El centro de masa del ejemplo 3 no está ubicado en el centro geométrico de la región. Esto se debe a que la densidad de la región no es uniforme. Cuando la función densidad es constante, ésta se cancela en el numerador y el denominador de las fórmulas de $\bar{x}$ y $\bar{y}$. Por lo tanto, cuando la densidad es constante, la ubicación del centro de masa es una característica de la geometría del objeto y no del material con el que está fabricado. En estos casos, los ingenieros podrían llamar al centro de masa el **centroide** de la forma; por ejemplo, podría decirse "obtenga el centroide de un triángulo o de un cono sólido". Para hacerlo, sólo iguale δ a 1 y proceda a obtener $\bar{x}$ y $\bar{y}$ como antes, dividiendo momentos entre masas.

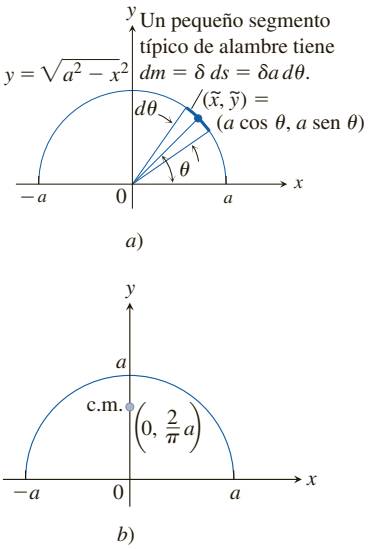


FIGURA 6.54 El alambre en forma de semicircunferencia del ejemplo 4. *a*) Las dimensiones y variables empleadas en la obtención del centro de masa. *b*) El centro de masa no se encuentra sobre el alambre.

EJEMPLO 4 Obtenga el centro de masa (centroide) de un alambre delgado con densidad δ constante, y en forma de una semicircunferencia de radio a.

Solución Modelamos el alambre con la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (figura 6.54). La distribución de masa es simétrica en relación con el eje y, de manera que $\bar{x} = 0$. Para obtener $\bar{y}$, imaginemos el alambre dividido en pequeños segmentos de arco. Si $(\tilde{x}, \tilde{y})$ es el centro de masa de un subsegmento de arco y θ es el ángulo entre el eje x y la recta radial que une el origen con $(\tilde{x}, \tilde{y})$, entonces, $\tilde{y} = a\ \text{sen}\ \theta$ es una función del ángulo θ medido en radianes (vea la figura 6.54*a*). La longitud ds del subsegmento de arco que contiene $(\tilde{x}, \tilde{y})$ subtiende un ángulo de $d\theta$ radianes, de modo que $ds = a\,d\theta$. Así, para calcular $\bar{y}$, se utilizan los siguientes datos relevantes de un segmento de arco típico:

largo:	$ds = a\,d\theta$	
masa:	$dm = \delta\,ds = \delta a\,d\theta$	Masa por unidad de longitud multiplicada por el largo
distancia del c.m. al eje x:	$\tilde{y} = a\,\text{sen}\,\theta$	

Por lo tanto,

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dm}{\int dm} = \frac{\int_0^\pi a \operatorname{sen}\theta \cdot \delta a\, d\theta}{\int_0^\pi \delta a\, d\theta} = \frac{\delta a^2 \left[-\cos\theta\right]_0^\pi}{\delta a \pi} = \frac{2}{\pi} a.$$

El centro de masa se encuentra sobre el eje de simetría en el punto $(0, 2a/\pi)$, aproximadamente a dos tercios de la distancia desde el origen (figura 6.54*b*). Observe cómo δ se cancela en la ecuación de $\bar{y}$, de manera que pudimos haber considerado $\delta = 1$ en todas partes y haber obtenido el mismo valor de $\bar{y}$. ■

En el ejemplo 4 calculamos el centro de masa de un alambre delgado a lo largo de la gráfica de una función diferenciable en el plano xy. En el capítulo 16 aprenderemos cómo obtener el centro de masa de un alambre que se encuentra a lo largo de una curva suave más general, en el plano o en el espacio.

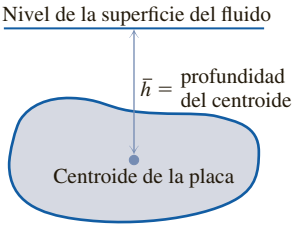


FIGURA 6.55 La fuerza contra una cara de la placa es $w \cdot \bar{h} \cdot$ área de la placa.

Fuerzas de fluidos y centroides

Si conocemos la ubicación del centroide de una placa vertical plana sumergida (figura 6.55), podemos tomar un atajo para obtener la fuerza contra una cara de la placa. Según la ecuación (7) de la sección 6.5 y la definición de momento con respecto al eje x, tenemos

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b w \times (\text{profundidad de la banda}) \times L(y)\, dy \\ &= w \int_a^b (\text{profundidad de la banda}) \times L(y)\, dy \\ &= w \times (\text{momento con respecto a la recta al nivel de la superficie en la región ocupada por la placa}) \\ &= w \times (\text{profundidad del centroide de la placa}) \times (\text{área de la placa}). \end{aligned}$$

Fuerzas de fluidos y centroides

La fuerza de un fluido de peso-densidad w contra una cara de una placa plana vertical sumergida es el producto de w, la distancia $\bar{h}$ del centroide de la placa a la superficie del fluido, y el área de la placa:

$$F = w\bar{h}A. \tag{8}$$

EJEMPLO 5 Una placa plana en forma de triángulo isósceles de base igual a 6 ft y altura de 3 ft está sumergida verticalmente, con su base hacia arriba y vértice en el origen, de manera que la base está a 2 ft por debajo de la superficie de una piscina. (Éste es el ejemplo 6, sección 6.5). Use la ecuación (8) para obtener la fuerza ejercida contra una cara de la placa.

Solución El centroide del triángulo (figura 6.43) se encuentra sobre el eje y, a un tercio de la distancia de la base al vértice, de modo que $\bar{h} = 3$ (donde $y = 2$), ya que la superficie de la piscina es $y = 5$. El área del triángulo es

$$A = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura}) = \frac{1}{2}(6)(3) = 9.$$

Por lo tanto,

$$F = w\bar{h}A = (62.4)(3)(9) = 1684.8 \text{ lb}.$$ ■

Teoremas de Pappus

En el siglo IV, un griego de la ciudad de Alejandría, llamado Pappus, descubrió dos fórmulas que relacionan los centroides con las superficies y los sólidos de revolución. Estas fórmulas simplifican cálculos que, de otra manera, serían muy largos.

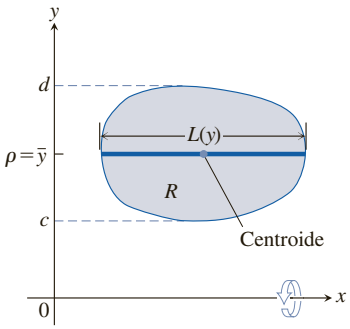


FIGURA 6.56 La región R se hará girar (una vez) alrededor del eje x para generar un sólido. Un teorema, que data de hace 1700 años, establece que el volumen del sólido puede calcularse multiplicando el área de la región por la distancia que recorre su centroide durante la rotación.

TEOREMA 1: Teorema de Pappus para volúmenes Si una región plana se hace girar una vez alrededor de una recta en el plano, de modo que la recta no corte el interior de la región, entonces, el volumen del sólido generado es igual al área de la región multiplicada por la distancia que recorre su centroide durante la rotación. Si ρ es la distancia del eje de rotación al centroide, entonces,

$$V = 2\pi\rho A. \tag{9}$$

Demostración Dibujamos el eje de rotación como el eje x, con la región R en el primer cuadrante (figura 6.56). Denotamos con $L(y)$ la longitud de la sección transversal de R perpendicular al eje y en y. Suponemos que $L(y)$ es continua.

Según el método de los casquillos cilíndricos, el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor del eje x es

$$V = \int_c^d 2\pi\begin{pmatrix}\text{radio del}\\ \text{casquillo}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{altura del}\\ \text{casquillo}\end{pmatrix} dy = 2\pi\int_c^d y\,L(y)\,dy. \tag{10}$$

La coordenada y del centroide de R es

$$\bar{y} = \frac{\int_c^d \tilde{y}\,dA}{A} = \frac{\int_c^d y\,L(y)\,dy}{A}, \qquad \tilde{y} = y,\ dA = L(y)\,dy$$

de modo que

$$\int_c^d y\,L(y)\,dy = A\bar{y}.$$

Al sustituir $A\bar{y}$ en lugar de la última integral en la ecuación (10), se obtiene $V = 2\pi\bar{y}A$. Con ρ igual a $\bar{y}$, tenemos $V = 2\pi\rho A$. ■

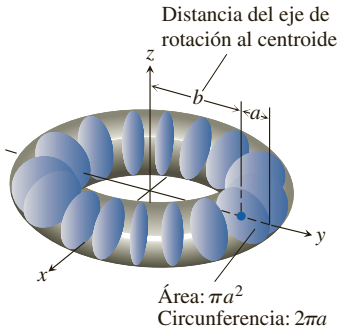


FIGURA 6.57 Con el primer teorema de Pappus, podemos determinar el volumen de un toro sin tener que integrar (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 Obtenga el volumen de un toro (esto es, un sólido en forma de rosquilla) generado al hacer girar un disco circular de radio a alrededor de un eje en su plano, a una distancia $b \geq a$ de su centro (figura 6.57).

Solución Aplicamos el teorema de Pappus para volúmenes. El centroide de un disco se localiza en su centro, el área es $A = \pi a^2$, y $\rho = b$ es la distancia del centroide al eje de rotación (vea la figura 6.57). Al sustituir estos valores en la ecuación (9), vemos que el volumen del toro es

$$V = 2\pi(b)(\pi a^2) = 2\pi^2 b a^2.$$ ■

El siguiente ejemplo muestra cómo podemos usar la ecuación (9) del teorema de Pappus para obtener una de las coordenadas del centroide de una región plana de área conocida A, cuando también se conoce el volumen V del sólido generado al hacer girar la región alrededor del otro eje de coordenadas. Es decir, si $\bar{y}$ es la coordenada que deseamos obtener, hacemos girar la región alrededor del eje x de modo que $\bar{y} = \rho$ es la distancia del centroide al eje de rotación. La idea es que la rotación genere un sólido de revolución cuyo volumen V sea una cantidad conocida. Entonces, podemos resolver la ecuación (9) despejando ρ, que es el valor de la coordenada $\bar{y}$ del centroide.

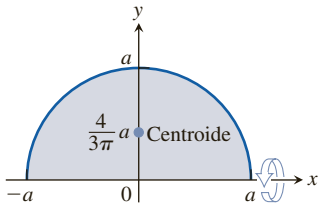


FIGURA 6.58 Con el primer teorema de Pappus, podemos localizar el centroide de una región semicircular sin tener que integrar (ejemplo 7).

EJEMPLO 7 Localice el centroide de una región semicircular de radio a.

Solución Consideramos la región entre la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (figura 6.58) y el eje x, e imaginamos que hacemos girar la región alrededor del eje x para generar una esfera sólida. Por simetría, la coordenada x del centroide es $\bar{x} = 0$. Con $\bar{y} = \rho$ en la ecuación (9), tenemos

$$\bar{y} = \frac{V}{2\pi A} = \frac{(4/3)\pi a^3}{2\pi(1/2)\pi a^2} = \frac{4}{3\pi}a.$$ ■

TEOREMA 2: Teorema de Pappus para áreas de superficies Si el arco de una curva plana suave se hace girar una vez alrededor de una recta en el plano, de manera que ésta no corte el interior del arco, entonces el área de la superficie generada por el arco es igual a la longitud L del arco multiplicada por la distancia que recorre el centroide del arco durante la rotación. Si ρ es la distancia entre el eje de rotación y el centroide, entonces,

$$S = 2\pi\rho L. \tag{11}$$

La demostración que damos supone que podemos modelar el eje de rotación como el eje x, y el arco como la gráfica de una función continuamente diferenciable de x.

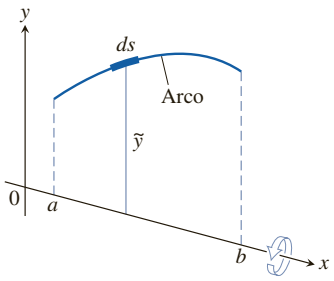


FIGURA 6.59 Figura para demostrar el teorema de Pappus del área superficial. La diferencial de longitud de arco ds está dada por la ecuación (6) en la sección 6.3.

Demostración Dibujamos el eje de rotación como el eje x con el arco extendiéndose desde $x = a$ hasta $x = b$ en el primer cuadrante (figura 6.59). El área de la superficie generada por el arco es

$$S = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi y\, ds = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} y\, ds. \tag{12}$$

La coordenada y del centroide del arco es

$$\bar{y} = \frac{\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \tilde{y}\, ds}{\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} ds} = \frac{\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} y\, ds}{L}. \qquad L = \int ds \text{ es la longitud del arco y } \tilde{y} = y.$$

Por lo tanto,

$$\int_{x=a}^{x=b} y\, ds = \bar{y}L.$$

Al sustituir $\bar{y}L$ en lugar de la última integral en la ecuación (12), se obtiene $S = 2\pi\bar{y}L$. Con ρ igual a $\bar{y}$, tenemos $S = 2\pi\rho L$. ■

EJEMPLO 8 Use el teorema de Pappus para obtener el área de la superficie del toro del ejemplo 6.

Solución Según la figura 6.57, la superficie del toro se genera al hacer girar un círculo de radio a alrededor del eje z, y $b \geq a$ es la distancia del centroide al eje de rotación. La longitud de arco de la curva suave al generar esta superficie de revolución es la circunferencia del círculo, de modo que $L = 2\pi a$. Al sustituir estos valores en la ecuación (11), vemos que el área de la superficie del toro es

$$S = 2\pi(b)(2\pi a) = 4\pi^2 ba.$$

■

Ejercicios 6.6

Placas delgadas con densidad constante

En los ejercicios 1 a 12, obtenga el centro de masa de una placa delgada de densidad constante δ que cubre la región dada.

1. La región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$
2. La región acotada por la parábola $y = 25 - x^2$ y el eje x
3. La región acotada por la parábola $y = x - x^2$ y la recta $y = -x$
4. La región acotada por la parábola $y = x^2 - 3$ y $y = -2x^2$
5. La región acotada por el eje y y la curva $x = y - y^3$, $0 \leq y \leq 1$
6. La región acotada por la parábola $x = y^2 - y$ y la recta $y = x$
7. La región acotada por el eje x y la curva $y = \cos x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$
8. La región entre la curva $y = \sec^2 x$, $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$ y el eje x
9. La región acotada por las parábolas $y = 2x^2 - 4x$ y $y = 2x - x^2$
10. ***a)*** La región del primer cuadrante cortada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

    b) La región acotada por el eje x y la semicircunferencia $y = \sqrt{9 - x^2}$

    Compare la respuesta del inciso *b)* con la respuesta del inciso *a)*.

11. La región "triangular" del primer cuadrante, comprendida entre la circunferencia $x^2+y^2=9$ y las rectas $x=3$ y $y=3$. (*Sugerencia:* Utilice geometría para determinar el área).

12. La región acotada arriba por la curva $y=1/x^3$, abajo por la curva $y=-1/x^3$, y a la izquierda y derecha por las rectas $x=1$ y $x=a>1$. También obtenga $\lim_{a\to\infty}\bar{x}$.

Placas delgadas con densidad variable

13. Obtenga el centro de masa de una placa delgada que cubre la región entre el eje x y la curva $y=2/x^2$, $1\le x\le 2$, si la densidad de la placa en el punto (x, y) es $\delta(x)=x^2$.

14. Obtenga el centro de masa de una placa delgada que cubre la región acotada abajo por la parábola $y=x^2$, y arriba por la recta $y=x$, si la densidad de la placa en el punto (x, y) es $\delta(x)=12x$.

15. La región acotada por las curvas $y=\pm 4/\sqrt{x}$ y las rectas $x=1$ y $x=4$ se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido.

a) Obtenga el volumen del sólido.

b) Obtenga el centro de masa de una placa delgada que cubre la región, si la densidad de la placa en el punto (x, y) es $\delta(x)=1/x$.

c) Dibuje la placa mostrando el centro de masa.

16. La región entre la curva $y=2/x$ y el eje x de $x=1$ a $x=4$ se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido.

a) Obtenga el volumen del sólido.

b) Obtenga el centro de masa de una placa delgada que cubre la región, si la densidad de la placa en el punto (x, y) es $\delta(x)=\sqrt{x}$.

c) Dibuje la placa mostrando el centro de masa.

Centroides de triángulos

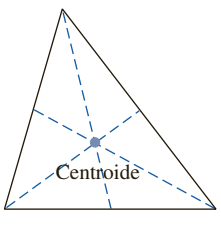
17. El centroide de un triángulo se encuentra en la intersección de las medianas del triángulo Tal vez recuerde que el punto dentro de un triángulo que se encuentra a un tercio de la distancia entre el punto medio de cada lado del triángulo y el vértice opuesto es el punto donde se intersecan sus tres medianas. Demuestre que el centroide se encuentra en la intersección de las medianas, comprobando que también se encuentra a un tercio de la distancia entre cada lado y el vértice opuesto. Para hacerlo, ejecute los siguientes pasos.

i. Coloque un lado del triángulo sobre el eje x, como en el inciso *b)* de la figura. Exprese dm en términos de L y dy.

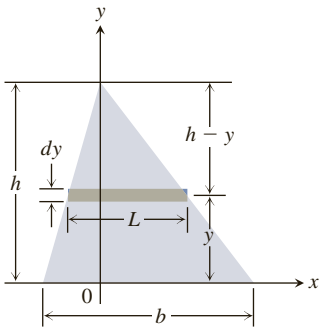
ii. Utilice triángulos semejantes para demostrar que $L=(b/h)(h-y)$. Sustituya esta expresión de L en la fórmula de dm.

iii. Demuestre que $\bar{y}=h/3$.

iv. Extienda el argumento a los otros lados.



a)



b)

Con base en el resultado del ejercicio 17, obtenga el centroide de los triángulos cuyos vértices aparecen en los ejercicios 18 a 22. Suponga que $a, b>0$.

18. $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 3)$

19. $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$

20. $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, a)$

21. $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$

22. $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(a/2, b)$

Alambres delgados

23. Densidad constante Determine el momento, con respecto al eje x, de un alambre con densidad constante que se encuentra a lo largo de la curva $y=\sqrt{x}$ de $x=0$ a $x=2$.

24. Densidad constante Determine el momento, con respecto al eje x, de un alambre con densidad constante que se encuentra a lo largo de la curva $y=x^3$ de $x=0$ a $x=1$.

25. Densidad variable Suponga que la densidad del alambre del ejemplo 4 es $\delta=k\,\text{sen}\,\theta$ (k constante). Obtenga el centro de masa.

26. Densidad variable Suponga que la densidad del alambre del ejemplo 4 es $\delta=1+k|\cos\theta|$ (k constante). Obtenga el centro de masa.

Placas acotadas por dos curvas

En los ejercicios 27 a 30, obtenga el centroide de la placa delgada acotada por las gráficas de las funciones dadas. Use las ecuaciones (6) y (7) con $\delta=1$ y $M=$ área de la región cubierta por la placa.

27. $g(x)=x^2$ y $f(x)=x+6$

28. $g(x)=x^2(x+1)$, $f(x)=2$, y $x=0$

29. $g(x)=x^2(x-1)$ y $f(x)=x^2$

30. $g(x)=0$, $f(x)=2+\text{sen}\,x$, $x=0$, y $x=2\pi$

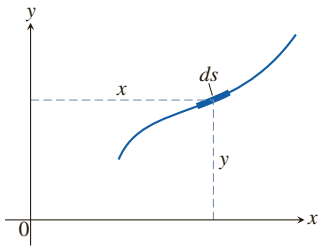
(*Sugerencia:* $\int x\,\text{sen}\,x\,dx=\text{sen}\,x-x\cos x+C$.)

Teoría y ejemplos

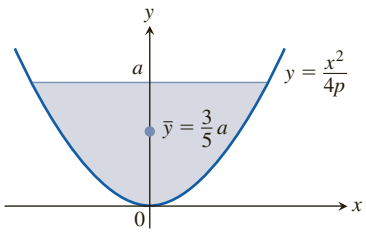
Verifique los enunciados y las fórmulas de los ejercicios 31 y 32.

31. Las coordenadas del centroide de una curva plana diferenciable son

$$\bar{x}=\frac{\int x\,ds}{\text{largo}},\qquad \bar{y}=\frac{\int y\,ds}{\text{largo}}.$$



32. Sin importar el valor de $p>0$ en la ecuación $y=x^2/(4p)$, la coordenada y del centroide del segmento parabólico mostrado aquí es $\bar{y}=(3/5)a$.



Teoremas de Pappus

33. La región cuadrada con vértices (0, 2), (2, 0), (4, 2) y (2, 4) se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Obtenga el volumen y el área de la superficie del sólido.

34. Utilice el teorema de Pappus para determinar el volumen generado al hacer girar la región triangular acotada por los ejes de coordenadas y la recta $2x + y = 6$ alrededor de la recta $x = 5$ (vea el ejercicio 17).

35. Obtenga el volumen del toro generado al hacer girar la circunferencia $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ alrededor del eje y.

36. Utilice el teorema de Pappus para obtener el área de la superficie lateral y el volumen de un cono circular recto.

37. Considere el teorema de Pappus referente al área superficial y el hecho de que el área de la superficie de una esfera de radio a es $4\pi a^2$, para determinar el centroide de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

38. Como se vio en el ejercicio 37, el centroide de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ está en el punto $(0, 2a/\pi)$. Determine el área de la superficie que se genera al hacer girar la semicircunferencia alrededor de la recta $y = a$.

39. El área de la región R acotada por la semielipse $y = (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$ y el eje x es $(1/2)\pi ab$, y el volumen del elipsoide generado al hacer girar R alrededor del eje x es $(4/3)\pi ab^2$. Obtenga el centroide de R. Observe que la ubicación es independiente de a.

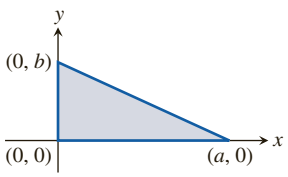
40. Como se determinó en el ejemplo 7, el centroide de la región acotada por el eje x y la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ se encuentra en el punto $(0, 4a/3\pi)$. Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar esta región alrededor de la recta $y = -a$.

41. La región del ejercicio 40 se hace girar alrededor de la recta $y = x - a$ para generar un sólido. Obtenga el volumen del sólido.

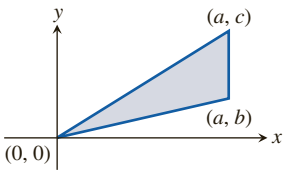
42. Como se vio en el ejercicio 37, el centroide de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ se encuentra en el punto $(0, 2a/\pi)$. Obtenga el área de la superficie generada al hacer girar la semicircunferencia alrededor de la recta $y = x - a$.

En los ejercicios 43 y 44, use un teorema de Pappus para obtener el centroide del triángulo dado. Considere el hecho de que el volumen de un cono de radio r y altura h es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

43.



44.



Capítulo 6 Preguntas de repaso

1. ¿Cómo se definen y calculan los volúmenes de sólidos utilizando el método por rebanadas? Dé un ejemplo.

2. ¿Cómo se deducen los métodos de los discos y las arandelas para el cálculo de volúmenes a partir del método por rebanadas? Dé ejemplos de cálculo de volúmenes con estos métodos.

3. Describa el método de los casquillos cilíndricos. Dé un ejemplo.

4. ¿Cómo se obtiene la longitud de una gráfica de una función suave en un intervalo cerrado? Dé un ejemplo. ¿Qué ocurre con las funciones que no tienen primeras derivadas continuas?

5. ¿Cómo se define y calcula el área de la superficie generada al hacer girar la gráfica de una función suave $y = f(x)$, $a \le x \le b$, alrededor del eje x? Dé un ejemplo.

6. ¿Cómo se define y calcula el trabajo realizado por una fuerza variable dirigida a lo largo de una parte del eje x? ¿Cómo se calcula el trabajo realizado para bombear un líquido desde un tanque? Dé ejemplos.

7. ¿Cómo se calcula la fuerza ejercida por un líquido contra una parte de una pared plana vertical? Dé un ejemplo.

8. ¿Qué es el centro de masa? ¿Y qué es un centroide?

9. ¿Cómo se localiza el centro de masa de una placa delgada y plana de material? Dé un ejemplo.

10. ¿Cómo se localiza el centro de masa de una placa delgada y plana acotada por dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ en $a \le x \le b$?

Capítulo 6 Ejercicios de práctica

Volúmenes

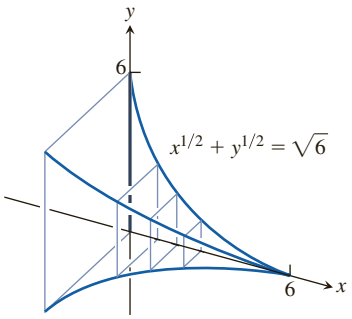
Obtenga los volúmenes de los sólidos en los ejercicios 1 a 16.

1. El sólido que se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = 0$ y $x = 1$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x entre estos planos son discos circulares cuyos diámetros van de la parábola $y = x^2$ a la parábola $y = \sqrt{x}$.

2. La base del sólido es la región en el primer cuadrante entre la recta $y = x$ y la parábola $y = 2\sqrt{x}$. Las secciones transversales del sólido perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros cuyas bases se extienden de la recta a la curva.

3. El sólido se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$. Las secciones transversales entre estos planos son discos circulares cuyos diámetros van de la curva $y = 2 \cos x$ a la curva $y = 2 \operatorname{sen} x$.

4. El sólido se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = 0$ y $x = 6$. Las secciones transversales entre estos planos son cuadrados cuyas bases van del eje x a la curva $x^{1/2} + y^{1/2} = \sqrt{6}$.



5. El sólido se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = 0$ y $x = 4$. Las secciones transversales del sólido entre estos planos perpendiculares al eje x son discos circulares cuyos diámetros van de la curva $x^2 = 4y$ a la curva $y^2 = 4x$.

6. La base del sólido es la región acotada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 1$ en el plano xy. Cada sección transversal perpendicular al eje x es un triángulo equilátero con un lado en el plano. (Todos los triángulos están en el mismo lado del plano).

7. Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por el eje x, la curva $y = 3x^4$ y las rectas $x = 1$ y $x = -1$ alrededor de ***a)*** el eje x; ***b)*** el eje y; ***c)*** la recta $x = 1$; ***d)*** la recta $y = 3$.

8. Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región "triangular" acotada por la curva $y = 4/x^3$ y las rectas $x = 1$ y $y = 1/2$ alrededor de ***a)*** el eje x; ***b)*** el eje y; ***c)*** la recta $x = 2$; ***d)*** la recta $y = 4$.

9. Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada a la izquierda por la parábola $x = y^2 + 1$, y a la derecha por la recta $x = 5$, alrededor de ***a)*** el eje x; ***b)*** el eje y; ***c)*** la recta $x = 5$.

10. Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la parábola $y^2 = 4/x$ y la recta $y = x$ alrededor de ***a)*** el eje x; ***b)*** el eje y; ***c)*** la recta $x = 4$; ***d)*** la recta $y = 4$.

11. Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar, alrededor del eje x, la región "triangular" acotada por el eje x, la recta $x = \pi/3$ y la curva $y = \tan x$ en el primer cuadrante.

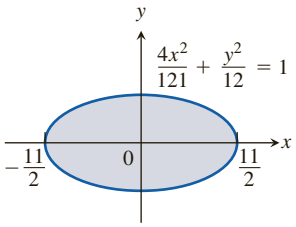
12. Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ y las rectas $x = 0$, $x = \pi$ y $y = 2$ alrededor de la recta $y = 2$.

13. Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región entre el eje x y la curva $y = x^2 - 2x$ alrededor de ***a)*** el eje x; ***b)*** la recta $y = -1$; ***c)*** la recta $x = 2$; ***d)*** la recta $y = 2$.

14. Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar, alrededor del eje x, la región acotada por $y = 2 \tan x$, $y = 0$, $x = -\pi/4$ y $x = \pi/4$. (La región está en los cuadrantes primero y tercero, y se parece a una corbata de moño).

15. Volumen de un sólido esférico con un hueco Se hace un hueco redondo de radio igual a $\sqrt{3}$ ft, pasando por el centro de una esfera sólida de 2 ft de radio. Determine el volumen del material removido de la esfera.

16. Volumen de un balón de fútbol El perfil de un balón de fútbol americano se parece a la elipse que se muestra a continuación. Determine el volumen del balón, aproximando a la pulgada cúbica más cercana.



Longitud de curvas

Obtenga la longitud de las curvas en los ejercicios 17 a 20.

17. $y = x^{1/2} - (1/3)x^{3/2}, \quad 1 \le x \le 4$

18. $x = y^{2/3}, \quad 1 \le y \le 8$

19. $y = (5/12)x^{6/5} - (5/8)x^{4/5}, \quad 1 \le x \le 32$

20. $x = (y^3/12) + (1/y), \quad 1 \le y \le 2$

Áreas de superficies de revolución

En los ejercicios 21 a 24, obtenga las áreas de las superficies generadas al hacer girar las curvas alrededor de los ejes dados.

21. $y = \sqrt{2x + 1}, \quad 0 \le x \le 3;$ el eje x

22. $y = x^3/3, \quad 0 \le x \le 1;$ el eje x

23. $x = \sqrt{4y - y^2}, \quad 1 \le y \le 2;$ el eje y

24. $x = \sqrt{y}, \quad 2 \le y \le 6;$ el eje y

Trabajo

25. Subiendo un equipo Un alpinista está por subir 100 N (aproximadamente 22.5 lb) de equipo que está colgando debajo de él por una cuerda de 40 m que pesa 0.8 newtons por metro. ¿Cuánto trabajo realizará? (*Sugerencia:* Resuelva el problema considerando la cuerda y el equipo por separado, y luego sume los resultados).

26. Tanque con fuga Usted manejó un camión desde la base del Monte Washington hasta la cima, llevando un tanque de 800 galones de agua. Al llegar a su destino, descubre que el tanque sólo contiene agua a la mitad de su capacidad. Al iniciar su viaje, tenía el tanque lleno, subió el monte a una velocidad constante y realizó el ascenso de 4750 ft en 50 minutos. Suponiendo que el agua se derramó a razón constante, ¿cuánto trabajo requirió para llevar el agua hasta la cima? No tome en cuenta el trabajo que se necesitó para que usted y su camión subieran al monte. El agua pesa 8 lb/gal.

27. Atracción de la Tierra La fuerza de atracción sobre un objeto debajo de la superficie de la Tierra es directamente proporcional a su distancia al centro de la Tierra. Obtenga el trabajo que se realiza al mover un objeto que pesa w lb, ubicado a a millas por debajo de la superficie de la Tierra. Suponga que el radio de la Tierra es una constante de r millas.

28. Resorte de una puerta de garaje Una fuerza de 200 N estirará el resorte de una puerta de garaje 0.8 m más allá de su longitud natural. ¿Cuánto estirará el resorte una fuerza de 300 N? ¿Cuánto trabajo se requerirá para estirar el resorte esta distancia a partir de su longitud natural?

29. Bombeo desde un depósito Un depósito en forma de un cono circular recto, con la punta hacia abajo, mide 20 ft de diámetro en la parte superior y tiene una profundidad de 8 ft; el depósito está completamente lleno de agua. ¿Cuánto trabajo será necesario realizar para bombear el agua a un nivel de 6 ft por encima de la parte superior del depósito?

30. Bombeo desde un depósito (*Continuación del ejercicio 29*). El depósito se llena hasta una profundidad de 5 ft, y el agua será bombeada al borde de la parte superior del depósito. ¿Cuánto trabajo será necesario?

31. Bombeo a un tanque cónico Un tanque en forma de cono circular recto, con la punta hacia abajo, tiene un radio superior de 5 ft y una altura de 10 ft; el tanque está lleno con un líquido cuya densidad es de 60 lb/ft^3. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear el líquido a un punto situado 2 ft arriba del tanque? Si la bomba tiene un motor de 275 lb-ft/s (1/2 hp), ¿cuánto tardará en vaciar el tanque?

32. Bombeo a un tanque cilíndrico Un tanque de almacenamiento tiene forma de cilindro circular recto de 20 ft de largo y 8 ft de diámetro, con su eje en posición horizontal. Si el tanque está lleno hasta la mitad con aceite de olivo que pesa 57 lb/ft^3, determine el trabajo realizado al vaciarlo por un tubo que va de la parte inferior del tanque a una salida que se encuentra a 6 ft por encima de la parte superior.

Centros de masa y centroides

33. Obtenga el centroide de una placa delgada y plana que cubre la región acotada por las parábolas $y = 2x^2$ y $y = 3 - x^2$.

34. Obtenga el centroide de una placa delgada y plana que cubre la región acotada por el eje x, las rectas $x = 2$ y $x = -2$, y la parábola $y = x^2$.

35. Obtenga el centroide de una placa delgada y plana que cubre la región "triangular" en el primer cuadrante, acotada por el eje y, la parábola $y = x^2/4$ y la recta $y = 4$.

36. Obtenga el centroide de una placa delgada y plana que cubre la región acotada por la parábola $y^2 = x$ y la recta $x = 2y$.

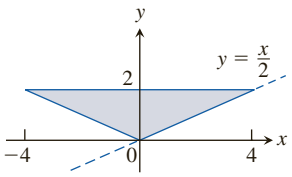
37. Obtenga el centro de masa de una placa delgada y plana que cubre la región acotada por la parábola $y^2 = x$ y la recta $x = 2y$, si la función densidad es $\delta(y) = 1 + y$. (Utilice bandas horizontales).

38. ***a***) Obtenga el centro de masa de una placa delgada con densidad constante que cubre la región entre la curva $y = 3/x^{3/2}$ y el eje x de $x = 1$ a $x = 9$.

b) Obtenga el centro de masa de la placa, si la densidad, en lugar de ser constante, es $\delta(x) = x$. (Utilice bandas verticales).

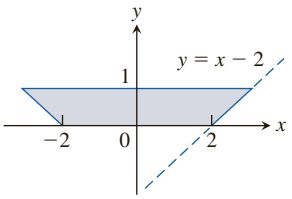
Fuerza de fluidos

39. Abrevadero La placa triangular vertical que se muestra a continuación es el extremo de un abrevadero lleno de agua ($w = 62.4$). ¿Cuál es la fuerza del fluido sobre la placa?



UNIDADES EN PIES

40. Recipiente de miel de maple La placa trapezoidal vertical, que se ilustra a continuación, es el extremo de un recipiente lleno de miel de maple que pesa 75 lb/ft^3. ¿Cuál es la fuerza ejercida por la miel sobre la placa del recipiente cuando la miel tiene una profundidad de 10 in?



UNIDADES EN PIES

41. Fuerza sobre una compuerta parabólica Una compuerta plana vertical ubicada en la cortina de una presa tiene la forma de una región parabólica comprendida entre la curva $y = 4x^2$ y la recta $y = 4$, con las medidas en pies. La parte superior de la compuerta está 5 ft por debajo de la superficie del agua. Determine la fuerza ejercida por el agua sobre la compuerta ($w = 62.4$).

T **42.** Usted planea almacenar mercurio ($w = 849$ lb/ft^3) en un tanque rectangular vertical con una base cuadrada de 1 ft por lado, cuya pared lateral interna puede soportar una fuerza total de fluido de 40,000 lb. Aproximadamente, ¿cuántos pies cúbicos de mercurio se podría almacenar en el tanque en cualquier momento?

Capítulo 6 Ejercicios adicionales y avanzados

Volumen y longitud

1. Se genera un sólido haciendo girar, alrededor del eje x, la región acotada por la gráfica de la función continua positiva $y = f(x)$, el eje x, la recta fija $x = a$, y la recta variable $x = b$, $b > a$. Su volumen, para toda b, es $b^2 - ab$. Determine $f(x)$.

2. Se genera un sólido haciendo girar, alrededor del eje x, la región acotada por la gráfica de la función continua positiva $y = f(x)$, el eje x, y las rectas $x = 0$ y $x = a$. Su volumen, para toda $a > 0$, es $a^2 + a$. Determine $f(x)$.

3. Suponga que la función creciente $f(x)$ es suave para $x \geq 0$ y que $f(0) = a$. Denote con $s(x)$ la longitud de la gráfica de f desde $(0, a)$ hasta $(x, f(x))$, $x > 0$. Determine $f(x)$ si $s(x) = Cx$, para alguna constante C. ¿Qué valores puede tomar C?

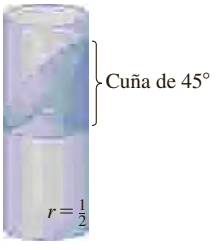
4. ***a***) Demuestre que para $0 < \alpha \leq \pi/2$,

$$\int_0^{\alpha} \sqrt{1 + \cos^2\theta}\, d\theta > \sqrt{\alpha^2 + \operatorname{sen}^2\alpha}.$$

b) Generalice el resultado del inciso *a*).

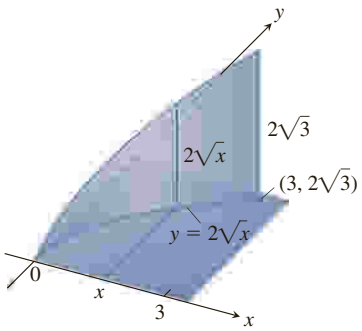
5. Obtenga el volumen del sólido formado al hacer girar la región acotada por las gráficas de $y = x$ y $y = x^2$ alrededor de la recta $y = x$.

6. Considere un cilindro circular recto de diámetro igual a 1. Forme una cuña haciendo un corte paralelo a la base del cilindro atravesando totalmente el cilindro, y otro corte a 45° del primer corte intersecando el primer corte en el extremo opuesto del cilindro (vea la figura). Obtenga el volumen de la cuña.

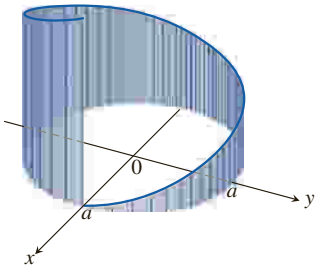


Área de superficies

7. En los puntos de la curva $y = 2\sqrt{x}$, se trazan segmentos de longitud $h = y$, que son perpendiculares al plano xy (vea la figura). Determine el área de la superficie formada por estas perpendiculares de $(0, 0)$ a $\left(3, 2\sqrt{3}\right)$.



8. En los puntos de la circunferencia de radio a, se trazan segmentos perpendiculares al plano de la circunferencia; la perpendicular en cada punto P tiene una longitud ks, donde s es la longitud del arco de la circunferencia medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj de $(a, 0)$ a P, como se ilustra, y k es una constante positiva. Determine el área de la superficie formada por las perpendiculares a lo largo del arco que inicia en $(a, 0)$ y se extiende una vez alrededor de la circunferencia.



Trabajo

9. Una partícula de masa m parte del reposo en el instante $t = 0$ y se desplaza a lo largo del eje x con aceleración constante a, desde $x = 0$ hasta $x = h$ en contra de una fuerza variable de magnitud $F(t) = t^2$. Calcule el trabajo realizado.

10. Trabajo y energía cinética Suponga que una pelota de golf de 1.6 onzas se coloca en un resorte vertical que tiene una constante de fuerza $k = 2$ lb/in. El resorte se comprime 6 in y después se libera. ¿Qué altura alcanza la pelota (medida desde la posición de reposo del resorte)?

Centros de masa

11. Obtenga el centroide de la región acotada abajo por el eje x y arriba por la curva $y = 1 - x^n$; n es un entero positivo par. ¿Cuál es la posición límite del centroide cuando $n \to \infty$?

12. Se transporta un poste telefónico en un remolque de dos ruedas unido a la parte trasera de un camión, y se desea que las ruedas estén a 3 ft, aproximadamente, detrás del centro de masa del poste para tener una distribución adecuada del peso. Los postes telefónicos de madera de 40 ft utilizados por Verizon tienen una circunferencia de 27 in en la parte superior y una de 45.3 in en la base. ¿Aproximadamente a qué distancia de la parte superior está el centro de masa?

13. Suponga que una placa metálica delgada de área A y densidad δ constante ocupa una región R en el plano xy, y sea M_y el momento de la placa con respecto al eje y. Demuestre que el momento de la placa con respecto a la recta $x = b$ es

a) $M_y - b\delta A$ si la placa se encuentra a la derecha de la recta, y

b) $b\delta A - M_y$ si la placa se encuentra a la izquierda de la recta.

14. Obtenga el centro de masa de una placa delgada que cubre la región acotada por la curva $y^2 = 4ax$ y la recta $x = a$, $a =$ constante positiva, si la densidad en (x, y) es directamente proporcional ***a)*** a x, ***b)*** a $|y|$.

15. ***a)*** Obtenga el centroide de la región en el primer cuadrante acotada por dos circunferencias concéntricas y los ejes de coordenadas, si las circunferencias tienen radios a y b, $0 < a < b$, y sus centros están en el origen.

b) Obtenga los límites de las coordenadas del centroide cuando a se aproxima a b, y explique el significado del resultado.

16. Se corta un triángulo de la esquina de un cuadrado de 1 ft por lado. El área del triángulo removido es de 36 in^2. Si el centroide de la región restante se encuentra a 7 in de un lado del cuadrado original, ¿a qué distancia está de los otros lados?

Fuerza de fluidos

17. Una placa triangular ABC se sumerge en agua verticalmente. El lado AB, de 4 ft de longitud, está a 6 ft por debajo de la superficie del agua, mientras que el vértice C se encuentra a 2 ft por debajo de la superficie. Calcule la fuerza ejercida por el agua sobre una cara de la placa.

18. Una placa rectangular vertical se sumerge en un fluido con su extremo superior paralelo a la superficie del fluido. Demuestre que la fuerza ejercida por el fluido sobre una cara de la placa es igual al valor promedio de la presión de arriba y de abajo de la placa multiplicado por el área de ésta.

Capítulo 6 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulos Mathematica/Maple

Uso de sumas de Riemann para estimar áreas, volúmenes y longitudes de curvas
Visualice y aproxime áreas y volúmenes en las **Partes I y II**: Volúmenes de revolución; y **Parte III**: Longitudes de curvas.

Modelado de la cuerda en saltos **bungee**
Recopile datos (o utilice datos previamente recolectados) para construir y afinar un modelo para la fuerza ejercida por la cuerda utilizada en saltos de *bungee*. Utilice el teorema de trabajo-energía para calcular la distancia que cae cierta persona que salta con una cuerda de *bungee* de longitud dada.

7 Funciones trascendentes

INTRODUCCIÓN Existe una gran variedad de fenómenos de interés para la ciencia, la ingeniería, las matemáticas y la economía, que se modelan mejor con funciones que aún no hemos estudiado. Entre ellas destacan las funciones *exponenciales*. Éstas resultan útiles para estudiar el crecimiento de poblaciones biológicas, la propagación de enfermedades o de información en las comunidades humanas, las dosis medicinales, los elementos radiactivos y su papel en la datación de los fósiles, la presión atmosférica de la Tierra, los cambios de temperatura, las ondas, los circuitos eléctricos, la vibración en puentes, las tasas de interés y las probabilidades.

En este capítulo usaremos el cálculo para obtener definiciones rigurosas y precisas y propiedades de las funciones exponenciales. Primero se definirá la función logaritmo natural $y = \ln x$ como una integral, y después la función exponencial natural $y = e^x$ como su función *inversa*. Estas dos funciones son la piedra angular de todas las funciones logarítmicas y exponenciales. También presentaremos las funciones trigonométricas inversas, así como las funciones hiperbólicas y sus inversas, con sus aplicaciones a la integración y a la descripción de cables colgantes. Al igual que las funciones trigonométricas, todas estas funciones pertenecen a la categoría conocida como funciones trascendentes.

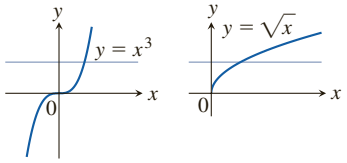
7.1 Funciones inversas y sus derivadas

Una función que deshace o revierte el efecto de una función f se denomina *inversa* de f. Muchas funciones comunes, aunque no todas, se emparejan con una inversa. Funciones inversas importantes a menudo aparecen en aplicaciones. También desempeñan un papel importante en el desarrollo y las propiedades de las funciones exponenciales. Para que una función tenga una inversa, debe poseer una propiedad especial en su dominio.

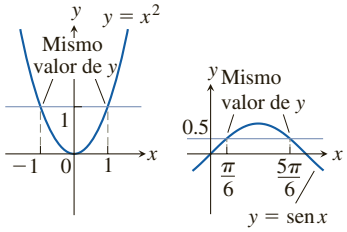
Funciones inyectivas

Una función es una regla que asigna un valor, en su rango, a cada elemento de su dominio. Algunas funciones asignan el mismo valor en el rango a más de un elemento del dominio. La función $f(x) = x^2$ asigna el mismo valor, 1, a los números -1 y $+1$; por otro lado, tanto el seno de $\pi/3$ como el de $2\pi/3$ tienen el valor $\sqrt{3}/2$. Otras funciones toman sólo una vez cada valor en su rango. Las raíces cuadradas y los cubos de números distintos siempre son diferentes. Una función que toma valores distintos en elementos distintos de su dominio se denomina inyectiva (o función uno a uno). Estas funciones toman exactamente una vez cada valor de su rango.

DEFINICIÓN Una función $f(x)$ es inyectiva en un dominio D si $f(x_1) \neq f(x_2)$, siempre que $x_1 \neq x_2$ en D.



a) Inyectiva: la gráfica corta cada recta horizontal en, a lo más, un punto.



b) No inyectiva: la gráfica corta una o más rectas horizontales más de una vez.

FIGURA 7.1 *a*) $y = x^3$ y $y = \sqrt{x}$ son inyectivas en sus dominios $(-\infty, \infty)$ y $[0, \infty)$. *b*) $y = x^2$ y $y = \text{sen } x$ no son inyectivas en sus dominios $(-\infty, \infty)$.

EJEMPLO 1 Algunas funciones son inyectivas en todo su dominio natural. Otras no lo son en todo su dominio, pero restringiéndolas a un dominio pequeño, es posible crear una función inyectiva. La función original y la restringida no son la misma función porque tienen dominios diferentes. Sin embargo, las dos funciones toman los mismos valores en el dominio más pequeño, de modo que la función original es una extensión de la función restringida del dominio más pequeño al más grande.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ es inyectiva en cualquier dominio de números no negativos porque $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$ siempre que $x_1 \neq x_2$.

b) $g(x) = \text{sen } x$ *no* es inyectiva en el intervalo $[0, \pi]$ porque $\text{sen } \pi/6 = \text{sen } (5\pi/6)$. De hecho, a cada elemento x_1 en el subintervalo $[0, \pi/2)$ corresponde un elemento x_2 en el subintervalo $(\pi/2, \pi]$ que satisface $\text{sen } x_1 = \text{sen } x_2$, de modo que se asigna a elementos distintos del dominio el mismo valor en el rango. Sin embargo, la función seno *es* inyectiva en $[0, \pi/2]$ porque es una función creciente en $[0, \pi/2]$, dando valores distintos a entradas distintas. ■

La gráfica de una función inyectiva $y = f(x)$ puede intersecar una recta horizontal dada a lo más una vez. Si la función interseca la recta más de una vez, toma el mismo valor de y para al menos dos valores diferentes de x y, por lo tanto, no es inyectiva (figura 7.1).

Prueba de la recta horizontal para funciones inyectivas
Una función $y = f(x)$ es inyectiva si y sólo si su gráfica interseca cualquier recta horizontal a lo más una vez.

Funciones inversas

Como cada valor o salida de una función inyectiva proviene de una entrada única, el efecto de la función se puede invertir, enviando la salida de regreso a la entrada de la cual proviene.

DEFINICIÓN Suponga que f es una función inyectiva en un dominio D y con rango R. La **función inversa** f^{-1} se define como

$$f^{-1}(b) = a \quad \text{si} \quad f(a) = b.$$

El dominio de f^{-1} es R y su rango es D.

¡Cuidado! No confunda la función inversa f^{-1} con la función recíproca $1/f$.

El símbolo f^{-1} de la función inversa de f se lee como "inversa de f". El "−1" en f^{-1} *no* es un exponente; $f^{-1}(x)$ no significa $1/f(x)$. Observe que los dominios y rangos de f y f^{-1} están intercambiados.

EJEMPLO 2 Suponga que una función inyectiva $y = f(x)$ está dada por la tabla de valores

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	3	4.5	7	10.5	15	20.5	27	34.5

Entonces, la tabla de valores de $x = f^{-1}(y)$ se puede obtener intercambiando simplemente los valores en las columnas (o filas) de la tabla de f:

y	3	4.5	7	10.5	15	20.5	27	34.5
$f^{-1}(y)$	1	2	3	4	5	6	7	8

■

Si usamos f para enviar un dato x al valor $f(x)$ y en seguida evaluamos f^{-1} en $f(x)$, obtenemos nuevamente x, justo donde iniciamos. De manera similar, si tomamos algún número y en el rango de f, le aplicamos f^{-1} y luego aplicamos f al valor resultante de $f^{-1}(y)$, obtenemos una vez más el valor de y con el que iniciamos. La composición de una función con su inversa tiene el mismo efecto que no hacer nada.

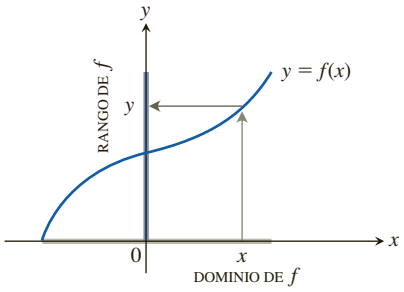
$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \qquad \text{para toda } x \text{ en el dominio de } f$$
$$(f \circ f^{-1})(y) = y, \qquad \text{para toda } y \text{ en el dominio de } f^{-1} \text{ (o rango de } f)$$

Sólo las funciones inyectivas pueden tener una inversa. La razón es que si $f(x_1) = y$ y $f(x_2) = y$ para dos entradas distintas x_1 y x_2, no existe forma de asignar un valor a $f^{-1}(y)$ que satisfaga al mismo tiempo a $f^{-1}(f(x_1)) = x_1$ y $(f^{-1}(x_2)) = x_2$.

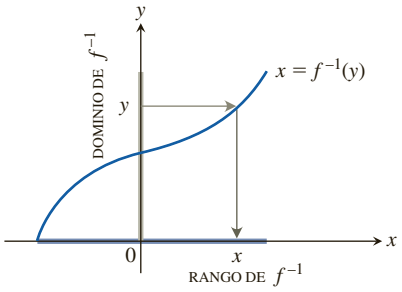
Una función que es creciente en un intervalo satisface la desigualdad $f(x_2) > f(x_1)$ cuando $x_2 > x_1$, de modo que es inyectiva y tiene una inversa. Las funciones decrecientes también tienen una inversa. Funciones que no son crecientes ni decrecientes pueden ser inyectivas y tener una inversa, como la función $f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, definida en $(-\infty, \infty)$ y que pasa la prueba de la recta horizontal.

Obtención de las inversas

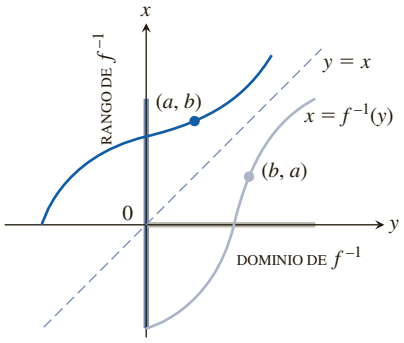
Las gráficas de una función y su inversa están estrechamente relacionadas. Para conocer el valor de una función a partir de su gráfica, iniciamos en un punto x del eje x, nos movemos verticalmente hacia la gráfica y, luego, nos movemos horizontalmente hacia el eje y para leer el valor de y. La función inversa puede conocerse a partir de la gráfica invirtiendo este proceso: iniciamos en un punto y en el eje y, nos desplazamos horizontalmente hacia la gráfica de $y = f(x)$ y, luego, nos movemos verticalmente hacia el eje x para leer el valor de $x = f^{-1}(y)$ (figura 7.2).



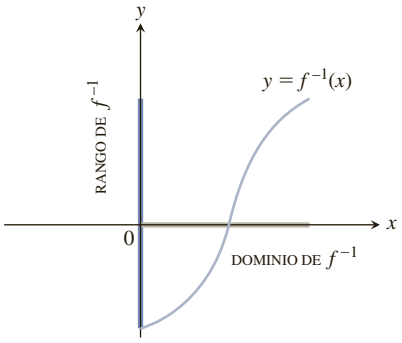
a) Para obtener el valor de f en x, iniciamos en x, subimos hacia la curva, y luego nos dirigimos hacia el eje y



b) La gráfica de f^{-1} es la gráfica de f, pero con x y y intercambiadas. Para obtener la x que nos dio y, iniciamos en y, nos dirigimos hacia la curva y bajamos hacia el eje x. El dominio de f^{-1} es el rango de f. El rango de f^{-1} es el dominio de f.



c) Para trazar la gráfica de f^{-1} de la manera usual, reflejamos el sistema con respecto a la recta $y = x$.



d) Después, intercambiamos las letras x y y. Ahora tenemos la gráfica de f^{-1} en la forma usual, como una función de x.

FIGURA 7.2 La gráfica de $y = f^{-1}(x)$ se obtiene reflejando la gráfica de $y = f(x)$ con respecto a la recta $y = x$.

Queremos graficar f^{-1} de manera que su dominio se encuentre en el eje x, como se hace usualmente para funciones, en lugar del eje y. Para ello, intercambiamos los ejes x y y reflejando con respecto a la recta a 45°, $y = x$. Después de esta reflexión, tenemos una nueva gráfica que representa a f^{-1}. El valor de $f^{-1}(x)$ se puede leer ahora, a partir de la gráfica, del modo habitual iniciando en un punto x del eje x, haciendo un recorrido vertical hacia la gráfica y luego uno horizontal hacia el eje y para obtener el valor de $f^{-1}(x)$. La figura 7.2 muestra la relación entre las gráficas de f y f^{-1}. Las gráficas se intercambian por medio de la reflexión con respecto a la recta $y = x$.

El proceso de pasar de f a f^{-1} se resume en dos pasos.

1. Despeje x en la ecuación $y = f(x)$. Esto proporciona una fórmula $x = f^{-1}(y)$, donde x se expresa como una función de y.
2. Intercambie x y y para obtener una fórmula $y = f^{-1}(x)$, donde f^{-1} se expresa en el formato convencional, con x como la variable independiente y y como la variable dependiente.

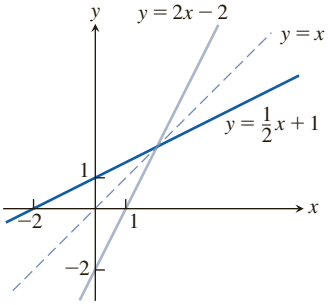


FIGURA 7.3 Al graficar juntas las funciones $f(x) = (1/2)x + 1$ y $f^{-1}(x) = 2x - 2$ se muestra la simetría de las gráficas con respecto a la recta $y = x$ (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Obtenga la inversa de $y = \frac{1}{2}x + 1$, expresada como una función de x.

Solución

1. *Despeje x en términos de y*: $y = \frac{1}{2}x + 1$ La gráfica es una recta que pasa la prueba de la recta horizontal (figura 7.3).

$$2y = x + 2$$
$$x = 2y - 2.$$

2. *Intercambie x y y*: $y = 2x - 2$.

La inversa de la función $f(x) = (1/2)x + 1$ es la función $f^{-1}(x) = 2x - 2$. (Vea la figura 7.3). Para comprobarlo, verificamos que las dos composiciones dan la función identidad:

$$f^{-1}(f(x)) = 2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2 = x + 2 - 2 = x$$
$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}(2x - 2) + 1 = x - 1 + 1 = x.$$ ■

EJEMPLO 4 Obtenga la inversa de la función $y = x^2$, $x \geq 0$, expresada como una función de x.

Solución Para $x \geq 0$, la gráfica pasa la prueba de la recta horizontal, así que la función es inyectiva y tiene una inversa. Para obtener la inversa, primero despejamos x en términos de y:

$$y = x^2$$
$$\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x \qquad |x| = x \text{ porque } x \geq 0$$

Después, intercambiamos x y y para obtener

$$y = \sqrt{x}.$$

La inversa de la función $y = x^2$, $x \geq 0$, es la función $y = \sqrt{x}$ (figura 7.4).

Observe que la función $y = x^2$, $x \geq 0$, con dominio *restringido* a los números reales no negativos, *es* inyectiva (figura 7.4) y tiene una inversa. Por otro lado, la función $y = x^2$, sin restricciones en el dominio, *no es* inyectiva (figura 7.1*b*) y, por lo tanto, no tiene inversa. ■

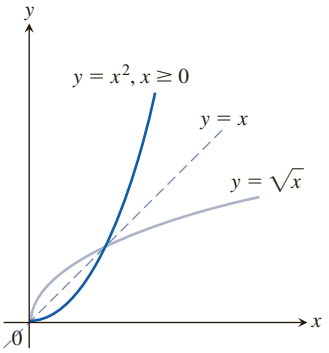


FIGURA 7.4 Las funciones $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$, $x \geq 0$, son inversas una de la otra (ejemplo 4).

Derivadas de inversas de funciones diferenciables

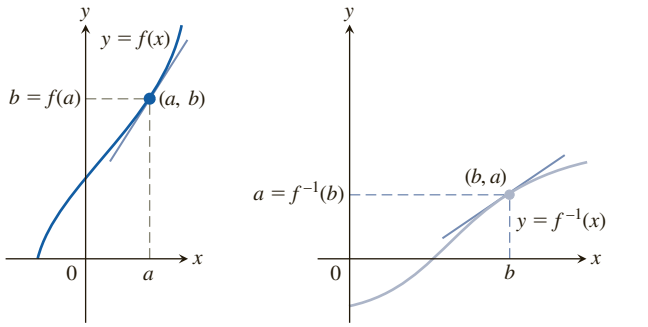
En el ejemplo 3, calculamos $f^{-1}(x) = 2x - 2$ como la inversa de la función $f(x) = (1/2)x + 1$. Si calculamos sus derivadas, vemos que

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{d}{dx}(2x - 2) = 2.$$

Las derivadas son recíprocas una de otra, de manera que la pendiente de una recta es el recíproco de la pendiente de su recta inversa. (Vea la figura 7.3).

Éste no es un caso especial. Siempre que cualquier recta que no sea vertical u horizontal se refleja con respecto a la recta $y = x$, su pendiente se invierte. Si la recta original tiene pendiente $m \neq 0$, la recta reflejada tiene pendiente $1/m$.



Las pendientes son recíprocas: $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$ o $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

FIGURA 7.5 Las gráficas de funciones inversas tienen pendientes recíprocas en los puntos correspondientes.

La relación recíproca entre las pendientes de f y f^{-1} también es válida en el caso de otras funciones, pero debemos tener cuidado al comparar pendientes en puntos correspondientes. Si la pendiente de $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es $f'(a)$ y $f'(a) \neq 0$, entonces, la pendiente de $y = f^{-1}(x)$ en el punto correspondiente $(f(a), a)$ es el recíproco $1/f'(a)$ (figura 7.5). Si hacemos $b = f(a)$, entonces,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Si $y = f(x)$ tiene una recta tangente horizontal en $(a, f(a))$, entonces, la función inversa f^{-1} tiene una recta tangente vertical en $(f(a), a)$, y esta pendiente infinita implica que f^{-1} no es diferenciable en $f(a)$. El teorema 1 señala las condiciones en las que f^{-1} es diferenciable en su dominio (que es el mismo que el rango de f).

TEOREMA 1: Regla de la derivada para inversas Si f tiene un intervalo I como dominio, y $f'(x)$ existe y nunca es cero en I, entonces, f^{-1} es diferenciable en cada punto de su dominio (el rango de f). El valor de $(f^{-1})'$ en un punto b del dominio de f^{-1} es el recíproco del valor de f' en el punto $a = f^{-1}(b)$:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \tag{1}$$

o

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=b} = \frac{1}{\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(b)}}.$$

El teorema 1 hace dos afirmaciones. La primera de éstas tiene que ver con las condiciones en las cuales f^{-1} es diferenciable; la segunda afirmación es una fórmula de la derivada de f^{-1} cuando existe. No incluimos la demostración de la primera afirmación, pero en seguida se presenta la demostración de la segunda:

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \text{Relación de función inversa}$$

$$\frac{d}{dx} f(f^{-1}(x)) = 1 \qquad \text{Diferenciación en ambos lados}$$

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = 1 \qquad \text{Regla de la cadena}$$

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \qquad \text{Se despeja la derivada}$$

EJEMPLO 5 La función $f(x) = x^2, x > 0$, y su inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ tienen derivadas $f'(x) = 2x$ y $(f^{-1})'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.

Verifique si el teorema 1 proporciona la misma fórmula de la derivada de $f^{-1}(x)$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{2(f^{-1}(x))} \qquad f'(x) = 2x \text{ con } x \text{ sustituida por } f^{-1}(x)$$

$$= \frac{1}{2(\sqrt{x})}.$$

El teorema 1 da una derivada que concuerda con la derivada conocida de la función raíz cuadrada.

Examinemos el teorema 1 en un punto específico. Tomamos $x = 2$ (el número a) y $f(2) = 4$ (el valor b). El teorema 1 afirma que la derivada de f en 2, que es $f'(2) = 4$, y la derivada de f^{-1} en $f(2)$, que es $(f^{-1})'(4)$, son recíprocos. Esto hace que

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(4))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2x}\bigg|_{x=2} = \frac{1}{4}.$$

Vea la figura 7.6. ■

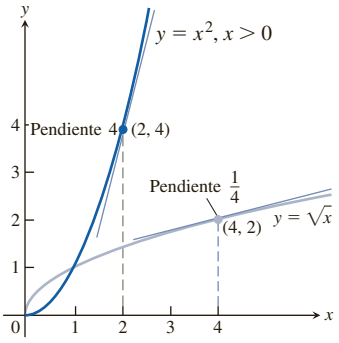


FIGURA 7.6 La derivada de $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ en el punto (4, 2) es el recíproco de la derivada de $f(x) = x^2$ en (2, 4) (ejemplo 5).

A lo largo de este capítulo, utilizaremos el procedimiento ilustrado en el ejemplo 5 para calcular fórmulas de las derivadas de muchas funciones inversas. La ecuación (1) algunas veces nos permite obtener valores específicos de df^{-1}/dx sin conocer la fórmula de f^{-1}.

EJEMPLO 6 Sea $f(x) = x^3 - 2, x > 0$. Obtenga el valor de df^{-1}/dx en $x = 6 = f(2)$ sin obtener la fórmula de $f^{-1}(x)$.

Solución Aplicamos el teorema 1 para obtener el valor de la derivada de f^{-1} en $x = 6$:

$$\frac{df}{dx}\bigg|_{x=2} = 3x^2\bigg|_{x=2} = 12$$

$$\frac{df^{-1}}{dx}\bigg|_{x=f(2)} = \frac{1}{\dfrac{df}{dx}\bigg|_{x=2}} = \frac{1}{12}. \qquad \text{Ecuación (1)}$$

Vea la figura 7.7. ■

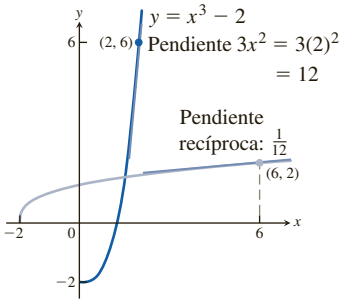


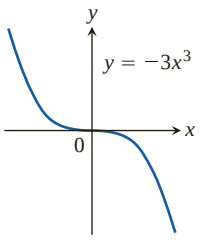
FIGURA 7.7 La derivada de $f(x) = x^3 - 2$ en $x = 2$ nos da la derivada de f^{-1} en $x = 6$ (ejemplo 6).

Ejercicios 7.1

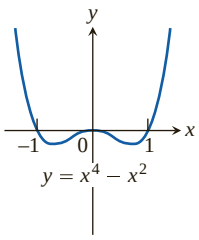
Identificación gráfica de funciones inyectivas

¿Cuáles de las funciones cuyas gráficas se muestran en los ejercicios 1 a 6 son inyectivas?

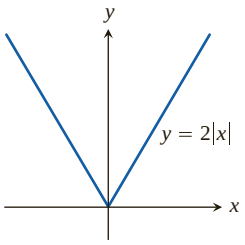
1.



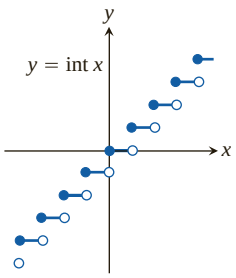
2.



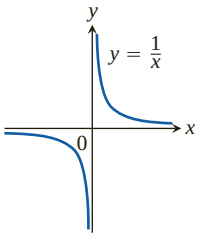
3.



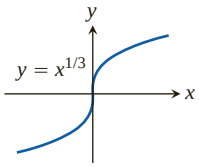
4.



5.



6.



En los ejercicios 7 a 10, determine, a partir de su gráfica, si la función es inyectiva.

7. $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 0 \\ 3, & x \geq 0 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 2x + 6, & x \leq -3 \\ x + 4, & x > -3 \end{cases}$

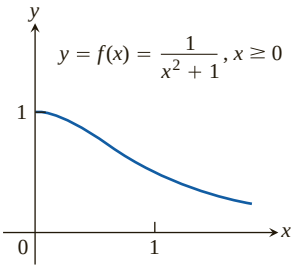
9. $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2}, & x \leq 0 \\ \dfrac{x}{x + 2}, & x > 0 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

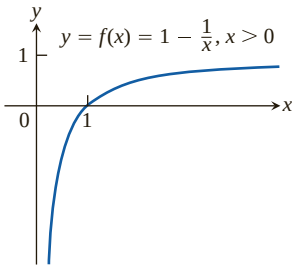
Graficación de funciones inversas

En cada uno de los ejercicios 11 a 16 se presenta la gráfica de una función $y = f(x)$. Copie la gráfica y trace la recta $y = x$. Luego, utilice la simetría con respecto a la recta $y = x$ para agregar la gráfica de f^{-1} a su dibujo. (No es necesario determinar la fórmula de f^{-1}). Identifique el dominio y el rango de f^{-1}.

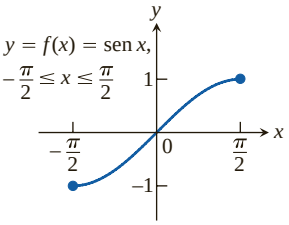
11.



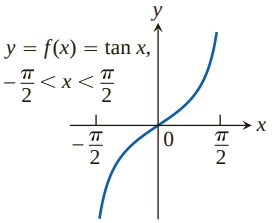
12.



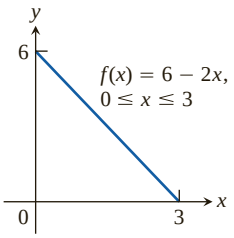
13.



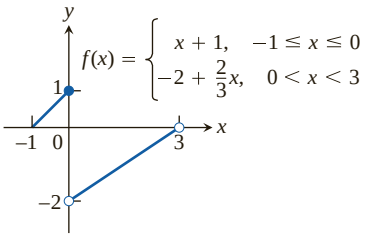
14.



15.



16.



17. ***a)*** Grafique la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leq x \leq 1$. ¿Qué simetría tiene la gráfica?

b) Demuestre que f es su propia inversa. (Recuerde que $\sqrt{x^2} = x$ si $x \geq 0$).

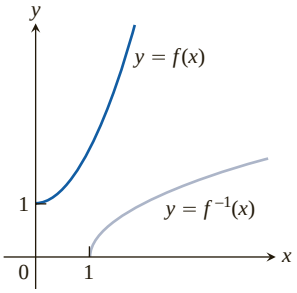
18. ***a)*** Grafique la función $f(x) = 1/x$. ¿Qué simetría tiene la gráfica?

b) Demuestre que f es su propia inversa.

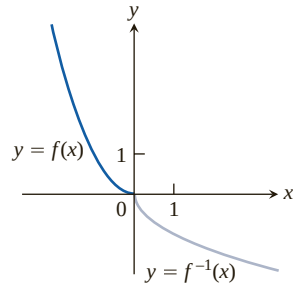
Fórmulas de funciones inversas

Cada uno de los ejercicios 19 a 24 presenta una fórmula de una función $y = f(x)$ y muestra las gráficas de f y f^{-1}. En cada caso, obtenga una fórmula para f^{-1}.

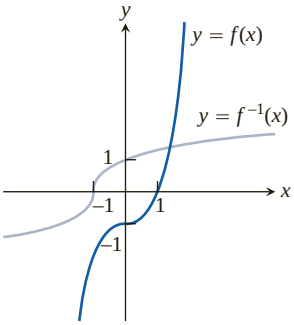
19. $f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$



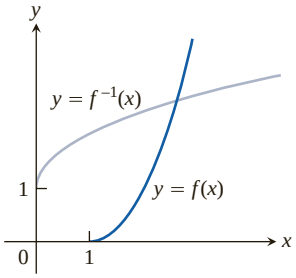
20. $f(x) = x^2, \quad x \leq 0$



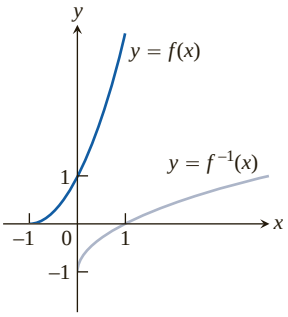
21. $f(x) = x^3 - 1$



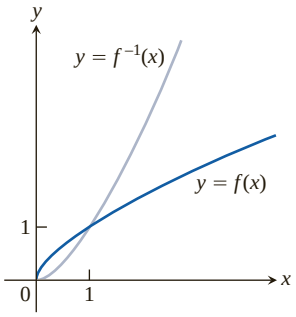
22. $f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad x \geq 1$



23. $f(x) = (x + 1)^2, \quad x \geq -1$



24. $f(x) = x^{2/3}, \quad x \geq 0$



Derivadas de funciones inversas

En cada uno de los ejercicios 25 a 34, se presenta una fórmula de una función $y = f(x)$. En cada caso, obtenga $f^{-1}(x)$ e identifique el dominio y el rango de f^{-1}. Como comprobación, demuestre que $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.

25. $f(x) = x^5$

26. $f(x) = x^4, \quad x \geq 0$

27. $f(x) = x^3 + 1$

28. $f(x) = (1/2)x - 7/2$

29. $f(x) = 1/x^2, \quad x > 0$

30. $f(x) = 1/x^3, \quad x \neq 0$

31. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$

32. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$

33. $f(x) = x^2 - 2x, \quad x \leq 1$ (*Sugerencia*: Complete el cuadrado.)

34. $f(x) = (2x^3 + 1)^{1/5}$

En los ejercicios 35 a 38:

a) Obtenga $f^{-1}(x)$.

b) Grafique juntas f y f^{-1}.

c) Evalúe df/dx en $x = a$ y df^{-1}/dx en $x = f(a)$ para demostrar que, en esos puntos, $df^{-1}/dx = 1/(df/dx)$.

35. $f(x) = 2x + 3, \quad a = -1$

36. $f(x) = (1/5)x + 7, \quad a = -1$

37. $f(x) = 5 - 4x, \quad a = 1/2$

38. $f(x) = 2x^2, \quad x \geq 0, \quad a = 5$

39. ***a)*** Demuestre que $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$ son inversas una de otra.

b) Grafique f y g en un intervalo x lo suficientemente grande para mostrar que las gráficas se intersecan en $(1, 1)$ y $(-1, -1)$. Asegúrese de que el dibujo muestre la simetría requerida con respecto a la recta $y = x$.

c) Determine las pendientes de las tangentes a las gráficas de f y g en $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ (cuatro tangentes en total).

d) ¿Qué rectas son tangentes a las curvas en el origen?

40. ***a)*** Demuestre que $h(x) = x^3/4$ y $k(x) = (4x)^{1/3}$ son inversas una de otra.

b) Grafique h y k en un intervalo x lo suficientemente grande para mostrar que las gráficas se intersecan en $(2, 2)$ y $(-2, -2)$. Asegúrese de que el dibujo muestre la simetría requerida con respecto a la recta $y = x$.

c) Determine las pendientes de las tangentes a las gráficas de h y k en $(2, 2)$ y $(-2, -2)$.

d) ¿Qué rectas son tangentes a las curvas en el origen?

41. Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1, x \geq 2$. Obtenga el valor de df^{-1}/dx en el punto $x = -1 = f(3)$.

42. Sea $f(x) = x^2 - 4x - 5, x > 2$. Obtenga el valor de df^{-1}/dx en el punto $x = 0 = f(5)$.

43. Suponga que la función diferenciable $y = f(x)$ tiene inversa y que la gráfica de f pasa por el punto $(2, 4)$, donde tiene una pendiente igual a $1/3$. Obtenga el valor de df^{-1}/dx en $x = 4$.

44. Suponga que la función diferenciable $y = g(x)$ tiene inversa y que la gráfica de g pasa por el origen con una pendiente igual a 2. Obtenga la pendiente de la gráfica de g^{-1} en el origen.

Inversas de rectas

45. ***a)*** Obtenga la inversa de la función $f(x) = mx$, donde m es una constante diferente de cero.

b) ¿Qué concluye con respecto a la inversa de una función $y = f(x)$ cuya gráfica es una recta que cruza el origen con pendiente m diferente de cero?

46. Demuestre que la gráfica de la inversa de $f(x) = mx + b$, donde m y b son constantes y $m \neq 0$, es una recta con pendiente de $1/m$ y ordenada al origen $-b/m$.

47. ***a)*** Obtenga la inversa de $f(x) = x + 1$. Trace juntas las gráficas de f y su inversa. Agregue la recta $y = x$ a su dibujo y trácela con guiones o puntos para que contraste.

b) Obtenga la inversa de $f(x) = x + b$ (donde b es constante). ¿Cómo está relacionada la gráfica de f^{-1} con la de f?

c) ¿A qué conclusión llega con respecto a las inversas de funciones cuyas gráficas son rectas paralelas a la recta $y = x$?

48. ***a)*** Obtenga la inversa de $f(x) = -x + 1$. Grafique la recta $y = -x + 1$ junto con la recta $y = x$. ¿En qué ángulo se intersecan las rectas?

b) Obtenga la inversa de $f(x) = -x + b$ (donde b es constante). ¿Qué ángulo forma la recta $y = -x + b$ con la recta $y = x$?

c) ¿A qué conclusión llega con respecto a las inversas de funciones cuyas gráficas son rectas perpendiculares a la recta $y = x$?

Funciones crecientes y decrecientes

49. Demuestre que tanto las funciones crecientes como las decrecientes son inyectivas. Es decir, demuestre que para todos x_1 y x_2 en I, $x_2 \neq x_1$ implica que $f(x_2) \neq f(x_1)$.

Use los resultados del ejercicio 49 para demostrar que las funciones de los ejercicios 50 a 54 tienen inversas en sus dominios. Obtenga una fórmula para df^{-1}/dx usando el teorema 1.

50. $f(x) = (1/3)x + (5/6)$

51. $f(x) = 27x^3$

52. $f(x) = 1 - 8x^3$

53. $f(x) = (1 - x)^3$

54. $f(x) = x^{5/3}$

Teoría y aplicaciones

55. Si $f(x)$ es inyectiva, ¿qué puede decir acerca de $g(x) = -f(x)$? ¿También es inyectiva? Justifique su respuesta.

56. Si $f(x)$ es inyectiva y nunca es cero, ¿qué puede decir acerca de $h(x) = 1/f(x)$? ¿También es inyectiva? Justifique su respuesta.

57. Suponga que el rango de g está contenido en el dominio de f, y así la composición $f \circ g$ está definida. Si f y g son inyectivas, ¿qué puede decir acerca de $f \circ g$? Justifique su respuesta.

58. Si una composición $f \circ g$ es inyectiva, ¿también g debe serlo? Justifique su respuesta.

59. Suponga que f y g son funciones diferenciables que son inversas una de otra, de modo que $(g \circ f)(x) = x$. Derive ambos lados de esta ecuación con respecto a x, usando la regla de la cadena, para expresar $(g \circ f)'(x)$ como un producto de las derivadas de g y f. ¿Qué encontró? (Esto no es una demostración del teorema 1 porque aquí suponemos la conclusión del teorema de que $g = f^{-1}$ es diferenciable).

60. Equivalencia de los métodos de las arandelas y los casquillos para calcular volúmenes Sea f diferenciable y creciente en el intervalo $a \le x \le b$, con $a > 0$, y suponga que f tiene una inversa diferenciable, f^{-1}. Genere un sólido haciendo girar alrededor del eje y la región acotada por la gráfica de f y las rectas $x = a$ y $y = f(b)$. Entonces, los valores de las integrales obtenidas por el método de las arandelas y por el método de los casquillos para volumen son idénticos:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \pi((f^{-1}(y))^2 - a^2)\, dy = \int_a^b 2\pi x(f(b) - f(x))\, dx.$$

Para demostrar esta igualdad, defina

$$W(t) = \int_{f(a)}^{f(t)} \pi((f^{-1}(y))^2 - a^2)\, dy$$

$$S(t) = \int_a^t 2\pi x(f(t) - f(x))\, dx.$$

Después, demuestre que las funciones W y S coinciden en un punto de $[a, b]$ y que tienen derivadas idénticas en $[a, b]$. Como se vio en el ejercicio 90 de la sección 4.7, esto garantiza que $W(t) = S(t)$ para toda t en $[a, b]$. En particular, $W(b) = S(b)$. (*Fuente:* "Disk and Shells Revisited", Walter Carlip, *American Mathematical Monthly*, vol. 98 núm. 2, febrero de 1991, pp. 154-156).

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 61 a 68, explorará algunas funciones y sus inversas junto con sus derivadas y sus aproximaciones lineales en puntos específicos. Ejecute los siguientes pasos utilizando un software matemático.

a) Grafique la función $y = f(x)$ junto con su derivada en el intervalo que se indica. Explique cómo sabe que f es una función inyectiva en el intervalo.

b) Despeje x de la ecuación $y = f(x)$ como una función de y, y llame g a la función inversa obtenida.

c) Obtenga la ecuación de la recta tangente a f en el punto $(x_0, f(x_0))$ especificado.

d) Obtenga la ecuación de la recta tangente a g en el punto $(f(x_0), x_0)$, que está ubicado simétricamente con respecto a la recta de 45°, $y = x$ (que es la gráfica de la función identidad). Utilice el teorema 1 para obtener la pendiente de esta recta tangente.

e) Grafique las funciones f y g, la identidad, las dos rectas tangentes y el segmento de recta que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(f(x_0), x_0)$. Analice las simetrías que encuentre con respecto a la diagonal principal.

61. $y = \sqrt{3x - 2}, \quad \frac{2}{3} \le x \le 4, \quad x_0 = 3$

62. $y = \dfrac{3x + 2}{2x - 11}, \quad -2 \le x \le 2, \quad x_0 = 1/2$

63. $y = \dfrac{4x}{x^2 + 1}, \quad -1 \le x \le 1, \quad x_0 = 1/2$

64. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}, \quad -1 \le x \le 1, \quad x_0 = 1/2$

65. $y = x^3 - 3x^2 - 1, \quad 2 \le x \le 5, \quad x_0 = \frac{27}{10}$

66. $y = 2 - x - x^3, \quad -2 \le x \le 2, \quad x_0 = \frac{3}{2}$

67. $y = e^x, \quad -3 \le x \le 5, \quad x_0 = 1$

68. $y = \operatorname{sen} x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad x_0 = 1$

En los ejercicios 69 y 70, repita los pasos anteriores para resolver las funciones $y = f(x)$ y $x = f^{-1}(y)$ definidas de manera implícita por las ecuaciones dadas, en el intervalo que se indica.

69. $y^{1/3} - 1 = (x + 2)^3, \quad -5 \le x \le 5, \quad x_0 = -3/2$

70. $\cos y = x^{1/5}, \quad 0 \le x \le 1, \quad x_0 = 1/2$

7.2 Logaritmos naturales

Históricamente, los logaritmos han desempeñado un papel importante en los cálculos aritméticos, haciendo posible los grandes avances del siglo XVII en la navegación y en el estudio de la mecánica celeste. En esta sección definiremos los logaritmos naturales como una integral usando el teorema fundamental del cálculo. Aunque tal vez al principio este enfoque indirecto parezca un tanto extraño, constituye un modo elegante y riguroso para obtener las características principales de las funciones logarítmicas y exponenciales.

Definición de la función logaritmo natural

El logaritmo natural de cualquier número positivo x, denotado por $\ln x$, se define como una integral.

DEFINICIÓN El **logaritmo natural** es la función dada por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \qquad x > 0.$$

Por el teorema fundamental del cálculo, el logaritmo natural de x es una función continua. Geométricamente, si $x > 1$, entonces, $\ln x$ es el área debajo de la curva $y = 1/t$ de $t = 1$ a $t = x$ (figura 7.8). Para $0 < x < 1$, $\ln x$ da el negativo del área debajo de la curva de x a 1, y la función no está definida para $x \leq 0$. Según la regla del intervalo de longitud igual a cero para integrales definidas, también tenemos que

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0.$$

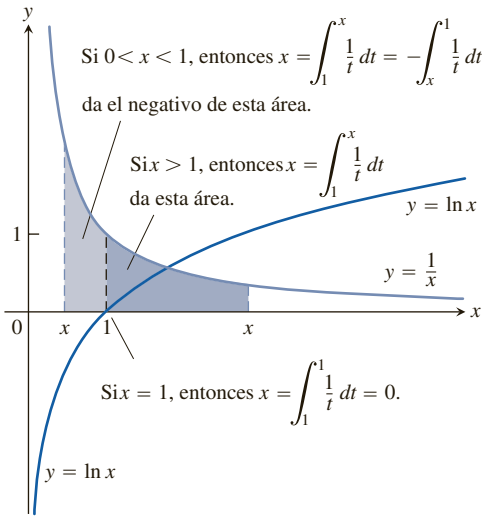


FIGURA 7.8 Gráfica de $y = \ln x$ y su relación con la función $y = 1/x$, $x > 0$. La gráfica del logaritmo se eleva por encima del eje x cuando x se mueve de 1 hacia la derecha, y desciende por debajo del eje x cuando x se mueve de 1 hacia la izquierda.

TABLA 7.1 Valores típicos de ln x, redondeados a dos decimales

x	$\ln x$
0	indefinido
0.05	−3.00
0.5	−0.69
1	0
2	0.69
3	1.10
4	1.39
10	2.30

Observe que en la figura 7.8 se muestra la gráfica de $y = 1/x$, pero en la integral se usa $y = 1/t$. De haber empleado x en todas las variables, habríamos escrito

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x}\,dx,$$

donde x tendría dos significados diferentes. Por eso, se emplea t como variable de integración.

Al utilizar rectángulos para tener aproximaciones finitas del área bajo la gráfica de $y = 1/t$ y sobre el intervalo comprendido entre $t = 1$ y $t = x$, como en la sección 5.1, podemos aproximar los valores de la función $\ln x$. En la tabla 7.1 se presentan varios valores. Existe un número importante, entre $x = 2$ y $x = 3$, cuyo logaritmo natural es igual a 1. Este número, que definiremos ahora, existe porque $\ln x$ es una función continua y, por lo tanto, satisface el teorema del valor intermedio en [2, 3].

DEFINICIÓN El **número e** es aquel que está en el dominio del logaritmo natural y satisface

$$\ln(e) = \int_1^e \frac{1}{t}\,dt = 1.$$

Geométricamente, el número e corresponde al punto del eje x para el que el área debajo de la gráfica de $y = 1/t$ y sobre el intervalo $[1, e]$ es igual al área del cuadrado unitario. Es decir, el área de la región sombreada en la figura 7.8 es una unidad cuadrada cuando $x = e$. En la siguiente sección, veremos que el número e se puede calcular como un límite y tiene el valor numérico $e \approx 2.718281828459045$ redondeado a 15 decimales.

La derivada de $y = \ln x$

Por la primera parte del teorema fundamental del cálculo (sección 5.4),

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}dt = \frac{1}{x}.$$

Para todo valor positivo de x, tenemos

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}. \tag{1}$$

Por lo tanto, la función $y = \ln x$ es una solución del problema con valor inicial $dy/dx = 1/x$, $x > 0$, con $y(1) = 0$. Observe que la derivada siempre es positiva.

Si u es una función diferenciable de x cuyos valores son positivos, de modo que $\ln u$ esté definida, al aplicar la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \qquad u > 0. \tag{2}$$

EJEMPLO 1 La ecuación (2) se emplea para obtener las derivadas.

a) $\dfrac{d}{dx}\ln 2x = \dfrac{1}{2x}\dfrac{d}{dx}(2x) = \dfrac{1}{2x}(2) = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

b) La ecuación (2) con $u = x^2 + 3$ da

$$\frac{d}{dx}\ln(x^2 + 3) = \frac{1}{x^2 + 3}\cdot\frac{d}{dx}(x^2 + 3) = \frac{1}{x^2 + 3}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 3}.$$

c) La ecuación (2) con $u = |x|$ da una derivada importante:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\ln|x| &= \frac{d}{du}\ln u \cdot \frac{du}{dx} && u = |x|, x \neq 0 \\
&= \frac{1}{u}\cdot\frac{x}{|x|} && \frac{d}{dx}(|x|) = \frac{x}{|x|} \\
&= \frac{1}{|x|}\cdot\frac{x}{|x|} && \text{Se sustituye } u. \\
&= \frac{x}{x^2} \\
&= \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Derivada de $\ln|x|$

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}, x \neq 0$$

Entonces, $1/x$ es la derivada de $\ln x$ en el dominio $x > 0$, y la derivada de $\ln(-x)$ en el dominio $x < 0$. ■

A partir del ejemplo 1*a*), observe que la función $y = \ln 2x$ tiene la misma derivada que la función $y = \ln x$. Esto es verdadero si $y = \ln bx$ para cualquier constante b, siempre que $bx > 0$:

$$\frac{d}{dx}\ln bx = \frac{1}{bx}\cdot\frac{d}{dx}(bx) = \frac{1}{bx}(b) = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{d}{dx}\ln bx = \frac{1}{x}, \quad bx > 0$$

Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos, inventados por John Napier, constituyeron el avance individual más importante del cálculo aritmético hasta antes de la aparición de las computadoras electrónicas modernas. Su utilidad radica en que las propiedades de los logaritmos reducen la multiplicación de números positivos a la suma de sus logaritmos, la división de números positivos a la resta de sus logaritmos, y la exponenciación de un número a la multiplicación de su logaritmo por el exponente.

TEOREMA 2: Propiedades algebraicas de los logaritmos naturales Para números $b > 0$ y $x > 0$ cualesquiera, el logaritmo natural satisface las siguientes reglas:

1.	*Regla del producto*:	$\ln bx = \ln b + \ln x$	
2.	*Regla del cociente*:	$\ln \frac{b}{x} = \ln b - \ln x$	
3.	*Regla del recíproco*:	$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$	Regla 2 con $b = 1$
4.	*Regla de la potencia*:	$\ln x^r = r \ln x$	Para r racional

Por ahora sólo consideraremos exponentes racionales para la regla 4. En la sección 7.3 veremos que la regla también es válida para todos los exponentes reales.

EJEMPLO 2 Aquí se ejemplifica cada una de las reglas del teorema 2.

a) $\ln 4 + \ln \operatorname{sen} x = \ln(4 \operatorname{sen} x)$ Regla del producto

b) $\ln \frac{x+1}{2x-3} = \ln(x+1) - \ln(2x-3)$ Regla del cociente

c) $\ln \frac{1}{8} = -\ln 8$ Regla del recíproco

$= -\ln 2^3 = -3 \ln 2$ Regla de la potencia ■

A continuación demostraremos el teorema 2. Las propiedades se demuestran aplicando el corolario 2 del teorema del valor medio a cada una de ellas.

Demostración de que $\ln bx = \ln b + \ln x$ El argumento parte de la observación de que $\ln bx$ y $\ln x$ tienen la misma derivada:

$$\frac{d}{dx}\ln(bx) = \frac{b}{bx} = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\ln x.$$

De acuerdo con el corolario 2 del teorema del valor medio, las funciones deben diferir por una constante, lo que significa que

$$\ln bx = \ln x + C$$

para alguna constante C.

Como esta última ecuación es válida para todos los valores positivos de x, debe ser válida para $x = 1$. Por lo tanto,

$$\ln(b \cdot 1) = \ln 1 + C$$
$$\ln b = 0 + C \qquad \ln 1 = 0$$
$$C = \ln b.$$

Por sustitución, se concluye que

$$\ln bx = \ln b + \ln x.$$

■

Demostración de que $\ln x^r = r \ln x$ (suponiendo que r es racional) Nuevamente, usamos el argumento de que ambos tienen la misma derivada. Para todos los valores positivos de x,

$$\frac{d}{dx}\ln x^r = \frac{1}{x^r}\frac{d}{dx}(x^r) \qquad \text{Ecuación (2) con } u = x^r$$

$$= \frac{1}{x^r} r x^{r-1} \qquad \text{Regla general de potencia para derivadas, } r \text{ racional}$$

$$= r \cdot \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}(r \ln x).$$

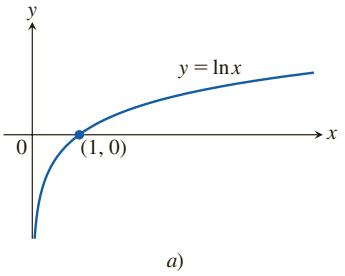
Como $\ln x^r$ y $r \ln x$ tienen la misma derivada,

$$\ln x^r = r \ln x + C$$

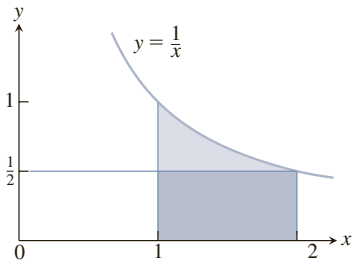
para alguna constante C. Tomando $x = 1$, se deduce que C es igual a cero, con lo que concluye la demostración. (El ejercicio 46 en la sección 3.7 constituye una demostración de la regla general de la potencia para derivadas cuando r es racional).

En el ejercicio 86 se le pedirá demostrar la regla 2. La regla 3 es un caso especial de la regla 2, que se obtiene al considerar $b = 1$ y observando que $\ln 1 = 0$. Con esto hemos cubierto todos los casos del teorema 2. ■

Aún no hemos demostrado la regla 4 para r irracional; sin embargo, la regla es válida para toda r, racional o irracional. Demostraremos esto en la siguiente sección, después de definir las funciones exponenciales y los exponentes irracionales.



a)



b)

FIGURA 7.9 *a*) Gráfica del logaritmo natural. *b*) El rectángulo de altura $y = 1/2$ se ajusta debajo de la gráfica de $y = 1/x$ en el intervalo $1 \le x \le 2$.

Gráfica y rango de ln *x*

La derivada $d(\ln x)/dx = 1/x$ es positiva para $x > 0$, por lo que $\ln x$ es una función creciente de x. La segunda derivada, $-1/x^2$, es negativa, así que la gráfica de $\ln x$ es cóncava hacia abajo. (Vea la figura 7.9*a*).

Podemos estimar el valor de $\ln 2$ considerando el área que está debajo de la gráfica de $1/x$ y arriba del intervalo $[1, 2]$. En la figura 7.9*b*), un rectángulo de altura igual a $1/2$ en el intervalo $[1, 2]$ se ajusta debajo de la gráfica. Por lo tanto, el área debajo de la gráfica, que es $\ln 2$, es mayor que el área, igual a $1/2$, del rectángulo. Así, $\ln 2 > 1/2$. Sabiendo esto, tenemos

$$\ln 2^n = n \ln 2 > n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}.$$

Este resultado muestra que $\ln(2^n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Como $\ln x$ es una función creciente, tenemos que

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty.$$

También tenemos que

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{t \to \infty} \ln t^{-1} = \lim_{t \to \infty} (-\ln t) = -\infty. \qquad x = 1/t = t^{-1}$$

Definimos $\ln x$ para $x > 0$, de modo que su dominio es el conjunto de los números reales positivos. El análisis anterior y el teorema del valor intermedio demuestran que su rango es toda la recta real, con lo que se obtiene la gráfica de $y = \ln x$, la cual se presenta en la figura 7.9*a*).

La integral $\int (1/u)\,du$

El ejemplo 2*c*) nos lleva a la siguiente fórmula integral.

Si u es una función diferenciable que nunca es cero,

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C. \tag{3}$$

La ecuación (3) es válida en cualquier parte del dominio de $1/u$, los puntos donde $u \neq 0$. Esta ecuación nos dice que las integrales de cierta *forma* nos llevan a logaritmos. Si $u = f(x)$, entonces, $du = f'(x)\,dx$ y

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

siempre que $f(x)$ sea una función diferenciable que nunca es cero.

EJEMPLO 3 Aquí identificamos una integral de la forma $\int \frac{du}{u}$.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4\cos\theta}{3 + 2\,\text{sen}\,\theta}d\theta = \int_1^5 \frac{2}{u}du \qquad \begin{array}{l} u = 3 + 2\,\text{sen}\,\theta, \quad du = 2\cos\theta\,d\theta, \\ u(-\pi/2) = 1, \quad u(\pi/2) = 5 \end{array}$$

$$= 2\ln|u|\Big]_1^5$$

$$= 2\ln|5| - 2\ln|1| = 2\ln 5$$

Observe que $u = 3 + 2\,\text{sen}\,\theta$ siempre es positiva en $[-\pi/2, \pi/2]$, de manera que la ecuación (3) es válida. ■

Las integrales de tan *x*, cot *x*, sec *x* y csc *x*

La ecuación (3) nos dice cómo integrar estas funciones trigonométricas.

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}dx = \int \frac{-du}{u} \qquad \begin{array}{l} u = \cos x > 0 \text{ en } (-\pi/2, \pi/2), \\ du = -\text{sen}\,x\,dx \end{array}$$

$$= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

$$= \ln\frac{1}{|\cos x|} + C = \ln|\sec x| + C. \qquad \text{Regla del recíproco}$$

Para la cotangente,

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\text{sen}\,x} = \int \frac{du}{u} \qquad \begin{array}{l} u = \text{sen}\,x, \\ du = \cos x\,dx \end{array}$$

$$= \ln|u| + C = \ln|\text{sen}\,x| + C = -\ln|\csc x| + C.$$

Para integrar sec x, multiplicamos por y dividimos entre $(\sec x + \tan x)$ como una forma algebraica de 1.

$$\int \sec x\,dx = \int \sec x\,\frac{(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x\tan x}{\sec x + \tan x}dx$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C \qquad \begin{array}{l} u = \sec x + \tan x, \\ du = (\sec x\tan x + \sec^2 x)dx \end{array}$$

Para csc x, multiplicamos por y dividimos entre $(\csc x + \cot x)$ como una forma algebraica de 1.

$$\int \csc x\,dx = \int \csc x\,\frac{(\csc x + \cot x)}{(\csc x + \cot x)}dx = \int \frac{\csc^2 x + \csc x\cot x}{\csc x + \cot x}dx$$

$$= \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\csc x + \cot x| + C \qquad \begin{array}{l} u = \csc x + \cot x, \\ du = (-\csc x\cot x - \csc^2 x)\,dx \end{array}$$

En resumen, tenemos los siguientes resultados.

Integrales de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante

$$\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C \qquad \int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C \qquad \int \csc u\,du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$$

EJEMPLO 4

$$\int_0^{\pi/6} \tan 2x\,dx = \int_0^{\pi/3} \tan u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \tan u\,du$$

Se sustituye $u = 2x$, $dx = du/2$, $u(0) = 0$, $u(\pi/6) = \pi/3$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sec u|\Big]_0^{\pi/3} = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$$ ■

Diferenciación logarítmica

Las derivadas de funciones positivas dadas por fórmulas que incluyen productos, cocientes y potencias, a menudo se obtienen más rápidamente calculando los logaritmos naturales de ambos lados antes de calcular la derivada. Esto nos permite usar las leyes de los logaritmos para simplificar las ecuaciones antes de obtener sus derivadas. Este proceso se denomina **diferenciación logarítmica** y se ilustra con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5

Obtenga dy/dx si

$$y = \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1}, \qquad x > 1.$$

Solución Aplicamos el logaritmo natural en ambos lados y simplificamos el resultado de acuerdo con las propiedades de los logaritmos:

$$\ln y = \ln\frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1}$$

$$= \ln((x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}) - \ln(x - 1) \qquad \text{Regla del cociente}$$

$$= \ln(x^2 + 1) + \ln(x + 3)^{1/2} - \ln(x - 1) \qquad \text{Regla del producto}$$

$$= \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2}\ln(x + 3) - \ln(x - 1). \qquad \text{Regla de la potencia}$$

Después, derivamos ambos lados con respecto a x, utilizando la ecuación (2) en el lado izquierdo:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x - 1}.$$

En seguida despejamos dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x + 6} - \frac{1}{x - 1}\right).$$

Por último, sustituimos y de la ecuación original:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1}\left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x + 6} - \frac{1}{x - 1}\right).$$ ■

Un cálculo directo para resolver el ejemplo 5 utilizando las reglas del cociente y del producto para derivadas sería mucho más largo.

Ejercicios 7.2

Uso de las propiedades algebraicas: Teorema 2

1. Exprese los siguientes logaritmos en términos de ln 2 y ln 3.

a) $\ln 0.75$ ***b)*** $\ln (4/9)$ ***c)*** $\ln (1/2)$

d) $\ln \sqrt[3]{9}$ ***e)*** $\ln 3\sqrt{2}$ ***f)*** $\ln \sqrt{13.5}$

2. Exprese los siguientes logaritmos en términos de ln 5 y ln 7.

a) $\ln (1/125)$ ***b)*** $\ln 9.8$ ***c)*** $\ln 7\sqrt{7}$

d) $\ln 1225$ ***e)*** $\ln 0.056$

f) $(\ln 35 + \ln (1/7))/(\ln 25)$

Use las propiedades de los logaritmos para simplificar las expresiones de los ejercicios 3 y 4.

3. ***a)*** $\ln \operatorname{sen} \theta - \ln \left(\dfrac{\operatorname{sen} \theta}{5}\right)$ ***b)*** $\ln (3x^2 - 9x) + \ln \left(\dfrac{1}{3x}\right)$

c) $\dfrac{1}{2}\ln (4t^4) - \ln 2$

4. ***a)*** $\ln \sec \theta + \ln \cos \theta$ ***b)*** $\ln (8x + 4) - 2 \ln 2$

c) $3 \ln \sqrt[3]{t^2 - 1} - \ln (t + 1)$

Obtención de derivadas

En los ejercicios 5 a 36, determine la derivada de y con respecto a x, t o θ, según corresponda.

5. $y = \ln 3x$ **6.** $y = \ln kx$, k constante

7. $y = \ln (t^2)$ **8.** $y = \ln (t^{3/2})$

9. $y = \ln \dfrac{3}{x}$ **10.** $y = \ln \dfrac{10}{x}$

11. $y = \ln (\theta + 1)$ **12.** $y = \ln (2\theta + 2)$

13. $y = \ln x^3$ **14.** $y = (\ln x)^3$

15. $y = t(\ln t)^2$ **16.** $y = t\sqrt{\ln t}$

17. $y = \dfrac{x^4}{4}\ln x - \dfrac{x^4}{16}$ **18.** $y = (x^2 \ln x)^4$

19. $y = \dfrac{\ln t}{t}$ **20.** $y = \dfrac{1 + \ln t}{t}$

21. $y = \dfrac{\ln x}{1 + \ln x}$ **22.** $y = \dfrac{x \ln x}{1 + \ln x}$

23. $y = \ln (\ln x)$ **24.** $y = \ln (\ln (\ln x))$

25. $y = \theta (\operatorname{sen} (\ln \theta) + \cos (\ln \theta))$

26. $y = \ln (\sec \theta + \tan \theta)$

27. $y = \ln \dfrac{1}{x\sqrt{x + 1}}$ **28.** $y = \dfrac{1}{2}\ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$

29. $y = \dfrac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$ **30.** $y = \sqrt{\ln \sqrt{t}}$

31. $y = \ln (\sec (\ln \theta))$ **32.** $y = \ln \left(\dfrac{\sqrt{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}}{1 + 2 \ln \theta}\right)$

33. $y = \ln \left(\dfrac{(x^2 + 1)^5}{\sqrt{1 - x}}\right)$ **34.** $y = \ln \sqrt{\dfrac{(x + 1)^5}{(x + 2)^{20}}}$

35. $y = \displaystyle\int_{x^2/2}^{x^2} \ln \sqrt{t}\, dt$ **36.** $y = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \ln t\, dt$

Evaluación de integrales

Evalúe las integrales de los ejercicios 37 a 54.

37. $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x}$ **38.** $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{3\, dx}{3x - 2}$

39. $\displaystyle\int \frac{2y\, dy}{y^2 - 25}$ **40.** $\displaystyle\int \frac{8r\, dr}{4r^2 - 5}$

41. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{2 - \cos t} dt$ **42.** $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{4 \operatorname{sen} \theta}{1 - 4 \cos \theta} d\theta$

43. $\displaystyle\int_1^2 \frac{2 \ln x}{x} dx$ **44.** $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x \ln x}$

45. $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ **46.** $\displaystyle\int_2^{16} \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}}$

47. $\displaystyle\int \frac{3 \sec^2 t}{6 + 3 \tan t} dt$ **48.** $\displaystyle\int \frac{\sec y \tan y}{2 + \sec y} dy$

49. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan \frac{x}{2} dx$ **50.** $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot t\, dt$

51. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} 2 \cot \frac{\theta}{3} d\theta$ **52.** $\displaystyle\int_0^{\pi/12} 6 \tan 3x\, dx$

53. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x} + 2x}$ **54.** $\displaystyle\int \frac{\sec x\, dx}{\sqrt{\ln (\sec x + \tan x)}}$

Diferenciación logarítmica

En los ejercicios 55 a 68, utilice diferenciación logarítmica para determinar la derivada de y con respecto a la variable independiente dada.

55. $y = \sqrt{x(x + 1)}$ **56.** $y = \sqrt{(x^2 + 1)(x - 1)^2}$

57. $y = \sqrt{\dfrac{t}{t + 1}}$ **58.** $y = \sqrt{\dfrac{1}{t(t + 1)}}$

59. $y = \sqrt{\theta + 3} \operatorname{sen} \theta$ **60.** $y = (\tan \theta)\sqrt{2\theta + 1}$

61. $y = t(t + 1)(t + 2)$ **62.** $y = \dfrac{1}{t(t + 1)(t + 2)}$

63. $y = \dfrac{\theta + 5}{\theta \cos \theta}$ **64.** $y = \dfrac{\theta \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{\sec \theta}}$

65. $y = \dfrac{x\sqrt{x^2 + 1}}{(x + 1)^{2/3}}$ **66.** $y = \sqrt{\dfrac{(x + 1)^{10}}{(2x + 1)^5}}$

67. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x - 2)}{x^2 + 1}}$ **68.** $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x + 1)(x - 2)}{(x^2 + 1)(2x + 3)}}$

Teoría y aplicaciones

69. Localice e identifique los valores extremos absolutos de

a) $\ln (\cos x)$ en $[-\pi/4, \pi/3]$,

b) $\cos (\ln x)$ en $[1/2, 2]$.

70. ***a)*** Demuestre que $f(x) = x - \ln x$ es creciente para $x > 1$.

b) Con base en el inciso *a)*, demuestre que $\ln x < x$ si $x > 1$.

71. Obtenga el área entre las curvas $y = \ln x$ y $y = \ln 2x$, de $x = 1$ a $x = 5$.

72. Obtenga el área entre la curva $y = \tan x$ y el eje x, de $x = -\pi/4$ a $x = \pi/3$.

73. La región en el primer cuadrante, acotada por los ejes de coordenadas, la recta $y = 3$ y la curva $x = 2/\sqrt{y+1}$ se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. Obtenga el volumen de dicho sólido.

74. La región entre la curva $y = \sqrt{\cot x}$ y el eje x, de $x = \pi/6$ a $x = \pi/2$, se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido; obtenga el volumen de este último.

75. La región entre la curva $y = 1/x^2$ y el eje x, de $x = 1/2$ a $x = 2$, se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido; obtenga el volumen de este último.

76. En el ejercicio 6 de la sección 6.2, hicimos girar alrededor del eje y la región entre la curva $y = 9x/\sqrt{x^3+9}$ y el eje x, de $x = 0$ a $x = 3$, para generar un sólido de volumen igual a 36π. ¿Qué volumen se obtendría si hiciéramos girar la región alrededor del eje x? (Vea la gráfica en el ejercicio 6 de la sección 6.2).

77. Determine las longitudes de las siguientes curvas.

a) $y = (x^2/8) - \ln x, \quad 4 \le x \le 8$

b) $x = (y/4)^2 - 2\ln(y/4), \quad 4 \le y \le 12$

78. Obtenga una curva que pase por el punto $(1, 0)$ cuya longitud de $x = 1$ a $x = 2$ es

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx.$$

T **79.** ***a)*** Obtenga el centroide de la región entre la curva $y = 1/x$ y el eje x, de $x = 1$ a $x = 2$. Indique las coordenadas redondeando a dos decimales.

b) Trace la región y muestre el centroide en su dibujo.

80. ***a)*** Obtenga el centro de masa de una placa delgada de densidad constante que cubre la región entre la curva $y = 1/\sqrt{x}$ y el eje x de $x = 1$ a $x = 16$.

b) Obtenga el centro de masa si, en lugar de ser constante, la densidad de la placa fuera $\delta(x) = 4/\sqrt{x}$.

81. Use una derivada para demostrar que $f(x) = \ln(x^3 - 1)$ es inyectiva.

82. Use una derivada para demostrar que $g(x) = \sqrt{x^2 + \ln x}$ es inyectiva.

En los ejercicios 83 y 84, resuelva los problemas con valor inicial.

83. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{1}{x}, \quad y(1) = 3$

84. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 x, \quad y(0) = 0 \quad \text{y} \quad y'(0) = 1$

T **85. Linealización de $\ln(1+x)$ en $x = 0$** En vez de aproximar $\ln x$ en la cercanía de $x = 1$, aproximamos $\ln(1+x)$ en la cercanía de $x = 0$. De esta manera, obtenemos una fórmula más sencilla.

a) Deduzca la linealización $\ln(1+x) \approx x$ en $x = 0$.

b) Estime, con cinco decimales, el error en que se incurre al reemplazar $\ln(1+x)$ por x en el intervalo $[0, 0.1]$.

c) Trace juntas las gráficas de $\ln(1+x)$ y x para $0 \le x \le 0.5$. Si es posible, utilice un color diferente para cada gráfica. ¿En qué puntos es mejor la aproximación de $\ln(1+x)$? ¿En cuáles es menos buena? Por la lectura directa de las coordenadas en las gráficas, determine una cota superior para el error, con tanta precisión como le permita su calculadora gráfica.

86. Utilice el argumento con derivada, empleado en la demostración de las reglas 1 y 4 del teorema 2, para demostrar la regla del cociente de los logaritmos.

T **87.** ***a)*** Grafique juntas $y = \text{sen } x$ y las curvas $y = \ln(a + \text{sen } x)$ para $a = 2, 4, 8, 20$ y 50 con $0 \le x \le 23$.

b) ¿Por qué las curvas se aplanan cuando a aumenta? (*Sugerencia:* Obtenga una cota superior para $|y'|$ que dependa de a).

T **88.** ¿La gráfica de $y = \sqrt{x} - \ln x$, $x > 0$, tiene un punto de inflexión? Trate de contestar la pregunta ***a)*** graficando, ***b)*** usando cálculo.

7.3 Funciones exponenciales

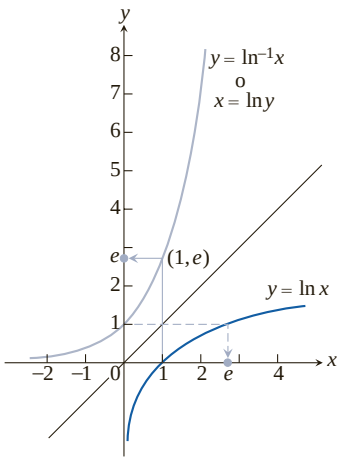


FIGURA 7.10 Gráficas de $y = \ln x$ y $y = \ln^{-1} x = \exp x$. El número e es $\ln^{-1} 1 = \exp(1)$.

Una vez desarrollada la teoría de la función $\ln x$, presentaremos su inversa: la función exponencial $\exp x = e^x$. Estudiaremos sus propiedades y calcularemos su derivada e integral. Demostraremos la regla de la potencia para derivadas que incluye exponentes reales en general. Por último, presentaremos las funciones exponenciales generales, a^x, y las funciones logarítmicas generales, $\log_a x$.

La inversa de ln *x* y el número *e*

Como la función $\ln x$ es una función creciente de x con dominio $(0, \infty)$ y rango $(-\infty, \infty)$, tiene una inversa $\ln^{-1} x$ con dominio $(-\infty, \infty)$ y rango $(0, \infty)$. La gráfica de $\ln^{-1} x$ es la gráfica de $\ln x$ reflejada con respecto a la recta $y = x$. Como se observa en la figura 7.10,

$$\lim_{x \to \infty} \ln^{-1} x = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -\infty} \ln^{-1} x = 0.$$

La función $\ln^{-1} x$ normalmente se denota como $\exp x$. Ahora demostraremos que $\exp x$ es una función exponencial en base e.

El número e se definió para satisfacer la ecuación $\ln(e) = 1$, de modo que $e = \exp(1)$. Podemos elevar algebraicamente el número e a una potencia racional r de la manera algebraica usual:

$$e^2 = e \cdot e, \qquad e^{-2} = \frac{1}{e^2}, \qquad e^{1/2} = \sqrt{e},$$

Valores típicos de e^x

x	e^x (redondeado)
-1	0.37
0	1
1	2.72
2	7.39
10	22026
100	2.6881×10^{43}

y así sucesivamente. Como e es positivo, e^r también es positivo, de manera que podemos tomar el logaritmo de e^r. Así, determinamos que, para r racional,

$$\ln e^r = r \ln e = r \cdot 1 = r. \qquad \text{Teorema 2, regla 4}$$

Entonces, al evaluar la función $\ln^{-1} x$ en ambos lados de la ecuación $\ln e^r = r$, tenemos

$$e^r = \exp r \quad \text{para } r \text{ racional} \qquad \exp \text{ es } \ln^{-1}. \tag{1}$$

Aún no hemos encontrado una manera que nos permita dar un significado obvio para e^x con x irracional. Pero $\ln^{-1} x$ tiene sentido para cualquier x, ya sea racional o irracional. Así, la ecuación (1) nos permite ampliar la definición de e^x para valores irracionales de x. La función $\exp x$ está definida para toda x, de manera que la utilizaremos para asignar un valor a e^x en cualquier punto.

DEFINICIÓN Para todo número real x, definimos la **función exponencial natural** como $e^x = \exp x$.

Las notaciones $\ln^{-1} x$, $\exp x$ y e^x se refieren a la función exponencial natural.

Por primera vez, tenemos un significado preciso de un exponente irracional, elevando un número específico e a cualquier potencia real x, racional o irracional. Como las funciones $\ln x$ y e^x son inversas una de otra, tenemos las siguientes relaciones.

Ecuaciones inversas para e^x y $\ln x$

$$e^{\ln x} = x \qquad (\text{para toda } x > 0)$$
$$\ln (e^x) = x \qquad (\text{para toda } x)$$

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación $e^{2x-6} = 4$ para x.

Solución Tomamos el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación y usamos la segunda ecuación inversa:

$$\ln (e^{2x-6}) = \ln 4$$
$$2x - 6 = \ln 4 \qquad \text{Relación de inversas}$$
$$2x = 6 + \ln 4$$
$$x = 3 + \frac{1}{2} \ln 4 = 3 + \ln 4^{1/2}$$
$$x = 3 + \ln 2$$

■

EJEMPLO 2 Una recta con pendiente m pasa por el origen y es tangente a la gráfica de $y = \ln x$. ¿Cuál es el valor de m?

Solución Suponga que el punto de tangencia se presenta en un punto desconocido $x = a > 0$. Entonces, sabemos que el punto $(a, \ln a)$ se encuentra sobre la gráfica y que la recta tangente en ese punto tiene una pendiente $m = 1/a$ (figura 7.11). Como la recta tangente pasa por el origen, su pendiente es

$$m = \frac{\ln a - 0}{a - 0} = \frac{\ln a}{a}.$$

Al igualar estas dos fórmulas de m, tenemos

$$\frac{\ln a}{a} = \frac{1}{a}$$
$$\ln a = 1$$
$$e^{\ln a} = e^1$$
$$a = e$$
$$m = \frac{1}{e}.$$

■

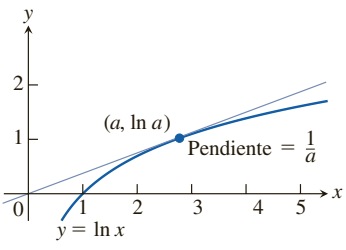


FIGURA 7.11 La recta tangente interseca la curva en algún punto $(a, \ln a)$, donde la pendiente de la curva es $1/a$ (ejemplo 2).

Derivada e integral de e^x

De acuerdo con el teorema 1, la función exponencial natural es diferenciable porque es la inversa de una función diferenciable cuya derivada nunca es cero. Calculamos su derivada usando la relación de inversas y la regla de la cadena:

$$\ln(e^x) = x \qquad \text{Relación entre inversas}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(e^x) = 1 \qquad \text{Se diferencia en ambos lados.}$$

$$\frac{1}{e^x}\cdot\frac{d}{dx}(e^x) = 1 \qquad \text{Ecuación (2), sección 7.2, con } u = e^x$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x. \qquad \text{Se despeja la derivada.}$$

Es decir, para $y = e^x$, vemos que $dy/dx = e^x$, de modo que la función exponencial natural e^x es su propia derivada. Además, si $f(x) = e^x$, entonces, $f'(0) = e^0 = 1$. Esto significa que la función exponencial natural e^x tiene una pendiente igual a 1 cuando cruza el eje y en $x = 0$.

La regla de la cadena extiende la derivada resultante de la función exponencial natural a una forma más general que involucra una función $u(x)$:

Si u es cualquier función diferenciable de x, entonces,

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}. \tag{2}$$

EJEMPLO 3 Obtenga las derivadas de la exponencial utilizando la ecuación (2).

a) $\dfrac{d}{dx}(5e^x) = 5\dfrac{d}{dx}e^x = 5e^x$

b) $\dfrac{d}{dx}e^{-x} = e^{-x}\dfrac{d}{dx}(-x) = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$ Ecuación (2) con $u = -x$

c) $\dfrac{d}{dx}e^{\operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x}\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x$ Ecuación (2) con $u = \operatorname{sen} x$

d) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{3x+1}}\right) = e^{\sqrt{3x+1}}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{3x+1}\right)$ Ecuación (2) con $u = \sqrt{3x+1}$

$$= e^{\sqrt{3x+1}}\cdot\frac{1}{2}(3x+1)^{-1/2}\cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}e^{\sqrt{3x+1}}$$ ■

Como e^x es su propia derivada, también es su propia antiderivada. Así, el equivalente para integral de la ecuación (2) es como sigue.

Antiderivada general de la función exponencial

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

EJEMPLO 4

a) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{3x}\,dx = \int_0^{\ln 8} e^u\cdot\frac{1}{3}\,du$ $\quad u = 3x,\ \frac{1}{3}du = dx,\ u(0) = 0,\ u(\ln 2) = 3\ln 2 = \ln 2^3 = \ln 8$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\ln 8} e^u\,du$$

$$= \frac{1}{3}e^{u}\Big]_{0}^{\ln 8}$$

$$= \frac{1}{3}(8 - 1) = \frac{7}{3}$$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx = e^{\operatorname{sen} x}\Big]_0^{\pi/2}$ Antiderivada del ejemplo 2*c*)

$$= e^{1} - e^{0} = e - 1$$ ■

La derivada de e^x existe y es positiva en todo punto, lo que confirma que es una función continua y creciente, como se muestra en la figura 7.10. Como la segunda derivada de e^x también es e^x y es positiva en todo punto, la gráfica es cóncava hacia arriba. Además, la figura 7.10 muestra que la función exponencial tiene los límites

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} e^{x} = \infty.$$

Del primero de estos límites, vemos que el eje x es una asíntota horizontal de la gráfica de $y = e^x$.

Leyes de los exponentes

Aun cuando e^x se define de manera aparentemente indirecta como $\ln^{-1} x$, obedece las leyes conocidas del álgebra para exponentes. El teorema 3 nos revela que estas leyes son consecuencia de las definiciones de $\ln x$ y e^x.

TEOREMA 3 Para todos los números x, x_1 y x_2, la exponencial natural e^x obedece las siguientes leyes:

1. $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$ **2.** $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

3. $\dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$ **4.** $(e^{x_1})^r = e^{rx_1}$, si r es racional

Números y funciones trascendentes
Los números que son soluciones de ecuaciones polinomiales con coeficientes racionales se denominan **algebraicos**: -2 es algebraico porque satisface la ecuación $x + 2 = 0$, y $\sqrt{3}$ es algebraico porque satisface la ecuación $x^2 - 3 = 0$. Los números que no son algebraicos, como e y π, se denominan **trascendentes**.

Llamamos algebraica a una función $y = f(x)$ si satisface una ecuación de la forma

$$P_n y^n + \cdots + P_1 y + P_0 = 0$$

donde las P son polinomios en x con coeficientes racionales. La función $y = 1/\sqrt{x+1}$ es algebraica, ya que satisface la ecuación $(x + 1)y^2 - 1 = 0$. Aquí los polinomios son $P_2 = x + 1$, $P_1 = 0$ y $P_0 = -1$. Las funciones que no son algebraicas se denominan trascendentes.

Demostración de la ley 1 Sean $y_1 = e^{x_1}$ y $y_2 = e^{x_2}$. Entonces,

$$x_1 = \ln y_1 \quad \text{y} \quad x_2 = \ln y_2 \qquad \text{Ecuaciones inversas}$$

$$x_1 + x_2 = \ln y_1 + \ln y_2$$

$$= \ln y_1 y_2 \qquad \text{Regla del producto para logaritmos}$$

$$e^{x_1+x_2} = e^{\ln y_1 y_2} \qquad \text{Exponenciar.}$$

$$= y_1 y_2 \qquad e^{\ln u} = u$$

$$= e^{x_1} e^{x_2}.$$ ■

Demostración de la ley 4 Sea $y = (e^{x_1})^r$. Entonces,

$$\ln y = \ln (e^{x_1})^r$$

$$= r \ln (e^{x_1}) \qquad \text{Regla del producto para logaritmos, } r \text{ racional}$$

$$= rx_1 \qquad \ln e^{u} = u \text{ con } u = x_1$$

Por lo tanto, al exponenciar cada lado,

$$y = e^{rx_1}. \qquad e^{\ln y} = y$$ ■

Las leyes 2 y 3 se deducen de la ley 1. Al igual que la regla de la potencia para logaritmos, la ley 4 se cumple para todos los números reales r.

La función exponencial general a^x

Como $a = e^{\ln a}$ para cualquier número positivo a, podemos visualizar a^x como $(e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$. Por lo tanto, usamos la función e^x para definir las otras funciones exponenciales, que nos permiten elevar *cualquier* número positivo a un exponente irracional.

DEFINICIÓN Para números $a > 0$ y x cualesquiera, la **función exponencial en base a** es

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Cuando $a = e$, la definición nos da $a^x = e^{x \ln a} = e^{x \ln e} = e^{x \cdot 1} = e^x$.

El teorema 3 también es válido para a^x, la función exponencial en base a. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} a^{x_1} \cdot a^{x_2} &= e^{x_1 \ln a} \cdot e^{x_2 \ln a} && \text{Definición de } a^x \\ &= e^{x_1 \ln a + x_2 \ln a} && \text{Ley 1} \\ &= e^{(x_1 + x_2) \ln a} && \text{Se factoriza } a \\ &= a^{x_1 + x_2}. && \text{Definición de } a^x \end{aligned}$$

En particular, $a^n \cdot a^{-1} = a^{n-1}$ para cualquier número real n.

Demostración de la regla de la potencia (forma general)

La definición de la función exponencial general nos permite dar sentido a elevar cualquier número positivo a una potencia real n, ya sea racional o irracional. Es decir, se puede definir la función potencia $y = x^n$ para cualquier exponente n.

DEFINICIÓN Para cualquier $x > 0$ y cualquier número real n,

$$x^n = e^{n \ln x}.$$

Como las funciones logaritmo y exponencial son inversas una de otra, la definición nos da

$$\ln x^n = n \ln x, \quad \text{para todos los números reales } n.$$

Es decir, la regla de la potencia para el logaritmo natural se cumple para *todos* los exponentes reales n, no sólo para los exponentes racionales, como se estableció antes en el teorema 2.

La definición de la función potencia también nos permite establecer la regla de la potencia para la derivada de cualquier potencia real n, como se estableció en la sección 3.3.

Regla general de la potencia para derivadas
Para $x > 0$ y cualquier número real n,

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}.$$

Si $x \leq 0$, entonces, la fórmula es válida siempre que existan tanto la derivada como x^n y x^{n-1}.

Demostración Al diferenciar x^n con respecto a x, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^n &= \frac{d}{dx}e^{n\ln x} && \text{Definición de } x^n,\ x > 0\\
&= e^{n\ln x}\cdot\frac{d}{dx}(n\ln x) && \text{Regla de la cadena para } e^u, \text{ ecuación (2)}\\
&= x^n\cdot\frac{n}{x} && \text{Definición y derivada de } x\\
&= nx^{n-1}. && x^n\cdot x^{-1} = x^{n-1}
\end{aligned}$$

En resumen, siempre que $x > 0$,

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

Para $x < 0$, si $y = x^n$, y' y x^{n-1} existen, entonces,

$$\ln|y| = \ln|x|^n = n\ln|x|.$$

Usando diferenciación implícita (que *supone* la existencia de la derivada y') y la ecuación (3) de la sección 7.2, tenemos

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}.$$

Al despejar la derivada,

$$y' = n\frac{y}{x} = n\frac{x^n}{x} = nx^{n-1}.$$

Se puede demostrar directamente, usando la definición de derivada, que la derivada es igual a 0 cuando $x = 0$ y $n \geq 1$. Esto completa la demostración de la forma general de la regla de la potencia para todos los valores de x. ■

EJEMPLO 5 Derive $f(x) = x^x$, $x > 0$.

Solución Aquí no es posible aplicar la regla de la potencia porque el exponente es la *variable* x en lugar de una constante n (racional o irracional). Sin embargo, según la definición de la función exponencial general, observamos que $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$, y al derivar nos da

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(e^{x\ln x})\\
&= e^{x\ln x}\frac{d}{dx}(x\ln x) && \text{Ecuación (2) con } u = x\ln x\\
&= e^{x\ln x}\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right)\\
&= x^x(\ln x + 1). && x > 0
\end{aligned}$$

■

El número *e* expresado como un límite

Hemos definido el número e como el número para el cual $\ln e = 1$, o de manera equivalente, como el valor exp (1). Vemos que e es una constante importante para las funciones logarítmicas y exponenciales, pero, ¿cuál es su valor numérico? El siguiente teorema indica una manera de calcular e como un límite.

TEOREMA 4: El número *e* como un límite El número e puede calcularse como el límite

$$e = \lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}.$$

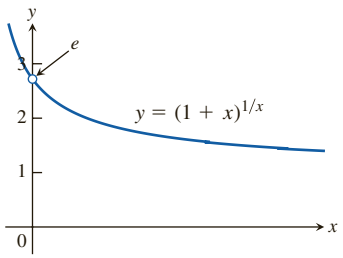


FIGURA 7.12 El número e es el límite de la función graficada cuando $x \to 0$.

Demostración Si $f(x) = \ln x$, entonces, $f'(x) = 1/x$, de modo que $f'(1) = 1$. Pero, según la definición de derivada,

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) \qquad \ln 1 = 0$$

$$= \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right]. \qquad \text{ln es continua; se emplea el teorema 10 del capítulo 2.}$$

Como $f'(1) = 1$, tenemos

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right] = 1$$

Así, al exponenciar ambos lados, obtenemos (vea la figura 7.12)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e. \qquad \blacksquare$$

Al aproximar el límite del teorema 4 haciendo x muy pequeña, obtenemos aproximaciones a e. Su valor es $e \approx 2.718281828459045$ redondeado a 15 decimales, como notamos anteriormente.

La derivada de a^u

Para obtener esta derivada, iniciamos con la ecuación dada por la definición: $a^x = e^{x \ln a}$. De esta forma, tenemos

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x\ln a}\cdot\frac{d}{dx}(x\ln a) \qquad \frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

$$= a^x \ln a.$$

Ahora vemos por qué e^x es la función exponencial que se prefiere en cálculo. Si $a = e$, entonces, $\ln a = 1$ y la derivada de a^x se simplifica a

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \ln e = e^x.$$

Con la regla de la cadena, obtenemos la siguiente forma para la derivada de la función exponencial general.

Si $a > 0$ y u es una función diferenciable de x, entonces, a^u es una función diferenciable de x y

$$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}. \tag{3}$$

El equivalente para integral de este último resultado da la antiderivada general:

$$\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C. \tag{4}$$

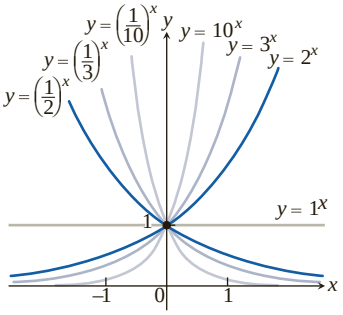


FIGURA 7.13 Las funciones exponenciales decrecen si $0 < a < 1$, y crecen si $a > 1$. Cuando $x \to \infty$, tenemos que $a^x \to 0$ si $0 < a < 1$, y $a^x \to \infty$ si $a > 1$. Cuando $x \to -\infty$, tenemos que $a^x \to \infty$ si $0 < a < 1$, y $a^x \to 0$ si $a > 1$.

Según la ecuación (3), con $u = x$, vemos que la derivada de a^x es positiva si $\ln a > 0$, o $a > 1$, y negativa si $\ln a < 0$, o $0 < a < 1$. Por lo tanto, a^x es una función creciente de x si $a > 1$, y una función decreciente de x si $0 < a < 1$. En todos los casos, a^x es inyectiva. La segunda derivada

$$\frac{d^2}{dx^2}(a^x) = \frac{d}{dx}(a^x \ln a) = (\ln a)^2\, a^x$$

es positiva para toda x, de modo que la gráfica de a^x es cóncava hacia arriba en todo intervalo de la recta real. La figura 7.13 muestra las gráficas de varias funciones exponenciales.

EJEMPLO 6 Obtenga las derivadas e integrales con base en las ecuaciones (3) y (4).

a) $\dfrac{d}{dx}3^x = 3^x \ln 3$ Ecuación (3) con $a = 3$, $u = x$

b) $\dfrac{d}{dx}3^{-x} = 3^{-x}(\ln 3)\dfrac{d}{dx}(-x) = -3^{-x}\ln 3$ Ecuación (3) con $a = 3$, $u = -x$

c) $\dfrac{d}{dx}3^{\operatorname{sen} x} = 3^{\operatorname{sen} x}(\ln 3)\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = 3^{\operatorname{sen} x}(\ln 3)\cos x$ . . ., $u = \operatorname{sen} x$

d) $\displaystyle\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ Ecuación (4) con $a = 2$, $u = x$

e) $\displaystyle\int 2^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx = \int 2^u\,du = \frac{2^u}{\ln 2} + C$ $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\,dx$, y ecuación (4)

$\displaystyle = \frac{2^{\operatorname{sen} x}}{\ln 2} + C$ se sustituye u por sen x ■

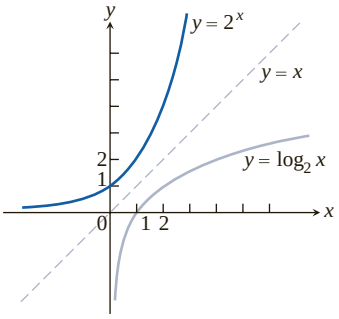


FIGURA 7.14 Gráfica de 2^x y su inversa, $\log_2 x$.

Logaritmos en base *a*

Si a es cualquier número positivo diferente de 1, la función a^x es inyectiva y tiene una derivada distinta de cero en todo punto. Por consiguiente, tiene una inversa diferenciable. Esta inversa se conoce como **el logaritmo de *x* en base *a*** y se denota como $\log_a x$.

DEFINICIÓN Para cualquier número positivo $a \neq 1$,

$\log_a x$ es la función inversa de a^x.

La gráfica de $y = \log_a x$ se obtiene reflejando la gráfica de $y = a^x$ con respecto a la recta de 45°, $y = x$ (figura 7.14). Cuando $a = e$, tenemos que $\log_e x =$ inversa de $e^x = \ln x$. (La función $\log_{10} x$ algunas veces se escribe sencillamente como $\log x$ y se conoce como **logaritmo común** de x). Como $\log_a x$ y a^x son inversas una de otra, su composición, en cualquier orden, produce la función identidad.

Ecuaciones inversas para a^x y $\log_a x$

$$a^{\log_a x} = x \qquad (x > 0)$$

$$\log_a(a^x) = x \qquad (\text{para toda } x)$$

La función $\log_a x$ es en realidad un múltiplo escalar de $\ln x$. Para ver esto, consideramos $y = \log_a x$ y luego tomamos el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación equivalente $a^y = x$ para obtener $y \ln a = \ln x$. Al despejar y, tenemos

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \tag{5}$$

Las reglas algebraicas que satisface $\log_a x$ son las mismas que las de $\ln x$. Estas reglas, incluidas en la tabla 7.2, se demuestran mediante la ecuación (5) dividiendo las reglas correspondientes para la función logaritmo natural entre $\ln a$. Por ejemplo,

$\ln xy = \ln x + \ln y$ Regla 1 de los logaritmos naturales. . .

$\dfrac{\ln xy}{\ln a} = \dfrac{\ln x}{\ln a} + \dfrac{\ln y}{\ln a}$ . . . dividida entre $\ln a$ . . .

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$ . . . proporciona la regla 1 de los logaritmos en base a.

TABLA 7.2 Reglas para logaritmos en base *a*

Para números $x > 0$ y $y > 0$ cualesquiera,

1. *Regla del producto:* $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. *Regla del cociente:* $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
3. *Regla del recíproco:* $\log_a \dfrac{1}{y} = -\log_a y$
4. *Regla de la potencia:* $\log_a x^y = y \log_a x$

Derivadas e integrales que involucran $\log_a x$

Para obtener derivadas o integrales que involucran logaritmos en base a, hay que convertirlos a logaritmos naturales. Si u es una función positiva diferenciable de x, entonces,

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln u}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{u}\frac{du}{dx}}$$

EJEMPLO 7

a) $\dfrac{d}{dx}\log_{10}(3x+1) = \dfrac{1}{\ln 10}\cdot\dfrac{1}{3x+1}\dfrac{d}{dx}(3x+1) = \dfrac{3}{(\ln 10)(3x+1)}$

b) $\displaystyle\int \frac{\log_2 x}{x}dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\ln x}{x}dx \qquad \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$

$\displaystyle= \frac{1}{\ln 2}\int u\,du \qquad u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x}dx$

$\displaystyle= \frac{1}{\ln 2}\frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{\ln 2}\frac{(\ln x)^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2\ln 2} + C$ ■

Ejercicios 7.3

Solución de ecuaciones exponenciales

En los ejercicios 1 a 4, despeje t.

1. ***a)*** $e^{-0.3t} = 27$ ***b)*** $e^{kt} = \frac{1}{2}$ ***c)*** $e^{(\ln 0.2)t} = 0.4$

2. ***a)*** $e^{-0.01t} = 1000$ ***b)*** $e^{kt} = \frac{1}{10}$ ***c)*** $e^{(\ln 2)t} = \frac{1}{2}$

3. $e^{\sqrt{t}} = x^2$ **4.** $e^{(x^2)}e^{(2x+1)} = e^t$

Obtención de derivadas

En los ejercicios 5 a 24, obtenga la derivada de y con respecto a x, t o θ, según corresponda.

5. $y = e^{-5x}$ **6.** $y = e^{2x/3}$

7. $y = e^{5-7x}$ **8.** $y = e^{(4\sqrt{x}+x^2)}$

9. $y = xe^x - e^x$ **10.** $y = (1+2x)e^{-2x}$

11. $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$ **12.** $y = (9x^2 - 6x + 2)e^{3x}$

13. $y = e^\theta(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$ **14.** $y = \ln(3\theta e^{-\theta})$

15. $y = \cos(e^{-\theta^2})$ **16.** $y = \theta^3 e^{-2\theta}\cos 5\theta$

17. $y = \ln(3te^{-t})$ **18.** $y = \ln(2e^{-t}\operatorname{sen} t)$

19. $y = \ln\left(\dfrac{e^\theta}{1+e^\theta}\right)$ **20.** $y = \ln\left(\dfrac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{\theta}}\right)$

21. $y = e^{(\cos t + \ln t)}$ **22.** $y = e^{\operatorname{sen} t}(\ln t^2 + 1)$

23. $y = \displaystyle\int_0^{\ln x} \operatorname{sen} e^t\,dt$ **24.** $y = \displaystyle\int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t\,dt$

En los ejercicios 25 a 28, obtenga dy/dx.

25. $\ln y = e^y \operatorname{sen} x$ **26.** $\ln xy = e^{x+y}$

27. $e^{2x} = \operatorname{sen}(x+3y)$ **28.** $\tan y = e^x + \ln x$

Obtención de integrales

Evalúe las integrales en los ejercicios 29 a 50.

29. $\displaystyle\int (e^{3x} + 5e^{-x})\,dx$ **30.** $\displaystyle\int (2e^x - 3e^{-2x})\,dx$

31. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\,dx$ **32.** $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0} e^{-x}\,dx$

33. $\displaystyle\int 8e^{(x+1)}\,dx$ **34.** $\displaystyle\int 2e^{(2x-1)}\,dx$

35. $\displaystyle\int_{\ln 4}^{\ln 9} e^{x/2}\,dx$ **36.** $\displaystyle\int_{0}^{\ln 16} e^{x/4}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}dr$ **38.** $\displaystyle\int \frac{e^{-\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}dr$

39. $\displaystyle\int 2t\,e^{-t^2}\,dt$ **40.** $\displaystyle\int t^3 e^{(t^4)}\,dt$

41. $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$ **42.** $\displaystyle\int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}dx$

43. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (1 + e^{\tan\theta})\sec^2\theta\,d\theta$ **44.** $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + e^{\cot\theta})\csc^2\theta\,d\theta$

45. $\int e^{\sec \pi t} \sec \pi t \tan \pi t \, dt$

46. $\int e^{\csc(\pi + t)} \csc(\pi + t) \cot(\pi + t) \, dt$

47. $\int_{\ln(\pi/6)}^{\ln(\pi/2)} 2e^v \cos e^v \, dv$

48. $\int_0^{\sqrt{\ln \pi}} 2x \, e^{x^2} \cos(e^{x^2}) \, dx$

49. $\int \frac{e^r}{1 + e^r} dr$

50. $\int \frac{dx}{1 + e^x}$

Problemas con valor inicial

Resuelva los problemas con valor inicial en los ejercicios 51 a 54.

51. $\frac{dy}{dt} = e^t \operatorname{sen}(e^t - 2), \quad y(\ln 2) = 0$

52. $\frac{dy}{dt} = e^{-t} \sec^2(\pi e^{-t}), \quad y(\ln 4) = 2/\pi$

53. $\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^{-x}, \quad y(0) = 1 \quad \text{y} \quad y'(0) = 0$

54. $\frac{d^2y}{dt^2} = 1 - e^{2t}, \quad y(1) = -1 \quad \text{y} \quad y'(1) = 0$

Diferenciación

En los ejercicios 55 a 82, obtenga la derivada de y con respecto a la variable independiente que se indica.

55. $y = 2^x$

56. $y = 3^{-x}$

57. $y = 5^{\sqrt{s}}$

58. $y = 2^{(s^2)}$

59. $y = x^\pi$

60. $y = t^{1-e}$

61. $y = (\cos \theta)^{\sqrt{2}}$

62. $y = (\ln \theta)^\pi$

63. $y = 7^{\sec \theta} \ln 7$

64. $y = 3^{\tan \theta} \ln 3$

65. $y = 2^{\operatorname{sen} 3t}$

66. $y = 5^{-\cos 2t}$

67. $y = \log_2 5\theta$

68. $y = \log_3(1 + \theta \ln 3)$

69. $y = \log_4 x + \log_4 x^2$

70. $y = \log_{25} e^x - \log_5 \sqrt{x}$

71. $y = x^3 \log_{10} x$

72. $y = \log_3 r \cdot \log_9 r$

73. $y = \log_3\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\ln 3}\right)$

74. $y = \log_5 \sqrt{\left(\frac{7x}{3x+2}\right)^{\ln 5}}$

75. $y = \theta \operatorname{sen}(\log_7 \theta)$

76. $y = \log_7\left(\frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}{e^\theta 2^\theta}\right)$

77. $y = \log_{10} e^x$

78. $y = \frac{\theta 5^\theta}{2 - \log_5 \theta}$

79. $y = 3^{\log_2 t}$

80. $y = 3 \log_8(\log_2 t)$

81. $y = \log_2(8t^{\ln 2})$

82. $y = t \log_3\left(e^{(\operatorname{sen} t)(\ln 3)}\right)$

Integración

Evalúe las integrales en los ejercicios 83 a 92.

83. $\int 5^x \, dx$

84. $\int \frac{3^x}{3 - 3^x} dx$

85. $\int_0^1 2^{-\theta} \, d\theta$

86. $\int_{-2}^0 5^{-\theta} \, d\theta$

87. $\int_1^{\sqrt{2}} x 2^{(x^2)} \, dx$

88. $\int_1^4 \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

89. $\int_0^{\pi/2} 7^{\cos t} \operatorname{sen} t \, dt$

90. $\int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{3}\right)^{\tan t} \sec^2 t \, dt$

91. $\int_2^4 x^{2x}(1 + \ln x) \, dx$

92. $\int \frac{x 2^{x^2}}{1 + 2^{x^2}} dx$

Evalúe las integrales en los ejercicios 93 a 106.

93. $\int 3x^{\sqrt{3}} \, dx$

94. $\int x^{\sqrt{2}-1} \, dx$

95. $\int_0^3 (\sqrt{2} + 1)x^{\sqrt{2}} \, dx$

96. $\int_1^e x^{(\ln 2)-1} \, dx$

97. $\int \frac{\log_{10} x}{x} dx$

98. $\int_1^4 \frac{\log_2 x}{x} dx$

99. $\int_1^4 \frac{\ln 2 \log_2 x}{x} dx$

100. $\int_1^e \frac{2 \ln 10 \log_{10} x}{x} dx$

101. $\int_0^2 \frac{\log_2(x+2)}{x+2} dx$

102. $\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(10x)}{x} dx$

103. $\int_0^9 \frac{2 \log_{10}(x+1)}{x+1} dx$

104. $\int_2^3 \frac{2 \log_2(x-1)}{x-1} dx$

105. $\int \frac{dx}{x \log_{10} x}$

106. $\int \frac{dx}{x(\log_8 x)^2}$

Evalúe las integrales en los ejercicios 107 a 110.

107. $\int_1^{\ln x} \frac{1}{t} dt, \quad x > 1$

108. $\int_1^{e^x} \frac{1}{t} dt$

109. $\int_1^{1/x} \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$

110. $\frac{1}{\ln a} \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$

Diferenciación logarítmica

En los ejercicios 111 a 118, use diferenciación logarítmica para obtener la derivada de y con respecto a la variable independiente dada.

111. $y = (x + 1)^x$

112. $y = x^2 + x^{2x}$

113. $y = \left(\sqrt{t}\right)^t$

114. $y = t^{\sqrt{t}}$

115. $y = (\operatorname{sen} x)^x$

116. $y = x^{\operatorname{sen} x}$

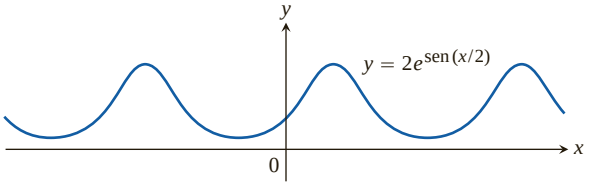
117. $y = \operatorname{sen} x^x$

118. $y = (\ln x)^{\ln x}$

Teoría y aplicaciones

119. Obtenga los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = e^x - 2x$ en $[0, 1]$.

120. ¿Dónde alcanza la función periódica $f(x) = 2e^{\operatorname{sen}(x/2)}$ sus valores extremos y cuáles son?



121. Sea $f(x) = xe^{-x}$.

a) Obtenga todos los valores extremos absolutos de f.

b) Obtenga los puntos de inflexión de f.

122. Sea $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}$.

a) Obtenga todos los valores extremos absolutos de f.

b) Obtenga los puntos de inflexión de f.

123. Obtenga el valor máximo absoluto de $f(x) = x^2 \ln (1/x)$ y diga en qué punto se alcanza.

T 124. Grafique juntas $f(x) = (x - 3)^2 e^x$ y su primera derivada. Comente el comportamiento de f en relación con los signos y valores de f'. Por medio de cálculo, identifique los puntos significativos de las gráficas, según se requiera.

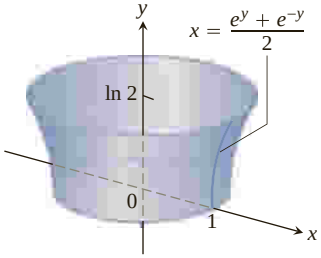
125. Obtenga el área de la región "triangular" en el primer cuadrante que está acotada arriba por la curva $y = e^{2x}$, abajo por la curva $y = e^x$, y a la derecha por la recta $x = \ln 3$.

126. Determine el área de la región "triangular" en el primer cuadrante que está acotada arriba por la curva $y = e^{x/2}$, abajo por la curva $y = e^{-x/2}$, y a la derecha por la recta $y = 2 \ln 2$.

127. Obtenga una curva que pase por el origen en el plano xy y cuya longitud desde $x = 0$ hasta $x = 1$ sea

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4}e^x}\, dx.$$

128. Obtenga el área de la superficie que se genera al hacer girar la curva $x = (e^y + e^{-y})/2$, $0 \le y \le \ln 2$, alrededor del eje y.



En los ejercicios 129 a 132, obtenga la longitud de cada curva.

129. $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ de $x = 0$ a $x = 1$

130. $y = \ln (e^x - 1) - \ln (e^x + 1)$ de $x = \ln 2$ a $x = \ln 3$

131. $y = \ln (\cos x)$ de $x = 0$ a $x = \pi/4$

132. $y = \ln (\csc x)$ de $x = \pi/6$ a $x = \pi/4$

133. ***a)*** Demuestre que $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$.

b) Obtenga el valor promedio de $\ln x$ en $[1, e]$.

134. Obtenga el valor promedio de $f(x) = 1/x$, en $[1, 2]$.

135. Linealización de e^x en $x = 0$

a) Deduzca la aproximación lineal de $e^x \approx 1 + x$ en $x = 0$.

T ***b)*** Calcule, con cinco decimales, la magnitud del error al sustituir e^x por $1 + x$ en el intervalo $[0, 0.2]$.

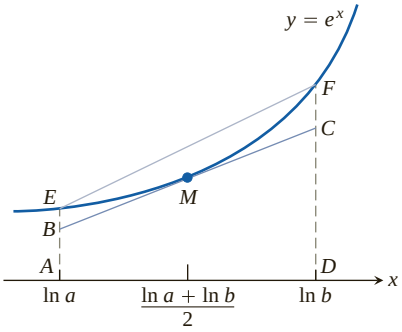
T ***c)*** Grafique juntas e^x y $1 + x$ para $-2 \le x \le 2$. De ser posible, utilice un color distinto para cada gráfica. ¿En qué intervalo parece que la aproximación sobrestima el valor de e^x? ¿En qué intervalo lo subestima?

136. Desigualdades entre las medias geométrica, logarítmica y aritmética

a) Demuestre que la gráfica de e^x es cóncava hacia arriba en todo intervalo de valores x.

b) Demuestre, haciendo referencia a la siguiente figura, que si $0 < a < b$, entonces,

$$e^{(\ln a + \ln b)/2} \cdot (\ln b - \ln a) < \int_{\ln a}^{\ln b} e^x\, dx < \frac{e^{\ln a} + e^{\ln b}}{2} \cdot (\ln b - \ln a).$$



NO ESTÁ A ESCALA

c) Utilice la desigualdad del inciso *b)* para concluir que

$$\sqrt{ab} < \frac{b - a}{\ln b - \ln a} < \frac{a + b}{2}.$$

Esta desigualdad indica que la media geométrica de dos números positivos es menor que su media logarítmica, la cual, a la vez, es menor que su media aritmética.

137. Obtenga el área de la región entre la curva $y = 2x/(1 + x^2)$ y el intervalo $-2 \le x \le 2$ del eje x.

138. Obtenga el área de la región entre la curva $y = 2^{1-x}$ y el intervalo $-1 \le x \le 1$ del eje x.

T 139. La ecuación $x^2 = 2^x$ tiene tres soluciones: $x = 2$, $x = 4$ y otra. Estime la tercera solución, tan precisa como sea posible, por el método gráfico.

T 140. ¿Es posible que $x^{\ln 2}$ sea igual que $2^{\ln x}$ para $x > 0$? Grafique las dos funciones y explique lo que observa.

141. Linealización de 2^x

a) Obtenga la linealización de $f(x) = 2^x$ en $x = 0$. Luego, redondee sus coeficientes a dos decimales.

T ***b)*** Grafique juntas la linealización y la función en $-3 \le x \le 3$ y $-1 \le x \le 1$.

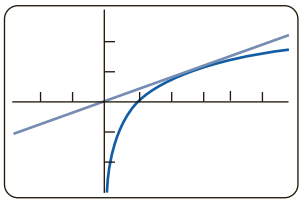
142. Linealización de $\log_3 x$

a) Obtenga la linealización de $f(x) = \log_3 x$ en $x = 3$. Luego, redondee sus coeficientes a dos decimales.

T ***b)*** Grafique juntas la linealización y la función en las ventanas $0 \le x \le 8$ y $2 \le x \le 4$.

T 143. ¿Cuál es mayor, π^e o e^π? Las calculadoras han resuelto parte del misterio de esta pregunta, alguna vez desafiante. (Verifique con su calculadora; verá que es una decisión muy apretada). Sin embargo, es posible contestar la pregunta sin una calculadora.

a) Obtenga una ecuación para la recta que pasa por el origen y es tangente a la gráfica de $y = \ln x$.



[–3, 6] por [–3, 3]

b) Proponga un argumento con base en las gráficas de $y = \ln x$ y la recta tangente para explicar por qué $\ln x < x/e$ para toda x positiva diferente de e.

c) Demuestre que $\ln (x^e) < x$ para toda x positiva diferente de e.

d) Concluya con $x^e < e^x$ para toda x positiva diferente de e.

e) Entonces, ¿cuál es mayor, π^e o e^π?

T **144. Representación decimal de *e*** Obtenga e, con tantos decimales como le permita su calculadora, resolviendo la ecuación $\ln x = 1$ con el método de Newton de la sección 4.6.

7.4 Cambios exponenciales y ecuaciones diferenciales separables

Las funciones exponenciales crecen o decrecen muy rápidamente cuando cambia la variable independiente. Estas funciones describen el crecimiento o el decaimiento en muchas situaciones naturales y en otras producidas por los humanos. La variedad de modelos basados en estas funciones explica, en parte, su importancia. A continuación estudiaremos el supuesto básico de proporcionalidad que conduce a tal *cambio exponencial*.

Cambio exponencial

Al modelar muchas situaciones del mundo real, una cantidad y aumenta o disminuye a una tasa que es proporcional a su magnitud en un instante t dado. Ejemplos de tales magnitudes incluyen el tamaño de una población, la cantidad de un material radiactivo que decae, y la diferencia de temperaturas entre un objeto caliente y su entorno. Se dice que estas cantidades experimentan un **cambio exponencial**.

Si la cantidad presente en el instante $t = 0$ se representa como y_0, entonces, podemos obtener y como una función de t, resolviendo el siguiente problema con valor inicial:

$$\text{Ecuación diferencial:} \quad \frac{dy}{dt} = ky \tag{1a}$$

$$\text{Condición inicial:} \quad y = y_0 \quad \text{cuando} \quad t = 0. \tag{1b}$$

Si y es positiva y creciente, entonces, k es positiva y decimos, de acuerdo con la ecuación (1a), que la tasa de crecimiento es proporcional a la cantidad que ha sido acumulada. Si y es positiva y decreciente, entonces, k es negativa y se dice, de acuerdo con la ecuación (1a), que la razón de decaimiento es proporcional a la cantidad que aún queda.

Resulta claro que la función constante $y = 0$ es una solución de la ecuación (1a) si $y_0 = 0$. Para obtener soluciones diferentes de cero, dividimos la ecuación (1a) entre y:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt} &= k && y \neq 0 \\
\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\,dt &= \int k\,dt && \text{Se integra con respecto a } t\text{:} \\
&&& \textstyle\int (1/u)\,du = \ln|u| + C. \\
\ln|y| &= kt + C \\
|y| &= e^{kt+C} && \text{Exponenciar.} \\
|y| &= e^C \cdot e^{kt} && e^{a+b} = e^a \cdot e^b \\
y &= \pm e^C e^{kt} && \text{Si } |y| = r, \text{ entonces } y = \pm r. \\
y &= Ae^{kt}. && A \text{ es una abreviatura de } \pm e^C.
\end{aligned}$$

Al permitir que A tome el valor cero, además de todos los valores posibles $\pm e^C$, podemos incluir la solución $y = 0$ en la fórmula.

Obtenemos el valor de A para el problema con valor inicial despejando A cuando $y = y_0$ y $t = 0$:

$$y_0 = Ae^{k \cdot 0} = A.$$

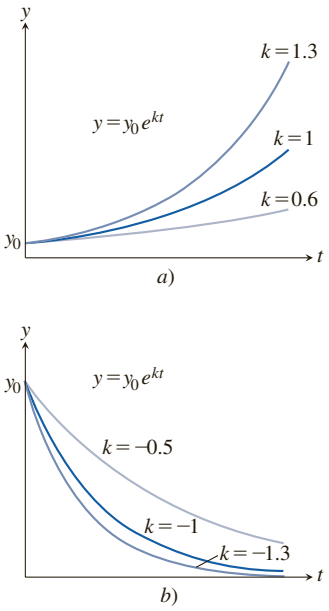


FIGURA 7.15 Gráficas de *a*) crecimiento exponencial y *b*) decaimiento exponencial. Conforme $|k|$ aumenta, el crecimiento ($k > 0$) o decaimiento ($k < 0$) se intensifica.

La solución del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky, \qquad y(0) = y_0$$

es

$$y = y_0 e^{kt}. \tag{2}$$

Se dice que las cantidades que cambian de esta manera experimentan un **crecimiento exponencial** si $k > 0$, y un **decaimiento exponencial** si $k < 0$. El número k se llama **constante de crecimiento** ($k > 0$) o **constante de decaimiento** ($k < 0$). (Vea la figura 7.15).

La deducción de la ecuación (2) muestra también que las únicas funciones que son su propia derivada ($k = 1$) son múltiplos constantes de la función exponencial.

Antes de presentar ejemplos de cambios exponenciales, consideraremos el proceso que usamos para deducir dichos cambios.

Ecuaciones diferenciales separables

Los cambios exponenciales se modelan con una ecuación diferencial de la forma $dy/dx = ky$ para alguna constante k diferente de cero. Más generalmente, suponga que tenemos una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{3}$$

donde f es una función *tanto* de la variable independiente *como* de la variable dependiente. Una **solución** de la ecuación es una función diferenciable $y = y(x)$, definida en un intervalo (tal vez infinito) de valores x, tal que

$$\frac{d}{dx}y(x) = f(x, y(x))$$

en ese intervalo. Es decir, cuando $y(x)$ y su derivada $y'(x)$ se sustituyen en la ecuación diferencial, la ecuación resultante es válida para toda x en el intervalo de solución. La **solución general** es una solución $y(x)$ que contiene todas las soluciones posibles y siempre contiene una constante arbitraria.

La ecuación (3) es **separable** si f se puede expresar como el producto de una función de x y una función de y. La ecuación diferencial tiene entonces la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)H(y). \qquad \begin{matrix} g \text{ es una función de } x; \\ H \text{ es una función de } y. \end{matrix}$$

Cuando rescribimos esta ecuación en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}, \qquad H(y) = \frac{1}{h(y)}$$

su forma diferencial nos permite reunir todos los términos en y con dy, y todos los términos en x con dx:

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx.$$

Ahora, simplemente integramos ambos lados de esta ecuación:

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx. \tag{4}$$

Después de hacer las integrales, obtenemos la solución y definida implícitamente como una función de x.

La justificación de que simplemente podemos integrar ambos lados de la ecuación (4) se basa en la regla de sustitución (sección 5.5):

$$\begin{aligned}\int h(y)\,dy &= \int h(y(x))\frac{dy}{dx}dx \\ &= \int h(y(x))\frac{g(x)}{h(y(x))}dx \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ &= \int g(x)\,dx.\end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = (1 + y)e^x, \quad y > -1.$$

Solución Como $1 + y$ nunca es cero para $y > -1$, podemos resolver la ecuación separando las variables.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (1 + y)e^x \\ dy &= (1 + y)e^x\,dx \qquad \text{Se trata a } dy/dx \text{ como un cociente diferencial y se multiplican ambos lados por } dx. \\ \frac{dy}{1 + y} &= e^x\,dx \qquad \text{Se divide entre } (1 + y). \\ \int \frac{dy}{1 + y} &= \int e^x\,dx \qquad \text{Se integran ambos lados.} \\ \ln(1 + y) &= e^x + C \qquad C \text{ representa a las constantes de integración combinadas en una sola.}\end{aligned}$$

La última ecuación expresa a y como una función implícita de x. ■

EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación $y(x + 1)\dfrac{dy}{dx} = x(y^2 + 1)$.

Solución Se cambia a la forma diferencial, se separan las variables y se integra:

$$\begin{aligned}y(x + 1)\,dy &= x(y^2 + 1)\,dx \\ \frac{y\,dy}{y^2 + 1} &= \frac{x\,dx}{x + 1} \qquad x \neq -1 \\ \int \frac{y\,dy}{1 + y^2} &= \int \left(1 - \frac{1}{x + 1}\right)dx \qquad \text{Se divide } x \text{ entre } x + 1. \\ \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) &= x - \ln|x + 1| + C.\end{aligned}$$

La última ecuación da la solución y como una función implícita de x. ■

El problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky, \qquad y(0) = y_0$$

involucra una ecuación diferencial separable, y la solución $y = y_0e^{kt}$ expresa un cambio exponencial. A continuación presentaremos varios ejemplos de dicho cambio.

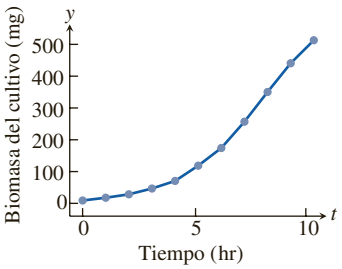


FIGURA 7.16 Gráfica del crecimiento de la población de un cultivo de bacterias en un periodo de 10 horas, con base en los datos del ejemplo 3.

Años (hr)	Logaritmos de ambos lados (mg)
0	9.6
1	18.3
2	29.0
3	47.2
4	71.1
5	119.1
6	174.6
7	257.3
8	350.7
9	441.0
10	513.3

Crecimiento ilimitado de población

En sentido estricto, el número de individuos en una población (ya sea de personas, plantas, animales o bacterias, por ejemplo) es una función discontinua del tiempo, porque toma valores discretos. Sin embargo, cuando el número de individuos se vuelve suficientemente grande, la población puede aproximarse por medio de una función continua. En muchos escenarios, otra hipótesis razonable es la diferenciabilidad de la función que aproxima, lo cual permite el uso del cálculo para modelar y predecir el tamaño de la población.

Si suponemos que la proporción de individuos que se reproducen es constante y damos por sentada una fertilidad constante, entonces, en cualquier instante t, la tasa de nacimientos es proporcional al número $y(t)$ de individuos presentes. Supongamos también que la tasa de mortalidad de la población es estable y proporcional a $y(t)$. Si, además, no tomamos en cuenta los movimientos migratorios, la razón de crecimiento dy/dt es la tasa de natalidad menos la tasa de mortalidad, que es igual, de acuerdo con nuestras hipótesis, a la diferencia entre las dos proporciones. En otras palabras, $dy/dt = ky$, por lo que $y = y_0e^{kt}$, donde y_0 es el tamaño de la población en el instante $t = 0$. Como en todo crecimiento, éste podría tener limitaciones debido al entorno, pero aquí ignoraremos ese hecho (aunque en la sección 9.4 analizaremos un modelo que impone tales restricciones). Cuando k es positiva, la proporcionalidad $dy/dt = ky$ modela *el crecimiento ilimitado de población*. (Vea la figura 7.16).

EJEMPLO 3 La biomasa en un cultivo de levadura en un experimento es, inicialmente, de 29 gramos. Después de 30 minutos, la masa es de 37 gramos. Suponiendo que la ecuación de crecimiento ilimitado de población es un buen modelo para el crecimiento del cultivo de levadura cuando la masa es menor a 100 gramos, ¿cuánto tiempo pasará para que la masa se duplique a partir de su valor inicial?

Solución Sea $y(t)$ la biomasa del cultivo después de t minutos. Usamos el modelo de crecimiento exponencial $dy/dt = ky$ para el crecimiento ilimitado de población, con solución $y = y_0e^{kt}$.

Tenemos $y_0 = y(0) = 29$. También se dijo que

$$y(30) = 29e^{k(30)} = 37.$$

Al despejar k de esta ecuación, tenemos

$$e^{k(30)} = \frac{37}{29}$$

$$30k = \ln\left(\frac{37}{29}\right)$$

$$k = \frac{1}{30}\ln\left(\frac{37}{29}\right) \approx 0.008118.$$

Entonces, la masa del cultivo en gramos después de t minutos está dada por la ecuación

$$y = 29e^{(0.008118)t}.$$

Para resolver el problema, obtenemos el tiempo t para el que $y(t) = 58$, que es el doble de la cantidad inicial.

$$29e^{(0.008118)t} = 58$$

$$(0.008118)t = \ln\left(\frac{58}{29}\right)$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.008118} \approx 85.38$$

Toma aproximadamente 85 minutos para que la población del cultivo se duplique. ■

En el siguiente ejemplo, se modela el número de personas de una población que están infectadas por una enfermedad que se intenta erradicar. Aquí la constante de proporcionalidad k es negativa, y el modelo describe un decaimiento exponencial del número de individuos infectados.

EJEMPLO 4 Un modelo para analizar cómo se erradica una enfermedad, cuando se le trata de manera adecuada, supone que la tasa dy/dt a la que el número de individuos infectados cambia es proporcional al número y. El número de personas que se curan es proporcional al número y de individuos infectados. Suponga que, en el curso de cualquier año, el número de casos de individuos infectados por alguna enfermedad se reduce en 20%. Si actualmente hay 10,000 casos, ¿en cuántos años ese número se reducirá a 1000?

Solución Se emplea la ecuación $y = y_0e^{kt}$. Hay tres valores por determinar: el valor de y_0, el valor de k, y el tiempo t cuando $y = 1000$.

Valor de y_0. Tenemos la libertad de iniciar la cuenta del tiempo en cualquier instante. Si contamos a partir de hoy, entonces, $y = 10{,}000$ cuando $t = 0$, de manera que $y_0 = 10{,}000$. Ahora, nuestra ecuación es

$$y = 10{,}000e^{kt}. \tag{5}$$

Valor de k: Cuando $t = 1$ año, el número de casos será el 80% del valor actual, es decir, 8000. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 8000 &= 10{,}000e^{k(1)} && \text{Ecuación (5) con } t = 1 \text{ y } y = 8000 \\ e^k &= 0.8 \\ \ln(e^k) &= \ln 0.8 && \text{Logaritmos de ambos lados} \\ k &= \ln 0.8 < 0. && \ln 0.8 \approx -0.223 \end{aligned}$$

En cualquier instante t dado,

$$y = 10{,}000e^{(\ln 0.8)t}. \tag{6}$$

El valor de t *que hace a* $y = 1000$. Consideramos que $y = 1000$ en la ecuación (6) y despejamos t:

$$\begin{aligned} 1000 &= 10{,}000e^{(\ln 0.8)t} \\ e^{(\ln 0.8)t} &= 0.1 \\ (\ln 0.8)t &= \ln 0.1 && \text{Logaritmos de ambos lados} \\ t &= \frac{\ln 0.1}{\ln 0.8} \approx 10.32 \text{ años}. \end{aligned}$$

Se requerirá un poco más de 10 años para reducir el número de casos a 1000. (Vea la figura 7.17). ■

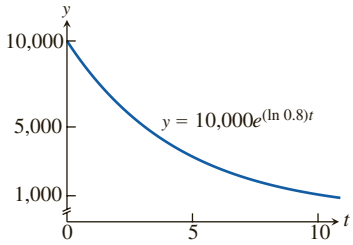


FIGURA 7.17 La gráfica del número de personas infectadas por una enfermedad presenta un decaimiento exponencial (ejemplo 4).

Radiactividad

Algunos átomos son inestables y pueden emitir masa o radiación de manera espontánea. Este proceso se denomina **decaimiento radiactivo** y un elemento cuyos átomos lo experimentan de manera espontánea se llama **elemento radiactivo**. Cuando un átomo emite parte de su masa en este proceso de radiactividad, a menudo ocurre que el resto de los átomos se reestructuran para formar un nuevo elemento. Por ejemplo, el carbono 14 radiactivo decae en nitrógeno, y el radio, a lo largo de varios pasos radiactivos intermedios, decae en plomo.

Los experimentos han demostrado que, en cualquier instante, la tasa a la que decae un elemento radiactivo (medida por el número de núcleos que cambian por unidad de tiempo) es aproximadamente proporcional al número de núcleos radiactivos presentes. Así, el decaimiento de un elemento radiactivo se describe con la ecuación $dy/dt = -ky$, $k > 0$. Por convención, aquí se utiliza $-k$, con $k > 0$, para enfatizar el hecho de que y decrece. Si y_0 es el número de núcleos radiactivos presentes en el instante cero, su número en cualquier instante t posterior será

$$y = y_0e^{-kt}, \qquad k > 0.$$

La **vida media** de un elemento radiactivo es el tiempo que se requiere para que la mitad de los núcleos radiactivos de una muestra del mismo decaigan. Es interesante mencionar que la vida media es una constante que no depende del número de núcleos radiactivos inicialmente presentes en la muestra, sino de la sustancia radiactiva de que se trate.

En el caso del gas radón 222, t se mide en días y $k = 0.18$. En el caso del radio 226, el cual se utilizaba en las carátulas de los relojes para que brillaran en la oscuridad (una práctica peligrosa), t se mide en años y $k = 4.3 \times 10^{-4}$.

Para entender por qué, sea y_0 el número de núcleos radiactivos en la muestra al principio. Así, el número y de núcleos en cualquier instante posterior t será $y = y_0e^{-kt}$. Buscamos el valor de t para el cual el número de núcleos radiactivos presentes sea igual a la mitad del número original:

$$\begin{aligned} y_0e^{-kt} &= \frac{1}{2}y_0 \\ e^{-kt} &= \frac{1}{2} \\ -kt &= \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \qquad \text{Regla del recíproco para logaritmos} \\ t &= \frac{\ln 2}{k}. \end{aligned}$$

Este valor de t es la vida media del elemento. Depende únicamente del valor de k; el número y_0 no tiene efecto alguno.

$$\text{Vida media} = \frac{\ln 2}{k} \qquad (7)$$

El tiempo efectivo de vida radiactiva del polonio 210 es tan breve que lo medimos en días en lugar de años. En una muestra que inicialmente tiene y_0 átomos radiactivos, el número de átomos que quedan al final de t días es

$$y = y_0e^{-5\times10^{-3}t}.$$

La vida media del elemento es

$$\begin{aligned} \text{Vida media} &= \frac{\ln 2}{k} && \text{Ecuación (7)} \\ &= \frac{\ln 2}{5 \times 10^{-3}} && \text{La } k \text{ de la ecuación de decaimiento del polonio} \\ &\approx 139 \text{ días.} \end{aligned}$$

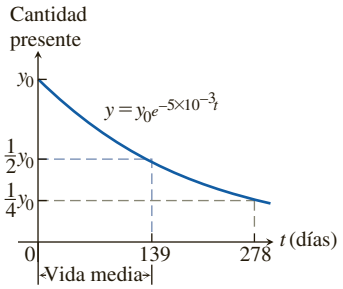


FIGURA 7.18 Cantidad de polonio 210 presente en el tiempo t, donde y_0 representa el número de átomos radiactivos presentes inicialmente.

Esto significa que después de 139 días, permanece la mitad de átomos radiactivos y_0; después de otros 139 días (o 278 días en total), la mitad de ellos, o 1/4 de átomos radiactivos y_0, permanecen, y así sucesivamente (vea la figura 7.18).

El fechado con carbono 14 se basa en una vida media de 5730 años.

EJEMPLO 5 En ocasiones, el decaimiento de los elementos radiactivos se usa para fechar hechos ocurridos en el pasado de la Tierra. En un organismo vivo, la razón entre el carbono radiactivo, carbono 14, y el carbono ordinario permanece constante durante su vida, siendo aproximadamente igual a la razón presente en la atmósfera en la época en la que vivió el organismo. Sin embargo, cuando el organismo muere, deja de ingerir carbono, y la proporción de carbono 14 en sus restos disminuye conforme el carbono 14 decae.

Para el fechado con carbono 14, los científicos emplean la cifra de 5730 años como su vida media. Obtenga la edad de una muestra en la que 10% de núcleos radiactivos originalmente presentes se han desintegrado.

Solución Utilizamos la ecuación de decaimiento $y = y_0e^{-kt}$. Debemos determinar dos cosas: el valor de k y el valor de t cuando y es $0.9y_0$ (aún se conserva 90% de los núcleos radiactivos). Es decir, determinamos t cuando $y_0e^{-kt} = 0.9y_0$, o $e^{-kt} = 0.9$.

Valor de k: Usamos la ecuación (7) para determinar la vida media:

$$k = \frac{\ln 2}{\text{vida media}} = \frac{\ln 2}{5730} \qquad \text{(alrededor de } 1.2 \times 10^{-4}\text{)}.$$

Valor de t que hace a $e^{-kt} = 0.9$.

$$\begin{aligned} e^{-kt} &= 0.9 \\ e^{-(\ln 2/5730)t} &= 0.9 \\ -\frac{\ln 2}{5730}t &= \ln 0.9 && \text{Logaritmos de ambos lados} \\ t &= -\frac{5730 \ln 0.9}{\ln 2} \approx 871 \text{ años} \end{aligned}$$

La muestra tiene una antigüedad de aproximadamente 871 años. ■

Transferencia de calor: Ley de enfriamiento de Newton

Sopa caliente en un tazón metálico se enfría hasta llegar a la temperatura ambiente. Un lingote de plata caliente sumergido en agua se enfría hasta alcanzar la temperatura del líquido. En situaciones como éstas, la razón a la que la temperatura de un objeto cambia en cualquier instante es casi proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que lo rodea. Aunque también se aplica al proceso de calentamiento, este fenómeno se denomina *ley de enfriamiento de Newton*.

Si H es la temperatura del objeto en el instante t y H_S es la temperatura constante del medio ambiente, entonces, la ecuación diferencial es

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_S). \tag{8}$$

Si sustituimos $(H - H_S)$ por y, entonces,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}(H - H_S) = \frac{dH}{dt} - \frac{d}{dt}(H_S) \\ &= \frac{dH}{dt} - 0 && H_S \text{ es una constante.} \\ &= \frac{dH}{dt} \\ &= -k(H - H_S) && \text{Ecuación (8)} \\ &= -ky. && H - H_S = y \end{aligned}$$

Ahora, sabemos que la solución de $dy/dt = -ky$ es $y = y_0e^{-kt}$, donde $y(0) = y_0$. La sustitución de y por $(H - H_S)$ nos indica que

$$H - H_S = (H_0 - H_S)e^{-kt}, \tag{9}$$

donde H_0 es la temperatura en $t = 0$. Esta ecuación es la solución de la ley de enfriamiento de Newton.

EJEMPLO 6 Un huevo cocido a 98°C se sumerge en agua cuya temperatura es de 18°C. Después de 5 minutos, la temperatura del huevo es de 38°C. Suponiendo que el agua no se calienta de manera apreciable, ¿cuánto tardará la temperatura del huevo en alcanzar 20°C?

Solución Determinamos cuánto tarda el huevo en enfriarse de 98°C a 20°C, y restamos los 5 minutos que ya han transcurrido. Por medio de la ecuación (9), con $H_S = 18$ y $H_0 = 98$, la temperatura del huevo después de t minutos de sumergirlo en el agua es

$$H = 18 + (98 - 18)e^{-kt} = 18 + 80e^{-kt}.$$

Para obtener k, utilizamos la información de que $H = 38$ cuando $t = 5$:

$$\begin{aligned} 38 &= 18 + 80e^{-5k} \\ e^{-5k} &= \frac{1}{4} \\ -5k &= \ln\frac{1}{4} = -\ln 4 \\ k &= \frac{1}{5}\ln 4 = 0.2\ln 4 \qquad \text{(aproximadamente 0.28).} \end{aligned}$$

La temperatura del huevo en el instante t es $H = 18 + 80e^{-(0.2\ln 4)t}$. Ahora determinamos el instante t en el que $H = 20$:

$$\begin{aligned} 20 &= 18 + 80e^{-(0.2\ln 4)t} \\ 80e^{-(0.2\ln 4)t} &= 2 \\ e^{-(0.2\ln 4)t} &= \frac{1}{40} \\ -(0.2\ln 4)t &= \ln\frac{1}{40} = -\ln 40 \\ t &= \frac{\ln 40}{0.2\ln 4} \approx 13 \text{ min.} \end{aligned}$$

La temperatura del huevo será de 20 °C, 13 minutos después de sumergirlo en el agua para enfriarlo. Puesto que requirió 5 minutos para llegar a 38 °C, tardará casi 8 minutos más en alcanzar los 20 °C. ■

Ejercicios 7.4

Comprobación de soluciones

En los ejercicios 1 a 4, demuestre que la función $y = f(x)$ es una solución de la ecuación diferencial dada.

1. $2y' + 3y = e^{-x}$

a) $y = e^{-x}$ ***b)*** $y = e^{-x} + e^{-(3/2)x}$

c) $y = e^{-x} + Ce^{-(3/2)x}$

2. $y' = y^2$

a) $y = -\dfrac{1}{x}$ ***b)*** $y = -\dfrac{1}{x+3}$ ***c)*** $y = -\dfrac{1}{x+C}$

3. $y = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt, \quad x^2y' + xy = e^x$

4. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}\displaystyle\int_1^x \sqrt{1+t^4}\,dt, \quad y' + \frac{2x^3}{1+x^4}y = 1$

Problemas con valor inicial

En los ejercicios 5 a 8, demuestre que cada función es una solución del problema con valor inicial enunciado.

	Ecuación diferencial	Ecuación inicial	Solución candidata
5.	$y' + y = \dfrac{2}{1+4e^{2x}}$	$y(-\ln 2) = \dfrac{\pi}{2}$	$y = e^{-x}\tan^{-1}(2e^x)$
6.	$y' = e^{-x^2} - 2xy$	$y(2) = 0$	$y = (x-2)e^{-x^2}$
7.	$xy' + y = -\operatorname{sen} x$, $x > 0$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$	$y = \dfrac{\cos x}{x}$
8.	$x^2y' = xy - y^2$, $x > 1$	$y(e) = e$	$y = \dfrac{x}{\ln x}$

Ecuaciones diferenciales separables

Resuelva las ecuaciones diferenciales en los ejercicios 9 a 22.

9. $2\sqrt{xy}\dfrac{dy}{dx} = 1, \quad x, y > 0$

10. $\dfrac{dy}{dx} = x^2\sqrt{y}, \quad y > 0$

11. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}$

12. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2\,e^{-y}$

13. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y}\cos^2\sqrt{y}$

14. $\sqrt{2xy}\dfrac{dy}{dx} = 1$

15. $\sqrt{x}\dfrac{dy}{dx} = e^{y+\sqrt{x}}, \quad x > 0$

16. $(\sec x)\dfrac{dy}{dx} = e^{y+\operatorname{sen} x}$

17. $\dfrac{dy}{dx} = 2x\sqrt{1-y^2}, \quad -1 < y < 1$

18. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{2x-y}}{e^{x+y}}$

19. $y^2\dfrac{dy}{dx} = 3x^2y^3 - 6x^2$

20. $\dfrac{dy}{dx} = xy + 3x - 2y - 6$

21. $\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} = ye^{x^2} + 2\sqrt{y}\,e^{x^2}$

22. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y} + e^x + e^{-y} + 1$

Aplicaciones y ejemplos

Las respuestas en la mayoría de los siguientes ejercicios están en términos de logaritmos y exponenciales. Utilice una calculadora, para expresar las respuestas en forma decimal.

23. La evolución humana continúa El análisis de la disminución del tamaño de los dientes, realizado por C. Loring Brace y sus colegas del Museo de Antropología de la Universidad de Michigan, indica que el tamaño de los dientes humanos continúa disminuyendo de manera constante y que el proceso de evolución no se detuvo hace aproximadamente 30,000 años, como muchos científicos aseguran. Por ejemplo, el tamaño de los

dientes de los europeos septentrionales en la actualidad disminuye a razón de 1% por cada 1000 años.

a) Si t representa el tiempo en años y y representa el tamaño de los dientes, considere la conclusión de que $y = 0.99y_0$ cuando $t = 1000$ para determinar el valor de k en la ecuación $y = y_0e^{kt}$. Luego, con base en ese valor de k, conteste las siguientes preguntas.

b) ¿Cuántos años pasarán para que los dientes humanos tengan 90% de su tamaño actual?

c) ¿Cuál será el tamaño de los dientes de nuestros descendientes dentro de 20,000 años (como porcentaje del tamaño actual)?

24. Presión atmosférica La presión atmosférica p de la Tierra suele modelarse suponiendo que la tasa dp/dh a la que cambia p, con respecto a la altitud h sobre el nivel del mar, es proporcional a p. Suponga que la presión al nivel del mar es de 1013 milibares (aproximadamente 14.7 lb/in^2) y que a una altura de 20 km es de 90 milibares).

a) Resuelva el problema con valor inicial

Ecuación diferencial: $dp/dh = kp$ (donde k es una constante)
Condición inicial: $p = p_0$ cuando $h = 0$
para expresar p en términos de h. Determine los valores de p_0 y k, a partir de la información de altitud y presión dada.

b) ¿Cuál es la presión atmosférica cuando $h = 50$ km?

c) ¿A qué altitud, la presión es igual a 900 milibares?

25. Reacciones químicas de primer orden En algunas reacciones químicas, la razón a la que la cantidad de una sustancia cambia con el tiempo es proporcional a la cantidad presente. Por ejemplo, para la transformación de δ-gluconolactona en ácido glucónico, tenemos

$$\frac{dy}{dt} = -0.6y$$

cuando t se mide en horas. Si hay 100 gr de δ-gluconolactona cuando $t = 0$, ¿cuántos gramos quedarán después de la primera hora?

26. Inversión del azúcar El procesamiento de azúcar sin refinar incluye un paso denominado "inversión", en el cual se modifica su estructura molecular. Una vez que este proceso inicia, la tasa de cambio de la cantidad de azúcar sin refinar es proporcional a la cantidad de azúcar que queda sin refinar. Si durante las primeras 10 horas, 1000 kg de azúcar sin refinar se reducen a 800 kg, ¿qué cantidad de azúcar sin refinar quedará después de otras 14 horas?

27. Trabajo submarino La intensidad de la luz $L(x)$, a x pies bajo la superficie del océano, satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dL}{dx} = -kL.$$

Un buzo sabe, por experiencia, que la intensidad de la luz se reduce a la mitad cuando se está a 18 ft de profundidad en el mar Caribe. Cuando la intensidad de la luz se reduce a una décima parte de su valor en la superficie, es imposible trabajar sin luz artificial. ¿Hasta qué profundidad se puede trabajar sin luz artificial?

28. Voltaje en un condensador que se descarga Suponga que la electricidad fluye de un condensador a una velocidad que es proporcional al voltaje V que cruza sus terminales. Suponga también que, si t se mide en segundos,

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{40}V.$$

Resuelva esta ecuación para despejar V, usando V_0 para denotar el valor de V cuando $t = 0$. ¿Cuánto tardará el voltaje en reducirse a 10% de su valor original?

29. Bacteria del cólera Suponga que las bacterias de una colonia se reproducen sin freno de acuerdo con la ley de cambio exponencial. La colonia inicia con una bacteria y su población se duplica cada media hora. ¿Cuántas bacterias tendrá la colonia al término de 24 horas? (En condiciones de laboratorio favorables, el número de bacterias de cólera puede duplicarse cada 30 minutos. En una persona infectada, muchas bacterias se destruyen, pero este ejemplo explica por qué una persona que se siente bien en la mañana puede estar muy grave por la noche).

30. Crecimiento de bacterias Una colonia de bacterias crece en condiciones ideales en un laboratorio, de modo que la población aumenta de forma exponencial con el paso del tiempo. Después de 3 horas, hay 10,000 bacterias. Después de 5, hay 40,000. ¿Cuántas bacterias había al principio?

31. Incidencia de una enfermedad (*Continuación del ejemplo 4*). Suponga que en cualquier año dado, el número de casos puede reducirse 25% en lugar de 20%.

a) ¿Cuánto tardará en reducirse a 1000 el número de casos?

b) ¿Cuánto tardará en erradicarse la enfermedad, es decir, en reducirse a menos de 1 el número de casos?

32. Concentración de un medicamento Se administra un antibiótico por vía intravenosa en el torrente sanguíneo de un individuo a una razón constante r. Conforme el medicamento fluye por el organismo del paciente y actúa sobre la infección presente, se elimina del torrente sanguíneo a una razón proporcional a la cantidad presente en la sangre en ese instante. Como la cantidad de sangre en el paciente es constante, esto significa que la concentración $y = y(t)$ del antibiótico en el torrente sanguíneo se puede modelar por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = r - ky, \quad k > 0 \text{ y constante.}$$

a) Si $y(0) = y_0$, obtenga la concentración $y(t)$ en cualquier instante t.

b) Suponga que $y_0 < (r/k)$ y obtenga $\lim_{y\to\infty} y(t)$. Dibuje la curva solución de la concentración.

33. Especies en peligro de extinción Los biólogos consideran que una especie animal o vegetal está en peligro de extinción si se espera que se extinga dentro de los próximos 20 años. Si cierta especie de la vida salvaje cuenta con 1147 especímenes actualmente, y la población ha declinado constantemente de manera exponencial a una tasa promedio anual de 39% durante los últimos 7 años, ¿cree que la especie está en peligro de extinción? Explique su respuesta.

34. Población de Estados Unidos La Oficina del Censo de Estados Unidos se mantiene al tanto del total de población estadounidense en cualquier instante. El 20 de septiembre de 2012, el total crecía a razón de 1 persona cada 12 segundos. A las 08:11 p.m., hora del este de ese día, la población era de 314,419,198 personas.

a) Suponiendo que hay un crecimiento exponencial a razón constante, determine la constante de crecimiento de la población (personas por año de 365 días).

b) A esa tasa, ¿cuál será la población de Estados Unidos a las 8:11 p.m., hora del este, del 20 de septiembre de 2019?

35. Agotamiento del petróleo Suponga que la cantidad de petróleo que se bombea desde un pozo en Whittier, California, disminuye a una razón continua de 10% anual. ¿Cuándo llegará la producción a un quinto de su valor actual?

36. Descuento continuo en precio Para alentar a los clientes a comprar 100 unidades, el departamento de ventas de su compañía aplica un descuento continuo, lo que hace del precio unitario una función $p(x)$ del número x de unidades compradas. El descuento reduce el precio a razón de \$0.01 por unidad adquirida. El precio por unidad para una orden de 100 unidades es $p(100) = \$20.09$.

***a*)** Determine $p(x)$ resolviendo el siguiente problema con valor inicial:

$$\text{Ecuación diferencial:} \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{100}p$$

$$\text{Condición inicial:} \quad p(100) = 20.09.$$

***b*)** Determine el precio unitario $p(10)$ para un pedido de 10 unidades y el precio unitario $p(90)$ para un pedido de 90 unidades.

***c*)** El departamento de ventas le pide que investigue si este descuento es tan considerable como para que el ingreso de la compañía, $r(x) = x \cdot p(x)$, llegue a ser menor en un pedido de 100 unidades en comparación con, digamos, uno de 90. Confírmeles mostrando que r tiene un valor máximo en $x = 100$.

***d*)** Grafique la función ingreso $r(x) = xp(x)$, para $0 \le x \le 200$.

37. Plutonio 239 La vida media del isótopo del plutonio es de 24,360 años. Si se liberan a la atmósfera 10 gramos de plutonio en un accidente nuclear, ¿cuántos años tendrán que transcurrir para que el 80% del isótopo decaiga?

38. Polonio 210 La vida media del polonio es de 139 días, pero la muestra ya no será útil cuando se haya desintegrado el 95% de los núcleos radiactivos presentes en ella al principio. ¿Hasta cuántos días después de su llegada podrá usarse esa muestra de polonio?

39. Vida media de un núcleo radiactivo Los físicos que usan la ecuación de la radiactividad $y = y_0e^{-kt}$ llaman *vida media* de un núcleo radiactivo al número $1/k$. Para el radón, es de $1/0.18 = 5.6$ días. La vida media de un núcleo de carbono 14 es de más de 8000 años. Demuestre que 95% de los núcleos radiactivos presentes en la muestra se desintegrarán antes de tres vidas medias, es decir, en el instante $t = 3/k$. Así, la vida media del núcleo representa un método sencillo para estimar cuánto dura la radiactividad de una muestra.

40. Californio 252 ¿Qué elemento cuesta 27 millones de dólares por gramo y sirve para combatir el cáncer cerebral, analizar el contenido de azufre del carbón y detectar explosivos en el equipaje? Se trata del californio 252, un isótopo radiactivo tan escaso, que en el mundo occidental sólo se han obtenido 8 gramos desde que Glenn Seaborg lo descubrió en 1950. La vida media del isótopo es de 2.645 años: lo suficientemente larga para ser útil y lo bastante corta para tener alta radiactividad por unidad de masa. Un microgramo del isótopo libera 170 millones de neutrones por minuto.

***a*)** ¿Cuál es el valor de k en la ecuación de decaimiento de este isótopo?

***b*)** ¿Cuál es la vida media del isótopo? (Vea el ejercicio 39).

***c*)** ¿Cuánto tardará en desintegrarse el 95% de los núcleos radiactivos de una muestra?

41. Enfriamiento de la sopa Suponga que la sopa contenida en un tazón se enfría, pasando de 90 °C a 60 °C en 10 minutos, en una habitación a temperatura de 20 °C. Conteste las siguientes preguntas con base en la ley de enfriamiento de Newton.

***a*)** ¿Cuánto tiempo tardará la sopa en enfriarse a 35 °C?

***b*)** En lugar de dejar la sopa a temperatura de 90 °C en la habitación, se guarda en un congelador a −15 °C. ¿Cuánto tardará en enfriarse hasta alcanzar los 35 °C?

42. Una viga a temperatura desconocida Una viga de aluminio expuesta al frío exterior entra en un taller de troquelado donde la temperatura se mantiene a 65 °F. Después de 10 minutos, la temperatura de la viga llega a 35 °F, y después de otros 10 alcanza los 50 °F. Estime la temperatura inicial de la viga, utilizando la ley de enfriamiento de Newton.

43. Un ambiente con temperatura desconocida Una olla con agua tibia (a 46 °C) se guarda en un refrigerador. A los 10 minutos, la temperatura del agua es de 39 °C; 10 minutos después, su temperatura es de 33 °C. Con base en la ley de enfriamiento de Newton, estime a qué temperatura se encuentra el refrigerador.

44. Enfriamiento de plata en el aire La temperatura de un lingote de plata es ahora 60 °C más alta que la temperatura ambiente. Hace 20 minutos era 70 °C más alta que la temperatura ambiente. ¿Cuánto más alta que la temperatura ambiente será la temperatura de la plata

***a*)** en 15 minutos?

***b*)** en 2 horas?

***c*)** ¿Cuándo estará 10 °C por encima de la temperatura ambiente?

45. La edad del Lago Cráter El carbón vegetal de un árbol derribado por la erupción volcánica que formó el Lago Cráter, ubicado en Oregon, contenía 44.5% del carbono 14 que se encuentra normalmente en la materia viva. ¿Qué edad tiene el Lago Cráter?

46. Sensibilidad a la medición del fechado con carbono 14 Veamos este caso hipotético para apreciar el efecto de un error relativamente pequeño en la estimación del contenido de carbono 14 en una muestra cuya antigüedad debe determinarse:

***a*)** Un hueso fósil, descubierto en el centro de Illinois en el año 2000, conserva 17% de su carbono 14 original. Estime en qué año murió el animal al que perteneció dicho hueso.

***b*)** Repita el inciso *a*) suponiendo que el contenido de carbono 14 es de 18% en lugar de 17%.

***c*)** Repita el inciso *a*) suponiendo que el contenido de carbono 14 es de 16% en lugar de 17%.

47. Carbono 14 La momia humana congelada más antigua conocida, descubierta en el glaciar Schnalstal de los Alpes italianos en 1991 y llamada *Otzi*, se encontró con zapatos de paja y un impermeable de piel con pelo de cabra; además, tenía un hacha de cobre y un cuchillo de pedernal. Se estima que Otzi murió 5000 años antes de ser descubierto en el glaciar derretido. ¿Qué cantidad del carbono 14 original contenía el cuerpo de Otzi en el momento de ser descubierto?

48. Falsificación de arte Una pintura atribuida a Vermeer (1632-1675), que hoy no podría contener más de 96.2% de su carbono 14 original, contiene 99.5%. ¿Cuál es la antigüedad de la falsificación?

49. Pinturas en la cueva de Lascaux En la cueva de Lascaux, en Francia, se encontraron pinturas prehistóricas en 1940. Análisis científicos revelaron que sólo el 15% del carbono 14 original permanecía en las pinturas. ¿Cuál es la estimación de la antigüedad de las pinturas?

50. Momia inca Los restos congelados de una joven mujer inca fueron descubiertos por el arqueólogo Johan Reinhard en el Monte Ampato en Perú, durante una expedición en 1995.

***a*)** ¿Cuánto carbono 14 del original estaba presente si la antigüedad estimada de "la doncella de hielo" es de 500 años?

***b*)** Si en una medición con carbono 14 se presenta un error del 1%, ¿cuál es la antigüedad máxima posible de la momia de la "doncella de hielo"?

7.5 Formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital

Usando derivadas, John (Johann) Bernoulli descubrió una regla para calcular límites de fracciones cuyos numeradores y denominadores tienden a cero o a $+\infty$. En la actualidad, la regla se conoce como la **regla de L'Hôpital**, en honor de Guillaume de L'Hôpital, un aristócrata francés que escribió el primer texto de introducción al cálculo diferencial, donde apareció impresa por primera vez dicha regla. Los límites que involucran funciones trascendentes a menudo requieren del uso de la regla para su solución.

Forma indeterminada 0/0

Si queremos saber cómo se comporta la función

$$F(x) = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

cerca de $x = 0$ (donde no está definida), examinamos el límite de $F(x)$ cuando $x \to 0$. No se puede aplicar la regla del cociente para límites (teorema 1 del capítulo 2) porque el límite del denominador es 0. Además, en este caso, *tanto* el numerador *como* el denominador se aproximan a 0, y $0/0$ no está definido. En general, estos límites pueden o no existir, pero el límite de la función que estamos analizando, $F(x)$, existe, y se puede determinar usando la regla de L'Hôpital, como se verá en el ejemplo 1*d*).

Si las funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ son iguales a cero en $x = a$, entonces,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

no se puede obtener sustituyendo $x = a$. La sustitución produce $0/0$, una expresión que carece de sentido y que no podemos evaluar. Usamos $0/0$ como una notación para una expresión conocida como **forma indeterminada**. A menudo se presentan otras expresiones sin sentido, como ∞/∞, $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$, 0^0 y 1^∞, las cuales no se pueden evaluar de manera consistente; estas expresiones también se conocen como formas indeterminadas. Algunas veces, pero no siempre, los límites que conducen a formas indeterminadas se obtienen por cancelación, reorganización de términos u otras manipulaciones algebraicas. Esto fue lo que hicimos en el capítulo 2. En la sección 2.4 nos tomó un trabajo considerable obtener $\lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)/x$. Pero tuvimos éxito con el límite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

con el cual calculamos derivadas, y que genera la forma indeterminada $0/0$ cuando intentamos sustituir $x = a$. La regla de L'Hôpital nos permite capitalizar nuestro éxito con derivadas para evaluar límites que, de otra manera, nos llevarían a formas indeterminadas.

TEOREMA 5 Regla de L´Hôpital Supongamos que $f(a) = g(a) = 0$, que f y g son diferenciables en un intervalo abierto I que contiene a a, y que $g'(x) \neq 0$ en I si $x \neq a$. Entonces,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

suponiendo que existe el límite del lado derecho de esta ecuación.

Al final de esta sección se presenta la demostración del teorema 5.

¡Cuidado!
Para aplicar la regla de L'Hôpital a f/g, se divide la derivada de f entre la derivada de g. No caiga en la trampa de tomar la derivada de f/g. El cociente que se debe usar es f'/g', no $(f/g)'$.

EJEMPLO 1 Los siguientes límites involucran formas indeterminadas $0/0$, así que aplicamos la regla de L'Hôpital. En algunos casos, se debe aplicar más de una vez.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x-\operatorname{sen} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3-\cos x}{1}=\left.\frac{3-\cos x}{1}\right|_{x=0}=2$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1}=\frac{1}{2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2}$ $\frac{0}{0}$; se aplica la regla de L'Hôpital.

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{(1/2)(1+x)^{-1/2}-1/2}{2x}$ Todavía es $\frac{0}{0}$; se aplica nuevamente la regla de L'Hôpital.

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{-(1/4)(1+x)^{-3/2}}{2}=-\frac{1}{8}$ Ya no es $\frac{0}{0}$; se obtuvo el límite.

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$ $\frac{0}{0}$; se aplica la regla de L'Hôpital.

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$ Todavía es $\frac{0}{0}$; se aplica nuevamente la regla de L'Hôpital.

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{6x}$ Todavía es $\frac{0}{0}$; se aplica nuevamente la regla de L'Hôpital.

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$ Ya no es $\frac{0}{0}$; se obtuvo el límite. ■

A continuación se presenta un resumen del procedimiento seguido en el ejemplo 1.

Uso de la regla de L´Hôpital

Para obtener

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

por medio de la regla de L'Hôpital, se continúa diferenciando f y g tantas veces como sea necesario mientras se siga obteniendo la forma $0/0$ en $x=a$. Pero en el momento en que una u otra de estas derivadas sea distinta de cero en $x=a$, se deja de diferenciar. La regla de L'Hôpital no se aplica cuando el numerador o el denominador tienen un límite finito distinto de cero

EJEMPLO 2 Sea cuidadoso y use correctamente la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{1+2x} \qquad \text{No es } \frac{0}{0}$$

Es tentador intentar usar la regla de L'Hôpital nuevamente, lo que daría como resultado

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2},$$

pero éste no es el límite correcto. La regla de L'Hôpital se usa sólo con límites que involucran formas indeterminadas, y $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/(1+2x)$ no da una forma indeterminada. En cambio, este límite es $0/1=0$, y la respuesta correcta para el límite original es 0. ■

La regla de L'Hôpital también se usa en límites laterales.

EJEMPLO 3 En este ejemplo los límites laterales son diferentes.

a) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$ $\quad \dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{2x} = \infty \qquad \text{Positivo para } x > 0$$

b) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$ $\quad \dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{2x} = -\infty \qquad \text{Negativo para } x < 0$$ ■

Recuerde que ∞ y $+\infty$ significan lo mismo.

Formas indeterminadas ∞/∞, $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$

En ocasiones, al intentar evaluar un límite cuando $x \to a$ sustituyendo $x = a$, se obtiene una forma indeterminada como ∞/∞, $\infty \cdot 0$, o $\infty - \infty$, en lugar de $0/0$. Consideremos primero la forma ∞/∞.

En textos más avanzados de cálculo se demuestra que la regla de L'Hôpital se puede usar para formas indeterminadas ∞/∞, así como para $0/0$. Si $f(x) \to \pm\infty$ y $g(x) \to \pm\infty$ cuando $x \to a$, entonces,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que el límite de la derecha exista. En la notación $x \to a$, a puede ser finito o infinito. Además, $x \to a$, puede reemplazarse por los límites laterales $x \to a^+$ o $x \to a^-$.

EJEMPLO 4 Obtenga los límites de las formas ∞/∞:

a) $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{\sec x}{1 + \tan x}$ ***b)*** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$ ***c)*** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$.

Solución

a) El numerador y el denominador son discontinuos en $x = \pi/2$, de manera que investigamos los límites laterales ahí. Para aplicar la regla de L'Hôpital podemos elegir como I cualquier intervalo abierto con $x = \pi/2$ como uno de sus extremos.

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec x}{1 + \tan x} \quad \frac{\infty}{\infty} \text{ por la izquierda, de modo que aplicamos la regla de L'Hôpital.}$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \operatorname{sen} x = 1$$

El límite de la derecha también es 1, con $(-\infty)/(-\infty)$ como forma indeterminada. Por lo tanto, el límite bilateral es igual a 1.

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1/x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ $\quad \dfrac{1/x}{1/\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{2} = \infty$ ■

Ahora pongamos atención en las formas indeterminadas $\infty \cdot 0$ e $\infty - \infty$. En ocasiones, estas formas se pueden manipular algebraicamente para convertirlas en una forma $0/0$ o ∞/∞. Una vez más, no queremos sugerir que $\infty \cdot 0$ o $\infty - \infty$ sean números; tan sólo son notaciones para comportamientos funcionales cuando consideramos límites. A continuación se dan ejemplos de cómo deben trabajarse estas formas indeterminadas.

EJEMPLO 5 Obtenga los límites de las formas $\infty \cdot 0$:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$ ***b)*** $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$

Solución

a) $\lim_{x\to\infty}\left(x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{h}\operatorname{sen} h\right) = \lim_{h\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$ $\infty\cdot 0$; sea $h = 1/x$.

b) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/\sqrt{x}}$ $\infty\cdot 0$ convertido a ∞/∞

$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/2x^{3/2}}$ Se usó la regla de L´Hôpital.

$= \lim_{x\to 0^+}\left(-2\sqrt{x}\right) = 0$ ■

EJEMPLO 6 Obtenga el límite de la forma $\infty - \infty$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right).$$

Solución Si $x \to 0^+$, entonces, $\operatorname{sen} x \to 0^+$ y

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \to \infty - \infty.$$

De manera similar, si $x \to 0^-$, entonces, $\operatorname{sen} x \to 0^-$ y

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \to -\infty - (-\infty) = -\infty + \infty.$$

Ninguna de estas formas revela qué ocurre en el límite. Para averiguarlo, primero combinamos las fracciones:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}.$$ El denominador común es $x \operatorname{sen} x$.

Después, usamos la regla de L′Hôpital en la fracción que resulta

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$$ $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x + x\cos x}$$ Todavía es $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0.$$ ■

Potencias indeterminadas

Los límites que conducen a las formas 1^∞, 0^0 e ∞^0 en ocasiones se pueden manejar tomando primero el logaritmo de la función. Usamos la regla de L′Hôpital para obtener el límite de la expresión logarítmica y después calculamos la exponencial del resultado para obtener el límite de la función original. Este procedimiento se justifica por la continuidad de la función exponencial y el teorema 10 de la sección 2.5, y se formula como sigue. (La fórmula también es válida para límites laterales).

Si $\lim_{x\to a}\ln f(x) = L$, entonces,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)} = e^L.$$

Aquí, a puede ser finito o infinito.

EJEMPLO 7 Use la regla de L'Hôpital para demostrar que $\lim_{x\to 0^+}(1 + x)^{1/x} = e$.

Solución El límite nos lleva a la forma indeterminada 1^∞. Consideramos $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ y obtenemos $\lim_{x\to 0^+} \ln f(x)$. Como

$$\ln f(x) = \ln (1 + x)^{1/x} = \frac{1}{x}\ln (1 + x),$$

la regla de L'Hôpital se puede usar para obtener

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \ln f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln (1 + x)}{x} && \frac{0}{0}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{1 + x}}{1} && \text{Se usó la regla de L´Hôpital.}\\ &= \frac{1}{1} = 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0^+}(1 + x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln f(x)} = e^1 = e.$ ■

EJEMPLO 8 Obtenga $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$.

Solución El límite nos lleva a la forma indeterminada ∞^0. Consideramos $f(x) = x^{1/x}$ y obtenemos $\lim_{x\to\infty} \ln f(x)$. Como

$$\ln f(x) = \ln x^{1/x} = \frac{\ln x}{x},$$

La regla de L'Hôpital nos da

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \ln f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} && \frac{\infty}{\infty}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} && \text{Se usó la regla de L´Hôpital.}\\ &= \frac{0}{1} = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\ln f(x)} = e^0 = 1.$ ■

Demostración de la regla de L'Hôpital

Antes de demostrar la regla de L'Hôpital, consideremos un caso especial para proporcionar alguna evidencia geométrica sobre su validez. Considere las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ que tienen derivadas *continuas* y que satisfacen $f(a) = g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$. En la figura 7.19 se presentan las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$, junto con sus linealizaciones $y = f'(a)(x - a)$ y $y = g'(a)(x - a)$. Sabemos que en la cercanía de $x = a$, las linealizaciones dan buenas aproximaciones a las funciones. De hecho,

$$f(x) = f'(a)(x - a) + \epsilon_1(x - a) \quad \text{y} \quad g(x) = g'(a)(x - a) + \epsilon_2(x - a)$$

donde $\epsilon_1 \to 0$ y $\epsilon_2 \to 0$ cuando $x \to a$. Entonces, como sugiere la figura 7.19,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a} \frac{f'(a)(x - a) + \epsilon_1(x - a)}{g'(a)(x - a) + \epsilon_2(x - a)}\\ &= \lim_{x\to a} \frac{f'(a) + \epsilon_1}{g'(a) + \epsilon_2} = \frac{f'(a)}{g'(a)} && g'(a) \neq 0\\ &= \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, && \text{Derivadas continuas}\end{aligned}$$

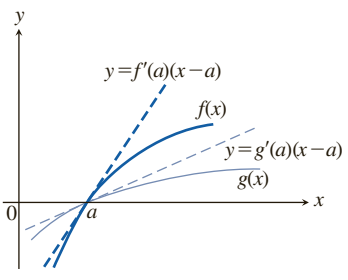


FIGURA 7.19 Las dos funciones en la regla de L'Hôpital, graficadas con sus aproximaciones lineales en $x = a$.

tal como afirma la regla de L′Hôpital. Ahora procederemos a demostrar la regla con base en los supuestos más generales establecidos en el teorema 5, los cuales no requieren que $g'(a) \neq 0$ ni que las dos funciones tengan derivadas *continuas*.

La demostración de la regla de L′Hôpital se basa en el teorema del valor medio de Cauchy, una extensión del teorema del valor medio que involucra dos funciones en lugar de una. Primero demostramos el teorema de Cauchy y después mostramos cómo éste nos conduce a la regla de L′Hôpital.

TEOREMA 6: Teorema del valor medio de Cauchy Suponga que las funciones f y g son continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b); suponga también que $g'(x) \neq 0$ en (a, b). Entonces, existe un número c en (a, b) en el cual

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Cuando $g(x) = x$, el teorema 6 es el teorema del valor medio del capítulo 4.

Demostración Aplicamos dos veces el teorema del valor medio de la sección 4.2. Primero lo usamos para demostrar que $g(a) \neq g(b)$. Si $g(b)$ fuera igual a $g(a)$, entonces, el teorema del valor medio nos daría

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0$$

para alguna c entre a y b, lo cual no puede ocurrir porque $g'(x) \neq 0$ en (a, b).

En seguida, usamos el teorema del valor medio con la función

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)].$$

Esta función es continua y diferenciable donde f y g lo son, y $F(b) = F(a) = 0$. Por lo tanto, existe un número c entre a y b para el cual $F'(c) = 0$. Cuando esta ecuación se expresa en términos de f y g, se convierte en

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g'(c)] = 0$$

de modo que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \qquad \blacksquare$$

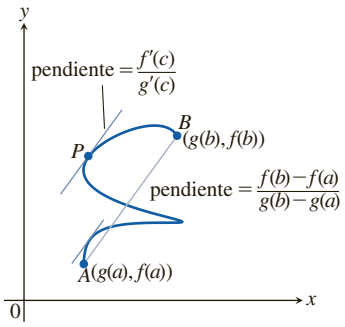


FIGURA 7.20 En la curva C existe al menos un punto P donde la pendiente de la tangente a la curva en P es la misma que la pendiente de la recta secante que une los puntos $A(g(a), f(a))$ y $B(g(b), f(b))$.

El teorema del valor medio de Cauchy tiene una interpretación geométrica para una curva ondulada general C en el plano que une los dos puntos $A = (g(a), f(a))$ y $B = (g(b), f(b))$. En el capítulo 11 veremos cómo se puede describir la curva C para demostrar que existe al menos un punto P sobre la curva para el cual la tangente a la curva en P es paralela a la recta secante que une los puntos A y B. La pendiente de la recta tangente resulta ser el cociente f'/g' evaluado en el número c en el intervalo (a, b), el cual es el lado izquierdo de la ecuación del teorema 6. Como la pendiente de la recta secante que une A con B es

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

la ecuación en el teorema del valor medio de Cauchy indica que la pendiente de la recta tangente es igual a la pendiente de la recta secante. Esta interpretación geométrica se ilustra en la figura 7.20. Observe en la figura que es posible tener, para más de un punto de la curva C, una recta tangente paralela a la recta secante que une A con B.

Demostración de la regla de L′Hôpital Primero establecemos la ecuación límite para el caso $x \to a^+$. El método casi no cambia para el caso $x \to a^-$, y la combinación de estos dos casos establece el resultado.

Suponga que x se encuentra a la derecha de a. Entonces, $g'(x) \neq 0$, y podemos aplicar el teorema del valor medio de Cauchy en el intervalo cerrado de a a x. Este paso produce un número c entre a y x tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}.$$

Pero $f(a) = g(a) = 0$, así que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Cuando x se aproxima a a, c se aproxima a a porque siempre se encuentra entre a y x. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

lo cual establece la regla de L'Hôpital para el caso donde x se aproxima a a por la derecha. El caso donde x se aproxima a a por la izquierda se demuestra usando el teorema del valor medio de Cauchy en el intervalo cerrado $[x, a]$, $x < a$. ■

Ejercicios 7.5

Obtención de límites de dos maneras

En los ejercicios 1 a 6, use la regla de L'Hôpital para evaluar el límite. Después, evalúelo utilizando el método estudiado en el capítulo 2.

1. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^2-4}$ **2.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x}$ **3.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-3x}{7x^2+1}$

4. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{4x^3-x-3}$ **5.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ **6.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3x}{x^3+x+1}$

Aplicación de la regla de L'Hôpital

Use la regla de L'Hôpital para obtener los límites en los ejercicios 7 a 50.

7. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$ **8.** $\lim_{x\to -5} \dfrac{x^2-25}{x+5}$

9. $\lim_{t\to -3} \dfrac{t^3-4t+15}{t^2-t-12}$ **10.** $\lim_{t\to -1} \dfrac{3t^3+3}{4t^3-t+3}$

11. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^3-2x}{7x^3+3}$ **12.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x-8x^2}{12x^2+5x}$

13. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t^2}{t}$ **14.** $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5t}{2t}$

15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{8x^2}{\cos x - 1}$ **16.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$

17. $\lim_{\theta\to \pi/2} \dfrac{2\theta-\pi}{\cos(2\pi-\theta)}$ **18.** $\lim_{\theta\to -\pi/3} \dfrac{3\theta+\pi}{\operatorname{sen}(\theta+(\pi/3))}$

19. $\lim_{\theta\to \pi/2} \dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\cos 2\theta}$ **20.** $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln x - \operatorname{sen}\pi x}$

21. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\ln(\sec x)}$ **22.** $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{\ln(\csc x)}{(x-(\pi/2))^2}$

23. $\lim_{t\to 0} \dfrac{t(1-\cos t)}{t-\operatorname{sen} t}$ **24.** $\lim_{t\to 0} \dfrac{t\operatorname{sen} t}{1-\cos t}$

25. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\sec x$ **26.** $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\tan x$

27. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{3^{\operatorname{sen}\theta}-1}{\theta}$ **28.** $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{(1/2)^\theta - 1}{\theta}$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x2^x}{2^x-1}$ **30.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{3^x-1}{2^x-1}$

31. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\log_2 x}$ **32.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log_2 x}{\log_3(x+3)}$

33. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x^2+2x)}{\ln x}$ **34.** $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(e^x-1)}{\ln x}$

35. $\lim_{y\to 0} \dfrac{\sqrt{5y+25}-5}{y}$ **36.** $\lim_{y\to 0} \dfrac{\sqrt{ay+a^2}-a}{y}, \quad a > 0$

37. $\lim_{x\to\infty} (\ln 2x - \ln(x+1))$ **38.** $\lim_{x\to 0^+} (\ln x - \ln \operatorname{sen} x)$

39. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{(\ln x)^2}{\ln(\operatorname{sen} x)}$ **40.** $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{3x+1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

41. $\lim_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$ **42.** $\lim_{x\to 0^+} (\csc x - \cot x + \cos x)$

43. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\cos\theta - 1}{e^\theta - \theta - 1}$ **44.** $\lim_{h\to 0} \dfrac{e^h - (1+h)}{h^2}$

45. $\lim_{t\to\infty} \dfrac{e^t + t^2}{e^t - t}$ **46.** $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$

47. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x\tan x}$ **48.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)^2}{x\operatorname{sen} x}$

49. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\tan\theta - \theta}$ **50.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x - 3x + x^2}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x}$

Potencias y productos indeterminados

Obtenga los límites en los ejercicios 51 a 66.

51. $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$ **52.** $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(x-1)}$ **53.** $\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{1/x}$

54. $\lim_{x\to e^+} (\ln x)^{1/(x-e)}$ **55.** $\lim_{x\to 0^+} x^{-1/\ln x}$ **56.** $\lim_{x\to\infty} x^{1/\ln x}$

57. $\lim_{x\to\infty}(1+2x)^{1/(2\ln x)}$ **58.** $\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$ **59.** $\lim_{x\to 0^+}x^x$

60. $\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ **61.** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x$ **62.** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)^{1/x}$

63. $\lim_{x\to 0^+}x^2\ln x$ **64.** $\lim_{x\to 0^+}x(\ln x)^2$

65. $\lim_{x\to 0^+}x\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ **66.** $\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen}x\cdot\ln x$

Teoría y aplicaciones

La regla de L'Hôpital no es útil con los límites de los ejercicios 67 a 74. Inténtelo, sólo se mantienen ciclos repetitivos. Obtenga los límites de otra manera.

67. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$ **68.** $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\operatorname{sen}x}}$ **69.** $\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\sec x}{\tan x}$

70. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\cot x}{\csc x}$ **71.** $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-3^x}{3^x+4^x}$ **72.** $\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x+4^x}{5^x-2^x}$

73. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{xe^x}$ **74.** $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{e^{-1/x}}$

75. ¿Cuál expresión es correcta y cuál es incorrecta? Justifique sus respuestas.

a) $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-3}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{2x}=\frac{1}{6}$ *b)* $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-3}=\frac{0}{6}=0$

76. ¿Cuál expresión es correcta y cuál es incorrecta? Justifique sus respuestas.

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x^2-\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2}{2x-\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{2+\operatorname{sen}x}=\frac{2}{2+0}=1$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x^2-\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2}{2x-\cos x}=\frac{-2}{0-1}=2$

77. Sólo uno de los siguientes cálculos es correcto. ¿Cuál? ¿Por qué los otros son incorrectos? Justifique sus respuestas.

a) $\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0\cdot(-\infty)=0$

b) $\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0\cdot(-\infty)=-\infty$

c) $\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{(1/x)}=\frac{-\infty}{\infty}=-1$

d) $\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{(1/x)}$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1/x)}{(-1/x^2)}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$

78. Obtenga los valores de c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio de Cauchy para las funciones y el intervalo dados.

a) $f(x)=x,\quad g(x)=x^2,\quad (a,b)=(-2,0)$

b) $f(x)=x,\quad g(x)=x^2,\quad (a,b)$ arbitrario

c) $f(x)=x^3/3-4x,\quad g(x)=x^2,\quad (a,b)=(0,3)$

79. Extensión continua Obtenga el valor de c que hace que la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{9x-3\operatorname{sen}3x}{5x^3}, & x\neq 0\\ c, & x=0\end{cases}$$

sea continua en $x=0$. Explique por qué funciona el valor que obtuvo de c.

80. ¿Para qué valores de a y b

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+\frac{\operatorname{sen}bx}{x}\right)=0?$$

T 81. Forma $\infty-\infty$

a) Estime el valor de

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)$$

con la gráfica de $f(x)=x-\sqrt{x^2+x}$ en un intervalo convenientemente grande de valores de x.

b) Ahora confirme su estimación obteniendo el límite con la regla de L'Hôpital. Como primer paso, multiplique $f(x)$ por la fracción $\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)/\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)$ y simplifique el nuevo numerador.

82. Obtenga $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}\right)$.

T 83. Forma 0/0 Estime el valor de

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-(3x+1)\sqrt{x}+2}{x-1}$$

por medio de su gráfica. Después, confirme su estimación obteniendo el límite con la regla de L'Hôpital.

84. Este ejercicio explora la diferencia entre el límite

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$$

y el límite

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

a) Use la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

T *b)* Grafique juntas

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x \quad\text{y}\quad g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

para $x\geq 0$. ¿Cómo se compara el comportamiento de f con el de g? Estime el valor de $\lim_{x\to\infty}f(x)$.

c) Confirme su estimación obteniendo $\lim_{x\to\infty}f(x)$ con la regla de L'Hôpital.

85. Demuestre que

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{r}{k}\right)^k=e^r.$$

86. Dado que $x>0$, obtenga el valor máximo, si existe alguno, de

a) $x^{1/x}$ *b)* x^{1/x^2} *c)* x^{1/x^n} (n es un entero positivo)

d) Demuestre que $\lim_{x\to\infty}x^{1/x^n}=1$ para todo entero positivo n.

87. Utilice límites para obtener las asíntotas horizontales de cada función.

a) $y=x\tan\left(\frac{1}{x}\right)$ *b)* $y=\frac{3x+e^{2x}}{2x+e^{3x}}$

88. Obtenga $f'(0)$ para $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$

T 89. La extensión continua de $(\text{sen } x)^x$ para $[0, \pi]$

a) Grafique $f(x) = (\text{sen } x)^x$ en el intervalo $0 \le x \le \pi$. ¿Qué valor le asignaría a f para hacerla continua en $x = 0$?

b) Verifique la conclusión del inciso *a)* obteniendo $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ con la regla de L'Hôpital.

c) Regresando a la gráfica, estime el valor máximo de f en $[0, \pi]$. ¿Aproximadamente dónde se presenta máx f ?

d) Mejore su estimación del inciso *c)* graficando f' en la misma ventana, para ver dónde cruza la gráfica al eje x. Para simplificar su trabajo, elimine el factor exponencial de la expresión de f' y grafique sólo el factor que tiene un cero.

T 90. La función $(\text{sen } x)^{\tan x}$ (*Continuación del ejercicio 89*).

a) Grafique $f(x) = (\text{sen } x)^{\tan x}$ en el intervalo $-7 \le x \le 7$. ¿Cómo explica las brechas de la gráfica? ¿Qué tan anchas son las brechas?

b) Ahora grafique f en el intervalo $0 \le x \le \pi$. La función no está definida en $x = \pi/2$, pero la gráfica no se interrumpe en ese punto. ¿Qué sucede? ¿Qué valor parece dar la gráfica para f en $x = \pi/2$? (*Sugerencia:* Use la regla de L'Hôpital para obtener lím f cuando $x \to (\pi/2)^-$ y $x \to (\pi/2)^+$).

c) Continuando con las gráficas del inciso *b)*, obtenga máx f y mín f con la mayor exactitud posible y estime los valores de x en los que se alcanzan.

7.6 Funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas inversas surgen cuando queremos calcular ángulos con base en las medidas de los lados de un triángulo. También brindan antiderivadas útiles y aparecen con frecuencia en las soluciones de las ecuaciones diferenciales. En esta sección se explica cómo se definen, grafican y evalúan estas funciones, cómo se calculan sus derivadas y por qué aparecen como antiderivadas importantes.

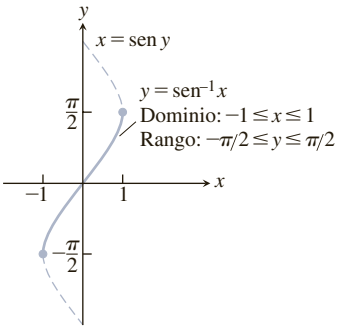
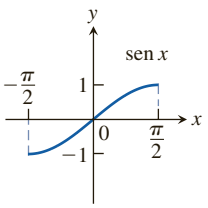


FIGURA 7.21 Gráfica de $y = \text{sen}^{-1} x$.

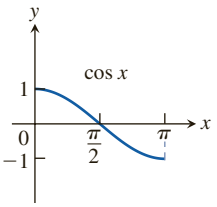
Definición de las inversas

Las seis funciones trigonométricas básicas no son inyectivas (sus valores se repiten de forma periódica). Sin embargo, podemos restringir sus dominios a intervalos en los que sean inyectivas. La función seno aumenta desde -1 en $x = -\pi/2$, hasta 1 en $\pi/2$. Al restringir su dominio al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, la hacemos inyectiva, de modo que tiene una inversa, $\text{sen}^{-1} x$ (figura 7.21). Restricciones similares pueden aplicarse a los dominios de las seis funciones trigonométricas.

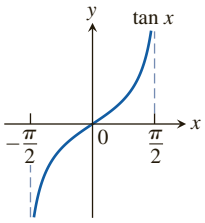
Restricción en los dominios para que las funciones trigonométricas sean inyectivas



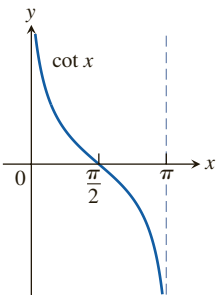
$y = \text{sen } x$
Dominio: $[-\pi/2, \pi/2]$
Rango: $[-1, 1]$



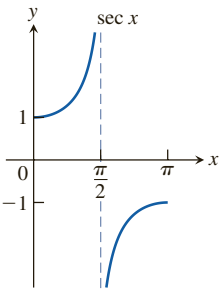
$y = \cos x$
Dominio: $[0, \pi]$
Rango: $[-1, 1]$



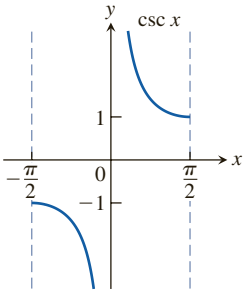
$y = \tan x$
Dominio: $(-\pi/2, \pi/2)$
Rango: $(-\infty, \infty)$



$y = \cot x$
Dominio: $(0, \pi)$
Rango: $(-\infty, \infty)$



$y = \sec x$
Dominio: $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$
Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



$y = \csc x$
Dominio: $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$
Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

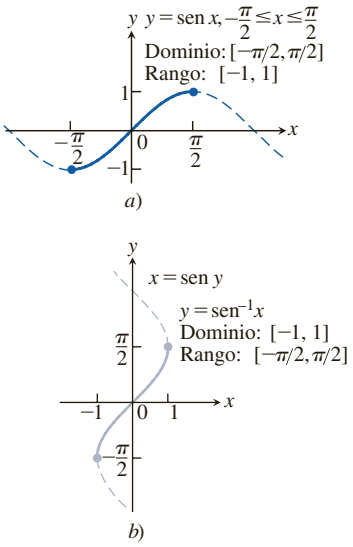
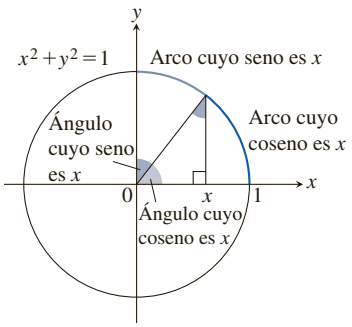


FIGURA 7.22 Las gráficas de *a*) $y = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, y *b*) su inversa, $y = \operatorname{sen}^{-1} x$. La gráfica de $\operatorname{sen}^{-1} x$, que se obtiene reflejando con respecto a la recta $y = x$, es una parte de la curva $x = \operatorname{sen} y$.

El "arco" en arco seno y arco coseno

Para una circunferencia unitaria y ángulos en radianes, la ecuación de longitud de arco $s = r\theta$ se convierte en $s = \theta$, de modo que los ángulos centrales y los arcos que subtienden tienen la misma medida. Si $x = \operatorname{sen} y$, entonces y, además de ser el ángulo cuyo seno es x, también es la longitud del arco sobre la circunferencia unitaria que subtiende un ángulo cuyo seno es x. Así, llamamos y al "arco cuyo seno es x".



Como ahora estas funciones restringidas son inyectivas, tienen inversas, las cuales denotamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{sen}^{-1} x \quad \text{o} \quad y = \operatorname{arcsen} x \\ y &= \cos^{-1} x \quad \text{o} \quad y = \arccos x \\ y &= \tan^{-1} x \quad \text{o} \quad y = \arctan x \\ y &= \cot^{-1} x \quad \text{o} \quad y = \operatorname{arccot} x \\ y &= \sec^{-1} x \quad \text{o} \quad y = \operatorname{arcsec} x \\ y &= \csc^{-1} x \quad \text{o} \quad y = \operatorname{arccsc} x \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se leen "y es igual al arco seno de x", y así sucesivamente.

¡Cuidado! El -1 en las expresiones de la inversa significa "inversa". *No* significa recíproco. Por ejemplo, el *recíproco* de sen x es $(\operatorname{sen} x)^{-1} = 1/\operatorname{sen} x = \csc x$.

Las gráficas de las seis funciones trigonométricas inversas se obtienen reflejando las gráficas de las funciones trigonométricas restringidas con respecto a la recta $y = x$. La figura 7.22*b*) muestra la gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ y la figura 7.23 muestra las gráficas de las seis funciones. A continuación analizaremos con más detalle estas funciones.

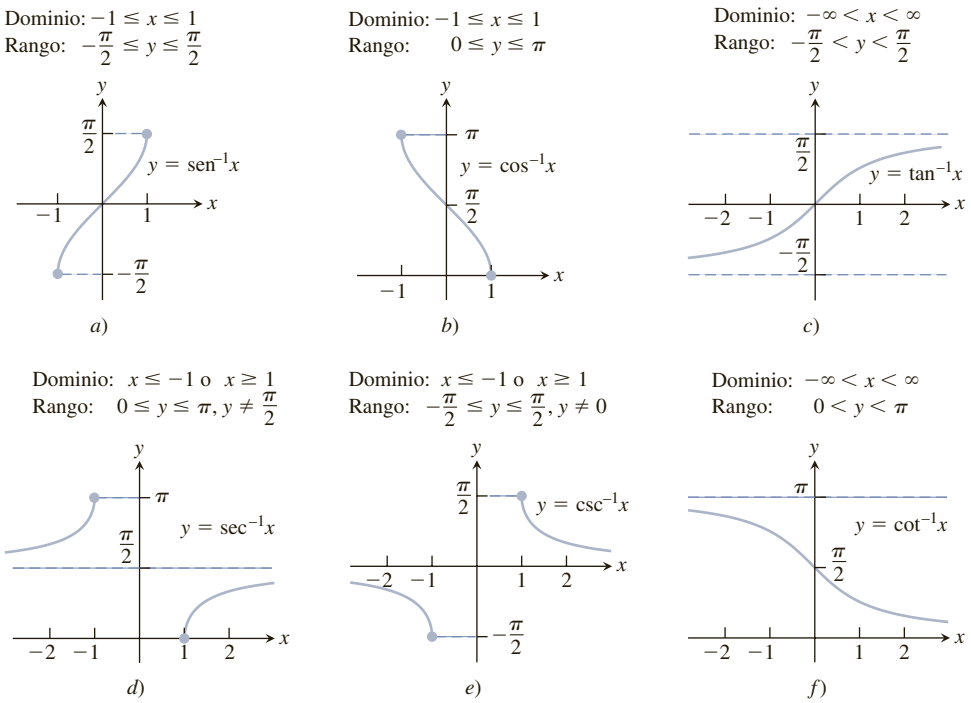


FIGURA 7.23 Gráficas de las seis funciones trigonométricas inversas básicas.

Las funciones arco seno y arco coseno

Definimos las funciones arco seno y arco coseno como funciones cuyos valores son ángulos (medidos en radianes) que pertenecen a los dominios restringidos de las funciones seno y coseno.

DEFINICIÓN

$y = \operatorname{sen}^{-1} x$ es el número en $[-\pi/2, \pi/2]$ para el cual $\operatorname{sen} y = x$.
$y = \cos^{-1} x$ es el número en $[0, \pi]$ para el cual $\cos y = x$.

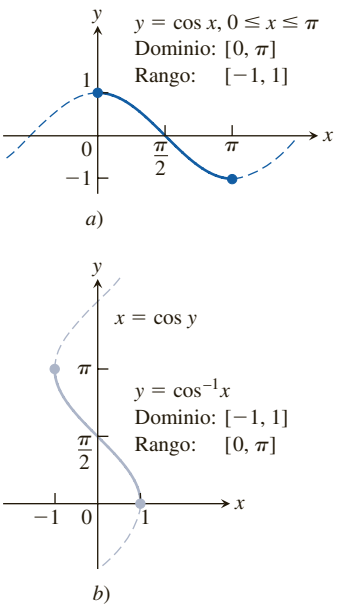


FIGURA 7.24 Las gráficas de *a*) $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi$, y *b*) su inversa $y = \cos^{-1} x$. La gráfica de $\cos^{-1} x$, obtenida por reflexión con respecto a la recta $y = x$, es una porción de la curva $x = \cos y$.

La gráfica de $y = \text{sen}^{-1} x$ (figura 7.22*b*) es simétrica con respecto al origen (se encuentra a lo largo de la gráfica de $x = \text{sen } y$). Por lo tanto, el arco seno es una función impar.

$$\text{sen}^{-1}(-x) = -\text{sen}^{-1} x. \tag{1}$$

La gráfica de $y = \cos^{-1} x$ (figura 7.24*b*) no tiene tal simetría.

EJEMPLO 1 Evalúe ***a***) $\text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y ***b***) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Solución

a) Vemos que

$$\text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

porque $\text{sen}\,(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ y $\pi/3$ pertenece al rango $[-\pi/2, \pi/2]$ de la función arco seno. Vea la figura 7.25*a*).

b) Tenemos que

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

porque $\cos\,(2\pi/3) = -1/2$ y $2\pi/3$ pertenece al rango $[0, \pi]$ de la función arco seno. Vea la figura 7.25*b*). ■

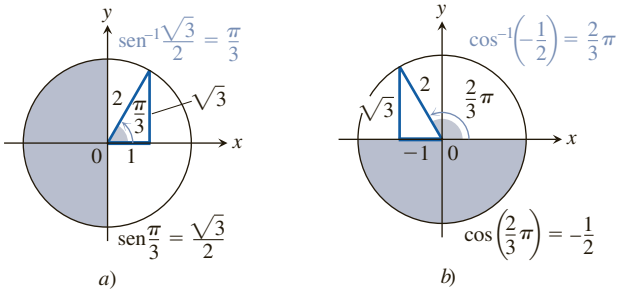


FIGURA 7.25 Valores de las funciones arco seno y arco coseno (ejemplo 1).

Usando el procedimiento del ejemplo 1, podemos crear la siguiente tabla de valores comunes de las funciones arco seno y arco coseno.

x	$\text{sen}^{-1} x$	$\cos^{-1} x$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$	$\pi/6$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$	$\pi/4$
$1/2$	$\pi/6$	$\pi/3$
$-1/2$	$-\pi/6$	$2\pi/3$
$-\sqrt{2}/2$	$-\pi/4$	$3\pi/4$
$-\sqrt{3}/2$	$-\pi/3$	$5\pi/6$

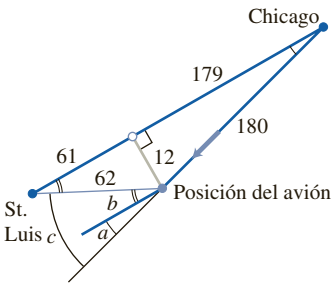


FIGURA 7.26 Diagrama de corrección de la ruta (ejemplo 2), con distancias redondeadas a la milla más cercana (el dibujo no está a escala).

EJEMPLO 2 Durante un vuelo de 240 millas, de Chicago a St. Louis, después de recorrer 180 millas, el navegador determina que el avión está 12 millas fuera de curso, como se muestra en la figura 7.26. Obtenga el ángulo a de un curso paralelo al original, el ángulo b, y el ángulo de corrección del rumbo, $c = a + b$.

Solución Según el teorema de Pitágoras y la información proporcionada, calculamos una distancia de vuelo hipotética aproximada de 179 millas, que el avión ha estado volando a lo largo del curso original (vea la figura 7.26). Conociendo la distancia de vuelo de Chicago a St. Louis, calculamos el cateto restante del curso original como 61 millas. Entonces, al aplicar nuevamente el teorema de Pitágoras, se obtiene una distancia aproximada de 62 millas de la posición del avión a St. Louis. Por último, según la figura 7.26, vemos que $180 \operatorname{sen} a = 12$ y $62 \operatorname{sen} b = 12$, de modo que

$$a = \operatorname{sen}^{-1}\frac{12}{180} \approx 0.067 \text{ radianes} \approx 3.8°$$

$$b = \operatorname{sen}^{-1}\frac{12}{62} \approx 0.195 \text{ radianes} \approx 11.2°$$

$$c = a + b \approx 15°.$$ ■

Identidades que involucran arco seno y arco coseno

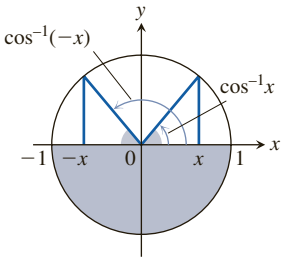


FIGURA 7.27 $\cos^{-1} x$ y $\cos^{-1}(-x)$ son ángulos suplementarios (su suma es π).

Como se observa en la figura 7.27, el arco coseno de x satisface la identidad

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi, \tag{2}$$

o bien,

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x. \tag{3}$$

Además, en el triángulo de la figura 7.28 podemos ver que, para $x > 0$,

$$\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2. \tag{4}$$

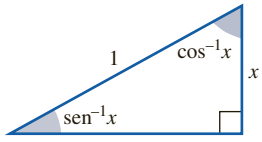


FIGURA 7.28 $\operatorname{sen}^{-1} x$ y $\cos^{-1} x$ son ángulos complementarios (su suma es $\pi/2$).

La ecuación (4) también se cumple para los demás valores de x en $[-1, 1]$, pero no es posible llegar a esta conclusión a partir del triángulo de la figura 7.28. Sin embargo, es una consecuencia de las ecuaciones (1) y (3) (ejercicio 113).

Inversas de tan *x*, cot *x*, sec *x* y csc *x*

El arco tangente de x es un ángulo en radianes cuya tangente es x. El arco cotangente de x es un ángulo cuya cotangente es x, y así sucesivamente. Los ángulos pertenecen a los dominios restringidos de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante.

DEFINICIONES

$\boldsymbol{y = \tan^{-1} x}$ es el número en $(-\pi/2, \pi/2)$ para el que $\tan y = x$.
$\boldsymbol{y = \cot^{-1} x}$ es el número en $(0, \pi)$ para el que $\cot y = x$.
$\boldsymbol{y = \sec^{-1} x}$ es el número en $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ para el que $\sec y = x$.
$\boldsymbol{y = \csc^{-1} x}$ es el número en $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$ para el que $\csc y = x$.

Utilizamos intervalos abiertos o semiabiertos para evitar aquellos valores donde las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante no están definidas. (Vea la figura 7.23).

La gráfica de $y = \tan^{-1} x$ es simétrica con respecto al origen, ya que es una rama de la gráfica de $x = \tan y$, que es simétrica con respecto al origen (figura 7.23*c*). Algebraicamente, esto significa que

$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x;$$

el arco tangente es una función impar. La gráfica de $y = \cot^{-1} x$ no tiene tal simetría (figura 7.23*f*). En la figura 7.23*c*), observe que la gráfica de la función arco tangente tiene dos asíntotas horizontales: una en $y = \pi/2$ y la otra en $y = -\pi/2$.

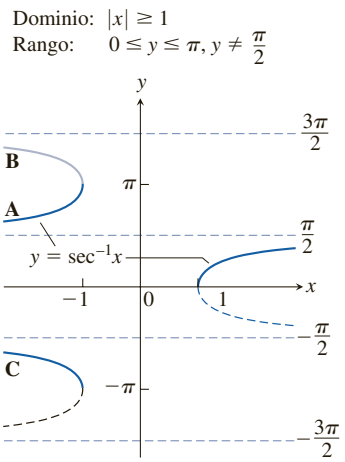


FIGURA 7.29 Existen varias elecciones lógicas para la rama izquierda de $y = \sec^{-1} x$. Con la opción **A**, $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$, una identidad útil que se emplea en muchas calculadoras.

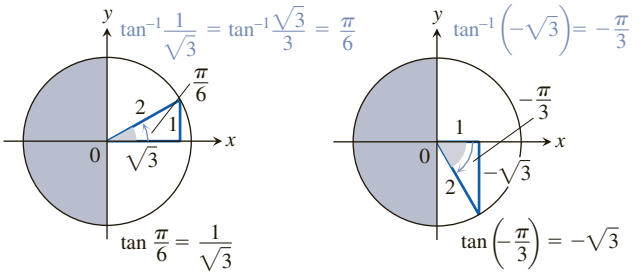
Las inversas de las formas restringidas de sec x y csc x se eligen como las funciones graficadas en las figuras 7.23*d*) y 7.23*e*).

¡Cuidado! No existe consenso acerca de cómo definir $\sec^{-1} x$ para valores negativos de x. Aquí se eligieron ángulos en el segundo cuadrante, entre $\pi/2$ y π. Con esta elección, $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$; también hace que $\sec^{-1} x$ sea una función creciente en cada intervalo de su dominio. En algunos textos se elige que $\sec^{-1} x$ tome valores en $[-\pi, -\pi/2)$ para $x < 0$, y en otros se elige que tome valores en $[\pi, 3\pi/2)$ (figura 7.29). Estas elecciones simplifican la fórmula para la derivada (nuestra fórmula necesita signos de valor absoluto), pero no cumplen la ecuación para calcular $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$. De ésta, podemos deducir la identidad

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \tag{5}$$

aplicando la ecuación (4).

EJEMPLO 3 Las siguientes figuras muestran dos valores de $\tan^{-1} x$.



x	$\tan^{-1} x$
$\sqrt{3}$	$\pi/3$
1	$\pi/4$
$\sqrt{3}/3$	$\pi/6$
$-\sqrt{3}/3$	$-\pi/6$
-1	$-\pi/4$
$-\sqrt{3}$	$-\pi/3$

Los ángulos se encuentran en el primero y cuarto cuadrantes, porque el rango de $\tan^{-1} x$ es $(-\pi/2, \pi/2)$. ■

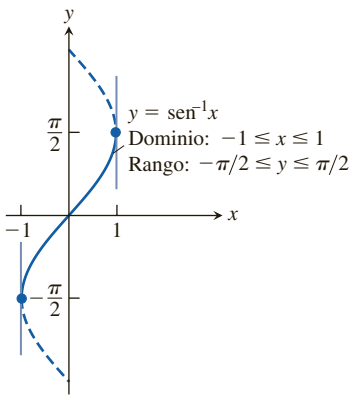


FIGURA 7.30 La gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ tiene tangentes verticales en $x = -1$ y $x = 1$.

Derivada de $y = \operatorname{sen}^{-1} u$

Sabemos que la función $x = \operatorname{sen} y$ es diferenciable en el intervalo $-\pi/2 < y < \pi/2$ y que su derivada, el coseno, es positivo en dicho intervalo. Por lo tanto, el teorema 1 de la sección 7.1 nos asegura que la función inversa $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ es diferenciable en todo el intervalo $-1 < x < 1$. No podemos esperar que sea diferenciable en $x = 1$ o $x = -1$, porque en esos puntos, las tangentes a la gráfica son verticales (vea la figura 7.30).

La derivada de $y = \text{sen}^{-1} x$ se obtiene aplicando el teorema 1 con $f(x) = \text{sen}\, x$ y $f^{-1}(x) = \text{sen}^{-1} x$:

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} && \text{Teorema 1} \\
&= \frac{1}{\cos(\text{sen}^{-1} x)} && f'(u) = \cos u \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(\text{sen}^{-1} x)}} && \cos u = \sqrt{1 - \text{sen}^2 u} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. && \text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x
\end{aligned}$$

Si u es una función diferenciable de x con $|u| < 1$, se aplica la regla de la cadena para obtener la fórmula general:

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1.$$

EJEMPLO 4 Empleando la regla de la cadena, se calcula la derivada

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}^{-1} x^2) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}.$$ ■

La derivada de $y = \tan^{-1} u$

La derivada de $y = \tan^{-1} x$ se obtiene aplicando el teorema 1 con $f(x) = \tan x$ y $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$. El teorema 1 se puede usar porque la derivada de $\tan x$ es positiva para $-\pi/2 < x < \pi/2$:

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} && \text{Teorema 1} \\
&= \frac{1}{\sec^2(\tan^{-1} x)} && f'(u) = \sec^2 u \\
&= \frac{1}{1 + \tan^2(\tan^{-1} x)} && \sec^2 u = 1 + \tan^2 u \\
&= \frac{1}{1 + x^2}. && \tan(\tan^{-1} x) = x
\end{aligned}$$

La derivada está definida para todos los números reales. Si u es una función diferenciable de x, obtenemos la forma de la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1 + u^2} \frac{du}{dx}.$$

La derivada de $y = \sec^{-1} u$

Como la derivada de $\sec x$ es positiva para $0 < x < \pi/2$ y $\pi/2 < x < \pi$, el teorema 1 nos dice que la función inversa $y = \sec^{-1} x$ es diferenciable. En lugar de aplicar la fórmula del

teorema 1 directamente, determinamos la derivada de $y = \sec^{-1} x$, $|x| > 1$, usando diferenciación implícita y la regla de la cadena, como sigue:

$$\begin{aligned} y &= \sec^{-1} x && \\ \sec y &= x && \text{Relación de función inversa} \\ \frac{d}{dx}(\sec y) &= \frac{d}{dx}x && \text{Derive ambos lados.} \\ \sec y \tan y \frac{dy}{dx} &= 1 && \text{Regla de la cadena} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec y \tan y}. && \text{Como } |x| > 1, y \text{ se encuentra en } (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi) \text{ y } \sec y \tan y \neq 0. \end{aligned}$$

Para expresar el resultado en términos de x, utilizamos las relaciones

$$\sec y = x \qquad \text{y} \qquad \tan y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2 - 1}$$

para obtener

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

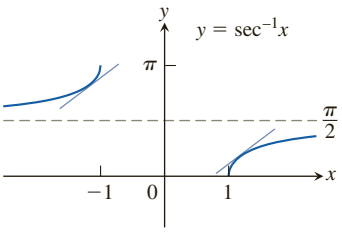


FIGURA 7.31 La pendiente de la curva $y = \sec^{-1} x$ es positiva tanto para $x < -1$ como para $x > 1$.

¿Podemos hacer algo con respecto al signo $\pm$? La figura 7.31 muestra que la pendiente de la gráfica $y = \sec^{-1} x$ siempre es positiva. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \begin{cases} +\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} & \text{si } x > 1 \\ -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

Con el símbolo de valor absoluto, podemos escribir una sola expresión que elimina la ambigüedad del signo "$\pm$":

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Si u es una función diferenciable de x con $|u| > 1$, tenemos la fórmula

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}\frac{du}{dx}, \qquad |u| > 1.}$$

EJEMPLO 5 Usando la regla de la cadena y la derivada de la función arco secante, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sec^{-1}(5x^4) &= \frac{1}{|5x^4|\sqrt{(5x^4)^2 - 1}}\frac{d}{dx}(5x^4) \\ &= \frac{1}{5x^4\sqrt{25x^8 - 1}}(20x^3) && 5x^4 > 1 > 0 \\ &= \frac{4}{x\sqrt{25x^8 - 1}}. \end{aligned}$$

■

Derivadas de las otras tres funciones trigonométricas inversas

Podríamos utilizar las mismas técnicas para obtener las derivadas de las otras tres funciones trigonométricas inversas (arco coseno, arco cotangente y arco cosecante), pero hay una forma más sencilla de obtenerlas, gracias a las siguientes identidades.

Identidades de cofunción inversa-función inversa

$$\cos^{-1} x = \pi/2 - \operatorname{sen}^{-1} x$$
$$\cot^{-1} x = \pi/2 - \tan^{-1} x$$
$$\csc^{-1} x = \pi/2 - \sec^{-1} x$$

En la ecuación (4) vimos la primera de estas identidades. Las otras se deducen de manera similar. Es fácil deducir que las derivadas de las cofunciones inversas son las negativas de las derivadas de las correspondientes funciones inversas. Por ejemplo, la derivada de $\cos^{-1} x$ se calcula como sigue:

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1} x\right) \quad \text{Identidad}$$
$$= -\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x)$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad \text{Derivada del arco seno}$$

En la tabla 7.3 se resumen las derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

TABLA 7.3 Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

1. $\dfrac{d(\operatorname{sen}^{-1} u)}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \dfrac{du}{dx}, \quad |u| < 1$
2. $\dfrac{d(\cos^{-1} u)}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \dfrac{du}{dx}, \quad |u| < 1$
3. $\dfrac{d(\tan^{-1} u)}{dx} = \dfrac{1}{1 + u^2} \dfrac{du}{dx}$
4. $\dfrac{d(\cot^{-1} u)}{dx} = -\dfrac{1}{1 + u^2} \dfrac{du}{dx}$
5. $\dfrac{d(\sec^{-1} u)}{dx} = \dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}} \dfrac{du}{dx}, \quad |u| > 1$
6. $\dfrac{d(\csc^{-1} u)}{dx} = -\dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}} \dfrac{du}{dx}, \quad |u| > 1$

Fórmulas de integración

Las fórmulas de derivadas en la tabla 7.3 nos llevan a las tres útiles fórmulas de integración de la tabla 7.4. Las fórmulas se verifican con facilidad al diferenciar las funciones en el lado derecho.

TABLA 7.4 Integrales evaluadas con funciones trigonométricas inversas

Las siguientes fórmulas son válidas para cualquier constante $a > 0$.

1. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$ (Válida para $u^2 < a^2$)

2. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$ (Válida para toda u)

3. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$ (Válida para $|u| > a > 0$)

Las fórmulas de las derivadas de la tabla 7.3 consideran $a = 1$, pero casi en todas las integraciones, $a \neq 1$; en ese caso, las fórmulas de la tabla 7.4 resultan más útiles.

EJEMPLO 6 Los siguientes ejemplos ilustran cómo utilizar la tabla 7.4.

a) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} x \Big]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2}$ $a = 1, u = x$ Fórmula 1 en la tabla 7.4

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$ $a = \sqrt{3}, u = 2x$, y $du/2 = dx$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad \text{Fórmula 3 en la tabla 7.4}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 6}} = \int \frac{du/u}{\sqrt{u^2 - a^2}}$ $u = e^x, du = e^x\,dx$, $dx = du/e^x = du/u$, $a = \sqrt{6}$

$$= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}}$$

$$= \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C \quad \text{Fórmula 3 en la tabla 7.4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\sec^{-1}\left(\frac{e^x}{\sqrt{6}}\right) + C$$

■

EJEMPLO 7 Evalúe

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$ ***b)*** $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 2}$

Solución

a) La expresión $\sqrt{4x - x^2}$ no coincide con ninguna de las fórmulas de la tabla 7.4, así que primero rescribimos $4x - x^2$ completando el cuadrado:

$$4x - x^2 = -(x^2 - 4x) = -(x^2 - 4x + 4) + 4 = 4 - (x - 2)^2.$$

Después sustituimos $a = 2$, $u = x - 2$, y $du = dx$ para obtener

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x - 2)^2}}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \qquad a = 2,\ u = x - 2,\ \text{y } du = dx$$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad \text{Fórmula 1, tabla 7.4}$$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - 2}{2}\right) + C$$

b) Completamos el cuadrado del binomio $4x^2 + 4x$:

$$4x^2 + 4x + 2 = 4(x^2 + x) + 2 = 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + 2 - \frac{4}{4}$$

$$= 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 = (2x + 1)^2 + 1.$$

Entonces,

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 2} = \int \frac{dx}{(2x + 1)^2 + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 + a^2} \qquad a = 1,\ u = 2x + 1,\ \text{y } du/2 = dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad \text{Fórmula 2, tabla 7.4}$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x + 1) + C \qquad a = 1,\ u = 2x + 1$$

■

Ejercicios 7.6

Valores comunes

Utilice triángulos de referencia como en los ejemplos 1 y 3 para obtener los ángulos en los ejercicios 1 a 8.

1. ***a)*** $\tan^{-1} 1$ ***b)*** $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ ***c)*** $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

2. ***a)*** $\tan^{-1}(-1)$ ***b)*** $\tan^{-1}\sqrt{3}$ ***c)*** $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

3. ***a)*** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ ***b)*** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ***c)*** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

4. ***a)*** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ***b)*** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ ***c)*** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5. ***a)*** $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ***b)*** $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ ***c)*** $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

6. ***a)*** $\csc^{-1}\sqrt{2}$ ***b)*** $\csc^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$ ***c)*** $\csc^{-1} 2$

7. ***a)*** $\sec^{-1}\left(-\sqrt{2}\right)$ ***b)*** $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ ***c)*** $\sec^{-1}(-2)$

8. ***a)*** $\cot^{-1}(-1)$ ***b)*** $\cot^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ ***c.*** $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

Evaluaciones

Obtenga los valores en los ejercicios 9 a 12.

9. $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ **10.** $\sec\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$

11. $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ **12.** $\cot\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

Límites

Obtenga los límites en los ejercicios 13 a 20. (Para cualquier duda, vea la gráfica de la función).

13. $\lim_{x \to 1^-} \operatorname{sen}^{-1} x$ **14.** $\lim_{x \to -1^+} \cos^{-1} x$

15. $\lim_{x \to \infty} \tan^{-1} x$ **16.** $\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x$

17. $\lim_{x\to\infty} \sec^{-1} x$ **18.** $\lim_{x\to-\infty} \sec^{-1} x$

19. $\lim_{x\to\infty} \csc^{-1} x$ **20.** $\lim_{x\to-\infty} \csc^{-1} x$

Obtención de derivadas

En los ejercicios 21 a 42, obtenga la derivada de y con respecto a la variable adecuada.

21. $y = \cos^{-1}(x^2)$ **22.** $y = \cos^{-1}(1/x)$

23. $y = \text{sen}^{-1}\sqrt{2}\,t$ **24.** $y = \text{sen}^{-1}(1 - t)$

25. $y = \sec^{-1}(2s + 1)$ **26.** $y = \sec^{-1} 5s$

27. $y = \csc^{-1}(x^2 + 1),\ x > 0$ **28.** $y = \csc^{-1}\dfrac{x}{2}$

29. $y = \sec^{-1}\dfrac{1}{t},\ 0 < t < 1$ **30.** $y = \text{sen}^{-1}\dfrac{3}{t^2}$

31. $y = \cot^{-1}\sqrt{t}$ **32.** $y = \cot^{-1}\sqrt{t - 1}$

33. $y = \ln(\tan^{-1} x)$ **34.** $y = \tan^{-1}(\ln x)$

35. $y = \csc^{-1}(e^t)$ **36.** $y = \cos^{-1}(e^{-t})$

37. $y = s\sqrt{1 - s^2} + \cos^{-1} s$ **38.** $y = \sqrt{s^2 - 1} - \sec^{-1} s$

39. $y = \tan^{-1}\sqrt{x^2 - 1} + \csc^{-1} x,\quad x > 1$

40. $y = \cot^{-1}\dfrac{1}{x} - \tan^{-1} x$ **41.** $y = x\,\text{sen}^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$

42. $y = \ln(x^2 + 4) - x\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Evaluación de integrales

Evalúe las integrales en los ejercicios 43 a 66.

43. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$ **44.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

45. $\displaystyle\int \frac{dx}{17 + x^2}$ **46.** $\displaystyle\int \frac{dx}{9 + 3x^2}$

47. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2 - 2}}$ **48.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2 - 4}}$

49. $\displaystyle\int_0^1 \frac{4\,ds}{\sqrt{4 - s^2}}$ **50.** $\displaystyle\int_0^{3\sqrt{2}/4} \frac{ds}{\sqrt{9 - 4s^2}}$

51. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dt}{8 + 2t^2}$ **52.** $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{dt}{4 + 3t^2}$

53. $\displaystyle\int_{-1}^{-\sqrt{2}/2} \frac{dy}{y\sqrt{4y^2 - 1}}$ **54.** $\displaystyle\int_{-2/3}^{-\sqrt{2}/3} \frac{dy}{y\sqrt{9y^2 - 1}}$

55. $\displaystyle\int \frac{3\,dr}{\sqrt{1 - 4(r - 1)^2}}$ **56.** $\displaystyle\int \frac{6\,dr}{\sqrt{4 - (r + 1)^2}}$

57. $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + (x - 1)^2}$ **58.** $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + (3x + 1)^2}$

59. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x - 1)\sqrt{(2x - 1)^2 - 4}}$

60. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 3)\sqrt{(x + 3)^2 - 25}}$

61. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\cos\theta\,d\theta}{1 + (\text{sen}\,\theta)^2}$ **62.** $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\csc^2 x\,dx}{1 + (\cot x)^2}$

63. $\displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x\,dx}{1 + e^{2x}}$ **64.** $\displaystyle\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{4\,dt}{t(1 + \ln^2 t)}$

65. $\displaystyle\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1 - y^4}}$ **66.** $\displaystyle\int \frac{\sec^2 y\,dy}{\sqrt{1 - \tan^2 y}}$

En los ejercicios 67 a 80, evalúe las integrales.

67. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}$ **68.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

69. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{6\,dt}{\sqrt{3 - 2t - t^2}}$ **70.** $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{6\,dt}{\sqrt{3 + 4t - 4t^2}}$

71. $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2 - 2y + 5}$ **72.** $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2 + 6y + 10}$

73. $\displaystyle\int_1^2 \frac{8\,dx}{x^2 - 2x + 2}$ **74.** $\displaystyle\int_2^4 \frac{2\,dx}{x^2 - 6x + 10}$

75. $\displaystyle\int \frac{x + 4}{x^2 + 4}\,dx$ **76.** $\displaystyle\int \frac{t - 2}{t^2 - 6t + 10}\,dt$

77. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 9}\,dx$ **78.** $\displaystyle\int \frac{t^3 - 2t^2 + 3t - 4}{t^2 + 1}\,dt$

79. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x}}$ **80.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x - 2)\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$

En los ejercicios 81 a 90, evalúe las integrales.

81. $\displaystyle\int \frac{e^{\text{sen}^{-1} x}\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ **82.** $\displaystyle\int \frac{e^{\cos^{-1} x}\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

83. $\displaystyle\int \frac{(\text{sen}^{-1} x)^2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ **84.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\tan^{-1} x}\,dx}{1 + x^2}$

85. $\displaystyle\int \frac{dy}{(\tan^{-1} y)(1 + y^2)}$ **86.** $\displaystyle\int \frac{dy}{(\text{sen}^{-1} y)\sqrt{1 - y^2}}$

87. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sec^2(\sec^{-1} x)\,dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ **88.** $\displaystyle\int_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{\cos(\sec^{-1} x)\,dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

89. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(x + 1)\left((\tan^{-1}\sqrt{x})^2 + 9\right)}\,dx$

90. $\displaystyle\int \frac{e^x\,\text{sen}^{-1} e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\,dx$

Regla de L'Hôpital

En los ejercicios 91 a 98, obtenga los límites.

91. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^{-1} 5x}{x}$ **92.** $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sec^{-1} x}$

93. $\lim_{x\to\infty} x\tan^{-1}\dfrac{2}{x}$ **94.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\tan^{-1} 3x^2}{7x^2}$

95. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^{-1} x^2}{x\,\text{sen}^{-1} x}$ **96.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x \tan^{-1} e^x}{e^{2x} + x}$

97. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{(\tan^{-1}\sqrt{x})^2}{x\sqrt{x + 1}}$ **98.** $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\text{sen}^{-1} x^2}{(\text{sen}^{-1} x)^2}$

Fórmulas de integración

En los ejercicios 99 a 102, verifique las fórmulas de integración.

99. $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2}\,dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\tan^{-1} x}{x} + C$

100. $\displaystyle\int x^3 \cos^{-1} 5x\,dx = \frac{x^4}{4}\cos^{-1} 5x + \frac{5}{4}\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-25x^2}}$

101. $\displaystyle\int (\text{sen}^{-1} x)^2\,dx = x(\text{sen}^{-1} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\,\text{sen}^{-1} x + C$

102. $\displaystyle\int \ln(a^2+x^2)\,dx = x\ln(a^2+x^2) - 2x + 2a\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

Problemas con valor inicial

En los ejercicios 103 a 106, resuelva los problemas con valor inicial.

103. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y(0) = 0$

104. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2+1} - 1, \quad y(0) = 1$

105. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1; \quad y(2) = \pi$

106. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y(0) = 2$

Aplicaciones y teoría

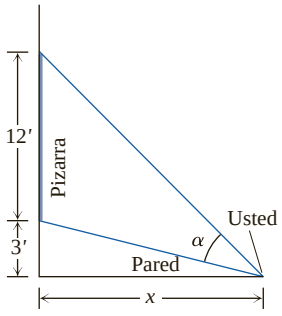
107. Usted está en un salón de clases, sentado junto a una pared, mirando la pizarra que se encuentra al frente. Ésta mide 12 ft de largo y comienza a 3 ft de la pared que está junto a usted.

a) Demuestre que su ángulo de visión es

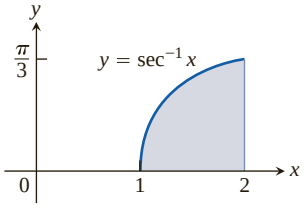
$$\alpha = \cot^{-1}\frac{x}{15} - \cot^{-1}\frac{x}{3}$$

si usted está a x ft de la pared de enfrente.

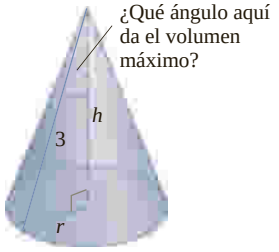
b) Obtenga x de modo que α sea lo más grande posible.



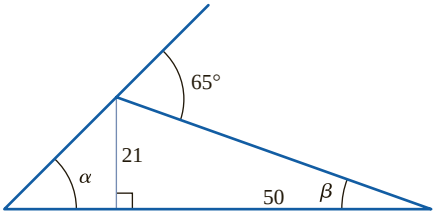
108. La región entre la curva $y = \sec^{-1} x$ y el eje x, de $x = 1$ a $x = 2$ (como se ilustra en la figura), se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. Obtenga el volumen del sólido.



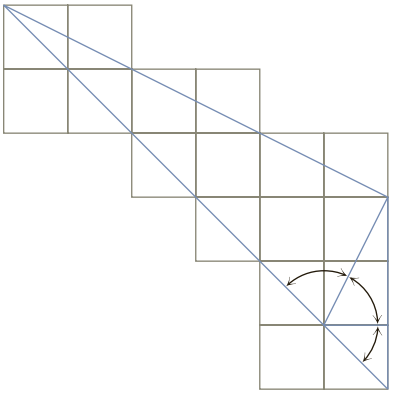
109. La altura inclinada del cono que aparece aquí mide 3 m. ¿Qué tan grande debe ser el ángulo señalado para maximizar el volumen del cono?



110. Obtenga el ángulo α.

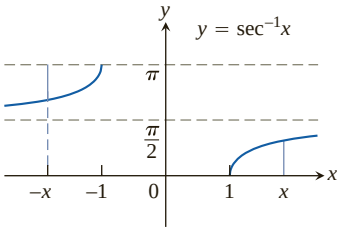


111. Ésta es una demostración informal de que $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \pi$. Explique por qué.



112. Dos deducciones de la identidad $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$

a) (*Geométrica*) He aquí una demostración gráfica de que $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$. Trate de averiguar por qué.



b) (*Algebraica*) Deduzca la identidad $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$ combinando las dos siguientes ecuaciones, tomadas del texto:

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x \qquad \text{Ecuación (3)}$$

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x) \qquad \text{Ecuación (5)}$$

113. La identidad $\text{sen}^{-1}x + \cos^{-1}x = \pi/2$ La figura 7.28 establece la identidad para $0 < x < 1$. Con la finalidad de establecerla para el resto del intervalo $[-1, 1]$, verifique mediante cálculo directo que se cumple para $x = 1$, 0 y -1. Después, para los valores de x en $(-1, 0)$, considere $x = -a$, $a > 0$, y aplique las ecuaciones (1) y (3) a la suma $\text{sen}^{-1}(-a) + \cos^{-1}(-a)$.

114. Demuestre que la suma $\tan^{-1}x + \tan^{-1}(1/x)$ es constante.

115. Use la identidad

$$\csc^{-1}u = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1}u$$

para deducir la fórmula de la derivada de $\csc^{-1}u$ en la tabla 7.3, a partir de la fórmula de la derivada de $\sec^{-1}u$.

116. Deduzca la fórmula

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

de la derivada de $y = \tan^{-1}x$ diferenciando ambos lados de la ecuación equivalente $\tan y = x$.

117. Use la regla de la derivada del teorema 1, para deducir

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| > 1.$$

118. Use la identidad

$$\cot^{-1}u = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}u$$

para deducir la fórmula de la derivada de $\cot^{-1}u$ en la tabla 7.3, a partir de la fórmula de la derivada de $\tan^{-1}u$.

119. ¿Qué tienen de especial las funciones

$$f(x) = \text{sen}^{-1}\frac{x - 1}{x + 1}, \quad x \geq 0, \quad \text{y} \quad g(x) = 2\tan^{-1}\sqrt{x}?$$

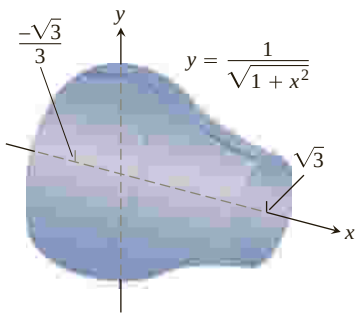
Explique.

120. ¿Qué tienen de especial las funciones

$$f(x) = \text{sen}^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{y} \quad g(x) = \tan^{-1}\frac{1}{x}?$$

Explique.

121. Obtenga el volumen del sólido de revolución que se ilustra a continuación.



122. Longitud de arco Determine el perímetro de la circunferencia de radio r utilizando la ecuación (3) de la sección 6.3.

En los ejercicios 123 y 124, obtenga los volúmenes de los sólidos.

123. El sólido se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x, en $x = -1$ y $x = 1$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son:

a) círculos cuyos diámetros van de la curva $y = -1/\sqrt{1 + x^2}$ a la curva $y = 1/\sqrt{1 + x^2}$.

b) cuadrados verticales cuyas bases van de la curva $-1/\sqrt{1 + x^2}$ a la curva $y = 1/\sqrt{1 + x^2}$.

124. El sólido que se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x, en $x = -\sqrt{2}/2$ y $x = \sqrt{2}/2$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son:

a) círculos cuyos diámetros van del eje x a la curva $y = 2/\sqrt[4]{1 - x^2}$.

b) cuadrados cuyas diagonales van del eje x a la curva $y = 2/\sqrt[4]{1 - x^2}$.

T **125.** Obtenga los valores de lo siguiente.

a) $\sec^{-1}1.5$ ***b)*** $\csc^{-1}(-1.5)$ ***c)*** $\cot^{-1}2$

T **126.** Obtenga los valores de lo siguiente.

a) $\sec^{-1}(-3)$ ***b)*** $\csc^{-1}1.7$ ***c)*** $\cot^{-1}(-2)$

T En los ejercicios 127 a 129, obtenga el dominio y el rango de cada función compuesta. Después, grafique las composiciones en ventanas distintas. ¿Tienen sentido las gráficas resultantes en cada caso? Justifique sus respuestas. Explique cualquier diferencia que observe.

127. ***a)*** $y = \tan^{-1}(\tan x)$ ***b)*** $y = \tan(\tan^{-1}x)$

128. ***a)*** $y = \text{sen}^{-1}(\text{sen}\,x)$ ***b)*** $y = \text{sen}(\text{sen}^{-1}x)$

129. ***a)*** $y = \cos^{-1}(\cos x)$ ***b)*** $y = \cos(\cos^{-1}x)$

T En los ejercicios 130 a 134, utilice su software gráfico.

130. Grafique $y = \sec(\sec^{-1}x) = \sec(\cos^{-1}(1/x))$. Explique lo que ve.

131. Serpentina de Newton Grafique la serpentina de Newton, $y = 4x/(x^2 + 1)$. Después, grafique $y = 2\,\text{sen}(2\tan^{-1}x)$ en la misma ventana de visualización. ¿Qué observa? Explique.

132. Grafique la función racional $y = (2 - x^2)/x^2$. Después, grafique $y = \cos(2\sec^{-1}x)$ en la misma ventana de visualización. ¿Qué observa? Explique.

133. Grafique $f(x) = \text{sen}^{-1}x$ junto con sus dos primeras derivadas.

Explique el comportamiento de f y de la forma de su gráfica en relación con los signos y valores de f' y f''.

134. Grafique $f(x) = \tan^{-1}x$ junto con sus dos primeras derivadas.

Explique el comportamiento de f y de la forma de su gráfica en relación con los signos y valores de f' y f''.

7.7 Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas se forman haciendo combinaciones de las dos funciones exponenciales e^x y e^{-x}. Las funciones hiperbólicas simplifican muchas expresiones matemáticas y se presentan a menudo en aplicaciones en matemáticas y en ingeniería. En esta sección haremos una breve introducción a estas funciones, sus gráficas, derivadas, integrales y funciones inversas.

Definiciones e identidades

Las funciones seno y coseno hiperbólico se definen con las ecuaciones

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{y} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Partiendo de este par de funciones básicas, definimos las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas. La definición de estas funciones y sus gráficas se presentan en la tabla 7.5. Veremos que las funciones hiperbólicas tienen varias similitudes con las funciones trigonométricas cuyo nombre comparten.

Las funciones hiperbólicas satisfacen las identidades de la tabla 7.6. Salvo por diferencias de signo, son similares a las que conocemos para funciones trigonométricas. Las identidades se demuestran directamente a partir de las definiciones, como se realiza a continuación para la segunda de ellas:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{senh} x \cosh x &= 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\ &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \\ &= \operatorname{senh} 2x. \end{aligned}$$

TABLA 7.6 Identidades de funciones hiperbólicas

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

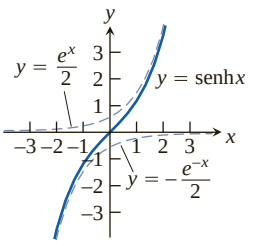
$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

$$\operatorname{senh}^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

$$\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$$

$$\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$$

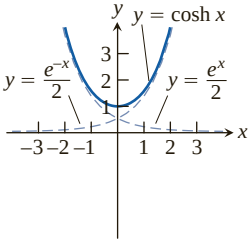
TABLA 7.5 Las seis funciones hiperbólicas básicas



a)

Seno hiperbólico:

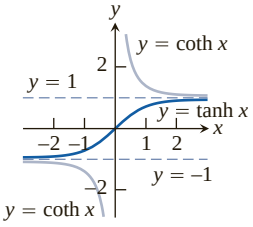
$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



b)

Coseno hiperbólico:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



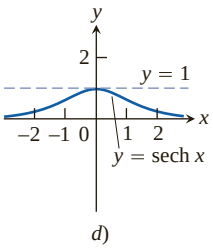
c)

Tangente hiperbólica:

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Cotangente hiperbólica:

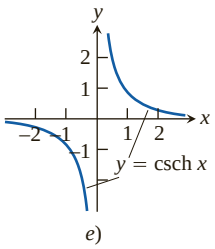
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



d)

Secante hiperbólica:

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$



e)

Cosecante hiperbólica:

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Las otras identidades se obtienen de forma similar, si sustituimos las definiciones de las funciones hiperbólicas y usamos álgebra. Al igual que muchas funciones estándar, las funciones hiperbólicas y sus inversas se evalúan con facilidad con la ayuda de calculadoras, que a menudo tienen teclas especiales para ese propósito.

Para cualquier número real u, sabemos que el punto con coordenadas (cos u, sen u) se encuentra en la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Por ello, en ocasiones, las funciones trigonométricas se conocen como funciones *circulares*. Por la primera identidad

$$\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1,$$

con x de la tabla 7.6 sustituida por u, el punto que tiene coordenadas (cosh u, senh u) se encuentra en la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Por esa razón, las funciones *hiperbólicas* reciben ese nombre (vea el ejercicio 86).

Las funciones hiperbólicas sirven para obtener integrales, como veremos en el capítulo 8. También desempeñan un papel importante en ciencias e ingeniería. El coseno hiperbólico describe la forma de un cable o alambre colgante que está sujeto en dos puntos a la misma altura y que cuelga libremente (vea el ejercicio 83). La forma del Arco de St. Louis es la de un coseno hiperbólico invertido. La tangente hiperbólica aparece en la fórmula para la velocidad de una ola marina que se mueve sobre agua con profundidad constante, y la tangente hiperbólica inversa describe cómo se suman las velocidades relativas de acuerdo con la ley de Einstein en la teoría especial de relatividad.

TABLA 7.7 Derivadas de las funciones hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh u) = \operatorname{senh} u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$$

Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas

Las seis funciones hiperbólicas, al ser combinaciones racionales de las funciones diferenciables e^x y e^{-x}, tienen derivadas en todos los puntos donde están definidas (tabla 7.7). Una vez más, existen semejanzas con las funciones trigonométricas.

Las fórmulas de las derivadas se deducen a partir de la derivada de e^u:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right) && \text{Definición de senh } u \\
&= \frac{e^u\, du/dx + e^{-u}\, du/dx}{2} && \text{Derivada de } e^u \\
&= \cosh u \frac{du}{dx}. && \text{Definición de cosh } u
\end{aligned}$$

Esto nos da la primera fórmula para las derivadas. A partir de la definición, podemos calcular la derivada de la función cosecante hiperbólica como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\operatorname{senh} u}\right) && \text{Definición de csch } u \\
&= -\frac{\cosh u \frac{du}{dx}}{\operatorname{senh}^2 u} && \text{Regla del cociente para derivadas} \\
&= -\frac{1}{\operatorname{senh} u}\frac{\cosh u}{\operatorname{senh} u}\frac{du}{dx} && \text{Se reordenan los términos.} \\
&= -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx} && \text{Definiciones de csch } u \text{ y coth } u
\end{aligned}$$

Las otras fórmulas de la tabla 7.7 se obtienen de forma similar.

Las fórmulas de las derivadas nos llevan a las fórmulas de integrales de la tabla 7.8.

TABLA 7.8 Fórmulas para integrales de funciones hiperbólicas

$$\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$$

$$\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$$

EJEMPLO 1 Ilustramos el uso de las fórmulas para derivadas e integrales.

a) $$\frac{d}{dt}\left(\tanh\sqrt{1+t^2}\right) = \operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1+t^2}\right)$$
$$= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}$$

b) $$\int \coth 5x\,dx = \int \frac{\cosh 5x}{\operatorname{senh} 5x}dx = \frac{1}{5}\int\frac{du}{u}$$ $u = \operatorname{senh} 5x$, $du = 5\cosh 5x\,dx$
$$= \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|\operatorname{senh} 5x| + C$$

c) $$\int_0^1 \operatorname{senh}^2 x\,dx = \int_0^1 \frac{\cosh 2x - 1}{2}dx$$ Tabla 7.6
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (\cosh 2x - 1)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{senh} 2x}{2} - x\right]_0^1$$
$$= \frac{\operatorname{senh} 2}{4} - \frac{1}{2} \approx 0.40672$$ Se evalúa con calculadora.

d) $$\int_0^{\ln 2} 4e^x \operatorname{senh} x\,dx = \int_0^{\ln 2} 4e^x\frac{e^x - e^{-x}}{2}dx = \int_0^{\ln 2}(2e^{2x} - 2)\,dx$$
$$= \left[e^{2x} - 2x\right]_0^{\ln 2} = (e^{2\ln 2} - 2\ln 2) - (1 - 0)$$
$$= 4 - 2\ln 2 - 1 \approx 1.6137$$ ■

Funciones hiperbólicas inversas

Las inversas de las seis funciones hiperbólicas básicas son muy útiles en integración (vea el capítulo 8). Como $d(\operatorname{senh} x)/dx = \cosh x > 0$, el seno hiperbólico es una función creciente de x. Denotamos a su inversa:

$$y = \operatorname{senh}^{-1} x.$$

Para todo valor de x en el intervalo $-\infty < x < \infty$, el valor de $y = \operatorname{senh}^{-1} x$ es el número cuyo seno hiperbólico es x. Las gráficas de $y = \operatorname{senh} x$ y $y = \operatorname{senh}^{-1} x$ se presentan en la figura 7.32*a*).

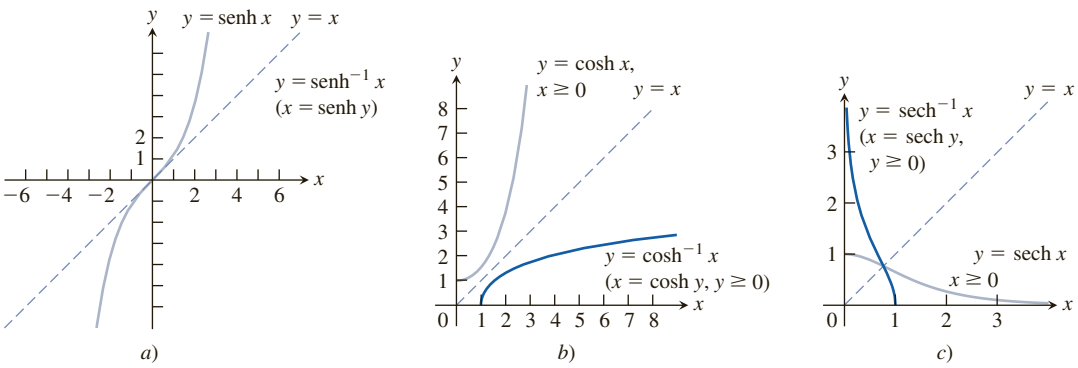


FIGURA 7.32 Gráficas de las funciones seno, coseno y secante hiperbólicas inversas de x. Observe las simetrías con respecto a la recta $y = x$.

La función $y = \cosh x$ no es inyectiva porque su gráfica en la tabla 7.5 no pasa la prueba de la recta horizontal. Sin embargo, la función restringida $y = \cosh x$, $x \geq 0$, es inyectiva; por lo tanto, tiene inversa, denotada por

$$y = \cosh^{-1} x.$$

Para todo valor de $x \geq 1$, $y = \cosh^{-1} x$ es el número en el intervalo $0 \leq y < \infty$ cuyo coseno hiperbólico es x. Las gráficas de $y = \cosh x$, $x \geq 0$, y $y = \cosh^{-1} x$ se muestran en la figura 7.32*b*).

Al igual que $y = \cosh x$, la función $y = \operatorname{sech} x = 1/\cosh x$ no es inyectiva, pero su restricción a valores no negativos de x tiene una inversa, denotada por

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x.$$

Para todo valor de x en el intervalo $(0, 1]$, $y = \operatorname{sech}^{-1} x$ es el número no negativo cuya secante hiperbólica es x. Las gráficas de $y = \operatorname{sech} x$, $x \geq 0$, y $y = \operatorname{sech}^{-1} x$ se presentan en la figura 7.32*c*).

La tangente, cotangente y cosecante hiperbólicas son inyectivas en sus dominios y, por lo tanto, tienen inversas, denotadas por

$$y = \tanh^{-1} x, \qquad y = \coth^{-1} x, \qquad y = \operatorname{csch}^{-1} x.$$

Estas funciones se grafican en la figura 7.33.

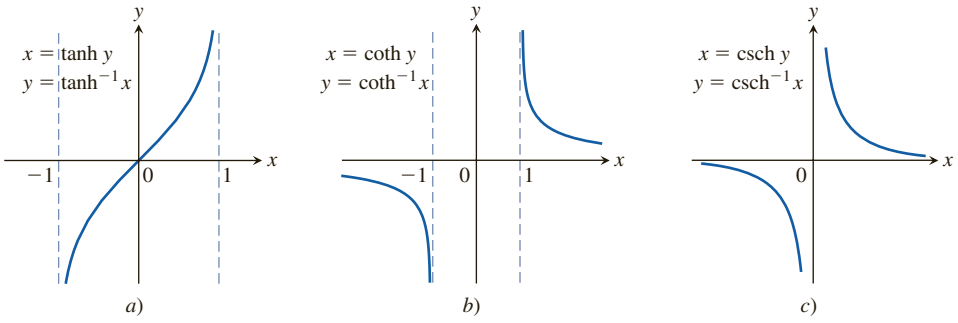


FIGURA 7.33 Gráficas de la tangente, cotangente y cosecante hiperbólicas inversas de x.

Identidades útiles

TABLA 7.9 Identidades de las funciones hiperbólicas inversas

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \operatorname{senh}^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\coth^{-1} x = \tanh^{-1} \frac{1}{x}$$

Las identidades de la tabla 7.9 se utilizan para obtener los valores de $\operatorname{sech}^{-1} x$, $\operatorname{csch}^{-1} x$ y $\coth^{-1} x$ en calculadoras que sólo nos dan $\cosh^{-1} x$, $\operatorname{senh}^{-1} x$ y $\tanh^{-1} x$. Estas identidades son consecuencia directa de las definiciones. Por ejemplo, si $0 < x \leq 1$, entonces,

$$\operatorname{sech}\left(\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{\cosh\left(\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x.$$

También sabemos que $\operatorname{sech}(\operatorname{sech}^{-1} x) = x$, y como la secante hiperbólica es inyectiva en $(0, 1]$, tenemos

$$\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sech}^{-1} x.$$

Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

Un uso importante de las funciones hiperbólicas inversas está en las antiderivadas que revierten las fórmulas de derivadas de la tabla 7.10.

TABLA 7.10 Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

$$\frac{d(\operatorname{senh}^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\cosh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \qquad u > 1$$

$$\frac{d(\tanh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$$

$$\frac{d(\coth^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| > 1$$

$$\frac{d(\operatorname{sech}^{-1} u)}{dx} = -\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad 0 < u < 1$$

$$\frac{d(\operatorname{csch}^{-1} u)}{dx} = -\frac{1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad u \neq 0$$

Las restricciones $|u| < 1$ y $|u| > 1$ en las fórmulas de las derivadas de $\tanh^{-1} u$ y $\coth^{-1} u$ provienen de las restricciones naturales en los valores de estas funciones. (Vea la figura 7.33*a* y *b*). La distinción entre $|u| < 1$ y $|u| > 1$ cobra importancia cuando convertimos las fórmulas de derivadas en fórmulas de integrales.

En el ejemplo 2 se ilustra cómo se obtienen las derivadas de estas funciones hiperbólicas inversas; ahí calculamos $d(\cosh^{-1} u)/dx$. Las otras derivadas se obtienen con cálculos similares.

EJEMPLO 2 Demuestre que si u es una función diferenciable de x cuyos valores son mayores que 1, entonces,

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}.$$

Solución Primero se obtiene la derivada de $y = \cosh^{-1} x$ para $x > 1$ aplicando el teorema 1 de la sección 7.1, con $f(x) = \cosh x$ y $f^{-1}(x) = \cosh^{-1} x$. Se puede aplicar el teorema 1 porque la derivada de $\cosh x$ es positiva para $0 < x$.

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} && \text{Teorema 1}\\
&= \frac{1}{\operatorname{senh}(\cosh^{-1} x)} && f'(u) = \operatorname{senh} u\\
&= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1} x) - 1}} && \cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1,\ \operatorname{senh} u = \sqrt{\cosh^2 u - 1}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} && \cosh(\cosh^{-1} x) = x
\end{aligned}$$

La regla de la cadena nos da el resultado final:

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}}\frac{du}{dx}.$$

■

Con las sustituciones adecuadas, las fórmulas de las derivadas de la tabla 7.10 conducen a las fórmulas de integración de la tabla 7.11. Cada una de estas últimas puede verificarse diferenciando la expresión del lado derecho.

TABLA 7.11 Integrales que conducen a las funciones hiperbólicas inversas

1. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad a > 0$

2. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad u > a > 0$

3. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, & u^2 < a^2 \\ \frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, & u^2 > a^2 \end{cases}$

4. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad 0 < u < a$

5. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C, \qquad u \neq 0 \text{ y } a > 0$

EJEMPLO 3 Evalúe

$$\int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{3 + 4x^2}}.$$

Solución La integral indefinida es

$$\int \frac{2\,dx}{\sqrt{3 + 4x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} \qquad u = 2x, \quad du = 2\,dx, \quad a = \sqrt{3}$$

$$= \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad \text{Fórmula de la tabla 7.11}$$

$$= \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{3 + 4x^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)\Big]_0^1 = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{senh}^{-1}(0)$$

$$= \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - 0 \approx 0.98665.$$

■

Ejercicios 7.7

Valores e identidades

Cada uno de los ejercicios 1 a 4 proporciona un valor de senh x o cosh x. Use las definiciones y la identidad $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ para obtener los valores de las cinco funciones hiperbólicas restantes.

1. $\operatorname{senh} x = -\frac{3}{4}$ **2.** $\operatorname{senh} x = \frac{4}{3}$

3. $\cosh x = \frac{17}{15}, \quad x > 0$ **4.** $\cosh x = \frac{13}{5}, \quad x > 0$

Rescriba las expresiones de los ejercicios 5 a 10 en términos de exponenciales y simplifique los resultados tanto como sea posible.

5. $2\cosh(\ln x)$ **6.** $\operatorname{senh}(2\ln x)$

7. $\cosh 5x + \operatorname{senh} 5x$ **8.** $\cosh 3x - \operatorname{senh} 3x$

9. $(\operatorname{senh} x + \cosh x)^4$

10. $\ln(\cosh x + \operatorname{senh} x) + \ln(\cosh x - \operatorname{senh} x)$

11. Demuestre las identidades

$$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y,$$
$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y.$$

Después, utilícelas para demostrar que

a) $\operatorname{senh} 2x = 2\operatorname{senh} x \cosh x$.

b) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$.

12. Utilice las definiciones de cosh x y senh x para demostrar que

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1.$$

Obtención de derivadas

En los ejercicios 13 a 24, obtenga la derivada de y con respecto a la variable adecuada.

13. $y = 6\operatorname{senh}\frac{x}{3}$ **14.** $y = \frac{1}{2}\operatorname{senh}(2x + 1)$

15. $y = 2\sqrt{t}\tanh\sqrt{t}$ **16.** $y = t^2\tanh\frac{1}{t}$

17. $y = \ln(\operatorname{senh} z)$ **18.** $y = \ln(\cosh z)$

19. $y = \operatorname{sech}\theta(1 - \ln\operatorname{sech}\theta)$ **20.** $y = \operatorname{csch}\theta(1 - \ln\operatorname{csch}\theta)$

21. $y = \ln\cosh v - \frac{1}{2}\tanh^2 v$ **22.** $y = \ln\operatorname{senh} v - \frac{1}{2}\coth^2 v$

23. $y = (x^2 + 1)\operatorname{sech}(\ln x)$

(*Sugerencia:* Antes de diferenciar, exprese en términos de exponenciales y simplifique.)

24. $y = (4x^2 - 1)\operatorname{csch}(\ln 2x)$

En los ejercicios 25 a 36, determine la derivada de y con respecto a la variable adecuada.

25. $y = \operatorname{senh}^{-1}\sqrt{x}$ **26.** $y = \cosh^{-1} 2\sqrt{x + 1}$

27. $y = (1 - \theta)\tanh^{-1}\theta$ **28.** $y = (\theta^2 + 2\theta)\tanh^{-1}(\theta + 1)$

29. $y = (1 - t)\coth^{-1}\sqrt{t}$ **30.** $y = (1 - t^2)\coth^{-1} t$

31. $y = \cos^{-1} x - x\operatorname{sech}^{-1} x$ **32.** $y = \ln x + \sqrt{1 - x^2}\operatorname{sech}^{-1} x$

33. $y = \operatorname{csch}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\theta}$

34. $y = \operatorname{csch}^{-1} 2^{\theta}$

35. $y = \operatorname{senh}^{-1}(\tan x)$

36. $y = \cosh^{-1}(\sec x), \quad 0 < x < \pi/2$

Fórmulas de integración

Verifique las fórmulas de integración en los ejercicios 37 a 40.

37. ***a)*** $\int \operatorname{sech} x\,dx = \tan^{-1}(\operatorname{senh} x) + C$

b) $\int \operatorname{sech} x\,dx = \operatorname{sen}^{-1}(\tanh x) + C$

38. $\int x\operatorname{sech}^{-1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sech}^{-1} x - \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2} + C$

39. $\int x\coth^{-1} x\,dx = \frac{x^2 - 1}{2}\coth^{-1} x + \frac{x}{2} + C$

40. $\int \tanh^{-1} x\,dx = x\tanh^{-1} x + \frac{1}{2}\ln(1 - x^2) + C$

Evaluación de integrales

Evalúe las integrales en los ejercicios 41 a 60.

41. $\int \operatorname{senh} 2x\,dx$ **42.** $\int \operatorname{senh}\frac{x}{5}dx$

43. $\int 6\cosh\left(\frac{x}{2} - \ln 3\right)dx$ **44.** $\int 4\cosh(3x - \ln 2)\,dx$

45. $\int \tanh\frac{x}{7}dx$ **46.** $\int \coth\frac{\theta}{\sqrt{3}}d\theta$

47. $\int \operatorname{sech}^2\left(x - \frac{1}{2}\right)dx$ **48.** $\int \operatorname{csch}^2(5 - x)\,dx$

49. $\int \frac{\operatorname{sech}\sqrt{t}\tanh\sqrt{t}\,dt}{\sqrt{t}}$ **50.** $\int \frac{\operatorname{csch}(\ln t)\coth(\ln t)\,dt}{t}$

51. $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \coth x\,dx$ **52.** $\int_{0}^{\ln 2} \tanh 2x\,dx$

53. $\int_{-\ln 4}^{-\ln 2} 2e^{\theta}\cosh\theta\,d\theta$ **54.** $\int_{0}^{\ln 2} 4e^{-\theta}\operatorname{senh}\theta\,d\theta$

55. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cosh(\tan\theta)\sec^2\theta\,d\theta$ **56.** $\int_{0}^{\pi/2} 2\operatorname{senh}(\operatorname{sen}\theta)\cos\theta\,d\theta$

57. $\int_{1}^{2} \frac{\cosh(\ln t)}{t}dt$ **58.** $\int_{1}^{4} \frac{8\cosh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

59. $\int_{-\ln 2}^{0} \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$ **60.** $\int_{0}^{\ln 10} 4\operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$

Funciones hiperbólicas inversas e integrales

Aun cuando su calculadora no tenga teclas para evaluar funciones hiperbólicas, es posible evaluar las funciones hiperbólicas inversas expresándolas como logaritmos, como se muestra aquí. (En la sección 8.4 se incluye la demostración de una de ellas).

$$\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \qquad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \qquad |x| < 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1}x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \qquad 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{csch}^{-1}x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right), \qquad x \neq 0$$

$$\coth^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, \qquad |x| > 1$$

Utilice las fórmulas del cuadro anterior para expresar los números en los ejercicios 61 a 66 en términos de logaritmos naturales.

61. $\operatorname{senh}^{-1}(-5/12)$

62. $\cosh^{-1}(5/3)$

63. $\tanh^{-1}(-1/2)$

64. $\coth^{-1}(5/4)$

65. $\operatorname{sech}^{-1}(3/5)$

66. $\operatorname{csch}^{-1}\left(-1/\sqrt{3}\right)$

Evalúe las integrales en los ejercicios 67 a 74 en términos de

a) funciones hiperbólicas inversas;

b) logaritmos naturales.

67. $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

68. $\displaystyle\int_0^{1/3} \frac{6\,dx}{\sqrt{1+9x^2}}$

69. $\displaystyle\int_{5/4}^{2} \frac{dx}{1-x^2}$

70. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$

71. $\displaystyle\int_{1/5}^{3/13} \frac{dx}{x\sqrt{1-16x^2}}$

72. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$

73. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$

74. $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$

Aplicaciones y ejemplos

75. Demuestre que si una función f está definida en un intervalo simétrico con respecto al origen (de modo que f está definida en $-x$ siempre que esté definida en x), entonces,

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}. \tag{1}$$

Después, demuestre que $(f(x)+f(-x))/2$ es par y que $(f(x)-f(-x))/2$ es impar.

76. Deduzca la fórmula $\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ para toda x real. Explique por qué, al deducirla, se usa el signo más en la raíz cuadrada, en lugar del signo menos.

77. Paracaidismo Cuando un cuerpo de masa m cae, partiendo del reposo y bajo la acción de la gravedad, encuentra en el aire una resistencia que es proporcional al cuadrado de la velocidad; entonces, la velocidad del cuerpo en el instante t s satisface la ecuación diferencial

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2,$$

donde k es una constante que depende de las propiedades aerodinámicas del cuerpo y la densidad del aire. (Se supone que la caída es suficientemente corta de modo que la variación en la densidad del aire no afectará el resultado de manera significativa).

a) Demuestre que

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right)$$

satisface la ecuación diferencial y la condición inicial $v = 0$ cuando $t = 0$.

b) Obtenga la *velocidad límite* del cuerpo, $\lim_{t\to\infty} v$.

c) Para un paracaidista de 160 lb ($mg = 160$), con el tiempo en segundos y la distancia en pies, un valor típico de k es 0.005. ¿Cuál es la velocidad límite del paracaidista?

78. Aceleraciones cuyas magnitudes son proporcionales al desplazamiento Suponga que la posición de un cuerpo que se desplaza sobre una recta coordenada en el instante t es

a) $s = a\cos kt + b\operatorname{sen}kt$.

b) $s = a\cosh kt + b\operatorname{senh}kt$.

Demuestre en ambos casos que la aceleración d^2s/dt^2 es proporcional a s, sólo que en el primero está dirigida hacia el origen, mientras que en el segundo está dirigida alejándose de éste.

79. Volumen Una región en el primer cuadrante está acotada arriba por la curva $y = \cosh x$, abajo por la curva $y = \operatorname{senh} x$, y a la izquierda y a la derecha por el eje y y la recta $x = 2$, respectivamente. Determine el volumen del sólido que se genera al hacer girar esa región alrededor del eje x.

80. Volumen La región acotada por la curva $y = \operatorname{sech} x$, el eje x y las rectas $x = \pm\ln\sqrt{3}$ se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Obtenga el volumen del sólido.

81. Longitud de arco Obtenga la longitud de la gráfica de $y = (1/2)\cosh 2x$ de $x = 0$ a $x = \ln\sqrt{5}$.

82. Use las definiciones de las funciones hiperbólicas para obtener cada uno de los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to\infty}\tanh x$

b) $\lim_{x\to-\infty}\tanh x$

c) $\lim_{x\to\infty}\operatorname{senh}x$

d) $\lim_{x\to-\infty}\operatorname{senh}x$

e) $\lim_{x\to\infty}\operatorname{sech}x$

f) $\lim_{x\to\infty}\coth x$

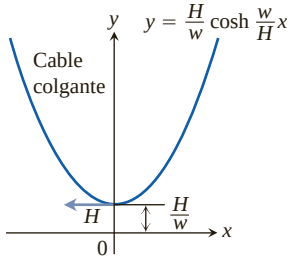
g) $\lim_{x\to0^+}\coth x$

h) $\lim_{x\to0^-}\coth x$

i) $\lim_{x\to-\infty}\operatorname{csch}x$

83. Cables colgantes Imagine un cable, como los de teléfono o de televisión de paga, que está tendido entre dos postes y cuelga libremente. El peso del cable por unidad de longitud es la constante w, y la tensión horizontal en el punto más bajo es un *vector* de longitud H. Si elegimos un sistema de coordenadas en el plano del cable en el cual el eje x es horizontal, la fuerza de gravedad apunta hacia abajo, el extremo positivo del eje y hacia arriba, y el punto más bajo del cable se localiza en el punto $y = H/w$ en el eje y (vea la figura), entonces, se puede demostrar que la posición del cable coincide con la gráfica del coseno hiperbólico.

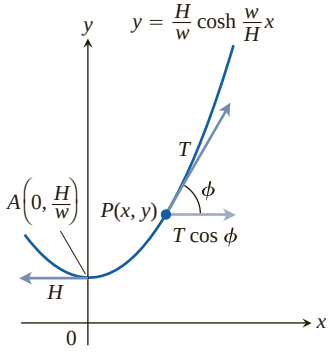
$$y = \frac{H}{w}\cosh\frac{w}{H}x.$$



En ocasiones, las curvas de este tipo se denominan **curvas de cadena** o **catenarias**, término que proviene del latín *catena*, que significa "cadena".

a) Sea $P(x, y)$ un punto arbitrario en el cable. La siguiente figura ilustra la tensión en P como un vector de longitud (magnitud) T, así como la tensión H en el punto más bajo A. Demuestre que la pendiente del cable en P es

$$\tan\phi = \frac{dy}{dx} = \operatorname{senh}\frac{w}{H}x.$$



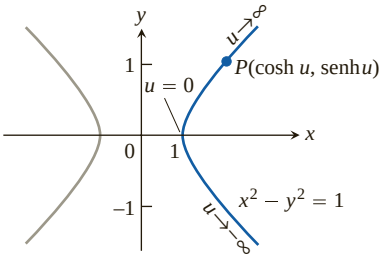
b) Con base en el resultado del inciso *a)* y sabiendo que la tensión horizontal en P debe ser igual a H (el cable no se está moviendo), demuestre que $T = wy$. En consecuencia, la magnitud de la tensión en $P(x, y)$ es exactamente igual al peso de y unidades de cable.

84. (*Continuación del ejercicio 83*). La longitud de arco AP de la figura del ejercicio 83 es $s = (1/a)\operatorname{senh} ax$, donde $a = w/H$. Demuestre que es posible expresar las coordenadas de P en términos de s como

$$x = \frac{1}{a}\operatorname{senh}^{-1} as, \qquad y = \sqrt{s^2 + \frac{1}{a^2}}.$$

85. Área Demuestre que el área de la región del primer cuadrante, acotada por la curva $y = (1/a)\cosh ax$, los ejes de coordenadas y la recta $x = b$, es igual al área de un rectángulo de altura $1/a$ y base s, donde s es la longitud de la curva de $x = 0$ a $x = b$. Dibuje una figura mostrando el resultado.

86. Lo hiperbólico en funciones hiperbólicas Así como $x = \cos u$ y $y = \operatorname{sen} u$ corresponden a puntos (x, y) en la circunferencia unitaria, las funciones $x = \cosh u$ y $y = \operatorname{senh} u$ corresponden a puntos (x, y) en la rama derecha de la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$.



Como $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$, el punto $(\cosh u, \operatorname{senh} u)$ se encuentra en la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ para todo valor de u.

Otra analogía entre funciones hiperbólicas y funciones circulares es que la variable u en las coordenadas $(\cosh u, \operatorname{senh} u)$ para los puntos de la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ es el doble del área del sector AOP de la figura. Para averiguar por qué, siga estos pasos:

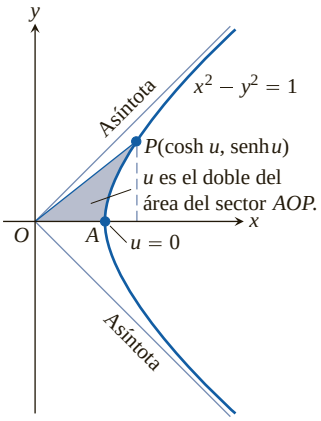
a) Demuestre que el área $A(u)$ del sector AOP es

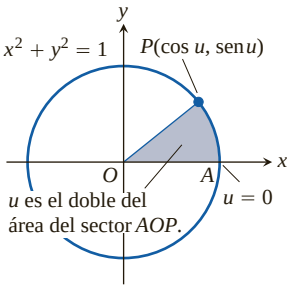
$$A(u) = \frac{1}{2}\cosh u \operatorname{senh} u - \int_1^{\cosh u} \sqrt{x^2 - 1}\, dx.$$

b) Diferencie ambos lados de la ecuación del inciso *a)* con respecto a u para demostrar que

$$A'(u) = \frac{1}{2}.$$

c) Determine $A(u)$ a partir de esta última ecuación. ¿Cuál es el valor de $A(0)$? ¿Cuál es el valor de la constante de integración C en su solución? Una vez obtenida C, ¿qué puede decir acerca de la relación entre u y $A(u)$?





Una de las analogías entre las funciones hiperbólicas y las circulares se muestra en estos dos diagramas (ejercicio 86).

7.8 Razones relativas de crecimiento

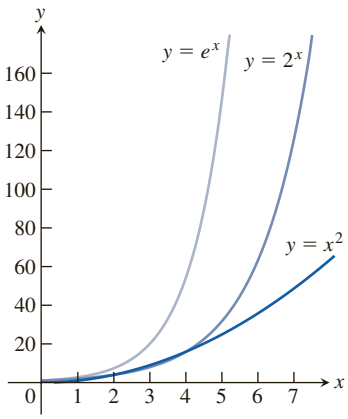


FIGURA 7.34 Gráficas de e^x, 2^x y x^2.

En matemáticas, ciencias de la computación e ingeniería, a menudo es importante comparar las razones a las que funciones de x crecen cuando x crece. Las funciones exponenciales son importantes en estas comparaciones debido a que éstas crecen muy rápidamente, pero también son importantes las funciones logarítmicas, porque el crecimiento de éstas es muy lento. En esta sección presentaremos la notación *o pequeña* y *O grande* utilizada para describir los resultados de estas comparaciones. Enfocaremos nuestra atención en funciones cuyos valores son positivos en algún momento y permanecen así cuando $x \to \infty$.

Razones de crecimiento de las funciones

Quizás ha observado que las funciones exponenciales como 2^x y e^x parecen crecer más rápidamente que los polinomios y las funciones racionales cuando x se vuelve más grande. Desde luego, estas exponenciales crecen más rápidamente que la misma x, y como se observa en la figura 7.34, 2^x sobrepasa a x^2 cuando x aumenta. De hecho, cuando $x \to \infty$, las funciones 2^x y e^x crecen más rápido que cualquier potencia de x, incluso que $x^{1,000,000}$ (ejercicio 19). En contraste, las funciones logarítmicas como $y = \log_2 x$ y $y = \ln x$ crecen más lentamente cuando $x \to \infty$ que cualquier potencia positiva de x (ejercicio 21).

Para tener una idea acerca de la rapidez con que crece $y = e^x$ cuando x aumenta, visualice la gráfica de la función en una pizarra grande, con los ejes graduados en centímetros. En $x = 1$ cm, la gráfica está $e^1 \approx 3$ cm arriba del eje x. En $x = 6$ cm, la gráfica está $e^6 \approx 403$ cm ≈ 4 m arriba del eje x (está a punto de llegar al cielo raso, si es que no lo ha hecho aún). En $x = 10$ cm, la gráfica está $e^{10} \approx 22{,}026$ cm ≈ 220 m arriba, más alto que la mayoría de los edificios. En $x = 24$ cm, la gráfica está más alto que la mitad de la distancia a la Luna, y en $x = 43$ cm del origen, la gráfica está lo suficientemente alta como para alcanzar la estrella vecina más cercana al Sol, la enana roja Próxima Centauri. En contraste, con los ejes graduados en centímetros, usted tendría que alejarse 5 años luz hacia fuera del eje x para encontrar un punto donde la gráfica de $y = \ln x$ esté a $y = 43$ cm de alto. Vea la figura 7.35.

Estas comparaciones importantes entre las funciones exponenciales, polinomiales y logarítmicas se pueden precisar definiendo lo que significa que una función $f(x)$ crezca más rápido que otra función $g(x)$ cuando $x \to \infty$.

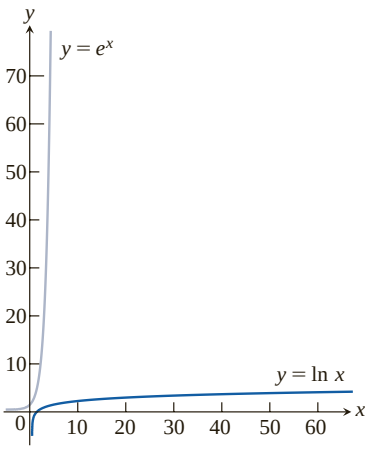


FIGURA 7.35 Dibujos a escala de las gráficas de e^x y $\ln x$.

DEFINICIÓN Sean $f(x)$ y $g(x)$ positivas para x suficientemente grande.

1. f **crece más rápido que** g cuando $x \to \infty$ si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

o, de manera equivalente, si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

También se dice que g **crece más lentamente que** f cuando $x \to \infty$.

2. f y g **crecen a la misma razón** cuando $x \to \infty$ si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

donde L es finito y positivo.

De acuerdo con estas definiciones, $y = 2x$ no crece más rápido que $y = x$. Las dos funciones crecen a la misma razón porque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2,$$

el cual es un límite positivo finito. Esta aparente contradicción con el sentido común se debe a que lo que queremos decir con "f crece más rápido que g" es que para valores grandes de x, g es insignificante comparada con f.

EJEMPLO 1 Comparemos las razones de crecimiento de varias funciones comunes.

a) e^x crece más rápido que x^2 cuando $x \to \infty$ porque

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\infty/\infty} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x}}_{\infty/\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Se usa dos veces la regla de L'Hôpital.

b) 3^x crece más rápido que 2^x cuando $x \to \infty$ porque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \infty.$$

c) x^2 crece más rápido que $\ln x$ cuando $x \to \infty$ porque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x\to\infty} 2x^2 = \infty.$$

Regla de L'Hôpital

d) $\ln x$ crece más lentamente que $x^{1/n}$ cuando $x \to \infty$ para cualquier entero positivo porque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{1/n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{(1/n)x^{(1/n)-1}}$$

Regla de L'Hôpital

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{n}{x^{1/n}} = 0.$$

n es constante.

e) Como sugiere el inciso *b*), las funciones exponenciales con bases diferentes nunca crecen a la misma razón cuando $x \to \infty$. Si $a > b > 0$, entonces, a^x crece más rápido que b^x. Como $(a/b) > 1$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \infty.$$

f) En contraste con las funciones exponenciales, las funciones logarítmicas con diferentes bases $a > 1$ y $b > 1$ siempre crecen a la misma razón cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{\log_b x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x/\ln a}{\ln x/\ln b} = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

La razón límite siempre es finita y diferente de cero. ■

Si f crece a la misma razón que g cuando $x \to \infty$, y g crece a la misma razón que h cuando $x \to \infty$, entonces, f crece a la misma razón que h cuando $x \to \infty$. Esto es porque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{g}{h} = L_2$$

juntas implican que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{h} = \lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{h} = L_1 L_2.$$

Si L_1 y L_2 son finitos y diferentes de cero, entonces, $L_1 L_2$ también lo es.

EJEMPLO 2 Demuestre que $\sqrt{x^2 + 5}$ y $(2\sqrt{x} - 1)^2$ crecen a la misma razón cuando $x \to \infty$.

Solución Veremos que las funciones crecen a la misma razón demostrando que ambas crecen a la misma razón que la función $g(x) = x$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2\sqrt{x} - 1)^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4. \quad \blacksquare$$

Orden y notación "*O*"

La notación "*o* pequeña" y "*O* grande" fue inventada por varios teóricos hace un siglo, y ahora es de uso común en el análisis matemático y en las ciencias de la computación. Observe que decir $f = o(g)$ cuando $x \to \infty$ es otra manera de afirmar que f crece más lentamente que g cuando $x \to \infty$.

DEFINICIÓN Una función f es **de orden más pequeño que** g cuando $x \to \infty$ si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Señalamos esto escribiendo $\boldsymbol{f = o(g)}$ ("f es o pequeña de g").

EJEMPLO 3 A continuación usamos la notación *o* pequeña.

a) $\ln x = o(x)$ cuando $x \to \infty$ porque $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

b) $x^2 = o(x^3 + 1)$ cuando $x \to \infty$ porque $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3 + 1} = 0$ $\blacksquare$

DEFINICIÓN Sean $f(x)$ y $g(x)$ positivas para x suficientemente grande. Entonces, f es **a lo más del orden de** g cuando $x \to \infty$ si existe un entero positivo M tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \le M,$$

para x suficientemente grande. Señalamos esto escribiendo $\boldsymbol{f = O(g)}$ ("f es O grande de g").

EJEMPLO 4 A continuación, usamos la notación *O* grande.

a) $x + \operatorname{sen} x = O(x)$ cuando $x \to \infty$ porque $\frac{x + \operatorname{sen} x}{x} \le 2$ para x suficientemente grande.

b) $e^x + x^2 = O(e^x)$ cuando $x \to \infty$ porque $\frac{e^x + x^2}{e^x} \to 1$ cuando $x \to \infty$.

c) $x = O(e^x)$ cuando $x \to \infty$ porque $\frac{x}{e^x} \to 0$ cuando $x \to \infty$. $\blacksquare$

Si examina la definición nuevamente, verá que $f = o(g)$ implica que $f = O(g)$ para funciones que son positivas con x suficientemente grande. Asimismo, si f y g crecen a la misma razón, entonces, $f = O(g)$ y $g = O(f)$ (ejercicio 11).

Búsqueda secuencial contra búsqueda binaria

Los científicos de la computación a menudo miden la eficiencia de un algoritmo contando el número de pasos que toma la ejecución del mismo. Puede haber grandes diferencias en la ejecución de los algoritmos, incluso si están diseñados para realizar la misma tarea. Estas diferencias se describen a menudo con notación O grande. He aquí un ejemplo.

Diccionario internacional Webster lista aproximadamente 26,000 palabras que inician con la letra a. Una manera de buscar una palabra, o de saber si no está, es leer la lista palabra por palabra, hasta encontrarla o determinar que no está incluida. Este método, llamado **búsqueda secuencial**, no aprovecha la clasificación alfabética de la lista. Usted seguramente obtendrá una respuesta, pero podría tomarle 26,000 pasos.

Otra manera de encontrar la palabra o saber si no está es ir directamente a la mitad de la lista (unas cuantas palabras más o menos). Si no encuentra la palabra, se remite a la mitad de la mitad que la incluye y se olvida de la mitad que no la contiene. (Usted sabe cuál es la mitad que la incluye porque sabe que la lista está ordenada alfabéticamente). Este método, llamado **búsqueda binaria**, elimina 13,000 palabras aproximadamente en un solo paso. Si no encuentra la palabra en el segundo intento, entonces, salta a la mitad de la mitad que la incluye. Continúa de este modo hasta que encuentra la palabra, o bien, habrá dividido la lista en tantas mitades que ya no quedan palabras por revisar. ¿Cuántas veces dividió la lista para encontrar la palabra o darse cuenta de que no existe? Cuando mucho, 15, porque

$$(26{,}000/2^{15}) < 1.$$

Esto, sin duda, es mejor que 26,000 pasos posibles.

Para una lista de longitud n, un algoritmo de búsqueda secuencial toma un orden de n pasos para encontrar una palabra o determinar que no existe. Una búsqueda binaria, como se conoce al segundo algoritmo, tiene un orden de $\log_2 n$ pasos. La razón es que si $2^{m-1} < n \le 2^m$, entonces, $m - 1 < \log_2 n \le m$, y el número de bisecciones requeridas para acortar la lista a una palabra será, cuando mucho, $m = \lceil \log_2 n \rceil$, el menor entero mayor o igual a (techo entero de) $\log_2 n$.

La notación O grande proporciona un modo compacto de decir esto. El número de pasos en una búsqueda secuencial en una lista ordenada es $O(n)$; el número de pasos en una búsqueda binaria es $O(\log_2 n)$. En nuestro ejemplo, hay una gran diferencia entre las dos (26,000 contra 15), y la diferencia sólo puede aumentar con n porque n crece más rápido que $\log_2 n$ cuando $n \to \infty$.

Resumen

La definición integral de la función logaritmo natural $\ln x$, de la sección 7.2, es la clave para obtener con rigor las funciones exponenciales y logarítmicas a^x y $\log_a x$ para cualquier base $a > 0$. La diferenciabilidad y el comportamiento creciente de $\ln x$ nos permiten definir su inversa diferenciable, la función exponencial natural e^x, con el teorema 1. Luego, e^x se usa para definir a la función diferenciable $a^x = e^{x \ln a}$, dando un significado sencillo y preciso de los exponentes irracionales, a partir de lo cual vemos que *todas* las funciones exponenciales son exactamente e^x elevada a una potencia adecuada, $\ln a$. El comportamiento creciente (o decreciente) de a^x da su inversa diferenciable, $\log_a x$, usando nuevamente el teorema 1. Aún más, vimos que $\log_a x = (\ln x)/(\ln a)$ es sólo un múltiplo de la función logaritmo natural. Entonces, e^x y $\ln x$ completan la configuración de las funciones logarítmicas y exponenciales usando las operaciones algebraicas de tomar potencias y múltiplos constantes. Adicionalmente, la diferenciabilidad de e^x y a^x establece la existencia de los límites

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$$

como las pendientes de esas funciones donde cruzan el eje y.

En este capítulo hemos visto la importancia de las funciones exponenciales y logarítmicas en el análisis de problemas asociados con crecimiento y decaimiento, en la comparación de las razones de crecimiento de varias funciones, y en la medición de la eficiencia de un algoritmo computacional. En el capítulo 9 veremos que las funciones exponenciales desempeñan un papel fundamental en las soluciones de ecuaciones diferenciales.

Ejercicios 7.8

Comparaciones con la exponencial e^x

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones crecen más rápidamente que e^x cuando $x \to \infty$? ¿Cuáles crecen a la misma razón que e^x? ¿Cuáles crecen más lentamente?

a) $x - 3$ *b)* $x^3 + \text{sen}^2 x$
c) $\sqrt{x}$ *d)* 4^x
e) $(3/2)^x$ *f)* $e^{x/2}$
g) $e^x/2$ *h)* $\log_{10} x$

2. ¿Cuáles de las siguientes funciones crecen más rápidamente que e^x cuando $x \to \infty$? ¿Cuáles crecen a la misma razón que e^x? ¿Cuáles crecen más lentamente?

a) $10x^4 + 30x + 1$ *b)* $x \ln x - x$
c) $\sqrt{1 + x^4}$ *d)* $(5/2)^x$
e) e^{-x} *f)* xe^x
g) $e^{\cos x}$ *h)* e^{x-1}

Comparaciones con la potencia x^2

3. ¿Cuáles de las siguientes funciones crecen más rápidamente que x^2 cuando $x \to \infty$? ¿Cuáles crecen a la misma razón que x^2? ¿Cuáles crecen más lentamente?

a) $x^2 + 4x$ *b)* $x^5 - x^2$
c) $\sqrt{x^4 + x^3}$ *d)* $(x + 3)^2$
e) $x \ln x$ *f)* 2^x
g) $x^3 e^{-x}$ *h)* $8x^2$

4. ¿Cuáles de las siguientes funciones crecen más rápidamente que x^2 cuando $x \to \infty$? ¿Cuáles crecen a la misma razón que x^2? ¿Cuáles crecen más lentamente?

a) $x^2 + \sqrt{x}$ *b)* $10x^2$
c) $x^2 e^{-x}$ *d)* $\log_{10}(x^2)$
e) $x^3 - x^2$ *f)* $(1/10)^x$
g) $(1)1)^x$ *h)* $x^2 + 100x$

Comparaciones con el logaritmo ln x

5. ¿Cuáles de las siguientes funciones crecen más rápidamente que $\ln x$ cuando $x \to \infty$? ¿Cuáles crecen a la misma razón que $\ln x$? ¿Cuáles crecen más lentamente?

a) $\log_3 x$ *b)* $\ln 2x$
c) $\ln \sqrt{x}$ *d)* $\sqrt{x}$
e) x *f)* $5 \ln x$
g) $1/x$ *h)* e^x

6. ¿Cuáles de las siguientes funciones crecen más rápidamente que $\ln x$ cuando $x \to \infty$? ¿Cuáles crecen a la misma razón que $\ln x$? ¿Cuáles crecen más lentamente?

a) $\log_2(x^2)$ *b)* $\log_{10} 10x$
c) $1/\sqrt{x}$ *d)* $1/x^2$
e) $x - 2 \ln x$ *f)* e^{-x}
g) $\ln(\ln x)$ *h)* $\ln(2x + 5)$

Ordenamiento de funciones según su razón de crecimiento

7. Ordene las siguientes funciones con respecto a su razón de crecimiento, de la más lenta a la más rápida, cuando $x \to \infty$.

a) e^x *b)* x^x
c) $(\ln x)^x$ *d)* $e^{x/2}$

8. Ordene las siguientes funciones con respecto a su razón de crecimiento, de la más lenta a la más rápida, cuando $x \to \infty$.

a) 2^x *b)* x^2
c) $(\ln 2)^x$ *d)* e^x

O grande y *o* pequeña; orden

9. ¿Verdadero o falso? Cuando $x \to \infty$,

a) $x = o(x)$ *b)* $x = o(x + 5)$
c) $x = O(x + 5)$ *d)* $x = O(2x)$
e) $e^x = o(e^{2x})$ *f)* $x + \ln x = O(x)$
g) $\ln x = o(\ln 2x)$ *h)* $\sqrt{x^2 + 5} = O(x)$

10. ¿Verdadero o falso? Cuando $x \to \infty$,

a) $\dfrac{1}{x + 3} = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *b)* $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$
c) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *d)* $2 + \cos x = O(2)$
e) $e^x + x = O(e^x)$ *f)* $x \ln x = o(x^2)$
g) $\ln(\ln x) = O(\ln x)$ *h)* $\ln(x) = o(\ln(x^2 + 1))$

11. Demuestre que si las funciones positivas $f(x)$ y $g(x)$ crecen a la misma razón cuando $x \to \infty$, entonces, $f = O(g)$ y $g = O(f)$.

12. ¿En qué caso el polinomio $f(x)$ es de orden menor que el polinomio $g(x)$ cuando $x \to \infty$? Justifique su respuesta.

13. ¿En qué caso el polinomio $f(x)$ es, cuando mucho, del mismo orden que el polinomio $g(x)$ cuando $x \to \infty$? Justifique su respuesta.

14. ¿Qué nos dicen las conclusiones acerca de los límites de las funciones racionales que sacamos en la sección 2.8, sobre el crecimiento relativo de polinomios cuando $x \to \infty$?

Otras comparaciones

T **15.** Examine

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x + 1)}{\ln x} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x + 999)}{\ln x}.$$

Después, use la regla de L'Hôpital para explicar sus hallazgos.

16. (*Continuación del ejercicio 15*). Demuestre que el valor de

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x + a)}{\ln x}$$

es el mismo, sin importar el valor que se asigne a la constante a. ¿Qué dice esto acerca de las razones relativas a las que crecen las funciones $f(x) = \ln(x + a)$ y $g(x) = \ln x$?

17. Demuestre que $\sqrt{10x + 1}$ y $\sqrt{x + 1}$ crecen a la misma razón cuando $x \to \infty$, comprobando que ambas crecen a la misma razón que $\sqrt{x}$ cuando $x \to \infty$.

18. Demuestre que $\sqrt{x^4 + x}$ y $\sqrt{x^4 - x^3}$ crecen a la misma razón cuando $x \to \infty$, comprobando que ambas crecen a la misma razón que x^2 cuando $x \to \infty$.

19. Demuestre que cuando $x \to \infty$, e^x crece más rápidamente que x^n para cualquier entero positivo n, incluyendo $x^{1{,}000{,}000}$. (*Sugerencia:* Pregúntese cuál es la n-ésima derivada de x^n).

20. La función e^x crece más rápido que cualquier polinomio Demuestre que cuando $x \to \infty$, e^x crece más rápidamente que cualquier polinomio

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

21. ***a)*** Demuestre que cuando $x \to \infty$, $\ln x$ crece más lentamente que $x^{1/n}$ para cualquier entero positivo n, incluyendo $x^{1/1{,}000{,}000}$.

T ***b)*** Aun cuando los valores de $x^{1/1{,}000{,}000}$ sobrepasan finalmente a los de $\ln x$, hay que avanzar mucho en el eje x antes de que eso ocurra. Determine un valor de x mayor que 1 para el que $x^{1/1{,}000{,}000} > \ln x$. Observe que cuando $x > 1$, la ecuación $\ln x = x^{1/1{,}000{,}000}$ es equivalente a $\ln(\ln x) = (\ln x)/1{,}000{,}000$.

T ***c)*** Incluso $x^{1/10}$ tarda mucho en sobrepasar a $\ln x$. Experimente con la calculadora para obtener el valor de x en el que las gráficas de $x^{1/10}$ y $\ln x$ se cruzan, es decir, donde $\ln x = 10 \ln(\ln x)$. Localice el punto de intersección entre potencias de 10 (encerrándolo entre corchetes) y aproxime el punto mediante particiones sucesivas en mitades.

T ***d)*** (*Continuación del inciso c*). El valor de x donde $\ln x = 10 \ln(\ln x)$ es demasiado lejano para que lo identifiquen algunas calculadoras y programas de cómputo para calcular raíces. Inténtelo con el equipo disponible y observe lo que sucede.

22. La función $\ln x$ crece más lentamente que cualquier polinomio Demuestre que cuando $x \to \infty$, $\ln x$ crece más lentamente que cualquier polinomio no constante.

Algoritmos y búsquedas

23. ***a)*** Suponga que tiene tres algoritmos diferentes para resolver un mismo problema, y que el número de pasos que requiere cada uno es del orden de alguna de estas funciones:

$$n \log_2 n, \quad n^{3/2}, \quad n(\log_2 n)^2.$$

¿Cuál de los algoritmos es más eficiente a la larga? Justifique su respuesta.

T ***b)*** Grafique juntas las funciones del inciso *a)* para apreciar la rapidez con que crece cada una.

24. Repita el ejercicio 23 con estas funciones:

$$n, \quad \sqrt{n}\log_2 n, \quad (\log_2 n)^2.$$

T **25.** Suponga que busca un elemento en una lista ordenada de un millón de elementos. ¿Cuántos pasos requeriría para localizarlo con una búsqueda secuencial? ¿Y con una binaria?

T **26.** Si busca un elemento en una lista ordenada de 450,000 elementos (que es el número de términos incluidos en el *Webster's Third New International Dictionary*), ¿cuántos pasos requeriría para localizarlo con una búsqueda secuencial? ¿Y con una binaria?

Capítulo 7 Preguntas de repaso

1. ¿Qué funciones tienen inversas? ¿Cómo sabe si dos funciones f y g son inversas una de la otra? Dé ejemplos de funciones que sean (o no sean) inversas una de la otra.

2. ¿Cómo se relacionan los dominios, los rangos y las gráficas de funciones y sus inversas? Dé un ejemplo.

3. ¿Cómo es posible expresar en ocasiones la inversa de una función de x como una función de x?

4. ¿En qué circunstancias se puede asegurar que la inversa de una función f es diferenciable? ¿Cómo se relacionan las derivadas de f y f^{-1}?

5. ¿Qué es la función logaritmo natural? ¿Cuál es su dominio, rango y derivada? ¿Qué propiedades aritméticas tiene? Comente su gráfica.

6. ¿Qué es la diferenciación logarítmica? Dé un ejemplo.

7. ¿Qué integrales conducen a logaritmos? Dé ejemplos. ¿Cuáles son las integrales de $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$?

8. ¿Cómo se define la función exponencial e^x? ¿Cuál es su dominio, rango y derivada? ¿Qué leyes de exponentes obedece? Comente su gráfica.

9. ¿Cómo se definen las funciones a^x y $\log_a x$? ¿Existen restricciones en a? ¿Cómo se relaciona la gráfica de $\log_a x$ con la de $\ln x$? ¿Es verdad que sólo existe una función exponencial y una función logaritmo?

10. ¿Cómo se resuelven las ecuaciones diferenciales separables de primer orden?

11. ¿Qué es la ley de cambio exponencial? ¿Cómo puede deducirse con base en un problema con valor inicial? ¿Cuáles son algunas de las aplicaciones de esta ley?

12. Describa la regla de L'Hôpital. ¿Cómo sabe cuándo usar la regla y cuándo detenerse? Dé un ejemplo.

13. ¿Cómo puede manejar algunas veces los límites que conducen a formas indeterminadas como ∞/∞, $\infty \cdot 0$ y $\infty - \infty$? Dé ejemplos.

14. ¿Cómo puede manejar algunas veces los límites que conducen a formas indeterminadas como 1^∞, 0^0 y ∞^∞? Dé ejemplos.

15. ¿Cómo se definen las funciones trigonométricas inversas? ¿Cómo se pueden utilizar triángulos rectángulos para determinar los valores de estas funciones? Dé ejemplos.

16. ¿Cuáles son las derivadas de las funciones trigonométricas inversas? ¿Cómo son los dominios de las derivadas, en comparación con los dominios de las funciones?

17. ¿Qué integrales conducen a funciones trigonométricas inversas? ¿De qué forma se amplía la aplicación de estas integrales mediante la sustitución y el completamiento de cuadrados?

18. ¿Cuáles son las seis funciones hiperbólicas básicas? Comente sus dominios, rangos y gráficas. ¿Cuáles son algunas de las identidades que las relacionan?

19. ¿Cuáles son las derivadas de las seis funciones hiperbólicas básicas? ¿Cuáles son las correspondientes fórmulas de integrales? ¿Qué similitudes encuentra con respecto a las seis funciones trigonométricas básicas?

20. ¿Cómo se definen las funciones hiperbólicas inversas? Comente sus dominios, rangos y gráficas. ¿Cómo se pueden determinar los valores de $\text{sech}^{-1} x$, $\text{csch}^{-1} x$ y $\coth^{-1} x$ usando las teclas de $\cosh^{-1} x$, $\text{senh}^{-1} x$ y $\tanh^{-1} x$ de una calculadora?

21. ¿Qué integrales conducen de manera natural a las funciones hiperbólicas inversas?

22. ¿Cómo se comparan las razones de crecimiento de funciones positivas cuando $x \to \infty$?

23. ¿Qué papel desempeñan las funciones e^x y $\ln x$ en las comparaciones de crecimiento?

24. Describa la notación o pequeña y O grande. Dé ejemplos.

25. ¿Qué es más eficiente, una búsqueda secuencial o una búsqueda binaria? Explique.

Capítulo 7 Ejercicios de práctica

Obtención de derivadas

En los ejercicios 1 a 24, obtenga la derivada de y con respecto a la variable adecuada.

1. $y = 10e^{-x/5}$

2. $y = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}x}$

3. $y = \frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x}$

4. $y = x^2e^{-2/x}$

5. $y = \ln(\text{sen}^2\,\theta)$

6. $y = \ln(\sec^2\theta)$

7. $y = \log_2(x^2/2)$

8. $y = \log_5(3x - 7)$

9. $y = 8^{-t}$

10. $y = 9^{2t}$

11. $y = 5x^{3.6}$

12. $y = \sqrt{2}x^{-\sqrt{2}}$

13. $y = (x + 2)^{x+2}$

14. $y = 2(\ln x)^{x/2}$

15. $y = \text{sen}^{-1}\sqrt{1 - u^2}, \quad 0 < u < 1$

16. $y = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right), \quad v > 1$

17. $y = \ln\cos^{-1}x$

18. $y = z\cos^{-1}z - \sqrt{1 - z^2}$

19. $y = t\tan^{-1}t - \frac{1}{2}\ln t$

20. $y = (1 + t^2)\cot^{-1}2t$

21. $y = z\sec^{-1}z - \sqrt{z^2 - 1}, \quad z > 1$

22. $y = 2\sqrt{x - 1}\sec^{-1}\sqrt{x}$

23. $y = \csc^{-1}(\sec\theta), \quad 0 < \theta < \pi/2$

24. $y = (1 + x^2)e^{\tan^{-1}x}$

Diferenciación logarítmica

En los ejercicios 25 a 30, use diferenciación logarítmica para obtener la derivada de y con respecto a la variable adecuada.

25. $y = \dfrac{2(x^2 + 1)}{\sqrt{\cos 2x}}$

26. $y = \sqrt[10]{\dfrac{3x + 4}{2x - 4}}$

27. $y = \left(\dfrac{(t + 1)(t - 1)}{(t - 2)(t + 3)}\right)^5, \quad t > 2$

28. $y = \dfrac{2u2^u}{\sqrt{u^2 + 1}}$

29. $y = (\text{sen}\,\theta)^{\sqrt{\theta}}$

30. $y = (\ln x)^{1/(\ln x)}$

Evaluación de integrales

Evalúe las integrales en los ejercicios 31 a 78.

31. $\displaystyle\int e^x\,\text{sen}\,(e^x)\,dx$

32. $\displaystyle\int e^t\cos(3e^t - 2)\,dt$

33. $\displaystyle\int e^x\sec^2(e^x - 7)\,dx$

34. $\displaystyle\int e^y\csc(e^y + 1)\cot(e^y + 1)\,dy$

35. $\displaystyle\int \sec^2(x)e^{\tan x}\,dx$

36. $\displaystyle\int \csc^2 x\,e^{\cot x}\,dx$

37. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{3x - 4}$

38. $\displaystyle\int_1^e\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

39. $\displaystyle\int_0^{\pi}\tan\frac{x}{3}\,dx$

40. $\displaystyle\int_{1/6}^{1/4}2\cot\pi x\,dx$

41. $\displaystyle\int_0^4\frac{2t}{t^2 - 25}dt$

42. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/6}\frac{\cos t}{1 - \text{sen}\,t}dt$

43. $\displaystyle\int\frac{\tan(\ln v)}{v}dv$

44. $\displaystyle\int\frac{dv}{v\ln v}$

45. $\displaystyle\int\frac{(\ln x)^{-3}}{x}dx$

46. $\displaystyle\int\frac{\ln(x - 5)}{x - 5}dx$

47. $\displaystyle\int\frac{1}{r}\csc^2(1 + \ln r)\,dr$

48. $\displaystyle\int\frac{\cos(1 - \ln v)}{v}dv$

49. $\displaystyle\int x3^{x^2}\,dx$

50. $\displaystyle\int 2^{\tan x}\sec^2 x\,dx$

51. $\displaystyle\int_1^7\frac{3}{x}dx$

52. $\displaystyle\int_1^{32}\frac{1}{5x}dx$

53. $\displaystyle\int_1^4\left(\frac{x}{8} + \frac{1}{2x}\right)dx$

54. $\displaystyle\int_1^8\left(\frac{2}{3x} - \frac{8}{x^2}\right)dx$

55. $\displaystyle\int_{-2}^{-1}e^{-(x+1)}\,dx$

56. $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0}e^{2w}\,dw$

57. $\displaystyle\int_0^{\ln 5}e^r(3e^r + 1)^{-3/2}\,dr$

58. $\displaystyle\int_0^{\ln 9}e^{\theta}(e^{\theta} - 1)^{1/2}\,d\theta$

59. $\displaystyle\int_1^e\frac{1}{x}(1 + 7\ln x)^{-1/3}\,dx$

60. $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$

61. $\displaystyle\int_1^3 \frac{(\ln(v+1))^2}{v+1}\,dv$

62. $\displaystyle\int_2^4 (1+\ln t)t\ln t\,dt$

63. $\displaystyle\int_1^8 \frac{\log_4\theta}{\theta}\,d\theta$

64. $\displaystyle\int_1^e \frac{8\ln 3\log_3\theta}{\theta}\,d\theta$

65. $\displaystyle\int_{-3/4}^{3/4} \frac{6\,dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

66. $\displaystyle\int_{-1/5}^{1/5} \frac{6\,dx}{\sqrt{4-25x^2}}$

67. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{3\,dt}{4+3t^2}$

68. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dt}{3+t^2}$

69. $\displaystyle\int \frac{dy}{y\sqrt{4y^2-1}}$

70. $\displaystyle\int \frac{24\,dy}{y\sqrt{y^2-16}}$

71. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dy}{|y|\sqrt{9y^2-1}}$

72. $\displaystyle\int_{-2/\sqrt{5}}^{-\sqrt{6}/\sqrt{5}} \frac{dy}{|y|\sqrt{5y^2-3}}$

73. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-2x-x^2}}$

74. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-1}}$

75. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{2\,dv}{v^2+4v+5}$

76. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3\,dv}{4v^2+4v+4}$

77. $\displaystyle\int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t^2+2t-8}}$

78. $\displaystyle\int \frac{dt}{(3t+1)\sqrt{9t^2+6t}}$

Solución de ecuaciones

En los ejercicios 79 a 84, despeje y.

79. $3^y = 2^{y+1}$

80. $4^{-y} = 3^{y+2}$

81. $9e^{2y} = x^2$

82. $3^y = 3\ln x$

83. $\ln(y-1) = x + \ln y$

84. $\ln(10\ln y) = \ln 5x$

Uso de la regla de L'Hôpital

Use la regla de L'Hôpital para obtener los límites en los ejercicios 85 a 108.

85. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}$

86. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^a-1}{x^b-1}$

87. $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\tan x}{x}$

88. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x+\operatorname{sen} x}$

89. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\tan(x^2)}$

90. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} nx}$

91. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2^-}\sec 7x\cos 3x$

92. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sec x$

93. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\csc x-\cot x)$

94. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}\right)$

95. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$

96. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-\frac{x^3}{x^2+1}\right)$

97. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{10^x-1}{x}$

98. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{3^\theta-1}{\theta}$

99. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^{\operatorname{sen} x}-1}{e^x-1}$

100. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^{-\operatorname{sen} x}-1}{e^x-1}$

101. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{5-5\cos x}{e^x-x-1}$

102. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen} x^2}{\tan^3 x}$

103. $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{t-\ln(1+2t)}{t^2}$

104. $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{\operatorname{sen}^2(\pi x)}{e^{x-4}+3-x}$

105. $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{e^t}{t}-\frac{1}{t}\right)$

106. $\displaystyle\lim_{y\to 0^+} e^{-1/y}\ln y$

107. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)^{\ln x}$

108. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$

Comparación de razones de crecimiento de funciones

109. ¿f crece más rápido, más lento o a la misma razón que g cuando $x\to\infty$? Justifique sus respuestas.

a) $f(x)=\log_2 x$, $g(x)=\log_3 x$

b) $f(x)=x$, $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$

c) $f(x)=x/100$, $g(x)=xe^{-x}$

d) $f(x)=x$, $g(x)=\tan^{-1}x$

e) $f(x)=\csc^{-1}x$, $g(x)=1/x$

f) $f(x)=\operatorname{senh} x$, $g(x)=e^x$

110. ¿f crece más rápido, más lento o a la misma razón que g cuando $x\to\infty$? Justifique sus respuestas.

a) $f(x)=3^{-x}$, $g(x)=2^{-x}$

b) $f(x)=\ln 2x$, $g(x)=\ln x^2$

c) $f(x)=10x^3+2x^2$, $g(x)=e^x$

d) $f(x)=\tan^{-1}(1/x)$, $g(x)=1/x$

e) $f(x)=\operatorname{sen}^{-1}(1/x)$, $g(x)=1/x^2$

f) $f(x)=\operatorname{sech} x$, $g(x)=e^{-x}$

111. ¿Verdadero o falso? Justifique sus respuestas.

a) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}=O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

b) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}=O\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$

c) $x=o(x+\ln x)$

d) $\ln(\ln x)=o(\ln x)$

e) $\tan^{-1}x=O(1)$

f) $\cosh x=O(e^x)$

112. ¿Verdadero o falso? Justifique sus respuestas.

a) $\dfrac{1}{x^4}=O\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}\right)$

b) $\dfrac{1}{x^4}=o\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}\right)$

c) $\ln x=o(x+1)$

d) $\ln 2x=O(\ln x)$

e) $\sec^{-1}x=O(1)$

f) $\operatorname{senh} x=O(e^x)$

Teoría y aplicaciones

113. Como la función $f(x)=e^x+x$ es diferenciable e inyectiva, tiene una inversa diferenciable $f^{-1}(x)$. Obtenga el valor de df^{-1}/dx en el punto $f(\ln 2)$.

114. Obtenga la inversa de la función $f(x)=1+(1/x)$, $x\neq 0$. Demuestre después que $f^{-1}(f(x))=f(f^{-1}(x))=x$ y que

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{f(x)}=\frac{1}{f'(x)}.$$

En los ejercicios 115 y 116, obtenga los valores absolutos máximo y mínimo de cada función en el intervalo que se indica.

115. $y=x\ln 2x-x$, $\left[\dfrac{1}{2e},\dfrac{e}{2}\right]$

116. $y=10x(2-\ln x)$, $(0,e^2]$

117. Área Obtenga el área que se encuentra entre la curva $y = 2(\ln x)/x$ y el eje x de $x = 1$ a $x = e$.

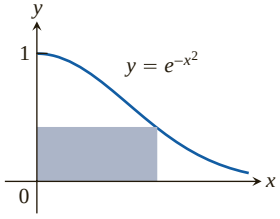
118. ***a)*** Demuestre que el área que se encuentra entre la curva $y = 1/x$ y el eje x, de $x = 10$ a $x = 20$, es igual al área que está entre la curva y el eje x de $x = 1$ a $x = 2$.

b) Demuestre que el área que se encuentra entre la curva $y = 1/x$ y el eje x de ka a kb es igual al área que está entre la curva y el eje x de $x = a$ a $x = b$ $(0 < a < b, k > 0)$.

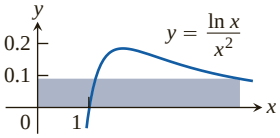
119. ***a)*** Una partícula viaja hacia arriba y a la derecha a lo largo de la curva $y = \ln x$. Su coordenada x crece según la razón $(dx/dt) = \sqrt{x}$ m/s. ¿Cuál es la razón de cambio de la coordenada y en el punto $(e^2, 2)$?

120. Una niña se desliza por un tobogán cuya forma es la curva $y = 9e^{-x/3}$. Su coordenada y cambia según la razón $dy/dt = (-1/4)\sqrt{9 - y}$ ft/s. ¿A qué razón cambia aproximadamente su coordenada x cuando llega a la parte inferior del tobogán en $x = 9$ ft? (Tome 20 como valor de e^3 y redondee la respuesta al ft/s más cercano).

121. El rectángulo de la figura tiene un lado sobre el eje y positivo, un lado sobre el eje x positivo, y su vértice superior derecho está sobre la curva $y = e^{-x^2}$. ¿Con qué dimensiones alcanza el rectángulo un área máxima y cuál es esa área?



122. El rectángulo de la figura tiene un lado sobre el eje y positivo, otro sobre el eje x positivo, y su vértice superior derecho está sobre la curva $y = (\ln x)/x^2$. ¿Con qué dimensiones alcanza el rectángulo un área máxima y cuál es esa área?



T **123.** Grafique las siguientes funciones y considere lo que ve para localizar y estimar los valores extremos; identifique las coordenadas de los puntos de inflexión, así como los intervalos en los que las gráficas son cóncavas hacia arriba y cóncavas hacia abajo. Después, confirme sus estimaciones trabajando con las derivadas de las funciones.

a) $y = (\ln x)/\sqrt{x}$

b) $y = e^{-x^2}$

c) $y = (1 + x)e^{-x}$

T **124.** Grafique $f(x) = x \ln x$. ¿Le parece que la función tiene un valor mínimo absoluto? Confirme su respuesta con cálculo.

En los ejercicios 125 a 128, resuelva la ecuación diferencial.

125. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y}\cos^2\sqrt{y}$

126. $y' = \dfrac{3y(x + 1)^2}{y - 1}$

127. $yy' = \sec y^2 \sec^2 x$

128. $y\cos^2 x\, dy + \operatorname{sen} x\, dx = 0$

En los ejercicios 129 a 132, resuelva el problema con valor inicial.

129. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x-y-2}, \quad y(0) = -2$

130. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y \ln y}{1 + x^2}, \quad y(0) = e^2$

131. $x\, dy - \left(y + \sqrt{y}\right) dx = 0, \quad y(1) = 1$

132. $y^{-2}\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{e^x}{e^{2x} + 1}, \quad y(0) = 1$

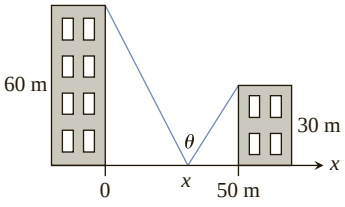
133. ¿Cuál es la antigüedad de una muestra de carbón vegetal en la que el 90% del carbono 14 original ha decaído?

134. Enfriamiento de una tarta En un plato hondo, una tarta cuya temperatura interna era de 220°F al sacarse del horno, se deja enfriar en una terraza bien ventilada a 40°F. Quince minutos más tarde, la temperatura interna de la tarta es de 180°F. ¿Cuánto tiempo más tardará en enfriarse hasta llegar a 70°F?

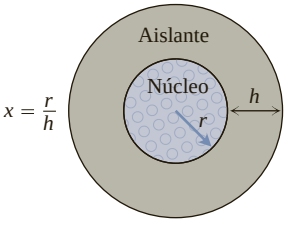
135. Ubicación de una estación solar Usted firmó un contrato para construir una estación solar al nivel del suelo, con alineación este-oeste entre los dos edificios de la figura. ¿A qué distancia del edificio más alto debe ubicar la estación para maximizar el número de horas que recibirá la luz solar cada día en que el Sol pase directamente por arriba? Observe primero que

$$\theta = \pi - \cot^{-1}\frac{x}{60} - \cot^{-1}\frac{50 - x}{30}.$$

Después, obtenga el valor de x que maximiza θ.



136. Un cable redondo para transmisión submarina consiste en un núcleo de alambres de cobre, forrado con un material aislante no conductor. Si x es la razón entre el radio del núcleo y el espesor del aislante, sabemos que la velocidad de la señal transmitida está dada por la ecuación $v = x^2 \ln(1/x)$. Si el radio del núcleo es de 1 cm, ¿qué espesor h del aislante permitirá la mayor velocidad de transmisión?



Capítulo 7 Ejercicios adicionales y avanzados

Límites

En los ejercicios 1 a 6, obtenga los límites.

1. $\lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \tan^{-1} t\, dt$

3. $\lim_{x\to 0^+} (\cos\sqrt{x})^{1/x}$

4. $\lim_{x\to\infty} (x + e^x)^{2/x}$

5. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$

6. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(e^{1/n} + e^{2/n} + \cdots + e^{(n-1)/n} + e^{n/n}\right)$

7. Sea $A(t)$ el área de la región comprendida en el primer cuadrante y acotada por los ejes de coordenadas, la curva $y = e^{-x}$ y la recta vertical $x = t$, $t > 0$. Sea $V(t)$ el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor del eje x. Determine los siguientes límites.

a) $\lim_{t\to\infty} A(t)$ ***b)*** $\lim_{t\to\infty} V(t)/A(t)$ ***c)*** $\lim_{t\to 0^+} V(t)/A(t)$

8. Variación de la base de un logaritmo

a) Obtenga $\lim \log_a 2$ cuando $a \to 0^+, 1^-, 1^+$ e ∞.

T ***b)*** Grafique $y = \log_a 2$ como una función de a en el intervalo $0 < a \le 4$.

Teoría y ejemplos

9. Obtenga las áreas entre las curvas $y = 2(\log_2 x)/x$ y $y = 2(\log_4 x)/x$ y el eje x, de $x = 1$ a $x = e$. ¿Cuál es la razón entre el área mayor y el área menor?

T **10.** Grafique $f(x) = \tan^{-1} x + \tan^{-1}(1/x)$ para $-5 \le x \le 5$. Después, utilice cálculo para explicar lo que observa en la gráfica. ¿Cómo esperaría que se comporte f más allá del intervalo $[-5, 5]$? Justifique su respuesta.

11. ¿Para cuáles $x > 0$ se cumple $x^{(x^x)} = (x^x)^x$? Justifique su respuesta.

T **12.** Grafique $f(x) = (\text{sen } x)^{\text{sen } x}$ en $[0, 3\pi]$. Explique lo que observa en la gráfica.

13. Obtenga $f'(2)$ si $f(x) = e^{g(x)}$ y $g(x) = \int_2^x \frac{t}{1+t^4}dt$.

14. ***a)*** Obtenga df/dx si

$$f(x) = \int_1^{e^x} \frac{2\ln t}{t}dt.$$

b) Obtenga $f(0)$.

c) ¿Qué concluye acerca de la gráfica de f? Justifique su respuesta.

15. Descomposiciones par-impar

a) Suponga que g es una función par de x, y h es una función impar de x. Demuestre que si $g(x) + h(x) = 0$ para toda x, entonces, $g(x) = 0$ para toda x y $h(x) = 0$ para toda x.

b) Si $f(x) = f_E(x) + f_O(x)$ es la suma de una función par $f_E(x)$ y una función impar $f_O(x)$, entonces, demuestre que

$$f_E(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{y} \quad f_O(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

c) ¿Qué significa el resultado del inciso *b*)?

16. Sea g una función diferenciable en todo el intervalo abierto que contiene al origen. Suponga que g tiene las siguientes propiedades:

i. $g(x + y) = \frac{g(x) + g(y)}{1 - g(x)g(y)}$ para todos los números reales x, y, y $x + y$ en el dominio de g.

ii. $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$

iii. $\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = 1$

a) Demuestre que $g(0) = 0$.

b) Demuestre que $g'(x) = 1 + [g(x)]^2$

c) Obtenga $g(x)$ resolviendo la ecuación diferencial del inciso *b*).

17. Centro de masa Obtenga el centro de masa de una placa delgada con densidad constante, que cubre una región localizada en el primero y cuarto cuadrantes y está acotada por las curvas $y = 1/(1 + x^2)$ y $y = -1/(1 + x^2)$ y por las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

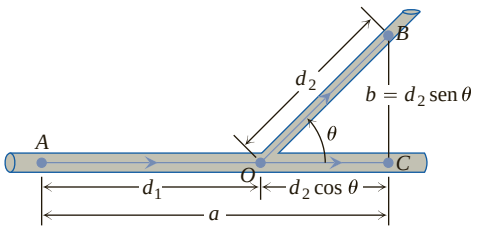
18. Sólido de revolución La región entre la curva $y = 1/(2\sqrt{x})$ y el eje x, de $x = 1/4$ a $x = 4$, se hace girar sobre el eje x para generar un sólido.

a) Calcule el volumen del sólido.

b) Determine el centroide de la región.

19. Los mejores ángulos para ramificación de vasos sanguíneos y tuberías Cuando un tubo se ramifica en otro más pequeño en un sistema de flujo, tal vez queramos darle el ángulo más adecuado desde el punto de vista de ahorro de energía. Se podría requerir, por ejemplo, que la pérdida de energía a causa de la fricción se minimice en la sección AOB de la siguiente figura. En este diagrama, B es un punto dado al que debe tener acceso el tubo pequeño. A es un punto del tubo más grande, localizado corriente arriba desde B, y O es el punto donde se localiza la ramificación. Una ley, debida a Poiseuille, establece que, en un flujo no turbulento, la pérdida de energía a causa de la fricción es proporcional a la longitud del trayecto recorrido e inversamente proporcional a la cuarta potencia del radio del tubo. Así, la pérdida a lo largo de AO es $(kd_1)/R^4$ y a lo largo de OB es $(kd_2)/r^4$, donde k es una constante, d_1 es la longitud de AO, d_2 es la longitud de OB, R es el radio del tubo grande, y r es el radio del tubo pequeño. Es necesario elegir el ángulo θ de modo que se minimice la suma de estas dos pérdidas:

$$L = k\frac{d_1}{R^4} + k\frac{d_2}{r^4}.$$



En nuestro modelo, suponemos que $AC = a$ y $BC = b$ son longitudes fijas. De esta forma, tenemos las relaciones

$$d_1 + d_2\cos\theta = a \qquad d_2 \text{ sen } \theta = b$$

de modo que

$$d_2 = b \csc \theta,$$
$$d_1 = a - d_2 \cos \theta = a - b \cot \theta.$$

Podemos expresar la pérdida total L como una función de θ:

$$L = k\left(\frac{a - b \cot \theta}{R^4} + \frac{b \csc \theta}{r^4}\right).$$

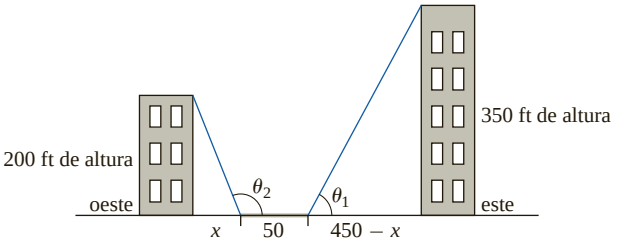
a) Demuestre que el valor crítico de θ para el que $dL/d\theta$ es igual a cero es

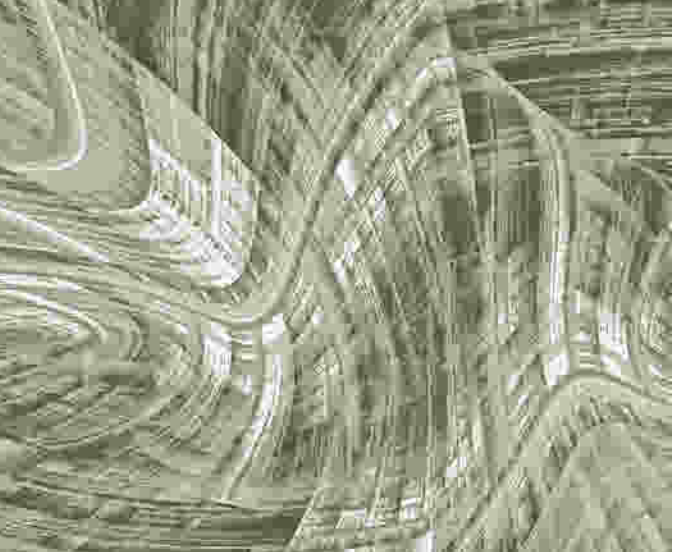
$$\theta_c = \cos^{-1} \frac{r^4}{R^4}.$$

b) Si la razón entre los radios de los tubos es $r/R = 5/6$, estime el ángulo de ramificación óptimo descrito en el inciso *a*), redondeando al grado más próximo.

El análisis matemático descrito se usa también para explicar los ángulos en que se ramifican las arterias en el cuerpo de un animal.

T **20. Jardinería urbana** Un jardín de vegetales de 50 ft de ancho crece entre dos edificios que están separados 500 ft a lo largo de la recta este-oeste. Si los edificios miden 200 ft y 350 ft de altura, ¿dónde se debe colocar el jardín para que reciba la luz solar el número máximo de horas? (*Sugerencia:* Determine el valor de x, en la figura, que maximiza la exposición del jardín a la luz del Sol).





8 Técnicas de integración

INTRODUCCIÓN El teorema fundamental nos dice cómo evaluar una integral definida una vez que tenemos una antiderivada de la función del integrando. Sin embargo, la obtención de antiderivadas (o integrales indefinidas) no es tan directa como en el caso de las derivadas. Es necesario desarrollar algunas técnicas que nos ayuden. Sin embargo, no siempre es posible obtener una antiderivada expresada en términos de funciones elementales.

En este capítulo estudiaremos algunas técnicas importantes para obtener integrales de funciones más especializadas, como las funciones trigonométricas, los productos de ciertas funciones y las funciones racionales. Como no siempre es posible obtener una antiderivada, también desarrollaremos algunos métodos numéricos para calcular integrales definidas. Por último, extenderemos la idea de la integral definida a las *integrales impropias*, y usaremos éstas en la obtención de probabilidades.

8.1 Uso de las fórmulas básicas de integración

La tabla 8.1 resume las formas de las integrales indefinidas de muchas de las funciones que hemos estudiado hasta ahora. Por otro lado, el método de sustitución nos ayuda a utilizar la tabla para evaluar funciones más complicadas que involucran a estas funciones básicas. En esta sección combinaremos las reglas de sustitución (estudiadas en el capítulo 5) con métodos algebraicos e identidades trigonométricas, para ayudarnos a usar la tabla 8.1. En la parte final del libro se incluye una tabla más extensa de integrales, cuyo uso analizaremos en la sección 8.6.

Algunas veces es necesario rescribir una integral para que coincida con alguna de las formas incluidas en la tabla 8.1. Hemos empleado este procedimiento con anterioridad, pero a continuación se presenta otro ejemplo.

EJEMPLO 1 Evalúe la integral

$$\int_3^5 \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 3x + 1}}\, dx.$$

Solución Rescribimos la integral y aplicamos la regla de sustitución para integrales definidas presentada en la sección 5.6; así, obtenemos

$$\int_3^5 \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 3x + 1}}\, dx = \int_1^{11} \frac{du}{\sqrt{u}} \qquad \begin{array}{l} u = x^2 - 3x + 1,\ du = (2x - 3)\, dx; \\ u = 1 \text{ cuando } x = 3,\ u = 11 \text{ cuando } x = 5 \end{array}$$

$$= \int_1^{11} u^{-1/2}\, du$$

$$= 2\sqrt{u}\Big]_1^{11} = 2\left(\sqrt{11} - 1\right) \approx 4.63. \qquad \text{Fórmula 2, tabla 8.1} \quad \blacksquare$$

TABLA 8.1 Fórmulas básicas de integración

1. $\int k\,dx = kx + C$ (cualquier número k)
2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int e^x\,dx = e^x + C$
5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$
6. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
8. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
9. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
10. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
11. $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$
12. $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$
13. $\int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$
14. $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
15. $\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$
16. $\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$
17. $\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
19. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad (a > 0)$
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad (x > a > 0)$

EJEMPLO 2 Complete el cuadrado para evaluar

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8x - x^2}}.$$

Solución Completamos el cuadrado para simplificar el denominador:

$$\begin{aligned} 8x - x^2 &= -(x^2 - 8x) = -(x^2 - 8x + 16 - 16) \\ &= -(x^2 - 8x + 16) + 16 = 16 - (x - 4)^2. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{8x - x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{16 - (x-4)^2}} \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} && a = 4,\ u = (x-4),\ du = dx \\ &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C && \text{Fórmula 18, tabla 8.1} \\ &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-4}{4}\right) + C. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Evalúe la integral

$$\int (\cos x \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x \cos 2x)\, dx.$$

Solución Aquí cambiamos el integrando por una expresión trigonométrica equivalente utilizando la fórmula de adición del seno para obtener una sustitución sencilla:

$$\begin{aligned}\int (\cos x \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x \cos 2x)\, dx &= \int (\operatorname{sen}(x + 2x))\, dx \\ &= \int \operatorname{sen} 3x\, dx \\ &= \int \frac{1}{3} \operatorname{sen} u\, du \qquad u = 3x,\ du = 3\, dx \\ &= -\frac{1}{3} \cos 3x + C. \qquad \text{Fórmula 6, tabla 8.1}\end{aligned}$$

■

En la sección 7.2 obtuvimos la integral indefinida de la función secante multiplicándola por una fracción igual a 1 e integrando después el resultado. Es posible usar el mismo procedimiento en otros casos, lo que se ilustra a continuación.

EJEMPLO 4 Obtenga $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x}$.

Solución Se multiplica el numerador y el denominador del integrando por $1 + \operatorname{sen} x$, que es simplemente una multiplicación por 1. Este procedimiento convierte a la integral en una que podemos evaluar:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x} &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} \cdot \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}\, dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}\, dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx \\ &= \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x + \sec x \tan x)\, dx \qquad \text{Fórmulas 8 y 10, tabla 8.1} \\ &= \Big[\tan x + \sec x\Big]_0^{\pi/4} = \big(1 + \sqrt{2} - (0 + 1)\big) = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 Evalúe

$$\int \frac{3x^2 - 7x}{3x + 2}\, dx.$$

Solución El integrando es una fracción impropia, ya que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador. Para integrarlo, hacemos una división larga para obtener un cociente y un residuo que es una fracción propia:

$$\begin{array}{r} x - 3 \\ 3x + 2 \overline{)\, 3x^2 - 7x} \\ \underline{3x^2 + 2x} \\ -9x \\ \underline{-9x - 6} \\ +6 \end{array}$$

$$\frac{3x^2 - 7x}{3x + 2} = x - 3 + \frac{6}{3x + 2}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{3x^2 - 7x}{3x + 2}\,dx = \int\left(x - 3 + \frac{6}{3x + 2}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 2\ln|3x + 2| + C. \quad \blacksquare$$

La reducción de una fracción impropia con una división larga (ejemplo 5) no siempre conduce a una expresión que se pueda integrar directamente. En la sección 8.5 veremos qué se hace en este caso.

EJEMPLO 6 Evalúe

$$\int \frac{3x + 2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx.$$

Solución Primero separamos el integrando para obtener

$$\int \frac{3x + 2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = 3\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Sustituimos en la primera de estas integrales:

$$u = 1 - x^2, \qquad du = -2x\,dx, \qquad \text{de manera que} \qquad x\,dx = -\frac{1}{2}\,du.$$

Después, obtenemos

$$\begin{aligned} 3\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} &= 3\int \frac{(-1/2)\,du}{\sqrt{u}} = -\frac{3}{2}\int u^{-1/2}\,du \\ &= -\frac{3}{2}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2} + C_1 = -3\sqrt{1 - x^2} + C_1. \end{aligned}$$

La segunda de las nuevas integrales tiene una forma estándar,

$$2\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 2\,\text{sen}^{-1}\,x + C_2. \qquad \text{Fórmula 18, tabla 8.1}$$

Al combinar estos resultados y denotando $C_1 + C_2$ como C, obtenemos

$$\int \frac{3x + 2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = -3\sqrt{1 - x^2} + 2\,\text{sen}^{-1}\,x + C. \quad \blacksquare$$

No siempre resulta muy claro qué es lo que hay que sustituir en el integrando. Algunas veces procedemos simplemente por ensayo y error, y si nada funciona, entonces intentamos con otro método. En varias de las secciones que siguen se presentan algunos de estos métodos, pero en el siguiente ejemplo, la sustitución funciona adecuadamente.

EJEMPLO 7 Evalúe

$$\int \frac{dx}{\left(1 + \sqrt{x}\right)^3}.$$

Solución Podríamos intentar la sustitución con el término $\sqrt{x}$, pero en seguida nos damos cuenta de que falta el factor con la derivada $1/\sqrt{x}$ en el integrando, de modo que esta sustitución no funciona. La otra posibilidad es sustituir $\left(1 + \sqrt{x}\right)$; esto sí funciona:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\left(1 + \sqrt{x}\right)^3} &= \int \frac{2(u - 1)\,du}{u^3} \qquad u = 1 + \sqrt{x},\ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx; \\ &\qquad\qquad dx = 2\sqrt{x}\,du = 2(u - 1)\,du \\ &= \int\left(\frac{2}{u^2} - \frac{2}{u^3}\right)du \end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{u} + \frac{1}{u^2} + C$$
$$= \frac{1 - 2u}{u^2} + C$$
$$= \frac{1 - 2\left(1 + \sqrt{x}\right)}{\left(1 + \sqrt{x}\right)^2} + C$$
$$= C - \frac{1 + 2\sqrt{x}}{\left(1 + \sqrt{x}\right)^2}.$$

■

Cuando se evalúan integrales definidas, alguna propiedad del integrando nos puede ayudar a calcular el resultado.

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3 \cos x \, dx$.

Solución Aquí no se ve con claridad que una sustitución o una manipulación algebraica resulten adecuadas. Sin embargo, observamos que el intervalo de integración es el intervalo simétrico $[-\pi/2, \pi/2]$. Además, el factor x^3 es una función impar, y cos x es una función par, de modo que su producto es impar. Por lo tanto,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3 \cos x \, dx = 0.$$ Teorema 8, sección 5.6

■

Ejercicios 8.1

Miscelánea de integrales

Las integrales en los ejercicios 1 a 40 no tienen algún orden particular. Evalúe cada integral utilizando un método algebraico o una identidad trigonométrica que considere adecuados y, después, realice sustitución para reducir la integral a una forma estándar.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{16x}{8x^2 + 2}\, dx$

2. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2 + 1}\, dx$

3. $\displaystyle\int (\sec x - \tan x)^2\, dx$

4. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x \tan x}$

5. $\displaystyle\int \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$

7. $\displaystyle\int \frac{e^{-\cot z}}{\operatorname{sen}^2 z}\, dz$

8. $\displaystyle\int \frac{2^{\ln z^3}}{16z}\, dz$

9. $\displaystyle\int \frac{dz}{e^z + e^{-z}}$

10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{8\, dx}{x^2 - 2x + 2}$

11. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{4\, dx}{1 + (2x + 1)^2}$

12. $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{4x^2 - 7}{2x + 3}\, dx$

13. $\displaystyle\int \frac{dt}{1 - \sec t}$

14. $\displaystyle\int \csc t \operatorname{sen} 3t\, dt$

15. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$

16. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sqrt{2\theta - \theta^2}}$

17. $\displaystyle\int \frac{\ln y}{y + 4y \ln^2 y}\, dy$

18. $\displaystyle\int \frac{2^{\sqrt{y}}\, dy}{2\sqrt{y}}$

19. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$

20. $\displaystyle\int \frac{dt}{t\sqrt{3 + t^2}}$

21. $\displaystyle\int \frac{4t^3 - t^2 + 16t}{t^2 + 4}\, dt$

22. $\displaystyle\int \frac{x + 2\sqrt{x - 1}}{2x\sqrt{x - 1}}\, dx$

23. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos\theta}\, d\theta$

24. $\displaystyle\int (\sec t + \cot t)^2\, dt$

25. $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{e^{2y} - 1}}$

26. $\displaystyle\int \frac{6\, dy}{\sqrt{y}\,(1 + y)}$

27. $\displaystyle\int \frac{2\, dx}{x\sqrt{1 - 4\ln^2 x}}$

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x - 2)\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$

29. $\displaystyle\int (\csc x - \sec x)(\operatorname{sen} x + \cos x)\, dx$

30. $\displaystyle\int 3 \operatorname{senh}\left(\frac{x}{2} + \ln 5\right) dx$

31. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^3 \frac{2x^3}{x^2 - 1}\, dx$

32. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2}\, \operatorname{sen} x\, dx$

33. $\displaystyle\int_{-1}^0 \sqrt{\frac{1 + y}{1 - y}}\, dy$

34. $\displaystyle\int e^{z + e^z}\, dz$

35. $\displaystyle\int \frac{7\,dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x-48}}$

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x+4x^2}}$

37. $\displaystyle\int \frac{2\theta^3-7\theta^2+7\theta}{2\theta-5}\,d\theta$

38. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\cos\theta-1}$

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$

Sugerencia: Realice una división larga.

40. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx$

Sugerencia: Considere $u = x^{3/2}$.

Teoría y ejemplos

41. Área Obtenga el área de la región acotada arriba por $y = 2\cos x$ y abajo por $y = \sec x$, $-\pi/4 \le x \le \pi/4$.

42. Volumen Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región del ejercicio 41 alrededor del eje x.

43. Longitud de arco Obtenga la longitud de la curva $y = \ln(\cos x)$, $0 \le x \le \pi/3$.

44. Longitud de arco Obtenga la longitud de la curva $y = \ln(\sec x)$, $0 \le x \le \pi/4$.

45. Centroide Obtenga el centroide de la región acotada por el eje x, la curva $y = \sec x$, y las rectas $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$.

46. Centroide Obtenga el centroide de la región acotada por el eje x, la curva $y = \csc x$, y las rectas $x = \pi/6$, $x = 5\pi/6$.

47. Las funciones $y = e^{x^3}$ y $y = x^3e^{x^3}$ no tienen antiderivadas elementales, pero $y = (1+3x^3)e^{x^3}$ sí.

Evalúe

$$\int (1+3x^3)e^{x^3}dx.$$

48. Utilice la sustitución $u = \tan x$ para evaluar la integral

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}.$$

49. Use la sustitución $u = x^4 + 1$ para evaluar la integral

$$\int x^7\sqrt{x^4+1}\,dx.$$

50. Uso de diferentes sustituciones Demuestre que es posible evaluar la integral

$$\int ((x^2-1)(x+1))^{-2/3}dx$$

con cualquiera de las siguientes sustituciones.

a) $u = 1/(x+1)$

b) $u = ((x-1)/(x+1))^k$ para $k = 1, 1/2, 1/3, -1/3, -2/3,$ y -1

c) $u = \tan^{-1} x$

d) $u = \tan^{-1}\sqrt{x}$

e) $u = \tan^{-1}((x-1)/2)$

f) $u = \cos^{-1} x$

g) $u = \cosh^{-1} x$

¿Cuál es el valor de la integral?

8.2 Integración por partes

La integración por partes es una técnica para simplificar integrales de la forma

$$\int f(x)g(x)\,dx.$$

Esta técnica es conveniente cuando es posible diferenciar f varias veces, al tiempo que g se puede integrar repetidamente sin dificultad. Las integrales

$$\int x\cos x\,dx \qquad \text{y} \qquad \int x^2e^x\,dx$$

son un ejemplo de lo anterior, ya que es posible diferenciar $f(x) = x$ o $f(x) = x^2$ varias veces para obtener la función cero, en tanto que $g(x) = \cos x$ o $g(x) = e^x$ se pueden integrar repetidamente sin dificultad. La integración por partes también se aplica a integrales como

$$\int \ln x\,dx \qquad \text{y} \qquad \int e^x\cos x\,dx.$$

En el primer caso, $f(x) = \ln x$ es fácil de diferenciar, y $g(x) = 1$ se integra fácilmente con respecto a x. En el segundo caso, cada parte del integrando aparece nuevamente después de derivar o integrar repetidamente.

Regla del producto en forma de integral

Si f y g son funciones diferenciables de x, la regla del producto afirma que

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

En términos de integrales indefinidas, la ecuación se convierte en

$$\int \frac{d}{dx}[\,f(x)g(x)\,]\,dx = \int [\,f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,]\,dx$$

o

$$\int \frac{d}{dx}[\,f(x)g(x)\,]\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Al reordenar los términos de esta última ecuación, se obtiene

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}[\,f(x)g(x)\,]\,dx - \int f'(x)g(x)\,dx,$$

lo que nos conduce a la fórmula de **integración por partes**

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \tag{1}$$

Algunas veces es más fácil recordar la fórmula si la escribimos en forma diferencial. Sea $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces, $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$. Usando la regla de la sustitución, la fórmula de integración por partes se convierte en:

Fórmula de integración por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{2}$$

Esta fórmula expresa una integral, $\int u\,dv$, en términos de una segunda integral, $\int v\,du$. Con la elección adecuada de u y v, la segunda integral podría ser más fácil de evaluar que la primera. Al utilizar la fórmula, existen varias opciones disponibles para u y dv. El siguiente ejemplo ilustra la técnica. Para evitar errores, siempre se listan las opciones de u y dv, después se agregan a la lista los nuevos términos calculados du y v, y finalmente se aplica la fórmula de la ecuación (2).

EJEMPLO 1 Obtenga

$$\int x \cos x\,dx.$$

Solución Usamos la fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ con

$$u = x, \qquad dv = \cos x\,dx,$$
$$du = dx, \qquad v = \operatorname{sen} x. \qquad \text{Antiderivada más sencilla de } \cos x$$

Entonces,

$$\int x \cos x\,dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C. \qquad \blacksquare$$

Aparentemente, hay cuatro opciones disponibles de u y dv en el ejemplo 1:

1. Sean $u = 1$ y $dv = x \cos x\,dx$.
2. Sean $u = x$ y $dv = \cos x\,dx$.
3. Sean $u = x \cos x$ y $dv = dx$.
4. Sean $u = \cos x$ y $dv = x\,dx$.

En el ejemplo 1 se usó la opción 2. Las otras tres opciones conducen a integrales que no sabemos cómo integrar. Por ejemplo, la opción 3, con $du = (\cos x - x \operatorname{sen} x)\,dx$ nos lleva a la integral

$$\int (x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x)\,dx.$$

El objetivo de la integración por partes es pasar de una integral $\int u\,dv$ que no sabemos cómo evaluar a una integral $\int v\,du$, que sí podamos evaluar. Por lo general, primero se elige como dv tanto como sea posible del integrando, incluyendo a dx, y que sea fácil de integrar; u es la parte restante. Cuando se obtiene v a partir de dv, cualquier antiderivada funcionará y se elige la más sencilla; no se necesita una constante de integración arbitraria en v porque simplemente se cancelaría en el lado derecho de la ecuación (2).

EJEMPLO 2 Obtenga

$$\int \ln x\,dx.$$

Solución Como $\int \ln x\,dx$ se puede escribir como $\int \ln x \cdot 1\,dx$, usamos la fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ con

$u = \ln x$ Se simplifica al diferenciar $\qquad dv = dx$ Fácil de integrar

$du = \frac{1}{x}\,dx,$ $\qquad v = x.$ Antiderivada más sencilla

Entonces, según la ecuación (2),

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C. \quad \blacksquare$$

Algunas veces tenemos que integrar por partes más de una vez.

EJEMPLO 3 Evalúe

$$\int x^2 e^x\,dx.$$

Solución Con $u = x^2$, $dv = e^x\,dx$, $du = 2x\,dx$, y $v = e^x$, tenemos

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx.$$

La nueva integral es menos complicada que la original porque el exponente de x se reduce en 1. Para evaluar la integral de la derecha, nuevamente integramos por partes con $u = x$, $dv = e^x\,dx$. Entonces, $du = dx$, $v = e^x$, y

$$\int x e^x\,dx = x e^x - \int e^x\,dx = x e^x - e^x + C.$$

Al realizar esta última evaluación, se obtiene

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x\,dx &= x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C,\end{aligned}$$

donde la constante de integración se redefine después de sustituir la integral de la derecha. $\blacksquare$

La técnica del ejemplo 3 funciona para cualquier integral $\int x^n e^x\,dx$, donde n es un entero positivo, porque la diferenciación de x^n finalmente conducirá a cero y la integración de e^x es fácil.

Integrales como la del siguiente ejemplo se presentan en ingeniería eléctrica. Su evaluación requiere dos integraciones por partes, seguidas de la resolución para la integral desconocida.

EJEMPLO 4 Evalúe

$$\int e^x \cos x \, dx.$$

Solución Sea $u = e^x$ y $dv = \cos x \, dx$. Entonces, $du = e^x \, dx$, $v = \operatorname{sen} x$, y

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx.$$

La segunda integral es como la primera, excepto que tiene sen x en lugar de cos x. Para evaluarla, usamos integración por partes con

$$u = e^x, \qquad dv = \operatorname{sen} x \, dx, \qquad v = -\cos x, \qquad du = e^x \, dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \, dx &= e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cos x - \int (-\cos x)(e^x \, dx)\right) \\ &= e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx.\end{aligned}$$

La integral desconocida aparece ahora en los dos lados de la ecuación. Al sumar la integral en ambos lados de la ecuación y al agregar la constante de integración, tenemos

$$2\int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + C_1.$$

Al dividir entre 2 y redefiniendo la constante de integración, se obtiene

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2} + C. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 Obtenga una fórmula que exprese la integral

$$\int \cos^n x \, dx$$

en términos de una integral con una potencia menor de cos x.

Solución Podemos pensar en $\cos^n x$ como $\cos^{n-1} x \cdot \cos x$. Después, hacemos

$$u = \cos^{n-1} x \qquad \text{y} \qquad dv = \cos x \, dx,$$

de manera que

$$du = (n-1)\cos^{n-2} x \, (-\operatorname{sen} x \, dx) \qquad \text{y} \qquad v = \operatorname{sen} x.$$

Entonces, la integración por partes nos da

$$\begin{aligned}\int \cos^n x \, dx &= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^2 x \cos^{n-2} x \, dx \\ &= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int (1 - \cos^2 x)\cos^{n-2} x \, dx \\ &= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1)\int \cos^n x \, dx.\end{aligned}$$

Si sumamos

$$(n-1)\int \cos^n x \, dx$$

a ambos lados de esta ecuación, se obtiene

$$n\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx.$$

Después dividimos entre n, y el resultado final es

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx. \quad \blacksquare$$

La fórmula que se obtuvo en el ejemplo 5 se conoce como **fórmula de reducción** porque sustituye una integral que incluye una potencia de una función con una integral de la misma forma que tiene la potencia reducida. Cuando n es un entero positivo, aplicamos la fórmula repetidamente hasta que la integral resultante sea fácil de evaluar. Por ejemplo, el resultado del ejemplo 5 nos dice que

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x\,dx \\ &= \frac{1}{3}\cos^2 x \operatorname{sen} x + \frac{2}{3}\operatorname{sen} x + C.\end{aligned}$$

Evaluación por partes de integrales definidas

La fórmula de integración por partes en la ecuación (1) se puede combinar con la parte 2 del teorema fundamental para evaluar por partes integrales definidas. Suponiendo que tanto f' como g' son continuas en el intervalo $[a, b]$, la parte 2 del teorema fundamental nos da la

Fórmula de integración por partes de integrales definidas

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \tag{3}$$

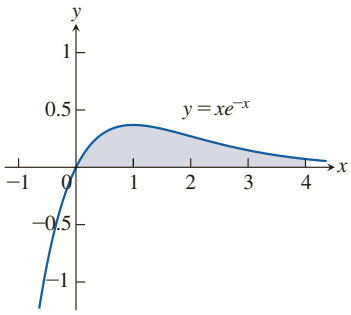


FIGURA 8.1 La región del ejemplo 6.

EJEMPLO 6 Obtenga el área de la región acotada por la curva $y = xe^{-x}$ y el eje x desde $x = 0$ hasta $x = 4$.

Solución La región aparece sombreada en la figura 8.1. Su área es

$$\int_0^4 xe^{-x}\,dx.$$

Sean $u = x$, $dv = e^{-x}\,dx$, $v = -e^{-x}$, y $du = dx$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_0^4 xe^{-x}\,dx &= -xe^{-x}\Big]_0^4 - \int_0^4 (-e^{-x})\,dx \\ &= \left[-4e^{-4} - (-0e^{-0})\right] + \int_0^4 e^{-x}\,dx \\ &= -4e^{-4} - e^{-x}\Big]_0^4 \\ &= -4e^{-4} - (e^{-4} - e^{-0}) = 1 - 5e^{-4} \approx 0.91.\end{aligned} \quad \blacksquare$$

La integración tabular puede simplificar integraciones repetidas

Hemos visto que las integrales de la forma $\int f(x)g(x)\,dx$, en las que f puede diferenciarse de manera repetida hasta obtener cero, y g se integra varias veces sin dificultad, son candidatas naturales para integrarse por partes. Sin embargo, si se requieren muchas repeticiones, la notación y los cálculos podrían volverse tediosos; o bien, es posible que la elección de sustituciones en una integración por partes repetida nos conduzca a la integral original que

intentábamos determinar. En situaciones como ésta, existe una manera de organizar los cálculos para evitar estos inconvenientes y simplificar el trabajo. El método se denomina **integración tabular** y se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 7 Evalúe

$$\int x^2 e^x \, dx.$$

Solución Con $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^x$, listamos:

$f(x)$ y sus derivadas		$g(x)$ y sus integrales
x^2	$(+)$	e^x
$2x$	$(-)$	e^x
2	$(+)$	e^x
0		e^x

Combinamos los productos de las funciones vinculadas por las flechas, de acuerdo con los signos de operación que se encuentran arriba de cada flecha, para obtener

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Compare esto con el resultado del ejemplo 3. ■

EJEMPLO 8 Obtenga la integral

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

para $f(x) = 1$ en $[-\pi, 0)$ y $f(x) = x^3$ en $[0, \pi]$, donde n es un entero positivo.

Solución La integral es

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^3 \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} nx \Big]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^3 \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^3 \cos nx \, dx.\end{aligned}$$

Usando integración tabular para obtener una antiderivada, tenemos

$f(x)$ y sus derivadas		$g(x)$ y sus integrales
x^3	$(+)$	$\cos nx$
$3x^2$	$(-)$	$\frac{1}{n}\operatorname{sen} nx$
$6x$	$(+)$	$-\frac{1}{n^2}\cos nx$
6	$(-)$	$-\frac{1}{n^3}\operatorname{sen} nx$
0		$\frac{1}{n^4}\cos nx$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 \cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{n}\operatorname{sen} nx + \frac{3x^3}{n^2}\cos nx - \frac{6x}{n^3}\operatorname{sen} nx - \frac{6}{n^4}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{3\pi^2\cos n\pi}{n^2} - \frac{6\cos n\pi}{n^4} + \frac{6}{n^4}\right)$$

$$= \frac{3}{\pi}\left(\frac{\pi^2 n^2(-1)^n + 2(-1)^{n+1} + 2}{n^4}\right). \qquad \cos n\pi = (-1)^n$$

■

Integrales como las del ejemplo 8 se presentan a menudo en ingeniería eléctrica.

Ejercicios 8.2

Integración por partes

En los ejercicios 1 a 24, evalúe las integrales usando integración por partes.

1. $\int x \operatorname{sen}\frac{x}{2}\,dx$
2. $\int \theta \cos \pi\theta\,d\theta$
3. $\int t^2 \cos t\,dt$
4. $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$
5. $\int_1^2 x \ln x\,dx$
6. $\int_1^e x^3 \ln x\,dx$
7. $\int xe^x\,dx$
8. $\int xe^{3x}\,dx$
9. $\int x^2e^{-x}\,dx$
10. $\int (x^2 - 2x + 1)e^{2x}\,dx$
11. $\int \tan^{-1} y\,dy$
12. $\int \operatorname{sen}^{-1} y\,dy$
13. $\int x \sec^2 x\,dx$
14. $\int 4x \sec^2 2x\,dx$
15. $\int x^3e^x\,dx$
16. $\int p^4e^{-p}\,dp$
17. $\int (x^2 - 5x)e^x\,dx$
18. $\int (r^2 + r + 1)e^r\,dr$
19. $\int x^5e^x\,dx$
20. $\int t^2e^{4t}\,dt$
21. $\int e^{\theta} \operatorname{sen}\theta\,d\theta$
22. $\int e^{-y}\cos y\,dy$
23. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$
24. $\int e^{-2x}\operatorname{sen} 2x\,dx$

Uso de la sustitución

Evalúe las integrales en los ejercicios 25 a 30, realizando una sustitución antes de integrar por partes.

25. $\int e^{\sqrt{3s+9}}\,ds$
26. $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$
27. $\int_0^{\pi/3} x\tan^2 x\,dx$
28. $\int \ln(x + x^2)\,dx$
29. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$
30. $\int z(\ln z)^2\,dz$

Evaluación de integrales

En los ejercicios 31 a 52, evalúe las integrales. Algunas de ellas no requieren integración por partes.

31. $\int x \sec x^2\,dx$
32. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
33. $\int x(\ln x)^2\,dx$
34. $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$
35. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$
36. $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$
37. $\int x^3e^{x^4}\,dx$
38. $\int x^5e^{x^3}\,dx$
39. $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$
40. $\int x^2 \operatorname{sen} x^3\,dx$
41. $\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x\,dx$
42. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 4x\,dx$
43. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$
44. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
45. $\int \cos\sqrt{x}\,dx$
46. $\int \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx$
47. $\int_0^{\pi/2} \theta^2 \operatorname{sen} 2\theta\,d\theta$
48. $\int_0^{\pi/2} x^3\cos 2x\,dx$
49. $\int_{2/\sqrt{3}}^{2} t\sec^{-1} t\,dt$
50. $\int_0^{1/\sqrt{2}} 2x \operatorname{sen}^{-1}(x^2)\,dx$
51. $\int x\tan^{-1} x\,dx$
52. $\int x^2\tan^{-1}\frac{x}{2}\,dx$

Teoría y ejemplos

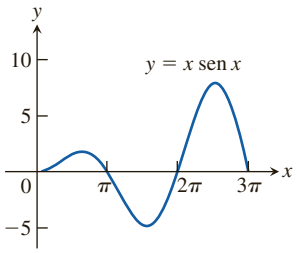
53. Cálculo de área Obtenga el área de la región acotada por la curva $y = x \operatorname{sen} x$ y el eje x (vea la figura) para

a) $0 \le x \le \pi$.

b) $\pi \le x \le 2\pi$.

c) $2\pi \le x \le 3\pi$.

d) ¿Qué patrón observa? ¿Cuál es el área entre la curva y el eje x para $n\pi \le x \le (n+1)\pi$, donde n es un entero no negativo arbitrario? Justifique su respuesta.



54. Cálculo de área Determine el área de la región acotada por la curva $y = x \cos x$ y el eje x (vea la figura) para

a) $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$.

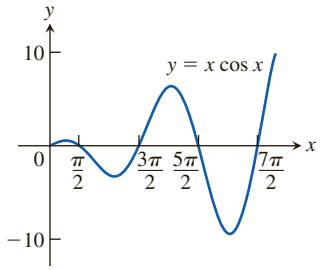
b) $3\pi/2 \le x \le 5\pi/2$.

c) $5\pi/2 \le x \le 7\pi/2$.

d) ¿Qué patrón observa? ¿Cuál es el área entre la curva y el eje x para

$$\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi \le x \le \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi,$$

donde n es un entero positivo arbitrario? Justifique su respuesta.



55. Cálculo de volumen Determine el volumen del sólido generado al hacer girar, alrededor de la recta $x = \ln 2$, la región del primer cuadrante acotada por los ejes de coordenadas, la curva $y = e^x$ y la recta $x = \ln 2$.

56. Cálculo de volumen Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región del primer cuadrante acotada por los ejes de coordenadas, la curva $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$

a) alrededor del eje y.

b) alrededor de la recta $x = 1$.

57. Cálculo de volumen Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región del primer cuadrante acotada por los ejes de coordenadas y la curva $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi/2$,

a) alrededor del eje y.

b) alrededor de la recta $x = \pi/2$.

58. Cálculo de volumen Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por el eje x y la curva $y = x \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$,

a) alrededor del eje y.

b) alrededor de la recta $x = \pi$.

(Vea la gráfica del ejercicio 53).

59. Considere la región acotada por las gráficas de $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = e$.

a) Obtenga el área de la región.

b) Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar esta región alrededor del eje x.

c) Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar esta región alrededor de la recta $x = -2$.

d) Obtenga el centroide de la región.

60. Considere la región acotada por las gráficas de $y = \tan^{-1} x$, $y = 0$ y $x = 1$.

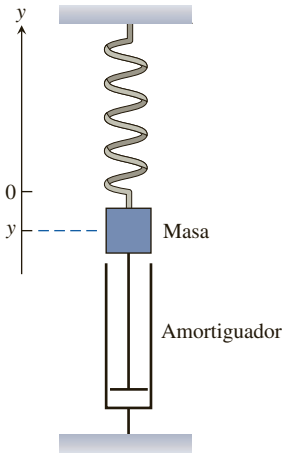
a) Calcule el área de la región.

b) Calcule el volumen del sólido generado al hacer girar esta región alrededor del eje y.

61. Valor promedio Una fuerza de retardo, representada en la figura por el amortiguador, reduce el movimiento de un resorte al que se ha aplicado un peso, de modo que la posición de la masa en el instante t es

$$y = 2e^{-t}\cos t, \qquad t \ge 0.$$

Obtenga el valor promedio de y en el intervalo $0 \le t \le 2\pi$.



62. Valor promedio En un sistema masa-resorte-amortiguador como el del ejercicio 61, la posición de la masa en el instante t es

$$y = 4e^{-t}(\operatorname{sen} t - \cos t), \qquad t \ge 0.$$

Obtenga el valor promedio de y en el intervalo $0 \le t \le 2\pi$.

Fórmulas de reducción

En los ejercicios 63 a 67, emplee integración por partes para determinar la fórmula de reducción.

63. $$\int x^n \cos x\,dx = x^n \operatorname{sen} x - n\int x^{n-1} \operatorname{sen} x\,dx$$

64. $$\int x^n \operatorname{sen} x\,dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1} \cos x\,dx$$

65. $\displaystyle\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx, \quad a \neq 0$

66. $\displaystyle\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$

67. $\displaystyle\int x^m(\ln x)^n\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n - \frac{n}{m+1}\cdot$

$\displaystyle\int x^m (\ln x)^{n-1}\,dx, \quad m \neq -1$

68. Con base en el ejemplo 5, demuestre que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \left(\dfrac{\pi}{2}\right)\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n}, & n \text{ par} \\ \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots n}, & n \text{ impar} \end{cases}$$

69. Demuestre que

$$\int_a^b \left(\int_x^b f(t)\,dt\right) dx = \int_a^b (x-a)f(x)\,dx.$$

70. Utilice integración por partes para obtener la fórmula

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Integración de funciones inversas

La integración por partes conduce a una regla para la integración de inversas que, por lo regular, da buenos resultados:

$$\int f^{-1}(x)\,dx = \int yf'(y)\,dy \qquad \begin{matrix} y = f^{-1}(x), \quad x = f(y) \\ dx = f'(y)\,dy \end{matrix}$$

$$= yf(y) - \int f(y)\,dy \qquad \text{Integración por partes con } u = y,\ dv = f'(y)\,dy$$

$$= xf^{-1}(x) - \int f(y)\,dy$$

La idea es tomar la parte más complicada de la integral, en este caso $f^{-1}(x)$, y simplificarla. Para la integral de $\ln x$, tenemos

$$\int \ln x\,dx = \int ye^y\,dy \qquad \begin{matrix} y = \ln x, \quad x = e^y \\ dx = e^y\,dy \end{matrix}$$

$$= ye^y - e^y + C$$

$$= x\ln x - x + C.$$

Para la integral de $\cos^{-1} x$, se obtiene

$$\int \cos^{-1} x\,dx = x\cos^{-1} x - \int \cos y\,dy \qquad y = \cos^{-1} x$$

$$= x\cos^{-1} x - \operatorname{sen} y + C$$

$$= x\cos^{-1} x - \operatorname{sen}(\cos^{-1} x) + C.$$

Use la fórmula

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)\,dy \qquad y = f^{-1}(x) \quad (4)$$

para evaluar las integrales en los ejercicios 71 a 74. Exprese sus respuestas en términos de x.

71. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$ **72.** $\displaystyle\int \tan^{-1} x\,dx$

73. $\displaystyle\int \sec^{-1} x\,dx$ **74.** $\displaystyle\int \log_2 x\,dx$

Otra forma de integrar $f^{-1}(x)$ (cuando f^{-1} es integrable, desde luego) es utilizar integración por partes con $u = f^{-1}(x)$ y $dv = dx$ para rescribir la integral de f^{-1} como

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int x\left(\frac{d}{dx}f^{-1}(x)\right)dx. \qquad (5)$$

En los ejercicios 75 y 76, compare los resultados al utilizar las ecuaciones (4) y (5).

75. Las ecuaciones (4) y (5) nos dan fórmulas diferentes de la integral de $\cos^{-1} x$:

a) $\displaystyle\int \cos^{-1} x\,dx = x\cos^{-1} x - \operatorname{sen}(\cos^{-1} x) + C$ Ecuación (4)

b) $\displaystyle\int \cos^{-1} x\,dx = x\cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C$ Ecuación (5)

¿Pueden ser correctas ambas integraciones? Explique.

76. Las ecuaciones (4) y (5) nos dan fórmulas diferentes de la integral de $\tan^{-1} x$:

a) $\displaystyle\int \tan^{-1} x\,dx = x\tan^{-1} x - \ln\sec(\tan^{-1} x) + C$ Ecuación (4)

b) $\displaystyle\int \tan^{-1} x\,dx = x\tan^{-1} x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$ Ecuación (5)

¿Pueden ser correctas ambas integraciones? Explique.

Evalúe las integrales en los ejercicios 77 y 78 con ***a)*** la ecuación (4) y ***b)*** la ecuación (5). En cada caso, verifique su respuesta diferenciándola con respecto a x.

77. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^{-1} x\,dx$ **78.** $\displaystyle\int \tanh^{-1} x\,dx$

8.3 Integrales trigonométricas

Las integrales trigonométricas implican combinaciones algebraicas de las seis funciones trigonométricas básicas. En principio, estas integrales siempre se pueden expresar en términos de senos y cosenos, pero a menudo es más sencillo trabajar con otras funciones, como en la integral

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C.$$

La idea general es utilizar identidades para transformar las integrales que tenemos en otras con las que sea más fácil trabajar.

Productos y potencias de senos y cosenos

Iniciamos con integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx,$$

donde m y n son enteros no negativos (esto es, positivos o cero). Podemos clasificar la sustitución en tres grupos, dependiendo de si m y n son impares o pares.

Caso 1 Si ***m* es impar**, escribimos m como $2k + 1$ y utilizamos la identidad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para obtener

$$\operatorname{sen}^m x = \operatorname{sen}^{2k+1} x = (\operatorname{sen}^2 x)^k \operatorname{sen} x = (1 - \cos^2 x)^k \operatorname{sen} x. \tag{1}$$

Después, combinamos en la integral el sen x que está sólo, con dx, e igualamos sen $x\,dx$ con $-d(\cos x)$.

Caso 2 Si ***m* es par y *n* es impar** en $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$, escribimos n como $2k + 1$ y utilizamos la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para obtener

$$\cos^n x = \cos^{2k+1} x = (\cos^2 x)^k \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x.$$

Después, combinamos el cos x que está solo, con dx, e igualamos cos $x\,dx$ con $d(\operatorname{sen} x)$.

Caso 3 Si ***m* y *n* son pares** en $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$, sustituimos

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \tag{2}$$

para reducir el integrando a uno con potencias menores de cos $2x$.

A continuación se presentan algunos ejemplos para ilustrar cada caso.

EJEMPLO 1 Evalúe

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx.$$

Solución Éste es un ejemplo del caso 1.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx && m \text{ es impar.} \\
&= \int (1 - \cos^2 x)(\cos^2 x)(-d(\cos x)) && \operatorname{sen} x\,dx = -d(\cos x) \\
&= \int (1 - u^2)(u^2)(-du) && u = \cos x \\
&= \int (u^4 - u^2)\, du && \text{Se multiplican los términos.} \\
&= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Evalúe

$$\int \cos^5 x\, dx.$$

Solución Éste es un ejemplo del caso 2, donde $m = 0$ es par y $n = 5$ es impar.

$$\int \cos^5 x\, dx = \int \cos^4 x \cos x\, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2\, d(\operatorname{sen} x) \qquad \cos x\, dx = d(\operatorname{sen} x)$$

$$= \int (1 - u^2)^2\, du \qquad u = \operatorname{sen} x$$

$$= \int (1 - 2u^2 + u^4)\, du \qquad \text{Se eleva al cuadrado } 1 - u^2.$$

$$= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C = \operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Evalúe

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx.$$

Solución Éste es un ejemplo del caso 3.

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx \qquad m \text{ y } n \text{ son pares.}$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2x)(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \int (\cos^2 2x + \cos^3 2x)\, dx\right]$$

Para el término que incluye $\cos^2 2x$, usamos

$$\int \cos^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right). \qquad \text{Se omite la constante de integración hasta el resultado final.}$$

Para el término $\cos^3 2x$, tenemos

$$\int \cos^3 2x\, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 2x) \cos 2x\, dx \qquad u = \operatorname{sen} 2x,\ du = 2\cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (1 - u^2)\, du = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2x\right). \qquad \text{Nuevamente se omite } C$$

Al combinar todo y simplificar, obtenemos

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx = \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2x\right) + C. \qquad \blacksquare$$

Eliminación de raíces cuadradas

En el siguiente ejemplo se utiliza la identidad $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ para eliminar una raíz cuadrada.

EJEMPLO 4 Evalúe

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x}\, dx.$$

Solución Para eliminar la raíz cuadrada, usamos la identidad

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \text{o} \qquad 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta.$$

Con $\theta = 2x$, esto se transforma en

$$1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x}\, dx &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{2\cos^2 2x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sqrt{\cos^2 2x}\, dx \\ &= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} |\cos 2x|\, dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\, dx \qquad \cos 2x \geq 0 \text{ en } [0, \pi/4] \\ &= \sqrt{2}\left[\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}[1 - 0] = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

■

Integrales de potencias de tan *x* y sec *x*

Sabemos cómo integrar la tangente, la secante y sus cuadrados. Para integrar potencias de orden superior, utilizamos las identidades $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ y $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ e integramos por partes cuando sea necesario para reducir potencias de orden superior a potencias menores.

EJEMPLO 5 Evalúe

$$\int \tan^4 x\, dx.$$

Solución

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x\, dx &= \int \tan^2 x \cdot \tan^2 x\, dx = \int \tan^2 x \cdot (\sec^2 x - 1)\, dx \\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x\, dx \\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int (\sec^2 x - 1)\, dx \\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int \sec^2 x\, dx + \int dx\end{aligned}$$

En la primera integral, sean

$$u = \tan x, \qquad du = \sec^2 x\, dx$$

y tenemos

$$\int u^2\, du = \frac{1}{3}u^3 + C_1.$$

Las integrales restantes se encuentran en forma estándar, de manera que

$$\int \tan^4 x\,dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 6 Evalúe

$$\int \sec^3 x\,dx.$$

Solución Integramos por partes, usando

$$u = \sec x, \qquad dv = \sec^2 x\,dx, \qquad v = \tan x, \qquad du = \sec x \tan x\,dx.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\,dx &= \sec x \tan x - \int (\tan x)(\sec x \tan x\,dx) \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\,dx \qquad \tan^2 x = \sec^2 x - 1 \\ &= \sec x \tan x + \int \sec x\,dx - \int \sec^3 x\,dx.\end{aligned}$$

Al combinar las dos integrales de secante cúbica, se obtiene

$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x + \int \sec x\,dx$$

y

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 7 Evalúe

$$\int \tan^4 x \sec^4 x\,dx.$$

Solución

$$\begin{aligned}\int (\tan^4 x)(\sec^4 x)\,dx &= \int (\tan^4 x)(1 + \tan^2 x)(\sec^2 x)\,dx \qquad \sec^2 x = 1 + \tan^2 x \\ &= \int (\tan^4 x + \tan^6 x)(\sec^2 x)\,dx \\ &= \int (\tan^4 x)(\sec^2 x)\,dx + \int (\tan^6 x)(\sec^2 x)\,dx \\ &= \int u^4\,du + \int u^6\,du = \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + C \qquad \begin{matrix} u = \tan x, \\ du = \sec^2 x\,dx \end{matrix} \\ &= \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^7 x}{7} + C \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Productos de senos y cosenos

Las integrales

$$\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx, \qquad \int \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx, \qquad \text{y} \qquad \int \cos mx \cos nx\,dx$$

se presentan en muchas aplicaciones que involucran funciones periódicas. Estas integrales se pueden evaluar integrando por partes, pero se requieren dos integraciones en cada caso. Es más sencillo emplear las identidades

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x], \tag{3}$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m-n)x + \operatorname{sen}(m+n)x], \tag{4}$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]. \tag{5}$$

Estas identidades provienen de las fórmulas de la suma de ángulos de las funciones seno y coseno (sección 1.3) y dan por resultado funciones cuyas antiderivadas se obtienen fácilmente.

EJEMPLO 8 Evalúe

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x \, dx.$$

Solución Según la ecuación (4) con $m = 3$ y $n = 5$, tenemos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x \, dx &= \frac{1}{2}\int [\operatorname{sen}(-2x) + \operatorname{sen} 8x] \, dx \\ &= \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen} 8x - \operatorname{sen} 2x)\, dx \\ &= -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C.\end{aligned}$$

■

Ejercicios 8.3

Potencias de senos y cosenos

En los ejercicios 1 a 22, evalúe las integrales.

1. $\int \cos 2x \, dx$
2. $\int_0^{\pi} 3 \operatorname{sen} \frac{x}{3} \, dx$
3. $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x \, dx$
4. $\int \operatorname{sen}^4 2x \cos 2x \, dx$
5. $\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$
6. $\int \cos^3 4x \, dx$
7. $\int \operatorname{sen}^5 x \, dx$
8. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^5 \frac{x}{2} \, dx$
9. $\int \cos^3 x \, dx$
10. $\int_0^{\pi/6} 3 \cos^5 3x \, dx$
11. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x \, dx$
12. $\int \cos^3 2x \operatorname{sen}^5 2x \, dx$
13. $\int \cos^2 x \, dx$
14. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx$
15. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7 y \, dy$
16. $\int 7 \cos^7 t \, dt$
17. $\int_0^{\pi} 8 \operatorname{sen}^4 x \, dx$
18. $\int 8 \cos^4 2\pi x \, dx$
19. $\int 16 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$
20. $\int_0^{\pi} 8 \operatorname{sen}^4 y \cos^2 y \, dy$
21. $\int 8 \cos^3 2\theta \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta$
22. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2\theta \cos^3 2\theta \, d\theta$

Integrales con raíces cuadradas

Evalúe las integrales en los ejercicios 23 a 32.

23. $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \, dx$
24. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx$
25. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \, dt$
26. $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \, d\theta$
27. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{1 - \cos x}} \, dx$
28. $\int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + \operatorname{sen} x} \, dx$

(*Sugerencia:* Multiplique por $\sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$.)

29. $\int_{5\pi/6}^{\pi} \frac{\cos^4 x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}} \, dx$
30. $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sqrt{1 - \operatorname{sen} 2x} \, dx$
31. $\int_0^{\pi/2} \theta \sqrt{1 - \cos 2\theta} \, d\theta$
32. $\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2 t)^{3/2} \, dt$

Potencias de tangentes y secantes

En los ejercicios 33 a 50, evalúe las integrales.

33. $\int \sec^2 x \tan x \, dx$
34. $\int \sec x \tan^2 x \, dx$
35. $\int \sec^3 x \tan x \, dx$
36. $\int \sec^3 x \tan^3 x \, dx$
37. $\int \sec^2 x \tan^2 x \, dx$
38. $\int \sec^4 x \tan^2 x \, dx$
39. $\int_{-\pi/3}^{0} 2 \sec^3 x \, dx$
40. $\int e^x \sec^3 e^x \, dx$
41. $\int \sec^4 \theta \, d\theta$
42. $\int 3 \sec^4 3x \, dx$
43. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^4 \theta \, d\theta$
44. $\int \sec^6 x \, dx$
45. $\int 4 \tan^3 x \, dx$
46. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 6 \tan^4 x \, dx$
47. $\int \tan^5 x \, dx$
48. $\int \cot^6 2x \, dx$
49. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cot^3 x \, dx$
50. $\int 8 \cot^4 t \, dt$

Productos de senos y cosenos

En los ejercicios 51 a 56, evalúe las integrales.

51. $\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x\, dx$

52. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x\, dx$

53. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 3x\, dx$

54. $\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x\, dx$

55. $\int \cos 3x \cos 4x\, dx$

56. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos 7x\, dx$

En los ejercicios 57 a 62, se requiere el uso de varias identidades trigonométricas antes de evaluar las integrales.

57. $\int \operatorname{sen}^2 \theta \cos 3\theta\, d\theta$

58. $\int \cos^2 2\theta \operatorname{sen} \theta\, d\theta$

59. $\int \cos^3 \theta \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$

60. $\int \operatorname{sen}^3 \theta \cos 2\theta\, d\theta$

61. $\int \operatorname{sen} \theta \cos \theta \cos 3\theta\, d\theta$

62. $\int \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} 3\theta\, d\theta$

Miscelánea de integrales

En los ejercicios 63 a 68, emplee cualquier método para evaluar las integrales.

63. $\int \dfrac{\sec^3 x}{\tan x}\, dx$

64. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}\, dx$

65. $\int \dfrac{\tan^2 x}{\csc x}\, dx$

66. $\int \dfrac{\cot x}{\cos^2 x}\, dx$

67. $\int x \operatorname{sen}^2 x\, dx$

68. $\int x \cos^3 x\, dx$

Aplicaciones

69. Longitud de arco Obtenga la longitud de la curva

$$y = \ln(\sec x), \quad 0 \le x \le \pi/4.$$

70. Centro de gravedad Obtenga el centro de gravedad de la región acotada por el eje x, la curva $y = \sec x$, y las rectas $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$.

71. Volumen Obtenga el volumen generado al hacer girar un arco de la curva $y = \operatorname{sen} x$ alrededor del eje x.

72. Área Obtenga el área entre el eje x y la curva $y = \sqrt{1 + \cos 4x}$, $0 \le x \le \pi$.

73. Centroide Obtenga el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = x + \cos x$ y $y = 0$ para $0 \le x \le 2\pi$.

74. Volumen Obtenga el volumen del sólido formado al hacer girar la región acotada por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x + \sec x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi/3$ alrededor del eje x.

8.4 Sustituciones trigonométricas

Las sustituciones trigonométricas se presentan cuando sustituimos la variable de integración por una función trigonométrica. Las sustituciones más comunes son $x = a \tan \theta$, $x = a \operatorname{sen} \theta$, y $x = a \sec \theta$. Estas sustituciones son eficaces en la transformación de integrales que involucran a $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$, y $\sqrt{x^2 - a^2}$ en integrales que se puedan evaluar directamente, ya que provienen de los triángulos rectángulos de referencia de la figura 8.2.

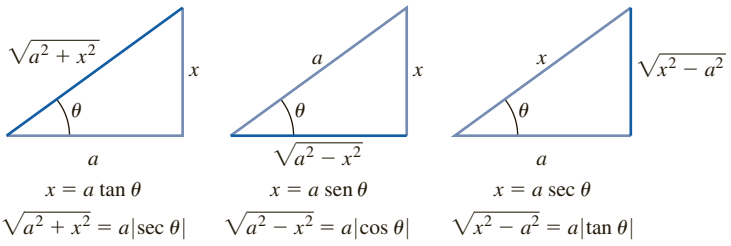


FIGURA 8.2 Triángulos de referencia para las tres sustituciones básicas, identificando los lados x y a para cada sustitución.

Con $x = a \tan \theta$,

$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2 \tan^2 \theta = a^2(1 + \tan^2 \theta) = a^2 \sec^2 \theta.$$

Con $x = a \operatorname{sen} \theta$,

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta = a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta) = a^2 \cos^2 \theta.$$

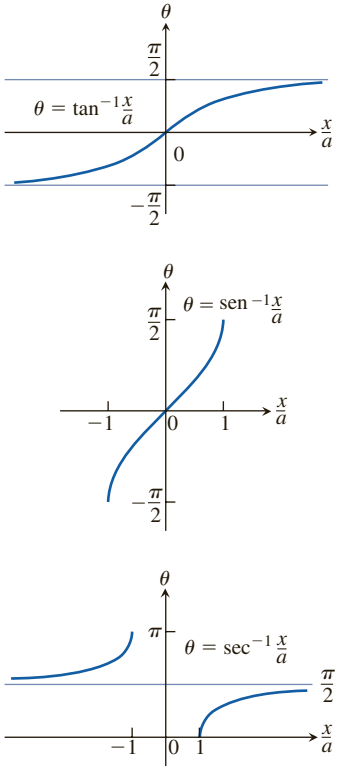


FIGURA 8.3 Arco tangente, arco seno y arco secante de x/a, graficados como funciones de x/a.

Con $x = a \sec\theta$

$$x^2 - a^2 = a^2\sec^2\theta - a^2 = a^2(\sec^2\theta - 1) = a^2\tan^2\theta.$$

Queremos que cualquier sustitución que utilicemos en una integración sea reversible, de manera que después podamos regresar a la variable original. Por ejemplo, si $x = a\tan\theta$, deseamos obtener $\theta = \tan^{-1}(x/a)$ después de realizar la integración. Si $x = a\,\text{sen}\,\theta$, deseamos obtener $\theta = \text{sen}^{-1}(x/a)$ cuando hayamos concluido la integración, y de manera similar en el caso de $x = a\sec\theta$.

Como sabemos por la sección 7.6, las funciones en estas sustituciones tienen inversas sólo para ciertos valores de θ (figura 8.3). Para que haya reversibilidad,

$$x = a\tan\theta \quad \text{requiere} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{con} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$x = a\,\text{sen}\,\theta \quad \text{requiere} \quad \theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{con} \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},$$

$$x = a\sec\theta \quad \text{requiere} \quad \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{con} \quad \begin{cases} 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad \dfrac{x}{a} \ge 1, \\ \dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi & \text{si} \quad \dfrac{x}{a} \le -1. \end{cases}$$

Para simplificar los cálculos con la sustitución $x = a\sec\theta$, restringiremos su uso a integrales en las que $x/a \ge 1$. Esto colocará a θ en $[0, \pi/2)$ y hará que $\tan\theta \ge 0$. Después, tendremos $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = |a\tan\theta| = a\tan\theta$, sin valores absolutos, siempre y cuando $a > 0$.

Procedimiento para una sustitución trigonométrica

1. Escriba la sustitución para x, calcule la diferencial dx y especifique los valores seleccionados de θ para la sustitución.
2. Sustituya la expresión trigonométrica y la diferencial calculada en el integrando, y después simplifique algebraicamente los resultados.
3. Resuelva la integral trigonométrica, teniendo en mente las restricciones del ángulo θ para reversibilidad.
4. Dibuje un triángulo de referencia adecuado para revertir la sustitución en el resultado de la integración y regresar a la variable original x.

EJEMPLO 1 Evalúe

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}.$$

Solución Hacemos

$$x = 2\tan\theta, \qquad dx = 2\sec^2\theta\,d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$4 + x^2 = 4 + 4\tan^2\theta = 4(1 + \tan^2\theta) = 4\sec^2\theta.$$

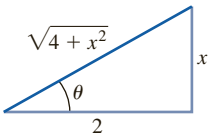


FIGURA 8.4 Triángulo de referencia para $x = 2 \tan \theta$ (ejemplo 1):

$$\tan \theta = \frac{x}{2}$$

y

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2}.$$

Entonces,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}} = \int \frac{2 \sec^2 \theta \, d\theta}{\sqrt{4 \sec^2 \theta}} = \int \frac{\sec^2 \theta \, d\theta}{|\sec \theta|} \qquad \sqrt{\sec^2 \theta} = |\sec \theta|$$

$$= \int \sec \theta \, d\theta \qquad \sec \theta > 0 \text{ para } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$$

$$= \ln \left| \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2} + \frac{x}{2} \right| + C. \qquad \text{Según la figura 8.4}$$

Observe cómo expresamos $\ln |\sec \theta + \tan \theta|$ en términos de x: dibujamos un triángulo de referencia para la sustitución original $x = 2 \tan \theta$ (figura 8.4) y obtenemos las razones usando el triángulo. ■

EJEMPLO 2 A continuación obtendremos una expresión para la función inversa del seno hiperbólico en términos de logaritmos naturales. Siguiendo el mismo procedimiento del ejemplo 1, obtenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \sec \theta \, d\theta \qquad x = a \tan \theta, \; dx = a \sec^2 \theta \, d\theta$$

$$= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$$

$$= \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| + C \qquad \text{Figura 8.2}$$

Según la tabla 7.11, $\operatorname{senh}^{-1}(x/a)$ también es una antiderivada de $1/\sqrt{a^2 + x^2}$, de modo que las dos antiderivadas difieren por una constante, dando

$$\operatorname{senh}^{-1} \frac{x}{a} = \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| + C.$$

Si $x = 0$ en esta última ecuación, obtenemos $0 = \ln |1| + C$, por lo cual $C = 0$. Como $\sqrt{a^2 + x^2} > |x|$, concluimos que

$$\operatorname{senh}^{-1} \frac{x}{a} = \ln \left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} + \frac{x}{a} \right)$$

(Vea también el ejercicio 76 de la sección 7.7). ■

EJEMPLO 3 Evalúe

$$\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{9 - x^2}}.$$

Solución Establecemos que

$$x = 3 \operatorname{sen} \theta, \qquad dx = 3 \cos \theta \, d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$9 - x^2 = 9 - 9 \operatorname{sen}^2 \theta = 9(1 - \operatorname{sen}^2 \theta) = 9 \cos^2 \theta.$$

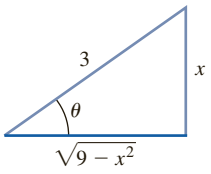


FIGURA 8.5 Triángulo de referencia para $x = 3 \operatorname{sen} \theta$ (ejemplo 3):

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3}$$

y

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}.$$

Entonces,

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \int \frac{9\operatorname{sen}^2\theta \cdot 3\cos\theta\,d\theta}{|3\cos\theta|}$$

$$= 9\int \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta \qquad \cos\theta > 0 \text{ para } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$= 9\int \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\left(\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right) + C$$

$$= \frac{9}{2}(\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta) + C \qquad \operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$= \frac{9}{2}\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}\right) + C \qquad \text{Según la figura 8.5}$$

$$= \frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{2}\sqrt{9 - x^2} + C. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Evalúe

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}}, \qquad x > \frac{2}{5}.$$

Solución Primero rescribimos el radical como

$$\sqrt{25x^2 - 4} = \sqrt{25\left(x^2 - \frac{4}{25}\right)}$$

$$= 5\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2}$$

para poner al radicando en la forma $x^2 - a^2$. Después, se sustituye

$$x = \frac{2}{5}\sec\theta, \qquad dx = \frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\,d\theta, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}\sec^2\theta - \frac{4}{25}$$

$$= \frac{4}{25}(\sec^2\theta - 1) = \frac{4}{25}\tan^2\theta$$

$$\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}|\tan\theta| = \frac{2}{5}\tan\theta. \qquad \tan\theta > 0 \text{ para } 0 < \theta < \pi/2$$

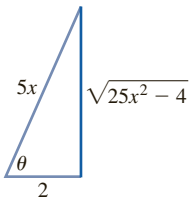


FIGURA 8.6 Si $x = (2/5)\sec\theta$, $0 < \theta < \pi/2$, entonces, $\theta = \sec^{-1}(5x/2)$, y podemos obtener los valores de las otras funciones trigonométricas de θ en este triángulo rectángulo (ejemplo 4).

Con estas sustituciones, tenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}} = \int \frac{dx}{5\sqrt{x^2 - (4/25)}} = \int \frac{(2/5)\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{5\cdot(2/5)\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{5}\int \sec\theta\,d\theta = \frac{1}{5}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{25x^2 - 4}}{2}\right| + C. \qquad \text{Según la figura 8.6} \qquad \blacksquare$$

Ejercicios 8.4

Uso de sustituciones trigonométricas

En los ejercicios 1 a 14, evalúe las integrales.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$
2. $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{\sqrt{1+9x^2}}$
3. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$
4. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{8+2x^2}$
5. $\displaystyle\int_{0}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
6. $\displaystyle\int_{0}^{1/2\sqrt{2}} \frac{2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$
7. $\displaystyle\int \sqrt{25-t^2}\,dt$
8. $\displaystyle\int \sqrt{1-9t^2}\,dt$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-49}}, \quad x > \frac{7}{2}$
10. $\displaystyle\int \frac{5\,dx}{\sqrt{25x^2-9}}, \quad x > \frac{3}{5}$
11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{y^2-49}}{y}\,dy, \quad y > 7$
12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{y^2-25}}{y^3}\,dy, \quad y > 5$
13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$
14. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$

Miscelánea de integrales

En los ejercicios 15 a 34, use cualquier método para evaluar las integrales. La mayoría de ellas requieren sustituciones trigonométricas, pero algunas se pueden evaluar con otros métodos.

15. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$
16. $\displaystyle\int \frac{x^2}{4+x^2}\,dx$
17. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$
18. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$
19. $\displaystyle\int \frac{8\,dw}{w^2\sqrt{4-w^2}}$
20. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-w^2}}{w^2}\,dw$
21. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,dx$
22. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-4}\,dx$
23. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2\,dx}{(1-x^2)^{3/2}}$
24. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}}$
25. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}, \quad x > 1$
26. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-1)^{5/2}}, \quad x > 1$
27. $\displaystyle\int \frac{(1-x^2)^{3/2}}{x^6}\,dx$
28. $\displaystyle\int \frac{(1-x^2)^{1/2}}{x^4}\,dx$
29. $\displaystyle\int \frac{8\,dx}{(4x^2+1)^2}$
30. $\displaystyle\int \frac{6\,dt}{(9t^2+1)^2}$
31. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{x^2-1}$
32. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{25+4x^2}$
33. $\displaystyle\int \frac{v^2\,dv}{(1-v^2)^{5/2}}$
34. $\displaystyle\int \frac{(1-r^2)^{5/2}}{r^8}\,dr$

En los ejercicios 35 a 48, realice una sustitución adecuada y, después, una sustitución trigonométrica para evaluar las integrales.

35. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 4} \frac{e^t\,dt}{\sqrt{e^{2t}+9}}$
36. $\displaystyle\int_{\ln(3/4)}^{\ln(4/3)} \frac{e^t\,dt}{(1+e^{2t})^{3/2}}$
37. $\displaystyle\int_{1/12}^{1/4} \frac{2\,dt}{\sqrt{t}+4t\sqrt{t}}$
38. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{dy}{y\sqrt{1+(\ln y)^2}}$
39. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
40. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$
41. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$
42. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
43. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$
44. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-(\ln x)^2}}{x\ln x}\,dx$
45. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{4-x}{x}}\,dx$

    (*Sugerencia:* Sea $x = u^2$.)
46. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{1-x^3}}\,dx$

    (*Sugerencia:* Sea $u = x^{3/2}$.)
47. $\displaystyle\int \sqrt{x}\sqrt{1-x}\,dx$
48. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}\,dx$

Problemas con valor inicial

En los ejercicios 49 a 52, resuelva los problemas con valor inicial de y como una función de x.

49. $x\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2-4}, \quad x \geq 2, \quad y(2) = 0$
50. $\sqrt{x^2-9}\dfrac{dy}{dx} = 1, \quad x > 3, \quad y(5) = \ln 3$
51. $(x^2+4)\dfrac{dy}{dx} = 3, \quad y(2) = 0$
52. $(x^2+1)^2\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2+1}, \quad y(0) = 1$

Aplicaciones y ejemplos

53. **Área** Obtenga el área de la región en el primer cuadrante que está acotada por los ejes de coordenadas y la curva $y = \sqrt{9-x^2}/3$.

54. **Área** Obtenga el área acotada por la elipse

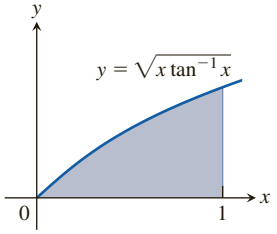
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

55. Considere la región acotada por las gráficas de $y = \text{sen}^{-1}\,x$, $y = 0$ y $x = 1/2$.

    a) Calcule el área de la región.

    b) Obtenga el centroide de la región.

56. Considere la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x\tan^{-1}x}$ y $y = 0$ para $0 \leq x \leq 1$. Calcule el volumen del sólido que se forma al hacer girar la región alrededor del eje x (vea la figura).



57. Evalúe $\int x^3 \sqrt{1 - x^2}\, dx$ mediante

a) integración por partes.

b) una sustitución con alguna u.

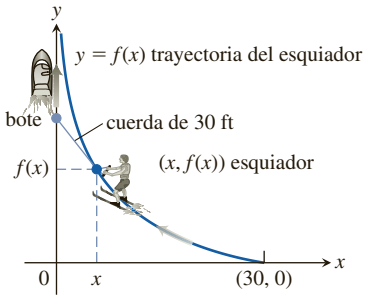
c) una sustitución trigonométrica.

58. Trayectoria de un esquiador acuático Suponga que un bote se encuentra en el origen, con un esquiador acuático atado al bote en el punto (30, 0) mediante una cuerda de 30 ft de longitud. Conforme el bote viaja a lo largo del eje y positivo, el esquiador es remolcado por el bote a lo largo de una trayectoria desconocida $y = f(x)$, como se muestra en la figura.

a) Demuestre que $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{900 - x^2}}{x}$.

[*Sugerencia:* Suponga que el esquiador siempre se encuentra directamente de cara al bote, y la cuerda es una recta tangente a la trayectoria $y = f(x)$].

b) Resuelva la ecuación del inciso *a)* para $f(x)$, usando $f(30) = 0$.



NO ESTÁ A ESCALA

8.5 Integración de funciones racionales por medio de fracciones parciales

En esta sección se muestra cómo expresar una función racional (un cociente de polinomios) como una suma de fracciones más sencillas, denominadas *fracciones parciales*, las cuales son fáciles de integrar. Por ejemplo, la función racional $(5x - 3)/(x^2 - 2x - 3)$ se puede rescribir como

$$\frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2}{x + 1} + \frac{3}{x - 3}.$$

Esta ecuación se verifica algebraicamente colocando las fracciones del lado derecho con un denominador común, $(x + 1)(x - 3)$. La habilidad adquirida para escribir funciones racionales como la suma anterior también es útil en otros escenarios (por ejemplo cuando se usan ciertos métodos de transformación para resolver ecuaciones diferenciales). Para integrar la función racional $(5x - 3)/(x^2 - 2x - 3)$ en el lado izquierdo de la expresión anterior, simplemente sumamos las integrales de las fracciones del lado derecho:

$$\begin{aligned}\int \frac{5x - 3}{(x + 1)(x - 3)}\, dx &= \int \frac{2}{x + 1}\, dx + \int \frac{3}{x - 3}\, dx \\ &= 2 \ln|x + 1| + 3 \ln|x - 3| + C.\end{aligned}$$

El método para rescribir fracciones racionales como una suma de fracciones más sencillas se denomina **método de las fracciones parciales**. En el caso del ejemplo anterior, consiste en determinar constantes A y B tales que

$$\frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 3}. \tag{1}$$

(Suponga por un momento que no sabe si $A = 2$ y $B = 3$ funcionarán). Llamaremos **fracciones parciales** a las fracciones $A/(x + 1)$ y $B/(x - 3)$, ya que sus denominadores sólo son parte del denominador original, $x^2 - 2x - 3$. Decimos que A y B son **coeficientes indeterminados** hasta que encontremos valores adecuados para ellos.

Para obtener A y B, primero eliminamos las fracciones de la ecuación (1), y reagrupamos en potencias de x para obtener

$$5x - 3 = A(x - 3) + B(x + 1) = (A + B)x - 3A + B.$$

Esto será una identidad en x, si y sólo si los coeficientes de potencias iguales de x en los dos lados son iguales:

$$A + B = 5, \qquad -3A + B = -3.$$

Al resolver estas ecuaciones simultáneas, se obtiene $A = 2$ y $B = 3$.

Descripción general del método

El éxito al escribir una función racional $f(x)/g(x)$ como una suma de funciones parciales depende de dos situaciones:

- *El grado de $f(x)$ debe ser menor que el grado de $g(x)$*. Esto es, la fracción debe de ser propia. Si no es así, se divide $f(x)$ entre $g(x)$ y se trabaja con el residuo. Vea el ejemplo 3 de esta sección.
- *Debemos conocer los factores de $g(x)$*. En teoría, cualquier polinomio con coeficientes reales puede escribirse como un producto de factores lineales con coeficientes reales y factores cuadráticos con coeficientes reales. En la práctica, tal vez sea difícil obtener estos factores.

A continuación veremos cómo determinar las fracciones parciales de una fracción propia $f(x)/g(x)$ cuando se conocen los factores de $g(x)$. Un polinomio cuadrático (o factor) es **irreducible** si no se puede escribir como el producto de dos factores lineales con coeficientes reales. Es decir, el polinomio no tiene raíces reales.

Método de las fracciones parciales cuando $f(x)/g(x)$ es propia

1. Sea $x - r$ un factor lineal de $g(x)$. Suponga que $(x - r)^m$ es la potencia más grande de $x - r$ que divide a $g(x)$. Entonces, para este factor, asigne la suma de las m fracciones parciales:

$$\frac{A_1}{(x - r)} + \frac{A_2}{(x - r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x - r)^m}.$$

Haga lo mismo con cada factor lineal distinto de $g(x)$.

2. Sea $x^2 + px + q$ un factor cuadrático irreducible de $g(x)$ de modo que $x^2 + px + q$ no tiene raíces reales. Suponga que $(x^2 + px + q)^n$ es la potencia más grande de este factor que divide a $g(x)$. Entonces, para ese factor, asigne la suma de n fracciones parciales:

$$\frac{B_1x + C_1}{(x^2 + px + q)} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Haga lo mismo con cada factor cuadrático distinto de $g(x)$.

3. Iguale la fracción original $f(x)/g(x)$ a la suma de todas estas fracciones parciales. Elimine las fracciones de la ecuación resultante y reordene los términos en potencias decrecientes de x.

4. Iguale los coeficientes de potencias correspondientes de x y resuelva las ecuaciones resultantes para obtener los coeficientes indeterminados.

EJEMPLO 1 Use fracciones parciales para evaluar

$$\int \frac{x^2 + 4x + 1}{(x - 1)(x + 1)(x + 3)}\,dx.$$

Solución La descomposición en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{x^2 + 4x + 1}{(x - 1)(x + 1)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x + 3}.$$

Para obtener los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C, eliminamos las fracciones y obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 1 &= A(x + 1)(x + 3) + B(x - 1)(x + 3) + C(x - 1)(x + 1) \\ &= A(x^2 + 4x + 3) + B(x^2 + 2x - 3) + C(x^2 - 1) \\ &= (A + B + C)x^2 + (4A + 2B)x + (3A - 3B - C). \end{aligned}$$

Los polinomios en ambos lados de la ecuación anterior son idénticos, por lo que igualamos los coeficientes de potencias iguales de x, para obtener

$$\begin{aligned} &\text{Coeficiente de } x^2: && A + B + C = 1 \\ &\text{Coeficiente de } x^1: && 4A + 2B = 4 \\ &\text{Coeficiente de } x^0: && 3A - 3B - C = 1 \end{aligned}$$

Hay varias formas de resolver el sistema de ecuaciones lineales para despejar las incógnitas A, B y C, incluyendo la eliminación de variables y el uso de una calculadora o una computadora. Cualquiera que sea el método utilizado, la solución es $A = 3/4$, $B = 1/2$ y $C = -1/4$. En consecuencia, tenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 4x + 1}{(x-1)(x+1)(x+3)}\,dx &= \int \left[\frac{3}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+3}\right] dx \\ &= \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + K, \end{aligned}$$

donde K es la constante arbitraria de integración (para evitar confusión con el coeficiente indeterminado representado por C). ■

EJEMPLO 2 Use fracciones parciales para evaluar

$$\int \frac{6x + 7}{(x+2)^2}\,dx.$$

Solución Primero expresamos el integrando como una suma de fracciones parciales con coeficientes indeterminados.

$$\begin{aligned} \frac{6x + 7}{(x+2)^2} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} \\ 6x + 7 &= A(x+2) + B \qquad \text{Se multiplican ambos lados por } (x+2)^2. \\ &= Ax + (2A + B) \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de las potencias correspondientes de x, tenemos

$$A = 6 \quad \text{y} \quad 2A + B = 12 + B = 7, \quad \text{o} \quad A = 6 \quad \text{y} \quad B = -5.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{6x + 7}{(x+2)^2}\,dx &= \int \left(\frac{6}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2}\right) dx \\ &= 6\int \frac{dx}{x+2} - 5\int (x+2)^{-2}\,dx \\ &= 6\ln|x+2| + 5(x+2)^{-1} + C. \end{aligned}$$

■

El siguiente ejemplo muestra cómo manejar el caso cuando $f(x)/g(x)$ es una fracción impropia. Se trata de un caso donde el grado de f es mayor que el grado de g.

EJEMPLO 3 Use fracciones parciales para evaluar

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\,dx.$$

Solución Primero dividimos el numerador entre el denominador para obtener un polinomio más una fracción propia.

$$\begin{array}{r} 2x \\ x^2 - 2x - 3 \overline{)\,2x^3 - 4x^2 - x - 3} \\ \underline{2x^3 - 4x^2 - 6x - 3} \\ 5x - 3 \end{array}$$

Después, escribimos la fracción impropia como un polinomio más una fracción propia.

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} = 2x + \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}$$

En el ejemplo inicial obtuvimos la descomposición de la fracción del lado derecho en fracciones parciales, por lo que

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\,dx &= \int 2x\,dx + \int \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}\,dx \\ &= \int 2x\,dx + \int \frac{2}{x + 1}\,dx + \int \frac{3}{x - 3}\,dx \\ &= x^2 + 2\ln|x + 1| + 3\ln|x - 3| + C. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Use fracciones parciales para evaluar

$$\int \frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2}\,dx.$$

Solución El denominador tiene un factor cuadrático irreducible, así como un factor lineal repetido; entonces, escribimos

$$\frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{(x - 1)^2}. \tag{2}$$

Al eliminar las fracciones de la ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned}-2x + 4 &= (Ax + B)(x - 1)^2 + C(x - 1)(x^2 + 1) + D(x^2 + 1) \\ &= (A + C)x^3 + (-2A + B - C + D)x^2 \\ &\quad + (A - 2B + C)x + (B - C + D).\end{aligned}$$

Al igualar coeficientes de términos semejantes se obtiene

$$\begin{aligned}&\text{Coeficientes de } x^3: && 0 = A + C \\ &\text{Coeficientes de } x^2: && 0 = -2A + B - C + D \\ &\text{Coeficientes de } x^1: && -2 = A - 2B + C \\ &\text{Coeficientes de } x^0: && 4 = B - C + D\end{aligned}$$

Resolvemos estas ecuaciones simultáneamente para obtener los valores de A, B, C y D:

$$\begin{aligned}-4 = -2A, \quad A &= 2 && \text{Se resta la cuarta ecuación de la segunda.} \\ C = -A &= -2 && \text{Según la primera ecuación} \\ B = (A + C + 2)/2 &= 1 && \text{Según la tercera ecuación y } C = -A \\ D = 4 - B + C &= 1. && \text{Según la cuarta ecuación}\end{aligned}$$

Sustituimos estos valores en la ecuación (2), para obtener

$$\frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = \frac{2x + 1}{x^2 + 1} - \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}.$$

Por último, usando el desarrollo anterior, podemos integrar:

$$\begin{aligned}\int \frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{2x + 1}{x^2 + 1} - \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}\right)dx \\ &= \int \left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}\right)dx \\ &= \ln(x^2 + 1) + \tan^{-1}x - 2\ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} + C. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Use fracciones parciales para evaluar

$$\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)^2}.$$

Solución La forma de la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}.$$

Multiplicando por $x(x^2 + 1)^2$, tenemos

$$\begin{aligned} 1 &= A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x \\ &= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex \\ &= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A. \end{aligned}$$

Si igualamos coeficientes, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$A + B = 0, \qquad C = 0, \qquad 2A + B + D = 0, \qquad C + E = 0, \qquad A = 1.$$

Al resolver este sistema, se obtiene $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = -1$ y $E = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)^2} &= \int \left[\frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2 + 1} + \frac{-x}{(x^2 + 1)^2} \right] dx \\ &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{x^2 + 1} - \int \frac{x\,dx}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} \qquad u = x^2 + 1,\ du = 2x\,dx \\ &= \ln |x| - \frac{1}{2}\ln |u| + \frac{1}{2u} + K \\ &= \ln |x| - \frac{1}{2}\ln (x^2 + 1) + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + K \\ &= \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + K. \end{aligned}$$

■

Método de "encubrimiento" de Heaviside para factores lineales

Cuando el grado del polinomio $f(x)$ es menor que el grado de $g(x)$ y

$$g(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$

es un producto de n factores lineales distintos, cada uno elevado a la primera potencia, existe una manera rápida de desarrollar $f(x)/g(x)$ con fracciones parciales.

EJEMPLO 6 Obtenga A, B y C en el desarrollo de las siguientes fracciones parciales

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3}. \tag{3}$$

Solución Si multiplicamos ambos lados de la ecuación (3) por $(x - 1)$, obtenemos

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 2)(x - 3)} = A + \frac{B(x - 1)}{x - 2} + \frac{C(x - 1)}{x - 3}$$

y si consideramos $x = 1$, la ecuación resultante da el valor de A:

$$\begin{aligned} \frac{(1)^2 + 1}{(1 - 2)(1 - 3)} &= A + 0 + 0, \\ A &= 1. \end{aligned}$$

Así, el valor de A es el número que habríamos obtenido si hubiéramos encubierto el factor $(x-1)$ en el denominador de la fracción original

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \tag{4}$$

y hubiéramos evaluado el resto en $x=1$:

$$A = \frac{(1)^2+1}{\boxed{(x-1)}\,(1-2)(1-3)} = \frac{2}{(-1)(-2)} = 1.$$

Se encubre

De forma similar, obtenemos el valor de B en la ecuación (3) encubriendo el factor $(x-2)$ en la expresión (4) y evaluando el resto en $x=2$:

$$B = \frac{(2)^2+1}{(2-1)\,\boxed{(x-2)}\,(2-3)} = \frac{5}{(1)(-1)} = -5.$$

Se encubre

Por último, se determina C encubriendo $(x-3)$ en la expresión (4) y evaluando el resto en $x=3$:

$$C = \frac{(3)^2+1}{(3-1)(3-2)\,\boxed{(x-3)}} = \frac{10}{(2)(1)} = 5.$$

Se encubre

■

Método de Heaviside

1. *Escriba el cociente con $g(x)$ en forma factorizada*:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)}.$$

2. *Encubra uno a uno los factores* $(x-r_i)$ de $g(x)$, reemplazando cada vez todas las x no eliminadas por el número r_i. Esto produce un número A_i para cada raíz r_i:

$$A_1 = \frac{f(r_1)}{(r_1-r_2)\cdots(r_1-r_n)}$$

$$A_2 = \frac{f(r_2)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)\cdots(r_2-r_n)}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{f(r_n)}{(r_n-r_1)(r_n-r_2)\cdots(r_n-r_{n-1})}.$$

3. *Escriba el desarrollo de la fracción parcial de $f(x)/g(x)$* como

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-r_1)} + \frac{A_2}{(x-r_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-r_n)}.$$

EJEMPLO 7 Utilice el método de Heaviside para evaluar

$$\int \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}\,dx.$$

Solución El grado de $f(x) = x + 4$ es menor que el grado del polinomio cúbico $g(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$; y con $g(x)$ factorizada,

$$\frac{x + 4}{x^3 + 3x^2 - 10x} = \frac{x + 4}{x(x - 2)(x + 5)}.$$

Las raíces de $g(x)$ son $r_1 = 0$, $r_2 = 2$ y $r_3 = -5$. Entonces, se obtiene

$$A_1 = \frac{0 + 4}{\boxed{x}\,(0 - 2)(0 + 5)} = \frac{4}{(-2)(5)} = -\frac{2}{5}$$

Se encubre

$$A_2 = \frac{2 + 4}{2\,\boxed{(x - 2)}\,(2 + 5)} = \frac{6}{(2)(7)} = \frac{3}{7}$$

Se encubre

$$A_3 = \frac{-5 + 4}{(-5)(-5 - 2)\,\boxed{(x + 5)}} = \frac{-1}{(-5)(-7)} = -\frac{1}{35}.$$

Se encubre

Por lo tanto,

$$\frac{x + 4}{x(x - 2)(x + 5)} = -\frac{2}{5x} + \frac{3}{7(x - 2)} - \frac{1}{35(x + 5)},$$

y

$$\int \frac{x + 4}{x(x - 2)(x + 5)}\,dx = -\frac{2}{5}\ln|x| + \frac{3}{7}\ln|x - 2| - \frac{1}{35}\ln|x + 5| + C. \quad \blacksquare$$

Otras formas de obtener los coeficientes

Otras formas de determinar las constantes que aparecen en las fracciones parciales es diferenciar, como en el siguiente ejemplo. Otro método consiste en asignar ciertos valores numéricos a x.

EJEMPLO 8 Obtenga A, B y C en la ecuación

$$\frac{x - 1}{(x + 1)^3} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{(x + 1)^3}$$

eliminando fracciones, diferenciando el resultado y sustituyendo $x = -1$.

Solución Primero eliminamos fracciones:

$$x - 1 = A(x + 1)^2 + B(x + 1) + C.$$

La sustitución $x = -1$ muestra que $C = -2$. Después, diferenciamos ambos lados con respecto a x, para obtener

$$1 = 2A(x + 1) + B.$$

La sustitución $x = -1$ muestra que $B = 1$. Diferenciamos nuevamente para obtener $0 = 2A$, por lo que $A = 0$. De ahí que

$$\frac{x - 1}{(x + 1)^3} = \frac{1}{(x + 1)^2} - \frac{2}{(x + 1)^3}. \quad \blacksquare$$

En algunos problemas, la asignación de valores pequeños a x tales como $x = 0, \pm 1, \pm 2$, para obtener ecuaciones en A, B y C, constituye una alternativa rápida frente a otros métodos.

EJEMPLO 9 Obtenga A, B y C en la expresión

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3}$$

asignando valores numéricos a x.

Solución Se eliminan las fracciones para obtener

$$x^2 + 1 = A(x - 2)(x - 3) + B(x - 1)(x - 3) + C(x - 1)(x - 2).$$

Después, consideramos $x = 1, 2, 3$ sucesivamente para obtener A, B y C:

$$\begin{aligned} x = 1: \quad (1)^2 + 1 &= A(-1)(-2) + B(0) + C(0) \\ 2 &= 2A \\ A &= 1 \\ x = 2: \quad (2)^2 + 1 &= A(0) + B(1)(-1) + C(0) \\ 5 &= -B \\ B &= -5 \\ x = 3: \quad (3)^2 + 1 &= A(0) + B(0) + C(2)(1) \\ 10 &= 2C \\ C &= 5. \end{aligned}$$

Conclusión:

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = \frac{1}{x - 1} - \frac{5}{x - 2} + \frac{5}{x - 3}.$$

■

Ejercicios 8.5

Desarrollo de cocientes en fracciones parciales

En los ejercicios 1 a 8, desarrolle los cocientes con fracciones parciales.

1. $\dfrac{5x - 13}{(x - 3)(x - 2)}$

2. $\dfrac{5x - 7}{x^2 - 3x + 2}$

3. $\dfrac{x + 4}{(x + 1)^2}$

4. $\dfrac{2x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

5. $\dfrac{z + 1}{z^2(z - 1)}$

6. $\dfrac{z}{z^3 - z^2 - 6z}$

7. $\dfrac{t^2 + 8}{t^2 - 5t + 6}$

8. $\dfrac{t^4 + 9}{t^4 + 9t^2}$

Factores lineales no repetidos

En los ejercicios 9 a 16, exprese el integrando como una suma de fracciones parciales y evalúe las integrales.

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - x^2}$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x}$

11. $\displaystyle\int \frac{x + 4}{x^2 + 5x - 6}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{2x + 1}{x^2 - 7x + 12}\,dx$

13. $\displaystyle\int_4^8 \frac{y\,dy}{y^2 - 2y - 3}$

14. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{y + 4}{y^2 + y}\,dy$

15. $\displaystyle\int \frac{dt}{t^3 + t^2 - 2t}$

16. $\displaystyle\int \frac{x + 3}{2x^3 - 8x}\,dx$

Factores lineales repetidos

En los ejercicios 17 a 20, exprese el integrando como una suma de fracciones parciales y evalúe las integrales.

17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^2 + 2x + 1}$

18. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3\,dx}{x^2 - 2x + 1}$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x - 1)(x^2 + 2x + 1)}$

Factores cuadráticos irreducibles

En los ejercicios 21 a 32, exprese el integrando como una suma de fracciones parciales y evalúe las integrales.

21. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + 1)}$

22. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2 + t + 4}{t^3 + t}\,dt$

23. $\displaystyle\int \frac{y^2 + 2y + 1}{(y^2 + 1)^2}\,dy$

24. $\displaystyle\int \frac{8x^2 + 8x + 2}{(4x^2 + 1)^2}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{2s + 2}{(s^2 + 1)(s - 1)^3}\,ds$

26. $\displaystyle\int \frac{s^4 + 81}{s(s^2 + 9)^2}\,ds$

27. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 2}{x^3 - 1}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4 + x}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4 - 1}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 - 4}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{2\theta^3 + 5\theta^2 + 8\theta + 4}{(\theta^2 + 2\theta + 2)^2}\,d\theta$

32. $\displaystyle\int \frac{\theta^4 - 4\theta^3 + 2\theta^2 - 3\theta + 1}{(\theta^2 + 1)^3}\,d\theta$

Fracciones impropias

En los ejercicios 33 a 38, realice la división larga del integrando, escriba la fracción propia como una suma de fracciones parciales y, luego, evalúe la integral.

33. $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - x}\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2 - 1}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{9x^3 - 3x + 1}{x^3 - x^2}\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{16x^3}{4x^2 - 4x + 1}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{y^4 + y^2 - 1}{y^3 + y}\,dy$

38. $\displaystyle\int \frac{2y^4}{y^3 - y^2 + y - 1}\,dy$

Evaluación de integrales

En los ejercicios 39 a 50, evalúe las integrales.

39. $\displaystyle\int \frac{e^t\,dt}{e^{2t} + 3e^t + 2}$

40. $\displaystyle\int \frac{e^{4t} + 2e^{2t} - e^t}{e^{2t} + 1}\,dt$

41. $\displaystyle\int \frac{\cos y\,dy}{\operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen} y - 6}$

42. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\cos^2\theta + \cos\theta - 2}$

43. $\displaystyle\int \frac{(x-2)^2 \tan^{-1}(2x) - 12x^3 - 3x}{(4x^2+1)(x-2)^2}\,dx$

44. $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2 \tan^{-1}(3x) + 9x^3 + x}{(9x^2+1)(x+1)^2}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{1}{x^{3/2} - \sqrt{x}}\,dx$

46. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^{1/3} - 1)\sqrt{x}}\,dx$
(*Sugerencia:* Sea $x = u^6$.)

47. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$
(*Sugerencia:* Sea $x + 1 = u^2$.)

48. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+9}}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^4+1)}\,dx$

50. $\displaystyle\int \frac{1}{x^6(x^5+4)}\,dx$
(*Sugerencia:* Multiplique por $\frac{x^3}{x^3}$.)

Problemas con valor inicial

En los ejercicios 51 a 54, resuelva los problemas con valor inicial para x como una función de t.

51. $(t^2 - 3t + 2)\dfrac{dx}{dt} = 1 \quad (t > 2), \quad x(3) = 0$

52. $(3t^4 + 4t^2 + 1)\dfrac{dx}{dt} = 2\sqrt{3}, \quad x(1) = -\pi\sqrt{3}/4$

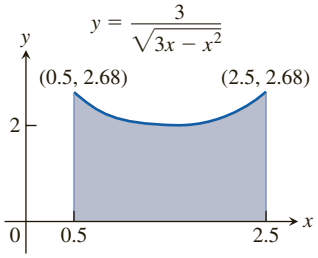
53. $(t^2 + 2t)\dfrac{dx}{dt} = 2x + 2 \quad (t, x > 0), \quad x(1) = 1$

54. $(t+1)\dfrac{dx}{dt} = x^2 + 1 \quad (t > -1), \quad x(0) = 0$

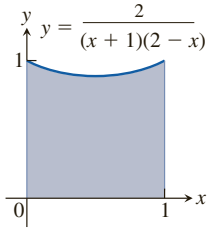
Aplicaciones y ejemplos

En los ejercicios 55 y 56, calcule el volumen del sólido generado al hacer girar la región sombreada alrededor del eje indicado.

55. El eje x

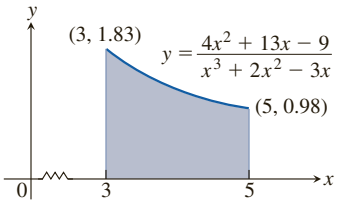


56. El eje y



T 57. Obtenga, con dos decimales, la coordenada x del centroide de la región en el primer cuadrante acotada por el eje x, la curva $y = \tan^{-1} x$ y la recta $x = \sqrt{3}$.

T 58. Obtenga la coordenada x, con dos decimales, del centroide de esta región.



T 59. Difusión social En ocasiones, los sociólogos utilizan la frase "difusión social" para describir la manera en que la información se difunde en una población. La información puede ser un rumor, una moda cultural o una noticia acerca de una innovación tecnológica. En una población suficientemente grande, el número de personas x que conoce la información se trata como una función diferenciable del tiempo t, y se supone que la velocidad de difusión, dx/dt, es proporcional al número de personas que conocen la información por el número de personas que la desconocen. Esto conduce a la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x),$$

donde N es el número de personas que integran la población.

Suponga que t está en días, $k = 1/250$, y que dos personas inician un rumor en el instante $t = 0$, en una población de $N = 1000$ personas.

a) Obtenga x como una función de t.

b) ¿En qué momento la mitad de la población habrá escuchado el rumor? (Aquí es cuando el rumor se propaga más rápidamente).

T 60. Reacciones químicas de segundo orden Muchas reacciones químicas son el resultado de la interacción de dos moléculas que sufren un cambio para generar un nuevo producto. La velocidad de la reacción comúnmente depende de las concentraciones de las dos clases de moléculas. Si a es la cantidad de sustancia A y b es la cantidad de sustancia B en el instante $t = 0$, y si x es la cantidad de producto en el instante t, entonces, la velocidad de formación de x puede expresarse por medio de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x),$$

o

$$\frac{1}{(a - x)(b - x)}\frac{dx}{dt} = k,$$

donde k es una constante de la reacción. Integre ambos lados de esta ecuación para obtener una relación entre x y t, ***a)*** si $a = b$, y ***b)*** si $a \neq b$. En cada caso, suponga que $x = 0$ cuando $t = 0$.

8.6 Tablas de integrales y sistemas de álgebra por computadora

En esta sección analizaremos cómo utilizar tablas y sistemas de álgebra por computadora para evaluar integrales.

Tablas de integrales

Al final del libro, después del índice analítico, se incluye una breve tabla de integrales. (Tablas más extensas aparecen en antologías como *CRC Mathematical Tables*, que incluyen miles de integrales). Las fórmulas de integración se establecen en términos de las constantes a, b, c, m, n, etcétera. Por lo general, estas constantes toman cualquier valor real y no necesitan ser enteros. Las restricciones ocasionales en sus valores se indican en las fórmulas. Por ejemplo, la fórmula 21 requiere que $n \neq -1$, y la fórmula 27 requiere que $n \neq -2$.

En las fórmulas, se supone que las constantes no toman valores que impliquen la división entre cero; tampoco se considera la extracción de raíces pares de números negativos. Por ejemplo, la fórmula 24 supone que $a \neq 0$, y las fórmulas 29a) y 29b) no se pueden emplear a menos que b sea positiva.

EJEMPLO 1 Obtenga

$$\int x(2x + 5)^{-1}\, dx.$$

Solución Se usa la fórmula 24 del final del libro (no la 22, que requiere que $n \neq -1$):

$$\int x(ax + b)^{-1}\, dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln |ax + b| + C.$$

Con $a = 2$ y $b = 5$, tenemos

$$\int x(2x + 5)^{-1}\, dx = \frac{x}{2} - \frac{5}{4} \ln |2x + 5| + C. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Obtenga

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x - 4}}.$$

Solución Se emplea la fórmula 29b):

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax - b}} = \frac{2}{\sqrt{b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax - b}{b}} + C.$$

Con $a = 2$ y $b = 4$, tenemos

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x - 4}} = \frac{2}{\sqrt{4}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{2x - 4}{4}} + C = \tan^{-1} \sqrt{\frac{x - 2}{2}} + C. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Obtenga

$$\int x \operatorname{sen}^{-1} x\, dx.$$

Solución Iniciamos utilizando la fórmula 106:

$$\int x^n \operatorname{sen}^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n + 1} \operatorname{sen}^{-1} ax - \frac{a}{n + 1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1 - a^2x^2}}, \qquad n \neq -1.$$

Con $n = 1$ y $a = 1$, tenemos

$$\int x \operatorname{sen}^{-1} x \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

En seguida usamos la fórmula 49 para obtener la integral de la derecha:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Con $a = 1$,

$$\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^{-1} x - \frac{1}{2} x\sqrt{1 - x^2} + C.$$

El resultado combinado es

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sen}^{-1} x \, dx &= \frac{x^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \operatorname{sen}^{-1} x - \frac{1}{2} x\sqrt{1 - x^2} + C\right) \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right) \operatorname{sen}^{-1} x + \frac{1}{4} x\sqrt{1 - x^2} + C'. \end{aligned}$$

■

Fórmulas de reducción

El tiempo que requiere la integración por partes repetida en ocasiones se reduce aplicando fórmulas como

$$\int \tan^n x \, dx = \frac{1}{n - 1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x \, dx \tag{1}$$

$$\int (\ln x)^n \, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx \tag{2}$$

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m + n} + \frac{n - 1}{m + n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^m x \, dx \qquad (n \neq -m). \tag{3}$$

Al aplicar esta fórmula varias veces, es posible expresar la integral original en términos de una potencia suficientemente baja, que puede evaluarse de manera directa. El ejemplo que sigue ilustra este procedimiento.

EJEMPLO 4 Obtenga

$$\int \tan^5 x \, dx.$$

Solución Aplicamos la ecuación (1) con $n = 5$, para obtener

$$\int \tan^5 x \, dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \int \tan^3 x \, dx.$$

Después, aplicamos la ecuación (1) nuevamente con $n = 3$ para evaluar la integral restante:

$$\int \tan^3 x \, dx = \frac{1}{2} \tan^2 x - \int \tan x \, dx = \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C.$$

El resultado combinado es

$$\int \tan^5 x \, dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C'.$$

■

Como lo sugiere su forma, las fórmulas de reducción se deducen por medio de integración por partes. (Vea el ejemplo 5 de la sección 8.2).

Integración con un software matemático

Una de las capacidades más importantes de los sistemas de software matemático es la integración simbólica. Esto se logra con un **comando para integrar** especificado por el sistema particular (por ejemplo, **int** en Maple, **Integrate** en Mathematica).

EJEMPLO 5 Suponga que desea evaluar la integral indefinida de la función

$$f(x) = x^2\sqrt{a^2 + x^2}.$$

Usando Maple, primero se define o se declara la función:

$$> f := x\text{^}2 * \text{sqrt}\,(a\text{^}2 + x\text{^}2);$$

Después, se emplea el comando para integrar con la función f, identificando la variable de integración:

$$> \text{int}(f, x);$$

Maple da la siguiente solución

$$\frac{1}{4}x(a^2 + x^2)^{3/2} - \frac{1}{8}a^2x\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{1}{8}a^4 \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right).$$

Para averiguar si es posible simplificar la respuesta, escriba

$$> \text{simplify}(\%);$$

Maple da

$$\frac{1}{8}a^2x\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{4}x^3\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{1}{8}a^4 \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right).$$

Si desea la integral definida para $0 \le x \le \pi/2$, puede usar el formato

$$> \text{int}(f, x = 0..\text{Pi}/2);$$

Maple da como resultado la expresión

$$\frac{1}{64}\pi(4a^2 + \pi^2)^{(3/2)} - \frac{1}{32}a^2\pi\sqrt{4a^2 + \pi^2} + \frac{1}{8}a^4 \ln(2)$$
$$- \frac{1}{8}a^4 \ln\left(\pi + \sqrt{4a^2 + \pi^2}\right) + \frac{1}{16}a^4 \ln(a^2).$$

También se puede obtener la integral definida para un valor particular de la constante a:

$$> a := 1;$$
$$> \text{int}(f, x = 0..1);$$

Maple da la respuesta numérica

$$\frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{2} - 1\right).$$ ■

EJEMPLO 6 Utilice un software matemático para obtener

$$\int \text{sen}^2 x \cos^3 x\, dx.$$

Solución Con Maple, escribimos

$$> \text{int}((\sin\text{^}2)(x) * (\cos\text{^}3)(x), x);$$

y se obtiene la respuesta

$$-\frac{1}{5}\sin(x)\cos(x)^4 + \frac{1}{15}\cos(x)^2\sin(x) + \frac{2}{15}\sin(x).$$ ■

Los sistemas de álgebra por computadora varían en el modo de procesar las integraciones. Nosotros usamos Maple en los ejemplos 5 y 6. Mathematica nos habría proporcionado resultados un tanto diferentes:

1. En el ejemplo 5, dada

$$In\ [1]\coloneqq \text{Integrate}\ [x\text{^}2 * \text{Sqrt}\ [a\text{^}2 + x\text{^}2], x]$$

Mathematica da

$$Out\ [1] = \sqrt{a^2 + x^2}\left(\frac{a^2 x}{8} + \frac{x^3}{4}\right) - \frac{1}{8}a^4 \text{Log}\left[x + \sqrt{a^2 + x^2}\right]$$

sin tener que simplificar un resultado intermedio. La respuesta es similar a la fórmula 22 de las tablas de integrales.

2. La respuesta de Mathematica para la integral

$$In\ [2]\coloneqq \text{Integrate}\ [\text{Sin}\ [x]\text{^}2 * \text{Cos}\ [x]\text{^}3, x]$$

del ejemplo 6 es

$$Out\ [2] = \frac{\text{Sin}\ [x]}{8} - \frac{1}{48}\text{Sin}\ [3x] - \frac{1}{80}\text{Sin}\ [5x]$$

que difiere de la respuesta de Maple. Ambas respuestas son correctas.

Aunque los paquetes de software matemático son muy poderosos y nos ayudan a resolver problemas difíciles, tienen limitaciones. Incluso existen situaciones en las que el software matemático más bien complica el problema (al generar una respuesta extremadamente difícil de utilizar o de interpretar). Además, observe que ni Maple ni Mathematica dan como respuesta una constante arbitraria $+C$. Por otro lado, con un poco de reflexión matemática de su parte, es posible reducir el problema a otro que sea más fácil de resolver. En el ejercicio 67 se presenta un ejemplo de lo anterior.

Muchos dispositivos de hardware tienen aplicaciones de integración disponibles (basadas en Maple o Mathematica), que facilitan entradas simbólicas del integrando para darnos resultados simbólicos de la integral definida. Muchas de estas aplicaciones de software también calculan integrales definidas. Estas aplicaciones constituyen otra herramienta para la obtención de integrales, independientemente del uso de las tablas de integrales. Sin embargo, en algunos casos, el software de integración podría no dar una respuesta adecuada.

Integrales no elementales

El desarrollo de calculadoras y computadoras que obtienen antiderivadas por medio de manipulación simbólica ha llevado a un interés renovado por la determinación de qué antiderivadas pueden expresarse como una combinación finita de funciones elementales (las funciones que hemos estudiado), y cuáles no. Las integrales de funciones que no tienen antiderivadas elementales se denominan integrales **no elementales**. Algunas veces estas integrales se pueden expresar con series infinitas (capítulo 10) o aproximarse utilizando métodos numéricos para su evaluación (sección 8.7). Ejemplos de integrales no elementales incluyen la función de error (la que mide la probabilidad de errores aleatorios)

$$\text{erf}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

e integrales como

$$\int \text{sen}\,x^2\,dx \qquad \text{y} \qquad \int \sqrt{1 + x^4}\,dx$$

que se presentan en física e ingeniería. Éstas y muchas otras como

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx, \qquad \int e^{(e^x)}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx, \qquad \int \ln\,(\ln x)\,dx, \qquad \int \frac{\text{sen}\,x}{x}\,dx,$$

$$\int \sqrt{1 - k^2\text{sen}^2\,x}\,dx, \qquad 0 < k < 1,$$

parecen tan sencillas que nos sentimos tentados a averiguar cómo se calculan. Sin embargo, es posible demostrar que no hay forma de expresar estas integrales como combinaciones finitas de funciones elementales. Lo mismo se aplica a integrales que puedan transformarse en las anteriores por sustitución. De acuerdo con la parte 1 del teorema fundamental del cálculo, todos los integrandos anteriores tienen antiderivadas porque son continuos. Sin embargo, ninguna de sus antiderivadas es elemental. Las integrales que se le pedirá evaluar en este capítulo tienen antiderivadas elementales, pero es posible encontrar integrales no elementales en otros contextos.

Ejercicios 8.6

Uso de tablas de integrales

En los ejercicios 1 a 26, utilice la tabla de integrales incluida al final del libro para evaluar las integrales.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-3}}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$
3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-2}}$
4. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(2x+3)^{3/2}}$
5. $\displaystyle\int x\sqrt{2x-3}\,dx$
6. $\displaystyle\int x(7x+5)^{3/2}\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-4x}}{x^2}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x-9}}$
9. $\displaystyle\int x\sqrt{4x-x^2}\,dx$
10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x}\,dx$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{7+x^2}}$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{7-x^2}}$
13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$
14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$
15. $\displaystyle\int e^{2t}\cos 3t\,dt$
16. $\displaystyle\int e^{-3t}\operatorname{sen} 4t\,dt$
17. $\displaystyle\int x\cos^{-1}x\,dx$
18. $\displaystyle\int x\tan^{-1}x\,dx$
19. $\displaystyle\int x^2\tan^{-1}x\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx$
21. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x\cos 2x\,dx$
22. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 2x\cos 3x\,dx$
23. $\displaystyle\int 8\operatorname{sen} 4t\operatorname{sen}\frac{t}{2}\,dt$
24. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\frac{t}{3}\operatorname{sen}\frac{t}{6}\,dt$
25. $\displaystyle\int \cos\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{4}\,d\theta$
26. $\displaystyle\int \cos\frac{\theta}{2}\cos 7\theta\,d\theta$

Sustitución y tablas de integrales

En los ejercicios 27 a 40, use una sustitución para cambiar la integral por una que pueda encontrar en la tabla. Después, evalúe la integral.

27. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$
28. $\displaystyle\int \frac{x^2+6x}{(x^2+3)^2}\,dx$
29. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x}\,dx$
30. $\displaystyle\int \frac{\cos^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
31. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$
32. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}}\,dx$
33. $\displaystyle\int \cot t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,dt, \quad 0<t<\pi/2$
34. $\displaystyle\int \frac{dt}{\tan t\sqrt{4-\operatorname{sen}^2 t}}$
35. $\displaystyle\int \frac{dy}{y\sqrt{3+(\ln y)^2}}$
36. $\displaystyle\int \tan^{-1}\sqrt{y}\,dy$
37. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx$ (*Sugerencia:* Complete el cuadrado)
38. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$
39. $\displaystyle\int \sqrt{5-4x-x^2}\,dx$
40. $\displaystyle\int x^2\sqrt{2x-x^2}\,dx$

Uso de fórmulas de reducción

Use fórmulas de reducción para evaluar las integrales en los ejercicios 41 a 50.

41. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 2x\,dx$
42. $\displaystyle\int 8\cos^4 2\pi t\,dt$
43. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 2\theta\cos^3 2\theta\,d\theta$
44. $\displaystyle\int 2\operatorname{sen}^2 t\sec^4 t\,dt$
45. $\displaystyle\int 4\tan^3 2x\,dx$
46. $\displaystyle\int 8\cot^4 t\,dt$
47. $\displaystyle\int 2\sec^3 \pi x\,dx$
48. $\displaystyle\int 3\sec^4 3x\,dx$
49. $\displaystyle\int \csc^5 x\,dx$
50. $\displaystyle\int 16x^3(\ln x)^2\,dx$

En los ejercicios 51 a 56, evalúe las integrales mediante una sustitución (posiblemente trigonométrica) y, después, aplique una fórmula de reducción.

51. $\displaystyle\int e^t\sec^3(e^t-1)\,dt$
52. $\displaystyle\int \frac{\csc^3\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}}\,d\theta$
53. $\displaystyle\int_0^1 2\sqrt{x^2+1}\,dx$
54. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dy}{(1-y^2)^{5/2}}$
55. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(r^2-1)^{3/2}}{r}\,dr$
56. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dt}{(t^2+1)^{7/2}}$

Aplicaciones

57. Área de una superficie Obtenga el área de la superficie generada al hacer girar, alrededor del eje x, la curva $y = \sqrt{x^2 + 2}$, $0 \le x \le \sqrt{2}$.

58. Longitud de arco Obtenga la longitud de la curva $y = x^2$, $0 \le x \le \sqrt{3}/2$.

59. Centroide Obtenga el centroide de la región cortada en el primer cuadrante por la curva $y = 1/\sqrt{x + 1}$ y la recta $x = 3$.

60. Momento con respecto al eje *y* Una placa delgada con densidad constante $\delta = 1$ ocupa la región acotada por la curva $y = 36/(2x + 3)$ y la recta $x = 3$ en el primer cuadrante. Obtenga el momento de la placa con respecto al eje y.

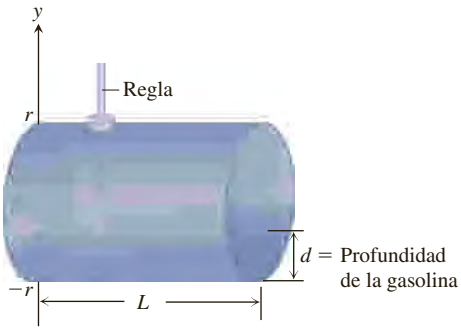
T **61.** Use la tabla de integrales y una calculadora para obtener, con dos decimales, el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = x^2$, $-1 \le x \le 1$, alrededor del eje x.

62. Volumen El jefe del departamento de contabilidad de la empresa donde usted trabaja le pide determinar una fórmula que pueda utilizar en un programa de cómputo para calcular el inventario de fin de año de la gasolina contenida en los depósitos de la compañía. Cada depósito tiene la forma de un cilindro circular recto de radio r y longitud L, colocado en forma horizontal, como se muestra en la figura. Los datos llegan al departamento de contabilidad como medidas de la profundidad, las cuales se toman con una regla, graduada en centímetros.

a) Demuestre, en la notación de la figura, que el volumen de la gasolina en el tanque hasta una profundidad d es

$$V = 2L\int_{-r}^{-r+d} \sqrt{r^2 - y^2}\, dy.$$

b) Evalúe la integral.



63. ¿Cuál es el valor más grande que

$$\int_a^b \sqrt{x - x^2}\, dx$$

puede tener para a y b cualesquiera? Justifique su respuesta.

64. ¿Cuál es el valor más grande que

$$\int_a^b x\sqrt{2x - x^2}\, dx$$

puede tener para a y b cualesquiera? Justifique su respuesta.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 65 y 66, utilice un software matemático para ejecutar las integraciones.

65. Evalúe las integrales

a) $\int x \ln x\, dx$ ***b)*** $\int x^2 \ln x\, dx$ ***c)*** $\int x^3 \ln x\, dx.$

d) ¿Qué patrón observa? Pronostique la fórmula para $\int x^4 \ln x\, dx$ y, luego, evalúe su conjetura con un software matemático para ver si es correcta.

e) ¿Cuál es la fórmula para $\int x^n \ln x\, dx$, $n \ge 1$? Compruebe su respuesta utilizando un software matemático.

66. Evalúe las integrales

a) $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$ ***b)*** $\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$ ***c)*** $\int \frac{\ln x}{x^4}\, dx.$

d) ¿Qué patrón observa? Pronostique la fórmula para

$$\int \frac{\ln x}{x^5}\, dx$$

y después evalúe su conjetura con un software matemático para ver si es correcta.

e) ¿Cuál es la fórmula para

$$\int \frac{\ln x}{x^n}\, dx, \quad n \ge 2?$$

Compruebe su respuesta utilizando un software matemático.

67. ***a)*** Utilice un software matemático para evaluar

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\, dx$$

donde n es un entero positivo arbitrario. ¿Su software matemático obtuvo la respuesta?

b) De manera sucesiva, determine la integral cuando $n = 1, 2, 3, 5$ y 7. Explique la complejidad de los resultados.

c) Ahora realice la sustitución $x = (\pi/2) - u$ y sume la nueva integral con la anterior. ¿Cuál es el valor de

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\, dx?$$

Este ejercicio muestra cómo un poco de ingenio matemático resuelve un problema que no puede solucionarse de forma inmediata con un software matemático.

8.7 Integración numérica

Las antiderivadas de algunas funciones como sen (x^2), $1/\ln x$, y $\sqrt{1 + x^4}$ no tienen fórmulas elementales. Cuando no es posible obtener la antiderivada de una función f que debemos integrar, podemos dividir el intervalo de integración, sustituir f en cada subintervalo por un polinomio lo más parecido a la función, integrar los polinomios y sumar los resultados para aproximar la integral definida de f. Este procedimiento es un ejemplo de integra-

ción numérica. En la presente sección estudiaremos tales métodos, la *regla del trapecio* y la *regla de Simpson*. En la presentación supusimos que f es positiva, pero el único requerimiento es que sea continua en el intervalo de integración $[a, b]$.

Aproximaciones mediante trapecios

La regla del trapecio para el valor de la integral definida se basa en la aproximación de la región entre una curva y el eje x, empleando trapecios, en lugar de rectángulos, como en la figura 8.7. No es necesario que los puntos de subdivisión $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la figura estén igualmente espaciados, pero la fórmula es más sencilla si lo están. Por lo tanto, supondremos que la longitud de cada intervalo es

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}.$$

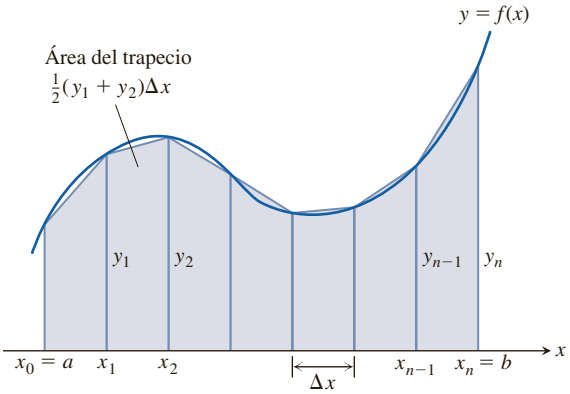


FIGURA 8.7 La regla del trapecio aproxima pequeñas partes de la curva $y = f(x)$ con segmentos de rectas. Para aproximar la integral de f de a a b, sumamos las áreas de los trapecios formados al unir los extremos de los segmentos con el eje x.

La longitud $\Delta x = (b - a)/n$ se denomina **longitud del paso** o **tamaño de la malla**. El área del trapecio que está arriba del i-ésimo subintervalo es

$$\Delta x\left(\frac{y_{i-1} + y_i}{2}\right) = \frac{\Delta x}{2}(y_{i-1} + y_i),$$

donde $y_{i-1} = f(x_{i-1})$ y $y_i = f(x_i)$. (Vea la figura 8.7). Entonces, el área debajo de la curva $y = f(x)$ y arriba del eje x se aproxima sumando las áreas de todos los trapecios:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\Delta x + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{2}(y_{n-2} + y_{n-1})\Delta x + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta x \\ &= \Delta x\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) \\ &= \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n), \end{aligned}$$

donde

$$y_0 = f(a), \qquad y_1 = f(x_1), \qquad \ldots, \qquad y_{n-1} = f(x_{n-1}), \qquad y_n = f(b).$$

La regla del trapecio nos dice: Utilice T para estimar la integral de f de a a b.

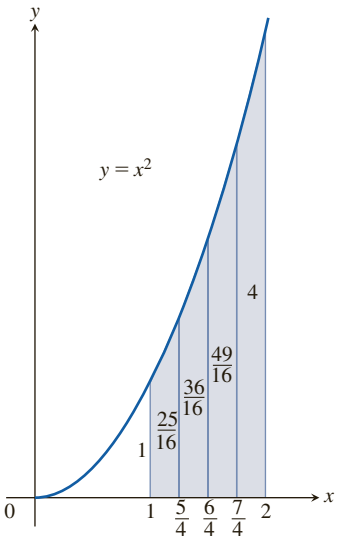


FIGURA 8.8 La aproximación trapezoidal del área bajo la gráfica de $y = x^2$ desde $x = 1$ hasta $x = 2$ es una ligera sobrestimación (ejemplo 1).

Regla del trapecio
Para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$, se usa

$$T = \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right).$$

Las y son los valores de f en los puntos de partición

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \Delta x,\ x_2 = a + 2\Delta x,\ \ldots,\ x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x,\ x_n = b,$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$.

EJEMPLO 1 Use la regla del trapecio con $n = 4$ para estimar $\int_1^2 x^2\,dx$. Compare su estimación con el valor exacto.

Solución Se divide el intervalo [1, 2] en cuatro subintervalos de igual longitud (figura 8.8). Después, se evalúa $y = x^2$ en cada punto de la partición (tabla 8.2).

Usando estos valores de y, $n = 4$ y $\Delta x = (2 - 1)/4 = 1/4$ en la regla del trapecio, tenemos

$$T = \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + 2\left(\frac{25}{16}\right) + 2\left(\frac{36}{16}\right) + 2\left(\frac{49}{16}\right) + 4\right)$$

$$= \frac{75}{32} = 2.34375.$$

TABLA 8.2

x	$y = x^2$
1	1
$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$
$\frac{6}{4}$	$\frac{36}{16}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{49}{16}$
2	4

Como la parábola es cóncava *hacia arriba*, los segmentos aproximantes se encuentran arriba de la curva, por lo que cada trapecio tiene un área ligeramente mayor que la franja correspondiente bajo la curva. El valor exacto de la integral es

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

La aproximación T sobrestima la integral aproximadamente en medio punto porcentual de su valor verdadero de $7/3$. El porcentaje de error es $(2.34375 - 7/3)/(7/3) \approx 0.00446$ o 0.446%. ■

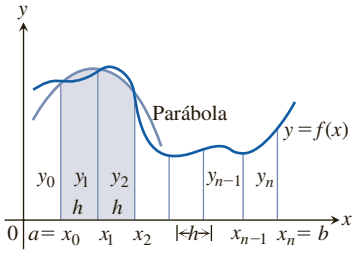


FIGURA 8.9 La regla de Simpson aproxima pequeñas partes de la curva con parábolas.

Regla de Simpson: Aproximaciones mediante parábolas

Otra regla para aproximar la integral definida de una función continua es utilizar parábolas en lugar de los segmentos de recta que producen trapecios. Como antes, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $h = \Delta x = (b - a)/n$, pero esta vez requerimos que n sea un número *par*. En cada par de intervalos consecutivos, aproximamos la curva $y = f(x) \geq 0$ por medio de una parábola, como se muestra en la figura 8.9. Una parábola típica pasa por los tres puntos consecutivos (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}) de la curva.

Calculamos el área de la región sombreada debajo de la parábola que pasa por tres puntos consecutivos. Para simplificar nuestros cálculos, primero tomamos el caso donde $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ y $x_2 = h$ (figura 8.10), donde $h = \Delta x = (b - a)/n$. El área debajo de la parábola

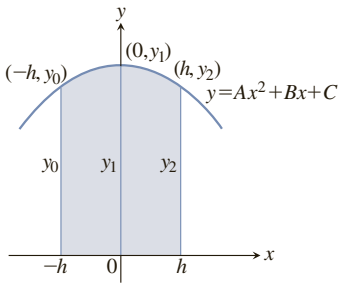


FIGURA 8.10 Al integrar de $-h$ a h, determinamos que el área sombreada es

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

será la misma si desplazamos el eje y hacia la izquierda o hacia la derecha. La parábola tiene una ecuación de la forma

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

de modo que el área debajo de ella desde $x = -h$ hasta $x = h$ es

$$A_p = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx$$

$$= \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h}$$

$$= \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).$$

Como la curva pasa por los tres puntos $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ y (h, y_2), también tenemos

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C, \qquad y_1 = C, \qquad y_2 = Ah^2 + Bh + C,$$

de lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} C &= y_1, \\ Ah^2 - Bh &= y_0 - y_1, \\ Ah^2 + Bh &= y_2 - y_1, \\ 2Ah^2 &= y_0 + y_2 - 2y_1. \end{aligned}$$

De aquí que, expresando el área A_p en términos de las ordenadas y_0, y_1 y y_2, tenemos

$$A_p = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C) = \frac{h}{3}((y_0 + y_2 - 2y_1) + 6y_1) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Ahora, al desplazar la parábola horizontalmente a su posición sombreada en la figura 8.9, el área debajo de ella no cambia. Así, el área debajo de la parábola que pasa por (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en la figura 8.9 sigue siendo

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

De manera similar, el área debajo de la parábola que pasa por los puntos (x_2, y_2), (x_3, y_3) y (x_4, y_4) es

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4).$$

Calculando las áreas debajo de todas las parábolas y sumando los resultados, se obtiene la aproximación

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots$$

$$+ \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

El resultado se conoce como la regla de Simpson. La función no necesita ser positiva, como en nuestra deducción, pero el número n de subintervalos debe ser par para aplicar la regla, porque cada arco parábolico utiliza dos subintervalos.

Regla de Simpson

Para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$, se utiliza

$$S = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \text{g} \quad + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Las y son los valores de f en los puntos de la partición

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, x_n = b.$$

El número n es par, y $\Delta x = (b - a)/n$.

Observe el patrón de los coeficientes en la regla anterior: 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2,…, 4, 1.

TABLA 8.3

x	$y = 5x^4$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{16}$
1	5
$\frac{3}{2}$	$\frac{405}{16}$
2	80

EJEMPLO 2 Use la regla de Simpson con $n = 4$ para aproximar $\int_0^2 5x^4\,dx$.

Solución Se divide [0, 2] en cuatro subintervalos y se evalúa $y = 5x^4$ en los puntos de partición (tabla 8.3). Después, se aplica la regla de Simpson con $n = 4$ y $\Delta x = 1/2$:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(0 + 4\left(\frac{5}{16}\right) + 2(5) + 4\left(\frac{405}{16}\right) + 80\right) \\ &= 32\,\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Esta estimación difiere del valor exacto (32) en sólo $1/12$, un error porcentual de menos de tres décimas del 1%, y esto se logró con sólo cuatro subintervalos. ■

Análisis del error

Siempre que se usa una técnica de aproximación, surge la pregunta de qué tan precisa es dicha aproximación. El siguiente teorema aporta fórmulas para la estimación de los errores cuando se emplean la regla del trapecio y la de Simpson. El **error** es la diferencia entre la aproximación obtenida por la regla y el valor exacto de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$.

TEOREMA 1: Estimación del error en las reglas del trapecio y de Simpson

Si f'' es continua y M es cualquier cota superior para los valores de $|f''|$ en $[a, b]$, entonces, el error E_T en la aproximación trapezoidal a la integral de f de a a b para n pasos satisface la desigualdad

$$|E_T| \le \frac{M(b-a)^3}{12n^2}. \qquad \text{Regla del trapecio}$$

Si $f^{(4)}$ es continua y M es cualquier cota superior para los valores de $|f^{(4)}|$ en $[a, b]$, entonces, el error E_S en la aproximación de la regla de Simpson a la integral de f de a a b para n pasos satisface la desigualdad

$$|E_S| \le \frac{M(b-a)^5}{180n^4}. \qquad \text{Regla de Simpson}$$

Para entender por qué el teorema 1 es verdadero en el caso de la regla del trapecio, iniciamos con un resultado de cálculo avanzado, según el cual, si f'' es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = T - \frac{b-a}{12} \cdot f''(c)(\Delta x)^2$$

para algún número c entre a y b. Por lo tanto, cuando Δx se aproxima a cero, el error definido por

$$E_T = -\frac{b-a}{12} \cdot f''(c)(\Delta x)^2$$

se aproxima a *cero* como el *cuadrado* de Δx.

La desigualdad

$$|E_T| \leq \frac{b-a}{12} \text{ máx}|f''(x)|(\Delta x)^2,$$

donde máx se refiere al intervalo $[a, b]$, proporciona una cota superior para la magnitud del error. En la práctica, normalmente no se puede obtener el valor exacto de máx$|f''(x)|$ y tenemos que estimar una cota superior en el "peor de los casos". Si M es cualquier cota superior para los valores de $|f''(x)|$ en $[a, b]$, de modo que $|f''(x)| \leq M$ en $[a, b]$, entonces,

$$|E_T| \leq \frac{b-a}{12} M(\Delta x)^2.$$

Si sustituimos $(b-a)/n$ por Δx, obtenemos

$$|E_T| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

Para estimar el error en la regla de Simpson, iniciamos con un resultado de cálculo avanzado, que dice que si la cuarta derivada $f^{(4)}$ es continua, entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = S - \frac{b-a}{180} \cdot f^{(4)}(c)(\Delta x)^4$$

para algún punto c entre a y b. Así, cuando Δx se aproxima a cero, el error,

$$E_S = -\frac{b-a}{180} \cdot f^{(4)}(c)(\Delta x)^4,$$

se aproxima a cero como la *cuarta potencia* de Δx. (Esto explica por qué la regla de Simpson permite obtener mejores resultados que la regla del trapecio).

La desigualdad

$$|E_S| \leq \frac{b-a}{180} \text{ máx}|f^{(4)}(x)|\ (\Delta x)^4,$$

donde máx se refiere al intervalo $[a, b]$, proporciona una cota superior para la magnitud del error. Al igual que con máx$|f''|$ en la fórmula de error de la regla del trapecio, normalmente no se obtiene el valor exacto de máx$|f^{(4)}(x)|$ y tenemos que sustituirlo por una cota superior. Si M es cualquier cota superior para los valores de $|f^{(4)}|$ en $[a, b]$, entonces,

$$|E_S| \leq \frac{b-a}{180} M(\Delta x)^4.$$

Al sustituir Δx por $(b-a)/n$ en esta última expresión, tenemos

$$|E_S| \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4}.$$

EJEMPLO 3 Obtenga la cota superior del error estimando $\int_0^2 5x^4\,dx$ mediante la regla de Simpson con $n = 4$ (ejemplo 2).

Solución Para estimar el error, primero obtenemos una cota superior M para la magnitud de la cuarta derivada de $f(x) = 5x^4$ en el intervalo $0 \leq x \leq 2$. Como la cuarta derivada tiene el

valor constante $f^{(4)}(x) = 120$, tomamos $M = 120$. Con $b - a = 2$ y $n = 4$, la estimación del error con la regla de Simpson da

$$|E_S| \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4} = \frac{120(2)^5}{180 \cdot 4^4} = \frac{1}{12}.$$

Esta estimación es consistente con el resultado del ejemplo 2. ■

El teorema 1 también resulta útil para estimar el número de subintervalos requeridos cuando se usa la regla del trapecio o la de Simpson, si se especifica cierta tolerancia de error.

EJEMPLO 4 Estime el número mínimo de subintervalos necesarios para aproximar la integral del ejemplo 3, usando la regla de Simpson con una magnitud de error menor que 10^{-4}.

Solución Usando la desigualdad del teorema 1, si elegimos el número de intervalos n para satisfacer

$$\frac{M(b-a)^5}{180n^4} < 10^{-4},$$

entonces, el error E_S en la regla de Simpson satisface $|E_S| < 10^{-4}$, como se requiere.

Según la solución del ejemplo 3, tenemos que $M = 120$ y $b - a = 2$, de modo que n debe satisfacer

$$\frac{120(2)^5}{180n^4} < \frac{1}{10^4}$$

o, de manera equivalente,

$$n^4 > \frac{64 \cdot 10^4}{3}.$$

Se deduce que

$$n > 10\left(\frac{64}{3}\right)^{1/4} \approx 21.5.$$

Como n debe ser par en la regla de Simpson, estimamos el número mínimo de subintervalos requeridos para la tolerancia del error, $n = 22$. ■

EJEMPLO 5 Como se vio en el capítulo 7, el valor de ln 2 se calcula a partir de la integral

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx.$$

La tabla 8.4 muestra los valores de T y S para las aproximaciones de $\int_1^2 (1/x)\,dx$ usando varios valores de n. Observe que la regla de Simpson mejora radicalmente los valores de la regla del trapecio.

TABLA 8.4 Aproximaciones de la regla del trapecio (T_n) y de la regla de Simpson (S_n) para $\ln 2 = \int_1^2 (1/x)\,dx$

n	T_n	|Error| menor que …	S_n	|Error| menor que …
10	0.6937714032	0.0006242227	0.6931502307	0.0000030502
20	0.6933033818	0.0001562013	0.6931473747	0.0000001942
30	0.6932166154	0.0000694349	0.6931472190	0.0000000385
40	0.6931862400	0.0000390595	0.6931471927	0.0000000122
50	0.6931721793	0.0000249988	0.6931471856	0.0000000050
100	0.6931534305	0.0000062500	0.6931471809	0.0000000004

En particular, observe que cuando duplicamos el valor de n (y por lo tanto, se divide entre 2 el valor de $h = \Delta x$), la estimación del error para T se divide entre 2 *al cuadrado*, mientras que la estimación del error para S se divide entre 2 *a la cuarta*.

Esto tiene un efecto drástico cuando $\Delta x = (2 - 1)/n$ se hace pequeño. La aproximación de Simpson para $n = 50$ tiene una precisión de siete decimales, y para $n = 100$ coincide con nueve decimales (¡una aproximación de mil millonésimas!). ■

Si $f(x)$ es un polinomio de grado menor que 4, entonces, su cuarta derivada será cero, y

$$E_S = -\frac{b - a}{180} f^{(4)}(c)(\Delta x)^4 = -\frac{b - a}{180}(0)(\Delta x)^4 = 0.$$

Por lo tanto, no habrá error en la aproximación de Simpson de cualquier integral de f. En otras palabras, si f es una constante, una función lineal, o un polinomio cuadrático o cúbico, la regla de Simpson dará el valor exacto de cualquier integral de f, sin importar el número de subdivisiones. De manera similar, si f es una constante o una función lineal, su segunda derivada será cero y

$$E_T = -\frac{b - a}{12} f''(c)(\Delta x)^2 = -\frac{b - a}{12}(0)(\Delta x)^2 = 0.$$

Por lo tanto, la regla del trapecio dará el valor exacto de cualquier integral de f. Esto no es de sorprender, ya que los trapecios se ajustan perfectamente a la gráfica.

Aunque en teoría la disminución del tamaño del paso Δx reduce el error en las aproximaciones de Simpson y trapezoidal, en la práctica podría no ser así. Cuando Δx es muy pequeño, digamos $\Delta x = 10^{-8}$, los errores de redondeo de las calculadoras y computadoras en la aritmética que se requiere para calcular S y T pueden acumularse a tal grado que las fórmulas de error podrían dejar de describir lo que sucede. La reducción de Δx por debajo de cierto tamaño podría empeorar las cosas. Si tiene problemas con el redondeo al emplear las reglas analizadas en esta sección, es conveniente que consulte algún texto de análisis numérico para conocer métodos alternativos.

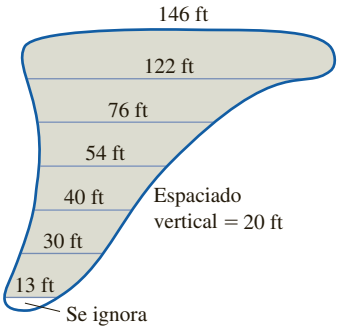


FIGURA 8.11 Las dimenciones del pantano en el ejemplo 6.

EJEMPLO 6 En un poblado se desea drenar y rellenar un pequeño pantano contaminado (figura 8.11). El pantano mide, en promedio, 5 ft de profundidad. ¿Aproximadamente cuántas yardas cúbicas de tierra se necesitarán para rellenar el área después de desecar el pantano?

Solución Para calcular el volumen del pantano, estimamos el área de la superficie y la multiplicamos por 5. Para estimar el área, utilizamos la regla de Simpson con $\Delta x = 20$ ft y las y iguales a las distancias medidas a lo largo del pantano, como se muestra en la figura 8.11.

$$S = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)$$

$$= \frac{20}{3}(146 + 488 + 152 + 216 + 80 + 120 + 13) = 8100$$

El volumen es de aproximadamente $(8100)(5) = 40{,}500$ ft^3 o 1500 yd^3. ■

Ejercicios 8.7

Estimación de integrales definidas

En los ejercicios 1 a 10, las instrucciones para las integrales tienen dos partes: una para la regla del trapecio y otra para la regla de Simpson.

I. Uso de la regla del trapecio

a) Estime la integral con $n = 4$ pasos y determine una cota superior para $|E_T|$.

b) Evalúe la integral directamente y determine $|E_T|$.

c) Utilice la fórmula $(|E_T|/(\text{valor real})) \times 100$ para expresar $|E_T|$ como un porcentaje del valor real de la integral.

II. Uso de la regla de Simpson

a) Estime la integral con $n = 4$ pasos y determine una cota superior para $|E_S|$.

b) Evalúe la integral directamente y determine $|E_S|$.

c) Utilice la fórmula $(|E_S|/(\text{valor real})) \times 100$ para expresar $|E_S|$ como un porcentaje del valor real de la integral.

1. $\displaystyle\int_1^2 x\,dx$ **2.** $\displaystyle\int_1^3 (2x - 1)\,dx$

3. $\int_{-1}^{1} (x^2 + 1)\,dx$

4. $\int_{-2}^{0} (x^2 - 1)\,dx$

5. $\int_{0}^{2} (t^3 + t)\,dt$

6. $\int_{-1}^{1} (t^3 + 1)\,dt$

7. $\int_{1}^{2} \frac{1}{s^2}\,ds$

8. $\int_{2}^{4} \frac{1}{(s-1)^2}\,ds$

9. $\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} t\,dt$

10. $\int_{0}^{1} \operatorname{sen} \pi t\,dt$

Estimación del número de subintervalos

En los ejercicios 11 a 22, estime el número mínimo de subintervalos necesarios para aproximar las integrales con un error de magnitud menor que 10^{-4} mediante ***a)*** la regla del trapecio y ***b)*** la regla de Simpson. (Las integrales en los ejercicios 11 a 18 son las integrales de los ejercicios 1 a 8).

11. $\int_{1}^{2} x\,dx$

12. $\int_{1}^{3} (2x - 1)\,dx$

13. $\int_{-1}^{1} (x^2 + 1)\,dx$

14. $\int_{-2}^{0} (x^2 - 1)\,dx$

15. $\int_{0}^{2} (t^3 + t)\,dt$

16. $\int_{-1}^{1} (t^3 + 1)\,dt$

17. $\int_{1}^{2} \frac{1}{s^2}\,ds$

18. $\int_{2}^{4} \frac{1}{(s-1)^2}\,ds$

19. $\int_{0}^{3} \sqrt{x+1}\,dx$

20. $\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

21. $\int_{0}^{2} \operatorname{sen}(x + 1)\,dx$

22. $\int_{-1}^{1} \cos(x + \pi)\,dx$

Estimaciones con datos numéricos

23. Volumen de agua en una piscina Una piscina rectangular mide 30 ft de ancho por 50 ft de largo. La tabla indica la profundidad $h(x)$ del agua a intervalos de 5 ft de un extremo de la piscina al otro. Estime el volumen de agua en la piscina aplicando la regla del trapecio con $n = 10$ a la integral

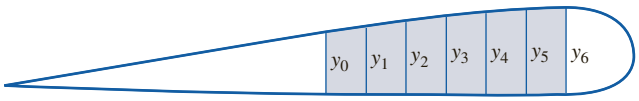
$$V = \int_{0}^{50} 30 \cdot h(x)\,dx.$$

Posición (ft) x	Profundidad (ft) $h(x)$	Posición (ft) x	Profundidad (ft) $h(x)$
0	6.0	30	11.5
5	8.2	35	11.9
10	9.1	40	12.3
15	9.9	45	12.7
20	10.5	50	13.0
25	11.0		

24. Distancia recorrida La siguiente tabla incluye datos de tiempo-velocidad de un automóvil deportivo que acelera desde el reposo hasta 130 millas por hora. ¿Qué distancia habrá recorrido el automóvil en el momento de alcanzar esta velocidad? (Use trapecios para estimar el área debajo de la curva de velocidad, pero tenga cuidado: los intervalos de tiempo varían en duración).

Cambios de velocidad	Tiempo (s)
De cero a 30 mph	2.2
40 mph	3.2
50 mph	4.5
60 mph	5.9
70 mph	7.8
80 mph	10.2
90 mph	12.7
100 mph	16.0
110 mph	20.6
120 mph	26.2
130 mph	37.1

25. Diseño de un ala El diseño de un nuevo avión requiere un tanque de gasolina en cada ala. Las secciones transversales del tanque deben ser de área constante. A continuación se presenta un diagrama a escala de una sección transversal del ala. El tanque debe tener capacidad para 5000 lb de gasolina, y ésta tiene una densidad de 42 lb/ft^3. Estime la longitud del tanque con la regla de Simpson.



$y_0 = 1.5$ ft, $y_1 = 1.6$ ft, $y_2 = 1.8$ ft, $y_3 = 1.9$ ft,
$y_4 = 2.0$ ft, $y_5 = y_6 = 2.1$ ft Espaciamiento horizontal = 1 ft

26. Consumo de petróleo en la isla Pathfinder Un generador diesel funciona de forma ininterrumpida, consumiendo aceite a una razón que aumenta gradualmente hasta que debe apagarse temporalmente para reemplazar los filtros. Use la regla del trapecio para estimar la cantidad de aceite consumido por el generador durante esta semana.

Día	Tasa de consumo de combustible (litros/hr)
Domingo	0.019
Lunes	0.020
Martes	0.021
Miércoles	0.023
Jueves	0.025
Viernes	0.028
Sábado	0.031
Domingo	0.035

Teoría y ejemplos

27. Valores utilizables de la función integral seno *La función integral seno,*

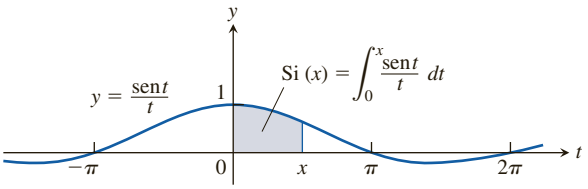
$$\operatorname{Si}(x) = \int_{0}^{x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt, \qquad \text{“integral seno de } x\text{”}$$

es una de muchas funciones en ingeniería cuyas fórmulas no pueden simplificarse. No existe una fórmula elemental para la antiderivada de $(\operatorname{sen} t)/t$. Sin embargo, los valores de $\operatorname{Si}(x)$ se estiman con facilidad con integración numérica.

Aunque la notación no lo muestra de manera explícita, la función que debe integrarse es

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0, \end{cases}$$

la extensión continua de $(\operatorname{sen} t)/t$ en el intervalo $[0, x]$. La función tiene derivadas de todos los órdenes en cualquier punto de su dominio. Su gráfica es suave, y podemos esperar buenos resultados con la regla de Simpson.



a) Considere el hecho de que $|f^{(4)}| \leq 1$ en $[0, \pi/2]$ para obtener una cota superior del error que ocurre si

$$\operatorname{Si}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

se estima mediante la regla de Simpson con $n = 4$.

b) Estime $\operatorname{Si}(\pi/2)$ mediante la regla de Simpson, con $n = 4$.

c) Exprese la cota del error que obtuvo en el inciso *a*), como un porcentaje del valor que obtuvo en el inciso *b*).

28. La función de error *La función de error*

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt,$$

es importante en probabilidad, y en las teorías de flujo de calor y transmisión de señales, y debe evaluarse numéricamente porque no existe una expresión elemental para la antiderivada de e^{-t^2}.

a) Use la regla de Simpson, con $n = 10$, para estimar $\operatorname{erf}(1)$.

b) En $[0, 1]$,

$$\left| \frac{d^4}{dt^4}\left(e^{-t^2}\right) \right| \leq 12.$$

Proporcione una cota superior para la magnitud del error de la estimación en el inciso *a*).

29. Demuestre que la suma T en la regla del trapecio para $\int_a^b f(x)\, dx$ es una suma de Riemann para f continua en $[a, b]$. [*Sugerencia:* Use el teorema del valor intermedio para demostrar la existencia de c_k en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ que satisface $f(c_k) = (f(x_{k-1}) + f(x_k))/2$].

30. Demuestre que la suma S en la regla de Simpson para $\int_a^b f(x)\, dx$ es una suma de Riemann para f continua en $[a, b]$. (Vea el ejercicio 29).

T 31. Integrales elípticas La longitud de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

resulta ser

$$\text{Longitud} = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}\, dt,$$

donde $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ es la excentricidad de la elipse. La integral de esta fórmula se denomina *integral elíptica* y no es elemental, salvo cuando $e = 0$ o 1.

a) Utilice la regla del trapecio con $n = 10$ para estimar la longitud de la elipse cuando $a = 1$ y $e = 1/2$.

b) Considere el hecho de que el valor absoluto de la segunda derivada de $(t) = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}$ es menor que 1, para determinar una cota superior del error en la aproximación que obtuvo en el inciso *a*).

Aplicaciones

T 32. La longitud de un arco de la curva $y = \operatorname{sen} x$ está dada por

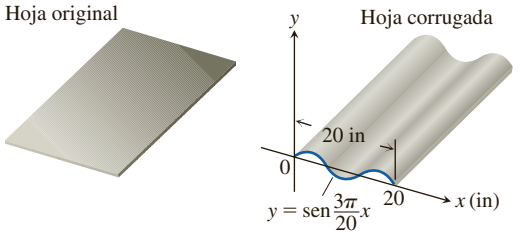
$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

Estime L mediante la regla de Simpson, con $n = 8$.

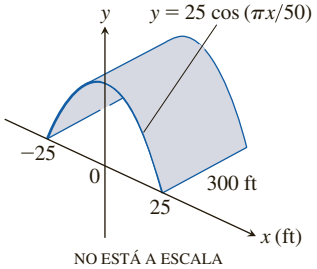
T 33. La compañía metalúrgica donde usted trabaja está compitiendo con la intención de ganar un contrato para fabricar hojas de acero corrugado para techo, como la que se muestra a continuación. Las secciones transversales de las hojas corrugadas tienen la forma de la curva

$$y = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{20} x, \quad 0 \leq x \leq 20 \text{ in.}$$

Si el techo se forja a partir de las hojas planas, aplicando un proceso que no estira el material, ¿cuál debe ser el ancho del material original? Para averiguarlo, utilice integración numérica y aproxime la longitud de la curva del seno con dos decimales.



T 34. Una empresa de ingeniería está compitiendo con la intención de ganar un contrato para construir el túnel que aquí se ilustra. Éste tiene una longitud de 300 ft, y mide 50 ft de ancho en la base. La sección transversal tiene la forma de un arco de la curva $y = 25 \cos(\pi x/50)$. Hasta su terminación, la superficie interna del túnel (excluyendo el camino) será tratada con un sellador resistente al agua, cuya aplicación tiene un costo de \$2.35 por ft^2. ¿Qué costo tendrá la aplicación del sellador? (*Sugerencia:* Use integración numérica para obtener la longitud de la curva del coseno).



Obtenga, con dos decimales, las áreas de las superficies generadas al hacer girar las curvas de los ejercicios 35 y 36 alrededor del eje x.

35. $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le \pi$

36. $y = x^2/4, \quad 0 \le x \le 2$

37. Use integración numérica para estimar el valor de

$$\operatorname{sen}^{-1} 0.6 = \int_0^{0.6} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Como referencia, $\operatorname{sen}^{-1} 0.6 = 0.64350$ a cinco decimales.

38. Use integración numérica para estimar el valor de

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx.$$

39. Asimilación de un medicamento Un adulto promedio de 60 años de edad asimila un medicamento contra el resfriado, durante 12 horas, a una razón modelada por

$$\frac{dy}{dt} = 6 - \ln(2t^2 - 3t + 3),$$

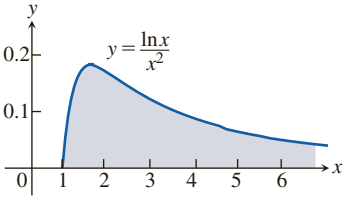
donde y se mide en miligramos y t es el tiempo en horas desde que se toma el medicamento. ¿Qué cantidad del fármaco absorbe el organismo del individuo en un periodo de 12 horas?

40. Efectos de un antihistamínico La concentración de un antihistamínico en el flujo sanguíneo de un adulto saludable está modelada por

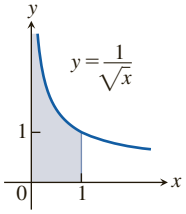
$$C = 12.5 - 4\ln(t^2 - 3t + 4),$$

donde C se mide en gramos por litro y t es el tiempo en horas desde que se toma el medicamento. ¿Cuál es el nivel promedio de concentración en el flujo sanguíneo durante un periodo de 6 horas?

8.8 Integrales impropias



a)



b)

FIGURA 8.12 ¿Son finitas las áreas debajo de estas curvas infinitas? Veremos que la respuesta es afirmativa en ambos casos.

Hasta el momento, hemos requerido que las integrales definidas tengan dos propiedades. Primera, que el dominio de integración $[a, b]$ sea acotado. Segunda, que el rango del integrando esté acotado en ese dominio. En la práctica, podemos encontrar aplicaciones que no cumplen con una o ambas de estas condiciones. La integral para el área debajo de la curva $y = (\ln x)/x^2$ de $x = 1$ a $x = \infty$ es un ejemplo en el que el dominio no es acotado (figura 8.12*a*). La integral del área debajo de la curva de $y = 1/\sqrt{x}$ entre $x = 0$ y $x = 1$ es un ejemplo en el que el integrando no está acotado (figura 8.12*b*). En cualquier caso, se dice que las integrales son *impropias* y se calculan como límites. En la sección 8.9 veremos que las integrales impropias desempeñan un papel importante en probabilidad. También serán útiles cuando investiguemos la convergencia de ciertas series infinitas en el capítulo 10.

Límites de integración infinitos

Considere la región no acotada (sin cota a la derecha) que se encuentra debajo de la curva $y = e^{-x/2}$ en el primer cuadrante (figura 8.13*a*). Se podría pensar que esta región tiene un área infinita, pero veremos que el valor es finito. Veamos cómo asignar un valor al área. Primero, se obtiene el área $A(b)$ de la parte de la región que está acotada a la derecha por $x = b$ (figura 8.13*b*).

$$A(b) = \int_0^b e^{-x/2}\, dx = -2e^{-x/2}\Big]_0^b = -2e^{-b/2} + 2$$

Después, se obtiene el límite de $A(b)$ cuando $b \to \infty$

$$\lim_{b\to\infty} A(b) = \lim_{b\to\infty} \left(-2e^{-b/2} + 2\right) = 2.$$

El valor que asignamos al área debajo la curva, de 0 a ∞, es

$$\int_0^\infty e^{-x/2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x/2}\, dx = 2.$$

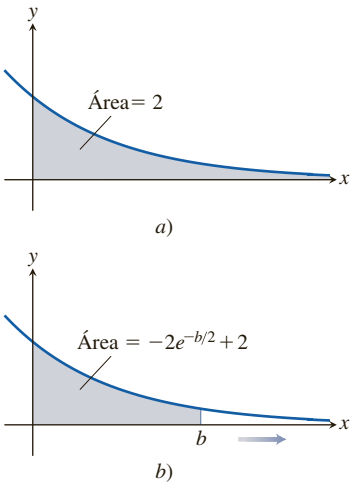


FIGURA 8.13 *a*) El área en el primer cuadrante debajo de la curva $y = e^{-x/2}$. *b*) El área es una integral impropia del primer tipo.

DEFINICIÓN Las integrales con límites de integración infinitos son **integrales impropias** del tipo I.

1. Si $f(x)$ es continua en $[a, \infty)$, entonces,

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Si $f(x)$ es continua en $(-\infty, b]$, entonces,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

3. Si $f(x)$ es continua en $(-\infty, \infty)$, entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx,$$

donde c es cualquier número real.

En todos los casos, si el límite es finito, se dice que la integral impropia **converge** y que el límite es el **valor** de la integral impropia. Si el límite no existe, la integral impropia **diverge**.

Es posible demostrar que la elección de c en el punto 3 de la definición no es importante. Podemos evaluar o determinar la convergencia o divergencia de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ con cualquier elección adecuada.

Cualquiera de las integrales de la definición anterior puede interpretarse como un área si $f \geq 0$ en el intervalo de integración. Por ejemplo, interpretamos la integral impropia en la figura 8.13 como un área. En ese caso, el área tiene el valor finito de 2. Si $f \geq 0$ y la integral impropia diverge, decimos que el área bajo la curva es **infinita**.

EJEMPLO 1 ¿El área bajo la curva $y = (\ln x)/x^2$ de $x = 1$ a $x = \infty$ es finita? Si es así, ¿cuál es su valor?

Solución Obtenemos el área bajo la curva de $x = 1$ a $x = b$ y examinamos el límite cuando $b \to \infty$. Si el límite es finito, lo tomamos como el área bajo la curva (figura 8.14). El área de 1 a b es

$$\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[(\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^b - \int_1^b \left(-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

Integración por partes con $u = \ln x, dv = dx/x^2, du = dx/x, v = -1/x$

$$= -\frac{\ln b}{b} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^b$$

$$= -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1.$$

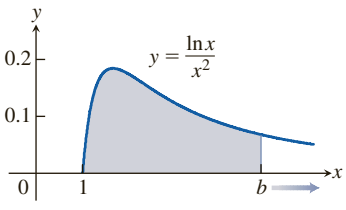


FIGURA 8.14 El área debajo de esta curva es una integral impropia (ejemplo 1).

El límite del área cuando $b \to \infty$ es

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1\right]$$

$$= -\left[\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b}\right] - 0 + 1$$

$$= -\left[\lim_{b\to\infty}\frac{1/b}{1}\right] + 1 = 0 + 1 = 1. \qquad \text{Regla de L'Hôpital}$$

Por lo tanto, la integral impropia converge y el área tiene el valor finito de 1. ■

EJEMPLO 2 Evalúe

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

Solución De acuerdo con la definición (parte 3), podemos elegir $c = 0$ y escribir

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

En seguida evaluamos cada integral impropia del lado derecho de la ecuación anterior.

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\tan^{-1}x\Big]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty}(\tan^{-1}0 - \tan^{-1}a) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

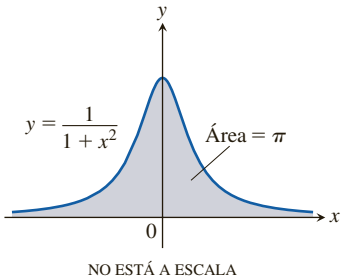
$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\tan^{-1}x\Big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}(\tan^{-1}b - \tan^{-1}0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$



NO ESTÁ A ESCALA

FIGURA 8.15 El área bajo esta curva es finita (ejemplo 2).

Como $1/(1+x^2) > 0$, la integral impropia puede interpretarse como el área (finita) debajo de la curva y arriba del eje x (figura 8.15). ■

La integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$

La función $y = 1/x$ es la frontera entre las integrales impropias convergentes y divergentes con integrandos de la forma $y = 1/x^p$. Como se muestra en el siguiente ejemplo, la integral impropia converge si $p > 1$, y diverge si $p \le 1$.

EJEMPLO 3 ¿Para qué valores de p la integral $\int_1^\infty dx/x^p$ converge? Cuando la integral converge, ¿cuál es su valor?

Solución Si $p \neq 1$,

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big]_1^b = \frac{1}{1-p}(b^{-p+1} - 1) = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right).$$

Por lo tanto,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^p}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right)\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}$$

porque

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{p-1}} = \begin{cases} 0, & p > 1 \\ \infty, & p < 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, la integral converge al valor $1/(p-1)$ si $p > 1$, y diverge si $p < 1$.

Si $p = 1$, la integral también diverge:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln x\Big]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty. \quad \blacksquare$$

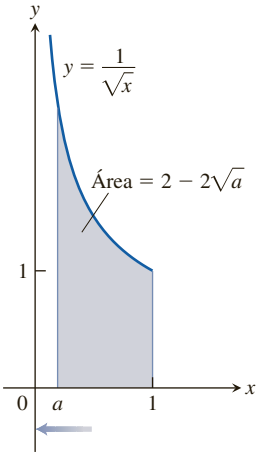


FIGURA 8.16 El área debajo de esta curva es un ejemplo de una integral impropia del segundo tipo.

Integrandos con asíntotas verticales

Se presenta otro tipo de integrales impropias cuando el integrando tiene una asíntota vertical —una discontinuidad infinita— en uno de los límites de integración o en algún punto entre los límites de integración. Si el integrando f es positivo en el intervalo de integración, nuevamente podemos interpretar la integral impropia como el área debajo de la gráfica de f y por arriba del eje x, entre los límites de integración.

Considere la región en el primer cuadrante que está debajo de la curva $y = 1/\sqrt{x}$ de $x = 0$ a $x = 1$ (figura 8.12*b*). Primero se obtiene el área de la parte de a a 1 (figura 8.16):

$$\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big]_a^1 = 2 - 2\sqrt{a}.$$

Luego, se obtiene el límite de esta área cuando $a \to 0^+$:

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{a}\right) = 2.$$

Por lo tanto, el área debajo de la curva de 0 a 1 es finita e igual a

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

DEFINICIÓN Las integrales de funciones que se vuelven infinitas en un punto dentro del intervalo de integración son integrales **impropias del tipo II**.

1. Si $f(x)$ es continua en $(a, b]$ y discontinua en a, entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

2. Si $f(x)$ es continua en $[a, b)$ y discontinua en b, entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

3. Si $f(x)$ es discontinua en c, donde $a < c < b$, y continua en $[a, c) \cup (c, b]$, entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

En todos los casos, si el límite es finito, se dice que la integral impropia **converge** y que el límite es el **valor** de la integral impropia. Si el límite no existe, la integral **diverge**.

En la parte 3 de la definición, la integral del lado izquierdo de la ecuación converge si *ambas* integrales del lado derecho convergen; de otra forma, diverge.

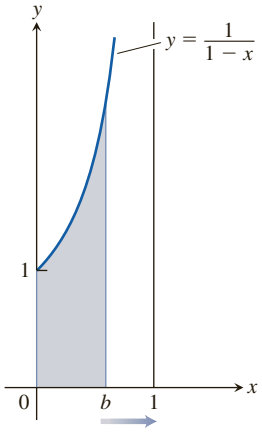


FIGURA 8.17 El área debajo de la curva y arriba del eje x para $[0, 1)$ no es un número real (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Investigue la convergencia de

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx.$$

Solución El integrando $f(x) = 1/(1-x)$ es continuo en $[0, 1)$, pero es discontinuo en $x = 1$ y se vuelve infinito cuando $x \to 1^-$ (figura 8.17). Evaluamos la integral como

$$\lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{b\to 1^-} \Big[-\ln|1-x|\Big]_0^b$$
$$= \lim_{b\to 1^-} \left[-\ln(1-b) + 0\right] = \infty.$$

El límite es infinito, de modo que la integral diverge. ■

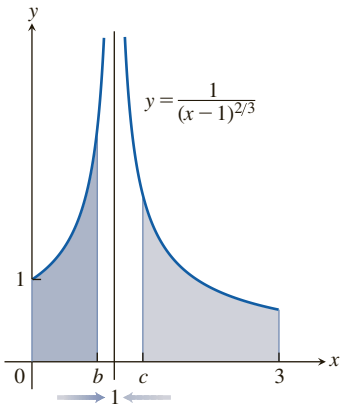


FIGURA 8.18 El ejemplo 5 muestra que el área debajo de la curva existe (de modo que es un número real).

EJEMPLO 5 Evalúe

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}.$$

Solución El integrando tiene una asíntota vertical en $x = 1$ y es continuo en $[0, 1)$ y $(1, 3]$ (figura 8.18). Por lo tanto, según la parte 3 de la definición anterior,

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}.$$

A continuación se evalúa cada integral impropia del lado derecho de esta ecuación.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} &= \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} \\ &= \lim_{b\to 1^-} 3(x-1)^{1/3}\Big]_0^b \\ &= \lim_{b\to 1^-} \left[3(b-1)^{1/3} + 3\right] = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} &= \lim_{c\to 1^+} \int_c^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} \\ &= \lim_{c\to 1^+} 3(x-1)^{1/3}\Big]_c^3 \\ &= \lim_{c\to 1^+} \left[3(3-1)^{1/3} - 3(c-1)^{1/3}\right] = 3\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3 + 3\sqrt[3]{2}. \quad \blacksquare$$

Integrales impropias y el software matemático

Los sistemas de álgebra por computadora pueden evaluar muchas integrales impropias convergentes. Para evaluar la integral

$$\int_2^\infty \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$$

(que converge) usando Maple, introducimos

```
> f := (x + 3)/((x - 1) * (x^2 + 1));
```

Después, se usa el comando de integración

```
> int(f, x = 2..infinity);
```

Maple nos da la respuesta

$$-\frac{1}{2}\pi + \ln(5) + \arctan(2).$$

Para obtener un resultado numérico, se usa el comando de evaluación **evalf** y se especifica el número de dígitos como sigue:

```
> evalf(%, 6);
```

El símbolo % instruye a la computadora para que evalúe la última expresión de la pantalla, en este caso, $(-1/2)\pi + \ln(5) + \arctan(2)$. Maple nos da 1.14579.

Si se usa Mathematica, se introduce

$$In\ [1]:=\ \text{Integrate}\ [(x\ +\ 3)/((x\ -\ 1)(x\text{\^{}}2\ +\ 1)),\ \{x,\ 2,\ \text{Infinity}\}]$$

y la respuesta es

$$Out\ [1]=\ \frac{-\pi}{2}\ +\ \text{ArcTan}\ [\,2\,]\ +\ \text{Log}\ [\,5\,].$$

Para obtener un resultado numérico con seis dígitos, se usa el comando "N[%,6]", que también produce 1.14579.

Pruebas de convergencia y divergencia

Cuando no podemos evaluar de manera directa una integral impropia, intentamos determinar si converge o diverge. Si la integral diverge, acaba el problema. Si converge, podemos utilizar métodos numéricos para aproximar su valor. Los principales criterios de convergencia o divergencia son la comparación directa y la prueba de comparación asintótica.

EJEMPLO 6 La integral $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$, ¿converge?

Solución Por definición,

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx\ =\ \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}\,dx.$$

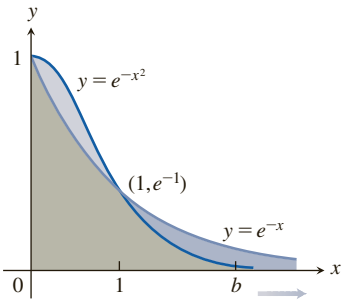


FIGURA 8.19 La gráfica de e^{-x^2} se encuentra debajo de la gráfica de e^{-x} para $x > 1$ (ejemplo 6).

No podemos evaluar directamente esta integral porque no es elemental. Pero *podemos* demostrar que su límite es finito cuando $b \to \infty$. Sabemos que $\int_1^b e^{-x^2}\,dx$ es una función creciente de b. Por lo tanto, o se vuelve infinita cuando $b \to \infty$, o bien, tiene un límite finito cuando $b \to \infty$. No se vuelve infinita: para todo valor de $x \geq 1$, tenemos que $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ (figura 8.19) de modo que

$$\int_1^b e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^b e^{-x}\,dx = -e^{-b} + e^{-1} < e^{-1} \approx 0.36788.$$

Por lo tanto,

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx\ =\ \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}\,dx$$

converge a algún valor finito definido. Aunque no sabemos exactamente cuál es ese valor, sí sabemos que es positivo y menor que 0.37. En este caso, dependemos de la propiedad de completitud de los números reales, que se analiza en el apéndice 6. ■

La comparación de e^{-x^2} y e^{-x} en el ejemplo 6 es un caso especial de la siguiente prueba.

TEOREMA 2: Prueba de comparación directa Sean f y g continuas en $[a, \infty)$ con $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para toda $x \geq a$. Entonces,

1. $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge.
2. $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge.

Demostración El razonamiento que sustenta el argumento establecido en el teorema 2 es similar al del ejemplo 6. Si $0 \le f(x) \le g(x)$ para $x \ge a$, entonces, por la regla 7 del teorema 2 de la sección 5.3, tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx, \qquad b > a.$$

Con base en esto puede argumentarse, como en el ejemplo 6, que

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{converge si} \quad \int_a^\infty g(x)\,dx \quad \text{converge.}$$

Y a la inversa, podemos decir que

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \quad \text{diverge si} \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{diverge.}$$ ■

Aunque el teorema se estableció para integrales impropias del tipo I, también se obtiene un resultado similar para integrales del tipo II.

EJEMPLO 7 Estos ejemplos ilustran el uso del teorema 2.

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx$ converge porque

$$0 \le \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \quad \text{en} \quad [1, \infty) \quad \text{y} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{converge.} \qquad \text{Ejemplo 3}$$

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2 - 0.1}}\,dx$ diverge porque

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 0.1}} \ge \frac{1}{x} \quad \text{en} \quad [1, \infty) \quad \text{y} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \quad \text{diverge.} \qquad \text{Ejemplo 3}$$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ converge porque

$$0 \le \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{en} \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

y

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{a \to 0^+} \int_a^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{a \to 0^+} \sqrt{4x}\,\Big]_a^{\pi/2} \qquad 2\sqrt{x} = \sqrt{4x} \\ &= \lim_{a \to 0^+} \left(\sqrt{2\pi} - \sqrt{4a}\right) = \sqrt{2\pi} \qquad \text{converge.}\end{aligned}$$ ■

TEOREMA 3: Prueba de comparación asintótica Si las funciones positivas f y g son continuas en $[a, \infty)$, y si

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \qquad 0 < L < \infty,$$

entonces,

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_a^\infty g(x)\,dx$$

convergen, o bien, ambas divergen.

Se omite la demostración del teorema 3.

Aunque las integrales impropias de dos funciones de a a ∞ pueden converger, esto no significa que sus integrales necesariamente tengan el mismo valor, como ocurre en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Demuestre que

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1 + x^2}$$

converge, comparándola con $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$. Obtenga y compare los valores de las dos integrales.

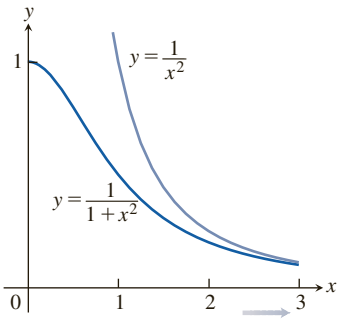


FIGURA 8.20 Funciones del ejemplo 8.

Solución Las funciones $f(x) = 1/x^2$ y $g(x) = 1/(1 + x^2)$ son positivas y continuas en $[1, \infty)$. Además,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^2}{1/(1 + x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) = 0 + 1 = 1,$$

un límite positivo finito (figura 8.20). Por lo tanto, $\int_1^\infty \frac{dx}{1 + x^2}$ converge porque $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ converge.

Sin embargo, las integrales convergen a valores diferentes:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2 - 1} = 1 \qquad \text{Ejemplo 3}$$

y

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\tan^{-1} b - \tan^{-1} 1\right] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 9 Investigue la convergencia de $\int_1^\infty \frac{1 - e^{-x}}{x}\,dx$.

TABLA 8.5

b	$\int_1^b \frac{1 - e^{-x}}{x}\,dx$
2	0.5226637569
5	1.3912002736
10	2.0832053156
100	4.3857862516
1000	6.6883713446
10000	8.9909564376
100000	11.2935415306

Solución El integrando sugiere la comparación de $f(x) = (1 - e^{-x})/x$ con $g(x) = 1/x$. Sin embargo, no se puede usar la prueba de comparación directa porque $f(x) \le g(x)$ y la integral de $g(x)$ *diverge*. Por otro lado, usando la prueba de comparación asintótica, tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1 - e^{-x}}{x}\right)\left(\frac{x}{1}\right) = \lim_{x\to\infty} (1 - e^{-x}) = 1,$$

que es un límite finito positivo. Por lo tanto, $\int_1^\infty \frac{1 - e^{-x}}{x}\,dx$ diverge porque $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ diverge.

Las aproximaciones a la integral impropia se presentan en la tabla 8.5. Observe que los valores no parecen aproximarse a algún valor límite fijo cuando $b \to \infty$. $\blacksquare$

Ejercicios 8.8

Evaluación de integrales impropias

En los ejercicios 1 a 34, las integrales convergen. Evalúe las integrales sin emplear tablas.

1. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$
2. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1.001}}$
3. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$
4. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$
5. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$
6. $\int_{-8}^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$
7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
8. $\int_0^1 \frac{dr}{r^{0.999}}$
9. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{2\,dx}{x^2-1}$
10. $\int_{-\infty}^{2} \frac{2\,dx}{x^2+4}$
11. $\int_2^\infty \frac{2}{v^2-v}\,dv$
12. $\int_2^\infty \frac{2\,dt}{t^2-1}$
13. $\int_{-\infty}^\infty \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}$
14. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{(x^2+4)^{3/2}}$
15. $\int_0^1 \frac{\theta+1}{\sqrt{\theta^2+2\theta}}\,d\theta$
16. $\int_0^2 \frac{s+1}{\sqrt{4-s^2}}\,ds$
17. $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$
18. $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$
19. $\int_0^\infty \frac{dv}{(1+v^2)(1+\tan^{-1}v)}$
20. $\int_0^\infty \frac{16\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$
21. $\int_{-\infty}^0 \theta e^\theta\,d\theta$
22. $\int_0^\infty 2e^{-\theta}\operatorname{sen}\theta\,d\theta$
23. $\int_{-\infty}^0 e^{-|x|}\,dx$
24. $\int_{-\infty}^\infty 2xe^{-x^2}\,dx$
25. $\int_0^1 x\ln x\,dx$
26. $\int_0^1 (-\ln x)\,dx$
27. $\int_0^2 \frac{ds}{\sqrt{4-s^2}}$
28. $\int_0^1 \frac{4r\,dr}{\sqrt{1-r^4}}$
29. $\int_1^2 \frac{ds}{s\sqrt{s^2-1}}$
30. $\int_2^4 \frac{dt}{t\sqrt{t^2-4}}$
31. $\int_{-1}^4 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$
32. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$
33. $\int_{-1}^\infty \frac{d\theta}{\theta^2+5\theta+6}$
34. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

Prueba de convergencia

En los ejercicios 35 a 64, use integración, la prueba de comparación directa o la prueba de comparación asintótica para probar la convergencia de las integrales. Si se aplica más de un método, utilice el de su preferencia.

35. $\int_0^{\pi/2} \tan\theta\,d\theta$
36. $\int_0^{\pi/2} \cot\theta\,d\theta$
37. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$
38. $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$
39. $\int_0^{\ln 2} x^{-2}e^{-1/x}\,dx$
40. $\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
41. $\int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{t}+\operatorname{sen} t}$
42. $\int_0^1 \frac{dt}{t-\operatorname{sen} t}$ (*Sugerencia*: Considere $t \geq \operatorname{sen} t$ para $t \geq 0$)
43. $\int_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$
44. $\int_0^2 \frac{dx}{1-x}$
45. $\int_{-1}^1 \ln|x|\,dx$
46. $\int_{-1}^1 -x\ln|x|\,dx$
47. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3+1}$
48. $\int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$
49. $\int_2^\infty \frac{dv}{\sqrt{v-1}}$
50. $\int_0^\infty \frac{d\theta}{1+e^\theta}$
51. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$
52. $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$
53. $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\,dx$
54. $\int_2^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$
55. $\int_\pi^\infty \frac{2+\cos x}{x}\,dx$
56. $\int_\pi^\infty \frac{1+\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$
57. $\int_4^\infty \frac{2\,dt}{t^{3/2}-1}$
58. $\int_2^\infty \frac{1}{\ln x}\,dx$
59. $\int_1^\infty \frac{e^x}{x}\,dx$
60. $\int_{e^e}^\infty \ln(\ln x)\,dx$
61. $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x-x}}\,dx$
62. $\int_1^\infty \frac{1}{e^x-2^x}\,dx$
63. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$
64. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

Teoría y ejemplos

65. Obtenga los valores de p para los cuales las integrales convergen.

a) $\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ *b)* $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p}$

66. **$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ podría no ser igual a $\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,dx$** Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

diverge y, por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

diverge. Luego, demuestre que

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} \frac{2x\,dx}{x^2+1} = 0.$$

Los ejercicios 67 a 70 se refieren a la región no acotada en el primer cuadrante entre la curva $y = e^{-x}$ y el eje x.

67. Obtenga el área de la región.

68. Obtenga el centroide de la región.

69. Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor del eje y.

70. Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor del eje x.

71. Obtenga el área de la región que se encuentra entre las curvas $y = \sec x$ y $y = \tan x$ de $x = 0$ a $x = \pi/2$.

72. La región del ejercicio 71 gira alrededor del eje x para generar un sólido.

a) Obtenga el volumen del sólido.

b) Demuestre que las superficies interior y exterior del sólido tienen áreas infinitas.

73. Evalúe las integrales

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$ ***b)*** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$

74. Evalúe $\displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$.

75. Estimación del valor de una integral impropia convergente cuyo dominio es no acotado

a) Demuestre que

$$\int_3^\infty e^{-3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{-9} < 0.000042,$$

y que, por lo tanto, $\int_3^\infty e^{-x^2}\,dx < 0.000042$. Explique por qué esto significa que $\int_0^\infty e^{-x^2}$ se puede sustituir por $\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$ sin introducir un error de magnitud mayor que 0.000042.

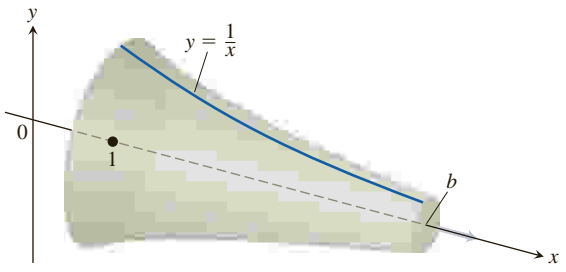
T ***b)*** Evalúe numéricamente $\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$.

76. La lata de pintura infinita o la trompeta de Gabriel Como muestra el ejemplo 3, la integral $\int_1^\infty (dx/x)$ diverge. Esto significa que la integral

$$\int_1^\infty 2\pi\,\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx,$$

que mide el *área de la superficie* del sólido de revolución generado al hacer girar, alrededor del eje x, la curva $y = 1/x$, $1 \le x$, también diverge. Al comparar las dos integrales, vemos que, para todo valor finito $b > 1$,

$$\int_1^b 2\pi\,\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx > 2\pi\int_1^b \frac{1}{x}\,dx.$$



Sin embargo, la integral

$$\int_1^\infty \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

del *volumen* del sólido converge.

a) Calcúlelo.

b) Este sólido de revolución se describe algunas veces como una lata que no puede contener pintura suficiente para cubrir su propio interior. Piense en ello por un momento. El sentido común nos dice que una cantidad finita de pintura no puede cubrir una superficie infinita. Pero si llenamos la lata con pintura (una cantidad finita), entonces, *sí habremos cubierto* una superficie infinita. Explique la contradicción aparente.

77. Función integral seno La integral

$$\text{Si}\,(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt,$$

conocida como *función integral seno*, tiene aplicaciones importantes en óptica.

T ***a)*** Grafique el integrando $(\operatorname{sen} t)/t$ para $t > 0$. La función integral seno, ¿es creciente o decreciente en todas partes? ¿Cree que $\text{Si}(x) = 0$ para $x > 0$? Compruebe sus respuestas graficando la función $\text{Si}(x)$ para $0 \le x \le 25$.

b) Explore la convergencia de

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$$

Si converge, ¿a qué valor lo hace?

78. Función de error La función

$$\text{erf}\,(x) = \int_0^x \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,dt,$$

llamada *función de error*, tiene aplicaciones importantes en probabilidad y estadística.

T ***a)*** Grafique la función de error para $0 \le x \le 25$.

b) Explore la convergencia de

$$\int_0^\infty \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,dt.$$

Si converge, ¿a qué valor lo hace? En el ejercicio 41 de la sección 15.4, verá cómo confirmar su estimación.

79. Distribución normal de probabilidad La función

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

se denomina *función de densidad de probabilidad normal* con media μ y desviación estándar σ. El número μ nos dice dónde está centrada la distribución, y σ mide la "dispersión" alrededor de la media. (Vea la sección 8.9).

De acuerdo con la teoría de probabilidad, se sabe que

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = 1.$$

En lo que sigue, sean $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

T ***a)*** Dibuje la gráfica de f. Determine los intervalos en los que f es creciente, los intervalos en los que f es decreciente, y los valores extremos locales y dónde se presentan.

b) Evalúe

$$\int_{-n}^n f(x)\,dx$$

para $n = 1$, 2 y 3.

***c*)** Dé un argumento convincente de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

(*Sugerencia:* Demuestre que $0 < f(x) < e^{-x/2}$ para $x > 1$, y para $b > 1$,

$$\int_{b}^{\infty} e^{-x/2}\,dx \to 0 \quad \text{cuando} \quad b \to \infty.)$$

80. Demuestre que si $f(x)$ es integrable en todo intervalo de números reales, y a y b son números reales con $a < b$, entonces,

***a*)** $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ y $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ convergen si y sólo si $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ y $\int_{b}^{\infty} f(x)\,dx$ son convergentes.

***b*)** $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{\infty} f(x)\,dx$ cuando todas las integrales convergen.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 81 a 84, utilice un software matemático con la finalidad de explorar las integrales para diferentes valores de p (incluyendo números no enteros). ¿Para cuáles valores de p la integral converge? ¿Cuál es el valor de la integral cuando converge? Trace la gráfica del integrando para varios valores de p.

81. $\int_{0}^{e} x^p \ln x\,dx$ **82.** $\int_{e}^{\infty} x^p \ln x\,dx$

83. $\int_{0}^{\infty} x^p \ln x\,dx$ **84.** $\int_{-\infty}^{\infty} x^p \ln |x|\,dx$

Utilice un software matemático para evaluar las integrales.

85. $\int_{0}^{2/\pi} \operatorname{sen} \frac{1}{x}\,dx$ **86.** $\int_{0}^{2/\pi} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\,dx$

8.9 Probabilidad

El resultado de algunos eventos, como la caída de una roca pesada desde una gran altura, se puede modelar para predecir con gran exactitud lo que sucederá. Por otro lado, muchos acontecimientos tienen más de un resultado posible y no existe certidumbre acerca de cuál de ellos ocurrirá. Si se lanza al aire una moneda, el resultado, con las mismas probabilidades, será cara o cruz, pero no sabemos por adelantado cuál será. Si se pesa a un individuo elegido aleatoriamente de una población grande, son muchas las alternativas de peso posibles que marcará la báscula, y no está claro si el peso estará entre 180 y 190 lb. Nos han dicho que es altamente probable, pero no lo sabemos con seguridad, que un terremoto de magnitud de 6.0 grados o más en la escala de Richter ocurrirá en un área poblada de California dentro de los próximos 100 años. Ejemplos con más de un resultado posible son *probabilísticos* por naturaleza, y cuando se modelan, asignamos una *probabilidad* a la posibilidad de que se presente un resultado en particular. En esta sección, analizaremos el papel central que desempeña el cálculo en la elaboración de pronósticos con modelos probabilísticos.

Variables aleatorias

Iniciaremos nuestro estudio con algunos ejemplos conocidos de eventos inciertos, para los que el conjunto de resultados posibles es finito.

EJEMPLO 1

***a*)** Si lanzamos una vez una moneda al aire, hay dos resultados posibles {H, T} donde H representa la moneda con la cara hacia arriba y T la moneda con la cruz hacia arriba. Si lanzamos tres veces la moneda al aire, existen ocho posibles resultados, teniendo en cuenta el orden en el que se presenten la cara o la cruz. El conjunto de resultados posibles es {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}.

***b*)** Si lanzamos una vez un dado de seis caras, el conjunto de resultados posibles es {1, 2, 3, 4, 5, 6}, lo que representa las seis caras del dado.

***c*)** Si elegimos al azar dos cartas de un mazo de 52 cartas, existen 52 resultados posibles para la primera carta extraída y 51 posibilidades para la segunda. Como el orden de las cartas no importa, existen $(52 \cdot 51)/2 = 1{,}326$ resultados posibles en total. ■

Es usual referirse al conjunto de todos los resultados posibles como el *espacio muestral* de un evento. En el caso de un evento incierto, normalmente nos interesa saber qué resultados, si acaso, tienen más probabilidad de ocurrir que otros, y en qué medida. Al lanzar una

moneda tres veces, ¿es más probable que aparezcan dos caras o una sola? Para contestar esta pregunta, necesitamos una manera de cuantificar los resultados.

DEFINICIÓN Una **variable aleatoria** es una función X que asigna un valor numérico a cada resultado en un espacio muestral.

Las variables aleatorias que sólo toman un número finito de valores se llaman variables aleatorias **discretas**. Una **variable aleatoria continua** puede tomar valores en todo un intervalo, y está asociada con una *función de distribución*, que estudiaremos más adelante.

EJEMPLO 2

a) Suponga que lanzamos tres veces una moneda con los siguientes resultados posibles {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}. Defina la variable aleatoria X como el número de caras que aparecen. Entonces, $X(\text{HHT}) = 2$, $X(\text{THT}) = 1$, y así sucesivamente. Como X sólo puede tomar los valores 0, 1, 2 o 3, es una variable aleatoria discreta.

b) Se hace girar una flecha sujeta por un perno localizado en el origen. La flecha puede girar apuntando a cualquier dirección posible, y la variable aleatoria X se define como el ángulo radián que subtienden la flecha y el eje positivo x, medido en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. En este caso, X es una variable aleatoria continua que puede tomar cualquier valor en el intervalo $[0, 2\pi)$.

c) El peso de un individuo seleccionado al azar en una población dada es una variable aleatoria continua W. El nivel de colesterol de una persona elegida al azar y el tiempo de espera para que un cliente sea atendido en la fila del banco también son variables aleatorias continuas.

d) Las calificaciones en los exámenes de admisión para entrar a la universidad en Estados Unidos (*American College Testing*, ACT) en un año particular se describen con una variable aleatoria discreta S tomando valores enteros entre 1 y 36. Si el número de resultados es grande, o por razones de análisis estadístico, las variables aleatorias discretas (por ejemplo, las calificaciones de un examen) se modelan a menudo como variables aleatorias continuas (ejemplo 13).

e) Se lanza un par de dados y la variable aleatoria X se define como la suma de los números de las caras superiores. Esta suma sólo puede tener los valores enteros entre 2 y 12, de modo que X es una variable aleatoria discreta.

f) Una compañía fabrica neumáticos para vehículos de tamaño medio. Los neumáticos están garantizados para recorrer 30,000 millas, pero algunos fallarán antes y otros podrán recorrer muchas millas más allá de 30,000. El tiempo de vida de un neumático se describe con una variable aleatoria continua L. ■

Distribución de probabilidad

La *distribución de probabilidad* describe el comportamiento probabilístico de una variable aleatoria. Nuestro mayor interés se centra en las distribuciones de probabilidad asociadas con variables aleatorias continuas, pero para obtener una mejor perspectiva, consideraremos primero la distribución de una variable aleatoria discreta.

Suponga que lanzamos tres veces una moneda, con la misma probabilidad de obtener H o T en un lanzamiento dado. Definimos la variable aleatoria discreta X como la que asigna el número de caras que aparecen en cada resultado, dando

$$\begin{array}{cccccccccc} & \{\text{HHH}, & \text{HHT}, & \text{HTH}, & \text{HTT}, & \text{THH}, & \text{THT}, & \text{TTH}, & \text{TTT}\} \\ X & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

En seguida contamos la *frecuencia* o el número de veces que ocurre un valor específico de X. Como cada uno de los ocho resultados tiene la misma probabilidad de ocurrir, pode-

mos calcular la probabilidad de la variable aleatoria X dividiendo la frecuencia de cada valor entre el número total de resultados. Resumimos nuestros resultados como sigue:

Valor de X	0	1	2	3
Frecuencia	1	3	3	1
$P(X)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

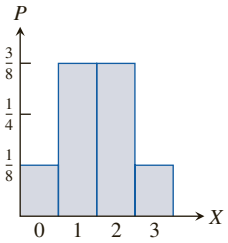


FIGURA 8.21 Gráfica de barras de probabilidades de una variable aleatoria X cuando se lanza una moneda justa tres veces al aire.

Representamos esta información en una gráfica de barras de probabilidad de la variable aleatoria discreta X, como se muestra en la figura 8.21. Los valores de X están representados por intervalos de longitud 1 sobre el eje x, de modo que el área de cada barra en la gráfica es la probabilidad del resultado correspondiente. Por ejemplo, la probabilidad de que se presenten exactamente dos caras en tres lanzamientos de la moneda es el área de la barra asociada con el valor $X = 2$, el cual es $3/8$. De forma análoga, la probabilidad de que se presenten dos o más caras es la suma de las áreas de las barras asociadas con los valores $X = 2$ y $X = 3$, o $4/8$. La probabilidad de que se presenten 0 o 3 caras es $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$, y así sucesivamente. Observe que el área total de las barras de la gráfica es 1, que es la suma de todas las probabilidades para X.

Con una variable aleatoria continua, incluso cuando los resultados son igualmente probables, no basta con contar el número de resultados en el espacio muestral o las frecuencias de resultados que conducen a un valor específico de X. De hecho, la probabilidad de que X tome cualquiera de sus valores particulares es cero. *Resulta más significativo* preguntar qué tan probable es que la variable aleatoria tome un valor dentro de un *intervalo* específico de valores.

Obtenemos la información que necesitamos acerca de las probabilidades de X en una función cuya gráfica se comporta como la gráfica de barras de la figura 8.21. Es decir, tomamos una función f no negativa definida en el rango de la variable aleatoria con la propiedad de que el área total debajo de la gráfica de f es 1. Así, la probabilidad de que un valor de la variable aleatoria X se encuentre dentro de algún intervalo $[c, d]$ es el área bajo la gráfica de f en ese intervalo. La siguiente definición supone que el rango de la variable aleatoria continua X es cualquier valor real, pero la definición es suficientemente general para tomar en cuenta variables aleatorias que tienen un rango de longitud finita.

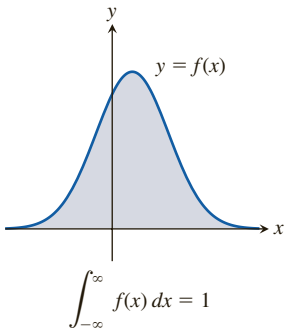


FIGURA 8.22 Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X.

DEFINICIONES Una **función de densidad de probabilidad** para una variable aleatoria continua es una función f definida en $(-\infty, \infty)$ con las siguientes propiedades:

1. f es continua, excepto posiblemente en un número finito de puntos.
2. f es no negativa, de manera que $f \geq 0$.
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$

Si X es una variable aleatoria continua con una función de densidad de probabilidad f, la **probabilidad** de que X tome un valor en el intervalo entre $X = c$ y $X = d$ es la integral de área

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(X)\,dX.$$

Observe que la probabilidad de que una variable aleatoria continua X tome un valor real particular c es $P(X = c) = \int_c^c f(X)\,dX = 0$, lo que es congruente con nuestra afirmación previa. Como el área debajo de la gráfica de f en el intervalo $[c, d]$ es sólo una parte del área total debajo de la gráfica, la probabilidad $P(c \leq X \leq d)$ siempre es un número entre 0 y 1. La figura 8.22 ilustra una función de densidad de probabilidad.

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X se parece a la función de densidad de un alambre con densidad variable. Para obtener la masa de un segmento del alambre, integramos la densidad del alambre en un intervalo. Para obtener la probabili-

dad de que una variable aleatoria tenga valores en un intervalo particular, integramos la función de densidad de probabilidad en ese intervalo.

EJEMPLO 3 Sea $f(x) = 2e^{-2x}$ si $0 \le x < \infty$ y $f(x) = 0$ para todos los valores negativos de x.

a) Verifique que f sea una función de densidad de probabilidad.

b) La función de densidad de probabilidad f describe el tiempo T en horas hasta que un automóvil pasa por un poste de luz en un camino remoto. Obtenga la probabilidad $P(T \le 1)$ de que una persona que se encuentra junto a ese poste de luz vea un automóvil en menos de una hora.

c) Obtenga la probabilidad $P(T = 1)$ de que un automóvil pase por el poste de luz exactamente una hora después.

Solución

a) La función f es continua excepto en $x = 0$, y es no negativa en todas partes. Además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} 2e^{-2x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} 2e^{-2x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(1 - e^{-2b}\right) = 1.$$

Todas las condiciones se satisfacen y hemos demostrado que f es una función de densidad de probabilidad.

b) La probabilidad de que el automóvil pase después del lapso de tiempo entre cero y una hora se obtiene integrando la función de densidad de probabilidad en el intervalo [0, 1]. Entonces,

$$P(T \le 1) = \int_{0}^{1} 2e^{-2T}\,dT = -e^{-2T}\Big]_{0}^{1} = 1 - e^{-2} \approx 0.865.$$

Este resultado se interpreta como si 100 personas estuvieran junto al poste de luz, y aproximadamente 87 de ellas pueden esperar ver un automóvil antes de una hora.

c) Esta probabilidad es la integral $\int_1^1 f(T)\,dT$, que es igual a cero. Interpretamos esto como si una medición muy precisa del tiempo que transcurre hasta que un automóvil pase por el poste de luz no tendría posibilidad de ser exactamente igual a una hora. Quizá podría estar muy cerca, pero no sería exactamente una hora. ■

Podemos extender la definición a intervalos finitos. Si f es una función no negativa con, a lo más, un número finito de discontinuidades en el intervalo $[a, b]$, y si su extensión F para $(-\infty, \infty)$, obtenida al definir F como 0 fuera de $[a, b]$, satisface la definición de una función de densidad de probabilidad, entonces, f es una **función de densidad de probabilidad para $[a, b]$**. Esto significa que $\int_a^b f(x)\,dx = 1$. Podemos plantear definiciones similares para los intervalos (a, b), $(a, b]$ y $[a, b)$.

EJEMPLO 4 Demuestre que $f(x) = \frac{4}{27}x^2(3 - x)$ es una función de densidad de probabilidad en el intervalo [0, 3].

Solución La función f es continua y no negativa en [0, 3]. Además,

$$\int_0^3 \frac{4}{27}x^2(3 - x)\,dx = \frac{4}{27}\left[x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^3 = \frac{4}{27}\left(27 - \frac{81}{4}\right) = 1.$$

Se concluye que f es una función de densidad de probabilidad en [0, 3]. ■

Distribución exponencial decreciente

La distribución en el ejemplo 3 se conoce como *función de densidad de probabilidad exponencial decreciente*. Estas funciones de densidad de probabilidad siempre tienen la forma

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ ce^{-cx} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

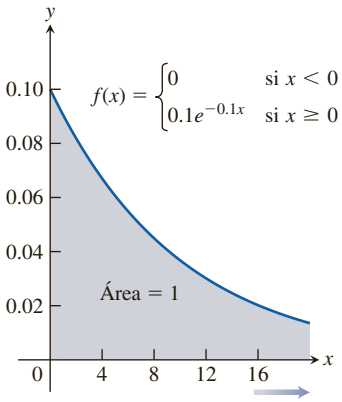


FIGURA 8.23 Una función de densidad de probabilidad exponencial decreciente.

(vea el ejercicio 23). Las funciones de densidad exponencial proporcionan modelos para describir variables aleatorias como las del tiempo de vida de bombillas de luz, partículas radiactivas, coronas dentales y muchas clases de componentes electrónicos. También modelan la cantidad de tiempo transcurrido hasta que se presenta algún evento específico, como el tiempo en que tarda en llegar un polinizador a una flor, los tiempos de llegada de un autobús a una parada, el tiempo que transcurre entre la llegada de un individuo y la de otro a una fila, el tiempo de espera entre llamadas telefónicas en un centro de atención al cliente, e inclusive la duración misma de las llamadas telefónicas. En la figura 8.23 se muestra la gráfica de una función de densidad exponencial.

Las variables aleatorias con distribuciones exponenciales *no tienen memoria*. Si visualizamos a X describiendo el tiempo de vida de algún objeto, entonces, la probabilidad de que el objeto sobreviva al menos $s + t$ horas, dado que ha sobrevivido t horas, es la misma que la probabilidad inicial de que sobreviva al menos s horas. Por ejemplo, la edad actual t de una partícula radiactiva no cambia la probabilidad de que sobreviva al menos otro lapso de tiempo de duración s. En ocasiones, las distribuciones exponenciales se usan como modelo cuando se viola el principio de no tener memoria porque dan aproximaciones razonables que son suficientemente buenas para el uso previsto. Por ejemplo, éste podría ser el caso cuando se pronostica el tiempo de vida de un reemplazo de cadera artificial o de una válvula del corazón para un paciente en particular. A continuación se ilustra la distribución exponencial.

EJEMPLO 5 Una compañía de electrónica modela el tiempo de vida T, en años, de un chip que fabrica, con la función de densidad exponencial

$$f(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } T < 0 \\ 0.1e^{-0.1T} & \text{si } T \geq 0. \end{cases}$$

Usando este modelo,

a) Obtenga la probabilidad $P(T > 2)$ de que un chip dure más de 2 años.

b) Obtenga la probabilidad $P(4 \leq T \leq 5)$ de que el chip falle en el quinto año.

c) Si se envían 1000 chips a un cliente, ¿cuántos se espera que fallen antes de tres años?

Solución

a) La probabilidad de que el chip dure al menos dos años es

$$P(T > 2) = \int_2^\infty 0.1e^{-0.1T}\,dT = \lim_{b\to\infty}\int_2^b 0.1e^{-0.1T}\,dT$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^{-0.2} - e^{-0.1b}\right] = e^{-0.2} \approx 0.819.$$

Es decir, aproximadamente 82% de los chips durarán más de 2 años.

b) La probabilidad es

$$P(4 \leq T \leq 5) = \int_4^5 0.1e^{-0.1T}\,dT = -e^{-0.1T}\Big]_4^5 = e^{-0.4} - e^{-0.5} \approx 0.064$$

Esto significa que aproximadamente 6% de los chips fallarán durante el quinto año.

c) Buscamos la probabilidad

$$P(0 \leq T \leq 3) = \int_0^3 0.1e^{-0.1T}\,dT = -e^{-0.1T}\Big]_0^3 = 1 - e^{-0.3} \approx 0.259.$$

Podemos esperar que aproximadamente 259 de 1000 chips fallen antes de tres años. ■

Valores esperados, medias y medianas

Suponga que el peso en libras de una res de un rancho ganadero es una variable aleatoria continua W con una función de densidad de probabilidad $f(W)$, y que el dueño puede vender un ejemplar en $g(W)$ dólares. ¿Cuánto puede esperar ganar el dueño al vender una res del rancho elegida de manera aleatoria?

Para contestar esta pregunta, consideramos un intervalo pequeño $[W_i, W_{i+1}]$ de longitud ΔW_i y observamos que la probabilidad de que el peso de la res se encuentre en este intervalo es

$$\int_{W_i}^{W_{i+1}} f(W)\, dW \approx f(W_i)\, \Delta W_i.$$

La ganancia obtenida por la venta de una res cuyo peso se encuentra en este intervalo es aproximadamente $g(W_i)$. Entonces, la suma de Riemann

$$\sum g(W_i)\, f(W_i)\, \Delta W_i$$

aproxima la cantidad que el ranchero recibiría por una res. Se supone que las reses tienen un peso máximo, de modo que f es cero fuera del intervalo finito $[0, b]$. Luego, tomando el límite de la suma de Riemann cuando la longitud de cada intervalo se aproxima a cero, se obtiene la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(W)\, f(W)\, dW.$$

Esta integral estima la cantidad que el dueño puede esperar ganar por una res del rancho y es el *valor esperado de la función g*.

Los valores esperados de ciertas funciones de una variable aleatoria X tienen particular importancia en probabilidad y estadística. Una de las más importantes de estas funciones es el valor esperado de la función $g(X) = X$.

DEFINICIÓN El **valor esperado** o la **media** de una variable aleatoria continua X con una función de densidad de probabilidad f es el número

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X f(X)\, dX.$$

El valor esperado $\mathrm{E}(X)$ puede visualizarse como un promedio ponderado de la variable aleatoria X, donde cada valor de X es ponderado por $f(X)$. La media también se interpreta como el valor promedio a largo plazo de la variable aleatoria X, y es una medida de la centralidad de la variable aleatoria X.

EJEMPLO 6 Obtenga la media de la variable aleatoria X con la función de densidad de probabilidad exponencial

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0 \\ ce^{-cX} & \text{si } X \geq 0. \end{cases}$$

Solución Según la definición, tenemos

$$\begin{aligned} \mu &= \int_{-\infty}^{\infty} X f(X)\, dX = \int_{0}^{\infty} X c e^{-cX}\, dX \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b X c e^{-cX}\, dX = \lim_{b\to\infty} \left(-X e^{-cX} \Big]_0^b + \int_0^b e^{-cX}\, dX \right) \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(-b e^{-cb} - \frac{1}{c} e^{-cb} + \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Regla de L'Hôpital en el primer término

Por lo tanto, la media es $\mu = 1/c$. ■

A partir del resultado del ejemplo 6, conociendo la media o el valor esperado μ de una variable aleatoria X que tiene una función de densidad exponencial, podemos escribir la fórmula completa.

Función de densidad exponencial de una variable aleatoria X con media μ

$$f(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0 \\ \mu^{-1}e^{-X/\mu} & \text{si } X \geq 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 7 Suponga que en el ejemplo 5 el tiempo T antes de que un chip falle se modela con una función de densidad exponencial con una media de ocho años. Obtenga la probabilidad de que un chip falle antes de cinco años.

Solución La función de densidad exponencial con media $\mu = 8$ es

$$f(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } T < 0 \\ \frac{1}{8}e^{-T/8} & \text{si } T \geq 0 \end{cases}$$

Entonces, la probabilidad de que un chip falle antes de cinco años es la integral definida

$$P(0 \leq T \leq 5) = \int_0^5 0.125e^{-0.125T}\,dT = -e^{-0.125T}\Big]_0^5 = 1 - e^{-0.625} \approx 0.465$$

de modo que se espera que aproximadamente el 47% de los chips fallen antes de cinco años. ■

EJEMPLO 8 Obtenga el valor esperado de la variable aleatoria X con la función de densidad de probabilidad dada en el ejemplo 4.

Solución El valor esperado es

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \int_0^3 \frac{4}{27}X^3(3 - X)\,dX = \frac{4}{27}\left[\frac{3}{4}X^4 - \frac{1}{5}X^5\right]_0^3$$

$$= \frac{4}{27}\left(\frac{243}{4} - \frac{243}{5}\right) = 1.8$$

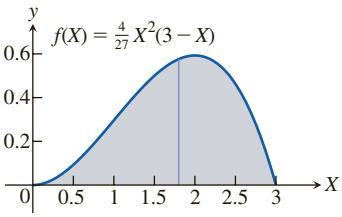


FIGURA 8.24 El valor esperado de una variable aleatoria con esta función de densidad de probabilidad es $\mu = 1.8$ (ejemplo 8).

En la figura 8.24 se observa que este valor esperado es razonable porque la región debajo de la función de densidad de probabilidad parece equilibrarse con respecto a la recta vertical $X = 1.8$. Es decir, la coordenada horizontal del centroide de la placa descrita por la región es $\overline{X} = 1.8$. ■

Hay otras maneras de medir la centralidad de una variable aleatoria con una función de densidad de probabilidad dada.

DEFINICIÓN La **mediana** de una variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad f es el número m para el cual

$$\int_{-\infty}^{m} f(X)\,dX = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \int_{m}^{\infty} f(X)\,dX = \frac{1}{2}.$$

La definición de la mediana significa que existe la misma probabilidad de que la variable aleatoria X sea menor que o mayor que m.

EJEMPLO 9 Obtenga la mediana de una variable aleatoria X con una función de densidad de probabilidad

$$f(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0 \\ ce^{-cX} & \text{si } X \geq 0. \end{cases}$$

Solución La mediana m debe satisfacer

$$\frac{1}{2} = \int_0^m ce^{-cX}\,dX = -e^{-cX}\Big]_0^m = 1 - e^{-cm}.$$

Se deduce que

$$e^{-cm} = \frac{1}{2} \qquad \text{o} \qquad m = \frac{1}{c}\ln 2.$$

Además,

$$\frac{1}{2} = \lim_{b\to\infty}\int_m^b ce^{-cX}\,dX = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-cX}\Big]_m^b\right. = \lim_{b\to\infty}\left(e^{-cm} - e^{-cb}\right) = e^{-cm}$$

lo que da el mismo valor de m. Como $1/c$ es la media μ de X con una distribución exponencial, se concluye que la mediana es $m = \mu \ln 2$. La media y la mediana son diferentes porque la función de densidad de probabilidad es sesgada y se extiende hacia la derecha. ■

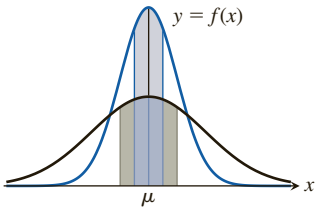


FIGURA 8.25 Funciones de densidad de probabilidad con la misma media pueden tener diferentes distribuciones en relación con la media. Las regiones gris y en color bajo las curvas tienen la misma área.

Varianza y desviación estándar

Las variables aleatorias con exactamente la misma media μ pero distribuciones diferentes pueden comportarse de modo muy distinto (vea la figura 8.25). La *varianza* de una variable aleatoria X mide cómo se distribuyen los valores de X en relación con la media, y esta dispersión se mide con el valor esperado de $(X-\mu)^2$. Como la varianza mide el cuadrado esperado de la diferencia con respecto a la media, a menudo se trabaja con su raíz cuadrada.

DEFINICIONES La **varianza** de una variable aleatoria X con una función de densidad de probabilidad f es el valor esperado de $(X-\mu)^2$:

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(X-\mu)^2 f(X)\,dX$$

La **desviación estándar** de X es

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}(X-\mu)^2 f(X)\,dX}.$$

EJEMPLO 10 Obtenga la desviación estándar de la variable aleatoria T del ejemplo 5, y calcule la probabilidad de que T se encuentre dentro de una desviación estándar de la media.

Solución La función de densidad de probabilidad es la función de densidad exponencial con una media $\mu = 10$, según el ejemplo 6. Para obtener la desviación estándar, primero calculamos la integral de la varianza:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(T-\mu)^2 f(T)\,dT = \int_0^{\infty}(T-10)^2(0.1e^{-0.1T})\,dT$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b (T-10)^2(0.1e^{-0.1T})\,dT$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\left(-(T-10)^2 - 20(T-10)\right)e^{-0.1T}\right]_0^b$$

$$+ \lim_{b\to\infty}\int_0^b 20e^{-0.1T}\,dT \qquad \text{Integración por partes}$$

$$= \left[0 + (-10)^2 + 20(-10)\right] - 20\lim_{b\to\infty}\left(10e^{-0.1T}\right]_0^b$$

$$= -100 - 200\lim_{b\to\infty}\left(e^{-0.1b} - 1\right) = 100.$$

La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza, así que $\sigma = 10.0$.

Para obtener la probabilidad de que T se encuentre dentro de una desviación estándar de la media, se calcula la probabilidad $P(\mu - \sigma \le T \le \mu + \sigma)$. Para este ejemplo, tenemos

$$P(10 - 10 \le T \le 10 + 10) = \int_0^{20} 0.1e^{-0.1T}\,dT = -e^{-0.1T}\Big]_0^{20} = 1 - e^{-2} \approx 0.865$$

Esto significa que aproximadamente el 87% de los chips fallarán antes de 20 años. ■

Distribuciones uniformes

La **distribución uniforme** es muy simple, pero se presenta con frecuencia en las aplicaciones. La función de densidad de probabilidad para esta distribución en el intervalo $[a, b]$ es

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \le x \le b.$$

Si cada resultado en el espacio muestral es igualmente probable, entonces, la variable aleatoria X tiene una distribución uniforme. Como f es constante en $[a, b]$, una variable aleatoria con distribución uniforme tiene exactamente la misma probabilidad de estar en un subintervalo de longitud fija que en cualquier otro de la misma longitud. La probabilidad de que X tome un valor en un subintervalo de $[a, b]$ es la longitud del subintervalo dividida entre $(b - a)$.

EJEMPLO 11 Se hace girar una flecha clavada en el origen, y la variable aleatoria X es el ángulo radián que subtienden la flecha y el eje positivo x, medido dentro del intervalo $[0, 2\pi]$. Suponiendo que existe la misma probabilidad de que la flecha apunte en cualquier dirección, obtenga la función de densidad de probabilidad y la probabilidad de que la flecha termine apuntando entre el norte y el este.

Solución Se modela la función de densidad de probabilidad con la distribución uniforme $f(x) = 1/2\pi$, $0 \le x < 2\pi$, y $f(x) = 0$ en cualquier otra parte.

La probabilidad de que la flecha termine apuntando entre el norte y el este está dada por

$$P\left(0 \le X \le \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\pi}\,dx = \frac{1}{4}.$$ ■

Distribuciones normales

Muchas aplicaciones utilizan la **distribución normal**, la cual se define por la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

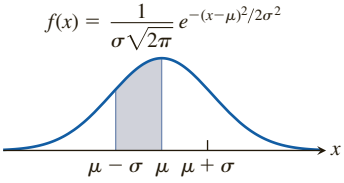


FIGURA 8.26 La función de densidad de probabilidad normal con media μ y desviación estándar σ.

Es posible demostrar que la media de una variable aleatoria X con esta función de densidad de probabilidad es μ y su desviación estándar es σ. En las aplicaciones, los valores de μ y σ con frecuencia se estiman usando grandes conjuntos de datos. La función se representa en la figura 8.26, y la gráfica se conoce algunas veces como *curva de campana* debido a su forma. Como la curva es simétrica con respecto a la media, la mediana de X es la

misma que su media. En la práctica, se observa a menudo que muchas variables aleatorias tienen aproximadamente una distribución normal. Algunos ejemplos que ilustran este fenómeno son la estatura de un individuo, la precipitación anual en cierta región, la presión sanguínea de una persona, el nivel de colesterol en la sangre, los pesos del cerebro en cierta población de adultos y el crecimiento de la población de semillas de girasol en un periodo determinado.

La función de densidad de probabilidad normal no tiene una antiderivada que se exprese en términos de funciones conocidas. Sin embargo, una vez que μ y σ están definidas, una integral que involucra la función de densidad de probabilidad normal se calcula utilizando métodos de integración numérica. Por lo regular, se utiliza la funcionalidad de integración numérica de una computadora o calculadora para estimar los valores de estas integrales. Tales cálculos muestran que para cualquier distribución normal, se obtienen los siguientes valores de probabilidad de que la variable aleatoria X se encuentre dentro de $k = 1$, 2, 3 o 4 desviaciones estándar de la media:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.68269$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.95450$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.99730$$
$$P(\mu - 4\sigma < X < \mu + 4\sigma) \approx 0.99994$$

Esto significa, por ejemplo, que la variable aleatoria X tomará un valor dentro de dos desviaciones estándar de la media aproximadamente el 95% del tiempo, y se encontrará dentro de una desviación estándar de la media aproximadamente el 69% del tiempo (vea la figura 8.27).

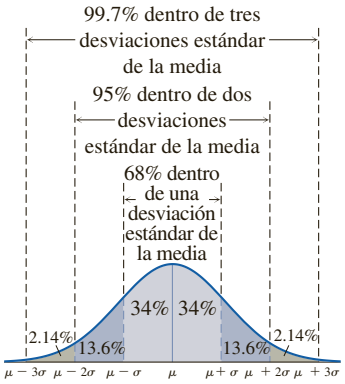


FIGURA 8.27 Probabilidades de la distribución normal dentro de las bandas de desviación estándar.

EJEMPLO 12 La presión sanguínea de un individuo es un indicador importante de su salud general. Un estudio de individuos saludables de entre 14 y 70 años de edad modeló su presión sanguínea sistólica usando una distribución normal con una media de 119.7 mm de Hg y una desviación estándar de 10.9 mm de Hg.

a) Usando este modelo, ¿qué porcentaje de población tiene una presión sanguínea sistólica entre 140 y 160 mm de mercurio, los niveles establecidos por la American Heart Association para el nivel 1 de hipertensión?

b) ¿Qué porcentaje tiene una presión sanguínea entre 160 y 180 mm de mercurio, los niveles establecidos por la American Heart Association para el nivel 2 de hipertensión?

c) ¿Qué porcentaje tiene una presión sanguínea en el rango normal entre 90 y 120 mm de mercurio, los niveles establecidos por la American Heart Association?

Solución

a) Como no se puede obtener una antiderivada, usamos una computadora para evaluar la integral de la función de densidad de probabilidad normal con $\mu = 119.7$ y $\sigma = 10.9$:

$$P(140 \le X \le 160) = \int_{140}^{160} \frac{1}{10.9\sqrt{2\pi}} e^{-(X-119.7)^2/2(10.9)^2}\, dX \approx 0.03117.$$

Esto significa que aproximadamente el 3% de la población del rango de edad estudiado se encuentra en el nivel 1 de hipertensión.

b) Nuevamente, se utiliza una computadora para calcular la probabilidad de que la presión sanguínea se encuentre entre 160 y 180 mm de mercurio:

$$P(160 \le X \le 180) = \int_{160}^{180} \frac{1}{10.9\sqrt{2\pi}} e^{-(X-119.7)^2/2(10.9)^2}\, dX \approx 0.00011.$$

Se concluye que aproximadamente el 0.011% de la población se encuentra en el nivel 2 de hipertensión.

c) La probabilidad de que la presión sanguínea esté en el rango normal es

$$P(90 \le X \le 120) = \int_{90}^{120} \frac{1}{10.9\sqrt{2\pi}} e^{-(X-119.7)^2/2(10.9)^2}\, dX \approx 0.50776.$$

Es decir, aproximadamente el 51% de la población tiene una presión sanguínea sistólica normal. ■

Muchas pruebas nacionales están estandarizadas con la distribución normal. El siguiente ejemplo muestra un modelo de una variable aleatoria discreta para las puntuaciones de una prueba que usa la función de distribución normal para una variable aleatoria continua.

EJEMPLO 13 En Estados Unidos, existe un examen estandarizado que presentan los estudiantes de bachillerato que buscan ingresar a distintos colegios y universidades; se trata del American College Testing (ACT). La prueba mide conocimientos y habilidades de lenguaje, matemáticas y ciencias, con puntuaciones que se encuentran en el intervalo [1, 36]. Aproximadamente 1.5 millones de estudiantes de bachillerato presentaron el examen en 2009, y la puntuación media compuesta en las áreas académicas fue $\mu = 21.1$ con una desviación estándar de $\sigma = 5.1$.

a) ¿Qué porcentaje de la población obtuvo una puntuación entre 18 y 24?

b) ¿Cuál es la clasificación de un estudiante que obtuvo 27 puntos en la prueba?

c) ¿Cuál es el resultado entero mínimo que necesitaba un estudiante para ubicarse en el 8% con mejor puntuación de la población?

Solución

a) Use una computadora para evaluar la integral de probabilidad de la función de densidad de probabilidad normal con $\mu = 21.1$ y $\sigma = 5.1$:

$$P(18 \le X \le 24) = \int_{18}^{24} \frac{1}{5.1\sqrt{2\pi}} e^{-(X-21.1)^2/2(5.1)^2}\, dX \approx 0.44355.$$

Esto significa que aproximadamente el 44% de los estudiantes obtuvieron una puntuación entre 18 y 24.

b) Nuevamente, use una computadora para calcular la probabilidad de que un estudiante obtenga una puntuación menor que 27 en la prueba:

$$P(1 \le X < 27) = \int_{1}^{27} \frac{1}{5.1\sqrt{2\pi}} e^{-(X-21.1)^2/2(5.1)^2}\, dX \approx 0.87630.$$

Se concluye que aproximadamente el 88% de los estudiantes obtuvieron una puntuación por debajo de 27, de modo que el estudiante en cuestión está clasificado en el 12% de los mejores.

c) Ahora veremos cuántos estudiantes tuvieron una puntuación mayor que 28:

$$P(28 < X \le 36) = \int_{28}^{36} \frac{1}{5.1\sqrt{2\pi}} e^{-(X-21.1)^2/2(5.1)^2}\, dX \approx 0.0863.$$

Como el número da más del 8% de estudiantes, buscamos la siguiente calificación entera más alta:

$$P(29 < X \le 36) = \int_{29}^{36} \frac{1}{5.1\sqrt{2\pi}} e^{-(X-21.1)^2/2(5.1)^2}\, dX \approx 0.0595.$$

Por lo tanto, 29 es la puntuación entera más baja que un estudiante puede obtener para ubicarse en el 8% de los mejores de la población (y en realidad en el 6% de los mejores). ■

La forma más sencilla de una distribución normal de X se presenta cuando su media es 0 y su desviación estándar es 1. La *función de densidad de probabilidad normal estándar* f con una media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 1$ es

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-X^2/2}.$$

Observe que la sustitución $z = (X - \mu)/\sigma$ nos da las integrales equivalentes

$$\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-((X-\mu)/\sigma)^2/2}\, dX = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz,$$

donde $\alpha = (a - \mu)/\sigma$ y $\beta = (b - \mu)/\sigma$. Así que los valores de una variable aleatoria se pueden convertir a "valores z" para estandarizar la distribución normal, y después usar la integral del lado derecho de la última ecuación para calcular las probabilidades de la distribución

normal de la variable aleatoria original con media μ y desviación estándar σ. Sabemos que en una distribución normal, el 99.5% de la población se encuentra dentro de dos desviaciones estándar de la media, de modo que una variable aleatoria X convertida a un valor z tiene más del 95% de oportunidad de caer en el intervalo $[-2, 2]$.

Ejercicios 8.9

Funciones de densidad de probabilidad

En los ejercicios 1 a 8, determine cuáles son las funciones de densidad de probabilidad y justifique su respuesta.

1. $f(x) = \frac{1}{18}x$ en $[4, 8]$

2. $f(x) = \frac{1}{2}(2 - x)$ en $[0, 2]$

3. $f(x) = 2^x$ en $\left[0, \dfrac{\ln(1 + \ln 2)}{\ln 2}\right]$

4. $f(x) = x - 1$ en $[0, 1 + \sqrt{3}]$

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi(4 + x^2)} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

7. $f(x) = 2\cos 2x$ en $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

8. $f(x) = \frac{1}{x}$ en $(0, e]$

9. Sea f la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria L en el ejemplo 2f). Explique el significado de cada integral.

a) $\displaystyle\int_{25{,}000}^{32{,}000} f(L)\,dL$ ***b)*** $\displaystyle\int_{30{,}000}^{\infty} f(L)\,dL$

c) $\displaystyle\int_{0}^{20{,}000} f(L)\,dL$ ***d)*** $\displaystyle\int_{-\infty}^{15{,}000} f(L)\,dL$

10. Sea $f(X)$ la distribución uniforme de la variable aleatoria X en el ejemplo 11. Exprese las siguientes probabilidades como integrales.

a) La probabilidad de que la flecha apunte entre el sur y el oeste o entre el norte y el oeste.

b) La probabilidad de que la flecha subtienda un ángulo de al menos 2 radianes.

Verifique que las funciones de los ejercicios 11 a 16 sean funciones de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X en el intervalo indicado. Calcule la probabilidad indicada.

11. $f(x) = xe^{-x}$ en $[0, \infty)$, $P(1 \leq X \leq 3)$

T 12. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ en $[1, \infty)$, $P(2 < X < 15)$

13. $f(x) = \frac{3}{2}x(2 - x)$ en $[0, 1]$, $P(0.5 > X)$

T 14. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 \pi x}{\pi x^2}$ en $\left[\dfrac{200}{1059}, \infty\right)$, $P(X < \pi/6)$

15. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & x > 1 \\ 0 & x \leq 1 \end{cases}$ en $(-\infty, \infty)$, $P(4 \leq X < 9)$

16. $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi/2]$, $P\left(\dfrac{\pi}{6} < X \leq \dfrac{\pi}{4}\right)$

En los ejercicios 17 a 20, obtenga el valor de la constante c de modo que la función dada sea la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria en el intervalo dado.

17. $f(x) = \frac{1}{6}x$ en $[3, c]$ **18.** $f(x) = \frac{1}{x}$ en $[c, c + 1]$

19. $f(x) = 4e^{-2x}$ en $[0, c]$

20. $f(x) = cx\sqrt{25 - x^2}$ en $[0, 5]$

21. Sea $f(x) = \dfrac{c}{1 + x^2}$. Obtenga el valor de c de manera que f sea una función de densidad de probabilidad. Si f es una función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X, obtenga la probabilidad $P(1 \leq X < 2)$.

22. Obtenga el valor de c de modo que $f(x) = c\sqrt{x}(1 - x)$ sea una función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X en $[0, 1]$, y obtenga la probabilidad $P(0.25 \leq X \leq 0.5)$.

23. Demuestre que si la función exponencial decreciente

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ Ae^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

es una función de densidad de probabilidad, entonces, $A = c$.

24. Suponga que f es una función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X con media μ. Demuestre que su varianza satisface

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 f(X)\,dX - \mu^2.$$

Calcule la media y la mediana de una variable aleatoria con las funciones de densidad de probabilidad de los ejercicios 25 a 28.

25. $f(x) = \frac{1}{8}x$ en $[0, 4]$ **26.** $f(x) = \frac{1}{9}x^2$ en $[0, 3]$

27. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & 1 \leq x \leq e \\ 0 & \text{De otra forma} \end{cases}$

Distribuciones exponenciales

29. Tiempo de digestión El tiempo en horas para digerir una cantidad fija de alimento está distribuido exponencialmente con una media de 1 hora. ¿Cuál es la probabilidad de que el alimento se digiera en menos de 30 minutos?

30. Polinización de las flores Un biólogo modela el tiempo, en minutos, que tarda una abeja en llegar a una planta en floración, con una distribución exponencial que tiene una media de 4 minutos. Si en un campo existen 1000 flores, ¿cuántas se espera que sean polinizadas antes de 5 minutos?

31. Tiempo de vida de las bombillas Un fabricante de bombillas determina que la vida media de una bombilla es de 1200 horas. Suponga que la vida de la bombilla está distribuida exponencialmente.

a) Obtenga la probabilidad de que la bombilla dure menos del tiempo garantizado de 1000 horas.

b) En un lote de bombillas, ¿cuál es el tiempo esperado para que la mitad de las que conforman el lote fallen?

32. Tiempo de vida de un componente electrónico La expectativa de vida, en años, de un componente electrónico de microcomputadora está distribuida exponencialmente, y $1/3$ de los componentes fallan en los primeros 3 años. La compañía que fabrica los componentes ofrece 1 año de garantía. ¿Cuál es la probabilidad de que el componente falle durante el periodo de garantía?

33. Tiempo de vida de un organismo Una *hidra* es un pequeño animal de agua dulce, y algunos estudios señalan que su probabilidad de muerte no se incrementa con el paso del tiempo. La nula influencia de la edad sobre las tasas de mortalidad de esta especie indica que una distribución exponencial es un modelo adecuado de la mortalidad de la hidra. Un biólogo estudia una población de 500 hidras y observa que 200 de ellas mueren antes de los primeros 2 años. ¿Cuántas de las hidras esperaría usted que murieran dentro de los primeros seis meses?

34. Accidentes automovilísticos El número de días que transcurren entre el inicio del año calendario y el momento en que un automovilista de alto riesgo se ve involucrado en un accidente está distribuido exponencialmente. Con base en datos históricos, una compañía de seguros espera que el 30% de los conductores de alto riesgo estén involucrados en un accidente durante los primeros 50 días del año calendario. En un grupo de 100 conductores de alto riesgo, ¿cuántos esperaría usted que estuvieran involucrados en un accidente durante los primeros 80 días del año calendario?

35. Tiempo de servicio al cliente El tiempo de espera promedio para ser atendido después de entrar a una pastelería es de 30 segundos. Suponga que una función de densidad exponencial describe los tiempos de espera.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente espere 15 segundos o menos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente espere más de un minuto?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente espere exactamente 5 minutos?

d) Si en un día, 200 clientes entran a la pastelería, ¿cuántos tienen la probabilidad de ser atendidos antes de tres minutos?

36. Tiempo de espera en el aeropuerto De acuerdo con la U.S. Customs and Border Protection Agency, el tiempo de espera promedio en el aeropuerto internacional O'Hare de Chicago es de 16 minutos para un viajero que llega entre las 7 y 8 de la mañana, y de 32 minutos si llega entre las 4 y 5 de la tarde. El tiempo de espera está definido como el tiempo de procesamiento total desde la llegada al aeropuerto hasta que el pasajero pasa por la inspección de seguridad. Suponga que el tiempo de espera está distribuido exponencialmente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un pasajero que llega entre las 7 y 8 de la mañana espere entre 10 y 30 minutos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un pasajero que llega entre las 7 y 8 de la mañana espere más de 25 minutos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un pasajero que llega entre las 4 y 5 de la tarde espere entre 35 y 50 minutos?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que un pasajero que llega entre las 4 y 5 de la tarde espere menos de 20 minutos?

37. Tiempo de vida de una impresora El tiempo de vida de una impresora de $200 está distribuido exponencialmente con una media de 2 años. El fabricante está de acuerdo en devolver el pago total al comprador si la impresora falla durante el primer año siguiente de la compra, y la mitad del precio si falla durante el segundo año. Si el fabricante vende 100 impresoras, ¿cuánto puede esperar pagar de reembolsos?

38. Tiempo de falla El tiempo entre fallas de una fotocopiadora está distribuido exponencialmente. La mitad de las copiadoras en una universidad requieren servicio de reparación durante los primeros 2 años de operaciones. Si la universidad compró 150 copiadoras, ¿cuántas se espera que requieran servicio durante el primer año de operación?

T Distribuciones normales

39. Niveles de colesterol Los niveles de colesterol en niños de entre 12 y 14 años sigue una distribución normal con una media $\mu = 162$ mg/dl y desviación estándar $\sigma = 28$ mg/dl. En una población de 1000 de estos niños, ¿cuántos esperaría que tuvieran niveles de colesterol de entre 165 y 193? ¿Y entre 148 y 167?

40. Lluvias anuales Las lluvias anuales en San Francisco, California, medidas en pulgadas, tienen aproximadamente una variable aleatoria normal con media de 20.11 in y desviación estándar de 4.7 in. ¿Cuál es la probabilidad de que las lluvias del próximo año excedan las 17 in?

41. Tiempo de manufactura El tiempo de ensamblaje, en minutos, de un componente en una planta de manufactura electrónica está distribuido normalmente con una media $\mu = 55$ y desviación estándar $\sigma = 4$. ¿Cuál es la probabilidad de que un componente se fabrique en menos de una hora?

42. Tiempo de vida de un neumático Suponga que la variable aleatoria L del ejemplo 2*f*) está distribuida normalmente con media $\mu = 22{,}000$ millas y $\sigma = 4\,000$ millas.

a) En un lote de 4000 neumáticos, ¿cuántos se espera que duren al menos 18,000 millas?

b) ¿Cuál es el número mínimo de millas que usted esperaría obtener como tiempo de vida del 90% de los neumáticos?

43. Estatura La estatura promedio de las mujeres estadounidenses de entre 18 y 24 años de edad está distribuida normalmente con media $\mu = 65.5$ pulgadas y $\sigma = 2.5$ pulgadas.

a) ¿Qué porcentaje de mujeres tienen una estatura mayor que 68 pulgadas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer mida entre 5′1″ y 5′4″ de estatura?

44. Expectativa de vida Al nacer, un ciudadano francés tiene una expectativa de vida de 81 años con una desviación estándar de 7 años. Si se elige al azar a 100 bebés franceses recién nacidos, ¿cuántos espera usted que vivan entre 75 y 85 años? Suponga que la expectativa de vida está distribuida normalmente.

45. Duración del embarazo Un equipo de practicantes médicos determina que en una población de 1000 mujeres con edades que van de los 20 a los 35 años, el tiempo de embarazo desde la concepción hasta el alumbramiento tiene aproximadamente una distribución normal con una media de 266 días y una desviación estándar de 16 días. ¿Cuántas de estas mujeres esperaría usted que tuvieran un embarazo con una duración de 36 a 40 semanas?

46. Peso de cerebros Investigadores médicos señalaron que los pesos de los cerebros de una población de 500 hombres suecos adultos tenían aproximadamente una distribución normal con media $\mu = 1400$ gr y desviación estándar $\sigma = 100$ gr.

a) ¿Qué porcentaje de los pesos de cerebros están entre 1325 y 1450 gr?

b) ¿Cuántos hombres de la población esperaría usted que registraran un peso de cerebro superior a los 1480 gr?

47. Presión sanguínea La presión sanguínea diastólica en adultos está distribuida normalmente con $\mu = 80$ mm de Hg y $\sigma = 12$ mm de Hg. En una muestra aleatoria de 300 adultos, ¿cuántos esperaría usted que tuvieran la presión sanguínea diastólica por debajo de los 70 mm de mercurio?

48. Niveles de albúmina El suero de albúmina en hombres sanos de 20 años de edad está distribuido normalmente con $\mu = 4.4$ y $\sigma = 0.2$. ¿Qué probabilidad hay de que un hombre sano de 20 años de edad tenga un nivel de entre 4.3 y 4.45?

49. Control de calidad Un fabricante de ejes de generadores se da cuenta de que necesita agregar más peso a los ejes para lograr un equilibrio estático y dinámico adecuado. Con base en sus pruebas, el peso promedio que necesita agregar es $\mu = 35$ gr con $\sigma = 9$ gr. Suponiendo una distribución normal, de 1000 ejes elegidos aleatoriamente, ¿a cuántos ejes se esperaría agregar un peso de 40 gr?

50. Millas recorridas Una compañía de taxis de Nueva York analizó el número de millas recorridas al día por cada uno de sus conductores. Encontró que la distancia promedio era de 200 millas, con una desviación estándar de 30 millas. Suponiendo una distribución normal, ¿qué pronóstico se puede hacer acerca del porcentaje de conductores que registrarán más de 260 millas o menos de 170 millas?

51. Germinación de semillas de girasol La tasa de germinación de una semilla particular es el porcentaje de semillas del lote que logran convertirse en plantas. Suponga que la tasa de germinación en un lote de semillas de girasol es del 80%, y que entre una población grande de n semillas, el número de germinaciones exitosas está distribuido normalmente con media $\mu = 0.8n$ y $\sigma = 0.4\sqrt{n}$.

a) En un lote de $n = 2500$ semillas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 1960 germinen con éxito?

b) En un lote de $n = 2500$ semillas, ¿cuál es la probabilidad de que, a lo más, 1980 germinen con éxito?

c) En un lote de $n = 2500$ semillas, ¿cuál es la probabilidad de que entre 1940 y 2020 germinen con éxito?

52. Suponga que lanza al aire una moneda justa n veces y registra el número de caras que se presentan. Suponga que n es grande y que la variable aleatoria discreta X se aproxima con una variable aleatoria continua que está distribuida normalmente con $\mu = n/2$ y $\sigma = \sqrt{n}/2$. Si $n = 400$, obtenga las siguientes probabilidades.

a) $P(190 \leq X < 210)$ ***b)*** $P(X < 170)$

c) $P(X > 220)$ ***d)*** $P(X = 300)$

Variables aleatorias discretas

53. Se lanza al aire, cuatro veces, una moneda justa y la variable aleatoria X asigna el número de cruces que se obtienen en cada resultado.

a) Determine el conjunto de resultados posibles.

b) Obtenga el valor de X para cada resultado.

c) Elabore una gráfica de barras de probabilidad para X, como la de la figura 8.21. ¿Cuál es la probabilidad de que resulten al menos dos caras en los cuatro lanzamientos de la moneda?

54. Se lanza un par de dados de seis caras, y la variable aleatoria X asigna a cada resultado la suma del número de puntos de cada cara, como en el ejemplo 2*e*).

a) Obtenga el conjunto de resultados posibles.

b) Elabore una gráfica de barras de probabilidad de X.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que $X = 8$?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que $X \leq 5$? ¿Y la probabilidad de que $X > 9$?

55. En una encuesta se pide a tres personas que den su opinión acerca de una marca particular de un producto conocido que se encuentra en tiendas de comestibles. Pueden contestar de tres maneras: "Me gusta esa marca del producto" (L), "No me gusta esa marca del producto" (D), o "Indeciso" (U). Por cada resultado, la variable aleatoria X asigna los números de "eles" que aparecen.

a) Obtenga el conjunto de resultados posibles y el rango de X.

b) Elabore una gráfica de barras de probabilidad de X.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos a dos personas les guste la marca del producto?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que a no más de una persona le disguste la marca del producto?

56. Componentes de una nave espacial El componente de una nave espacial tiene tanto un sistema principal como un sistema de respaldo de operación de vuelo. La probabilidad de que ambos sistemas fallen en algún momento durante el vuelo es de 0.0148. Suponiendo que cada sistema por separado tiene la misma tasa de falla, ¿cuál es la probabilidad de que el sistema principal falle durante el vuelo?

Capítulo 8 Preguntas de repaso

1. ¿Cuál es la fórmula de integración por partes? ¿De dónde proviene? ¿Por qué podríamos necesitarla?

2. Cuando se aplica la fórmula de integración por partes, ¿cómo se selecciona u y dv? ¿Cómo se aplica la integración por partes a una integral de la forma $\int f(x)\,dx$?

3. Si un integrando es el producto de la forma $\text{sen}^n x \cos^m x$, donde m y n son enteros no negativos, ¿cómo se evalúa la integral? Dé un ejemplo específico de cada caso.

4. ¿Qué sustituciones se hacen para evaluar las integrales de sen mx sen nx, sen mx cos nx, y cos mx cos nx? Dé un ejemplo de cada caso.

5. ¿Qué sustituciones se utilizan en ocasiones para transformar integrales que incluyen $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, y $\sqrt{x^2 - a^2}$ en integrales que puedan evaluarse de manera directa? Dé un ejemplo de cada caso.
6. ¿Qué restricciones podría establecer a las variables que se incluyen en las tres sustituciones trigonométricas básicas, para asegurarse de que las sustituciones sean reversibles (es decir, que tengan inversas)?
7. ¿Cuál es el objetivo del método de fracciones parciales?
8. Cuando el grado de un polinomio $f(x)$ es menor que el grado de un polinomio $g(x)$, ¿cómo se escribe $f(x)/g(x)$ como una suma de fracciones parciales si $g(x)$
   a) es un producto de factores lineales distintos?
   b) consiste en un factor lineal repetido?
   c) incluye un factor cuadrático irreducible?
   ¿Qué debe hacer si el grado de f *no* es menor que el grado de g?
9. ¿Cómo se utilizan generalmente las tablas de integrales? ¿Qué debemos hacer si una integral particular que se quiere evaluar no está en la tabla?
10. ¿Qué es una fórmula de reducción? ¿Cómo se usan las fórmulas de reducción? Dé un ejemplo.
11. ¿Cómo se comparan los méritos relativos de la regla de Simpson y de la regla del trapecio?
12. ¿Qué es una integral impropia del tipo I? ¿Y del tipo II? ¿Cómo se definen los valores de los diferentes tipos de integrales impropias? Dé ejemplos.
13. ¿Qué pruebas están disponibles para determinar la convergencia y divergencia de integrales impropias que no pueden evaluarse de manera directa? Dé ejemplos de su uso.
14. ¿Qué es una variable aleatoria? ¿Qué es una variable aleatoria continua? Dé algunos ejemplos específicos.
15. ¿Qué es una función de densidad de probabilidad? ¿Cuál es la probabilidad de que una variable aleatoria continua tome un valor en el intervalo $[c, d]$?
16. ¿Qué es una función de densidad de probabilidad exponencial decreciente? ¿Cuáles son los eventos típicos que se pueden modelar con esta distribución? ¿Qué queremos decir cuando afirmamos que estas distribuciones *no tienen memoria*?
17. ¿Qué es el valor esperado de una variable aleatoria continua? ¿Qué es el valor esperado de una variable aleatoria distribuida exponencialmente?
18. ¿Qué es la mediana de una variable aleatoria continua? ¿Qué es la mediana de una distribución exponencial?
19. ¿Qué mide la varianza de una variable aleatoria? ¿Qué es la desviación estándar de una variable aleatoria continua X?
20. ¿Qué función de densidad de probabilidad describe la distribución normal? ¿Cuáles son algunos ejemplos que generalmente se modelan con una distribución normal? ¿Cómo se calculan por lo regular las probabilidades de una distribución normal?
21. En una distribución normal, ¿qué porcentaje de la población se encuentra dentro de 1 desviación estándar de la media? ¿Y dentro de 2 desviaciones estándar?

Capítulo 8 Ejercicios de práctica

Integración por partes

En los ejercicios 1 a 8, evalúe las integrales usando integración por partes.

1. $\int \ln\,(x + 1)\,dx$
2. $\int x^2 \ln x\,dx$
3. $\int \tan^{-1} 3x\,dx$
4. $\int \cos^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)dx$
5. $\int (x + 1)^2 e^x\,dx$
6. $\int x^2 \operatorname{sen}\,(1 - x)\,dx$
7. $\int e^x \cos 2x\,dx$
8. $\int x \operatorname{sen} x \cos x\,dx$

Fracciones parciales

En los ejercicios 9 a 28, evalúe las integrales. Tal vez sea necesario realizar primero una sustitución.

9. $\int \frac{x\,dx}{x^2 - 3x + 2}$
10. $\int \frac{x\,dx}{x^2 + 4x + 3}$
11. $\int \frac{dx}{x(x + 1)^2}$
12. $\int \frac{x + 1}{x^2(x - 1)}\,dx$
13. $\int \frac{\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\cos^2\theta + \cos\theta - 2}$
14. $\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta - 6}$
15. $\int \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^3 + x}\,dx$
16. $\int \frac{4x\,dx}{x^3 + 4x}$
17. $\int \frac{v + 3}{2v^3 - 8v}\,dv$
18. $\int \frac{(3v - 7)\,dv}{(v - 1)(v - 2)(v - 3)}$
19. $\int \frac{dt}{t^4 + 4t^2 + 3}$
20. $\int \frac{t\,dt}{t^4 - t^2 - 2}$
21. $\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 + x - 2}\,dx$
22. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x}\,dx$
23. $\int \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 + 4x + 3}\,dx$
24. $\int \frac{2x^3 + x^2 - 21x + 24}{x^2 + 2x - 8}\,dx$
25. $\int \frac{dx}{x(3\sqrt{x + 1})}$
26. $\int \frac{dx}{x\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)}$
27. $\int \frac{ds}{e^s - 1}$
28. $\int \frac{ds}{\sqrt{e^s + 1}}$

Sustituciones trigonométricas

En los ejercicios 29 a 32, evalúe las integrales ***a***) sin recurrir a la sustitución trigonométrica, ***b***) mediante una sustitución trigonométrica.

29. $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{16 - y^2}}$
30. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4 + x^2}}$
31. $\int \frac{x\,dx}{4 - x^2}$
32. $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{4t^2 - 1}}$

En los ejercicios 33 a 36, evalúe las integrales.

33. $\int \frac{x\,dx}{9 - x^2}$

34. $\int \frac{dx}{x(9 - x^2)}$

35. $\int \frac{dx}{9 - x^2}$

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

Integrales trigonométricas

En los ejercicios 37 a 44, evalúe las integrales.

37. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\,dx$

38. $\int \cos^5 x \operatorname{sen}^5 x\,dx$

39. $\int \tan^4 x \sec^2 x\,dx$

40. $\int \tan^3 x \sec^3 x\,dx$

41. $\int \operatorname{sen} 5\theta \cos 6\theta\,d\theta$

42. $\int \sec^2 \theta \operatorname{sen}^3 \theta\,d\theta$

43. $\int \sqrt{1 + \cos(t/2)}\,dt$

44. $\int e^t \sqrt{\tan^2 e^t + 1}\,dt$

Integración numérica

45. De acuerdo con la fórmula para la cota del error de la regla de Simpson, ¿cuántos subintervalos utilizaría para asegurar que el valor de la estimación de

$$\ln 3 = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$$

con la regla de Simpson tenga un error absoluto no mayor que 10^{-4}? (Recuerde que para la regla de Simpson, el número de subintervalos tiene que ser par).

46. Un cálculo rápido indica que si $0 \le x \le 1$, la segunda derivada de $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$ está entre 0 y 8. Con base en esto, si utiliza la regla del trapecio, ¿aproximadamente cuántas subdivisiones necesitaría para estimar la integral de f, de 0 a 1, con un error absoluto no mayor que 10^{-3}?

47. Un cálculo directo indica que

$$\int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen}^2 x\,dx = \pi.$$

¿Qué tan cercana a este valor es la aproximación de la regla del trapecio con $n = 6$? ¿Y la aproximación de la regla de Simpson con $n = 6$? Inténtelo y averígüelo.

48. Usted planea utilizar la regla de Simpson para estimar el valor de la integral

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

con una magnitud de error menor que 10^{-5}. Usted determinó que $|f^{(4)}(x)| \le 3$ en el intervalo de integración. ¿Cuántos subintervalos debe utilizar para asegurarse de tener la precisión que se requiere? (Recuerde que para la regla de Simpson, el número de subintervalos tiene que ser par).

T **49. Temperatura media** Use la regla de Simpson para aproximar el valor promedio de la función de temperatura

$$f(x) = 37 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right) + 25$$

para un año de 365 días. Ésta es una manera de estimar la temperatura ambiente media anual X en Fairbanks, Alaska. La cifra oficial del Servicio Meteorológico Nacional de Estados Unidos, un promedio numérico de la temperatura ambiente media normal diaria del aire durante el año, es de 25.7°F, medición ligeramente mayor que el valor promedio de $f(x)$.

50. Capacidad calorífica de un gas La capacidad calorífica, C_v, de un gas es la cantidad de calor requerida para elevar 1°C la temperatura de una masa de gas dada con volumen constante, y se mide en unidades de cal/grado-mol (calorías por grado-gramo peso molecular). La capacidad calorífica del oxígeno depende de su temperatura T y satisface la fórmula

$$C_v = 8.27 + 10^{-5}(26T - 1.87T^2).$$

Utilice la regla de Simpson con la finalidad de obtener el valor promedio de C_v para $20° \le T \le 675°$C y la temperatura a la que se alcanza.

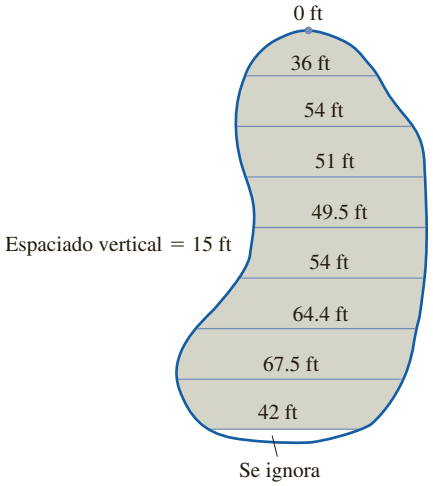
51. Eficiencia de la gasolina La computadora de un automóvil da una lectura digital del consumo de gasolina en galones por hora. Durante un viaje, un pasajero registró el consumo de gasolina cada 5 minutos durante una hora completa de viaje.

Tiempo	Gal / hr	Tiempo	Gal / hr
0	2.5	35	2.5
5	2.4	40	2.4
10	2.3	45	2.3
15	2.4	50	2.4
20	2.4	55	2.4
25	2.5	60	2.3
30	2.6		

a) Utilice la regla del trapecio para aproximar el consumo total de gasolina durante la hora.

b) Si el automóvil recorre 60 millas en la hora, ¿cuál fue la eficiencia de la gasolina (en millas por galón) para esa parte del recorrido?

52. Un nuevo estacionamiento Para satisfacer la demanda, la localidad donde usted vive asignó el área que se ilustra aquí para instalar un nuevo estacionamiento. Usted es el ingeniero de la ciudad, y el ayuntamiento le pidió que averiguara si el estacionamiento se puede construir con $11,000. El costo para limpiar el terreno será de $0.10 por ft^2, y el pavimentado costará $2.00 por pie cuadrado. Utilice la regla de Simpson para determinar si el trabajo puede realizarse con los $11,000.



Integrales impropias

En los ejercicios 53 a 62, evalúe las integrales impropias.

53. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

54. $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$

55. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dy}{(y-1)^{2/3}}$

56. $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{d\theta}{(\theta+1)^{3/5}}$

57. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{2\,du}{u^2-2u}$

58. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3v-1}{4v^3-v^2}\,dv$

59. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx$

60. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{3x}\,dx$

61. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{4x^2+9}$

62. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{4\,dx}{x^2+16}$

En los ejercicios 63 a 68, ¿cuáles de las integrales impropias convergen, y cuáles divergen?

63. $\displaystyle\int_6^\infty \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2+1}}$

64. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-u}\cos u\,du$

65. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln z}{z}\,dz$

66. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$

67. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{2\,dx}{e^x+e^{-x}}$

68. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$

Miscelánea de integrales

En los ejercicios 69 a 116, evalúe las integrales. Las integrales aparecen en orden aleatorio, de modo que debe decidir qué técnica de integración usar.

69. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$

70. $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{4-x^2}\,dx$

71. $\displaystyle\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$

72. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-2x-x^2}}$

73. $\displaystyle\int \frac{2-\cos x+\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

74. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2\theta\cos^5\theta\,d\theta$

75. $\displaystyle\int \frac{9\,dv}{81-v^4}$

76. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{(x-1)^2}$

77. $\displaystyle\int \theta\cos(2\theta+1)\,d\theta$

78. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{x^2-2x+1}$

79. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2\theta\,d\theta}{(1+\cos 2\theta)^2}$

80. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos 4x}\,dx$

81. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2-x}}$

82. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-v^2}}{v^2}\,dv$

83. $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2-2y+2}$

84. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8-2x^2-x^4}}$

85. $\displaystyle\int \frac{z+1}{z^2(z^2+4)}\,dz$

86. $\displaystyle\int x^2(x-1)^{1/3}\,dx$

87. $\displaystyle\int \frac{t\,dt}{\sqrt{9-4t^2}}$

88. $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx$

89. $\displaystyle\int \frac{e^t\,dt}{e^{2t}+3e^t+2}$

90. $\displaystyle\int \tan^3 t\,dt$

91. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln y}{y^3}\,dy$

92. $\displaystyle\int y^{3/2}(\ln y)^2\,dy$

93. $\displaystyle\int e^{\ln\sqrt{x}}\,dx$

94. $\displaystyle\int e^\theta\sqrt{3+4e^\theta}\,d\theta$

95. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 5t\,dt}{1+(\cos 5t)^2}$

96. $\displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{e^{2v}-1}}$

97. $\displaystyle\int \frac{dr}{1+\sqrt{r}}$

98. $\displaystyle\int \frac{4x^3-20x}{x^4-10x^2+9}\,dx$

99. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$

100. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^3}\,dx$

101. $\displaystyle\int \frac{1+x^2}{1+x^3}\,dx$

102. $\displaystyle\int \frac{1+x^2}{(1+x)^3}\,dx$

103. $\displaystyle\int \sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$

104. $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{1+x}}\,dx$

105. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+x}}\,dx$

106. $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx$

107. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x+x\ln x}\,dx$

108. $\displaystyle\int \frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}\,dx$

109. $\displaystyle\int \frac{x^{\ln x}\ln x}{x}\,dx$

110. $\displaystyle\int (\ln x)^{\ln x}\left[\frac{1}{x}+\frac{\ln(\ln x)}{x}\right]dx$

111. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^4}}\,dx$

112. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx$

113. ***a)*** Demuestre que $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$.

b) Con base en el inciso *a*), evalúe

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}\,dx.$$

114. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}\,dx$

115. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

116. $\displaystyle\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx$

Capítulo 8 Ejercicios adicionales y avanzados

Evaluación de integrales

En los ejercicios 1 a 6, evalúe las integrales.

1. $\displaystyle\int (\operatorname{sen}^{-1}x)^2\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}$

3. $\displaystyle\int x\operatorname{sen}^{-1}x\,dx$

4. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{y}\,dy$

5. $\displaystyle\int \frac{dt}{t - \sqrt{1 - t^2}}$ **6.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + 4}$

En los ejercicios 7 a 8, evalúe los límites.

7. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} \operatorname{sen} t\, dt$ **8.** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \int_{x}^{1} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$

En los ejercicios 9 y 10, evalúe los límites identificándolos con integrales definidas y evaluando las integrales.

9. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln \sqrt[n]{1 + \frac{k}{n}}$ **10.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$

Aplicaciones

11. Obtención de la longitud de arco Calcule la longitud de la curva

$$y = \int_0^x \sqrt{\cos 2t}\, dt, \quad 0 \le x \le \pi/4.$$

12. Obtención de la longitud de arco Calcule la longitud de la gráfica de la función $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \le x \le 1/2$.

13. Obtención de un volumen La región en el primer cuadrante, acotada por el eje x y la curva $y = 3x\sqrt{1 - x}$ se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

14. Obtención de un volumen La región en el primer cuadrante, acotada por el eje x y la curva $y = 5/\left(x\sqrt{5 - x}\right)$, y las rectas $x = 1$ y $x = 4$ se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Calcule el volumen del sólido.

15. Obtención de un volumen La región en el primer cuadrante, acotada por los ejes de coordenadas, la curva $y = e^x$ y la recta $x = 1$ se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. Calcule el volumen del sólido.

16. Obtención de un volumen La región en el primer cuadrante, acotada arriba por la curva $y = e^x - 1$, abajo por el eje x y a la derecha por la recta $x = \ln 2$, se hace girar alrededor de la recta $x = \ln 2$ para generar un sólido. Calcule el volumen del sólido.

17. Obtención de un volumen Sea R la región "triangular" en el primer cuadrante acotada arriba por la recta $y = 1$, abajo por la curva $y = \ln x$ y a la izquierda por la recta $x = 1$. Calcule el volumen del sólido generado al hacer girar R alrededor de

a) el eje x. ***b)*** la recta $y = 1$.

18. Obtención de un volumen (*Continuación del ejercicio 17*). Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región R alrededor de

a) el eje y. ***b)*** la recta $x = 1$.

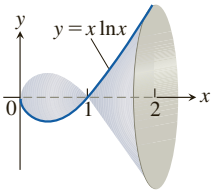
19. Obtención de un volumen La región entre el eje x y la curva

$$y = f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x \ln x, & 0 < x \le 2 \end{cases}$$

se hace girar alrededor del eje x para generar el sólido que se ilustra a continuación.

a) Demuestre que f es continua en $x = 0$.

b) Determine el volumen del sólido.



20. Obtención de un volumen La región infinita acotada por los ejes de coordenadas y la curva $y = -\ln x$ en el primer cuadrante se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Calcule el volumen del sólido.

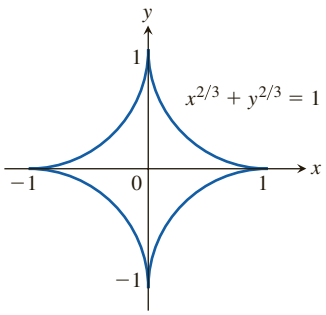
21. Centroide de una región Obtenga el centroide de la región en el primer cuadrante acotada abajo por el eje x, arriba por la curva $y = \ln x$ y a la derecha por la recta $x = e$.

22. Centroide de una región Obtenga el centroide de la región en el plano acotada por las curvas $y = \pm(1 - x^2)^{-1/2}$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

23. Longitud de una curva Determine la longitud de la curva $y = \ln x$ de $x = 1$ a $x = e$.

24. Obtención del área de una superficie Determine el área de la superficie generada al hacer girar la curva del ejercicio 23 alrededor del eje y.

25. Superficie generada por un astroide La gráfica de la ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ es un *astroide* (vea la figura). Obtenga el área de la superficie generada al hacer girar la curva alrededor del eje x.



26. Longitud de una curva Obtenga la longitud de la curva

$$y = \int_1^x \sqrt{\sqrt{t} - 1}\, dt, \qquad 1 \le x \le 16.$$

27. Indique los valores de a para los cuales

$$\int_1^\infty \left(\frac{ax}{x^2 + 1} - \frac{1}{2x}\right) dx$$

converge. Evalúe la(s) integral(es) correspondiente(s).

28. Para cada $x > 0$, sea $G(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\, dt$. Demuestre que $xG(x) = 1$ para cada $x > 0$.

29. Área infinita y volumen finito ¿Qué valores de p tienen la siguiente propiedad? El área de la región entre la curva $y = x^{-p}$, $1 \le x < \infty$, y el eje x es infinita, pero el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor del eje x es finito.

30. Área infinita y volumen finito ¿Qué valores de p tienen la siguiente propiedad? El área de la región en el primer cuadrante acotada por la curva $y = x^{-p}$, el eje y, la recta $x = 1$ y el intervalo $[0, 1]$ en el eje x es infinita, pero el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor de uno de los ejes de coordenadas es finito.

31. Integración del cuadrado de una derivada Si f es continuamente diferenciable en $[0, 1]$ y $f(1) = f(0) = -1/6$, demuestre que

$$\int_0^1 (f'(x))^2\,dx \geq 2\int_0^1 f(x)\,dx + \frac{1}{4}.$$

Sugerencia: Considere la desigualdad

$$0 \leq \int_0^1 \left(f'(x) + x - \frac{1}{2}\right)^2 dx.$$

Fuente: Mathematics Magazine, vol. 84, núm. 4, octubre de 2011.

32. (*Continuación del ejercicio 31*). Si f es continuamente diferenciable en $[0, a]$ para $a > 0$, y $f(a) = f(0) = b$, demuestre que

$$\int_0^a (f'(x))^2\,dx \geq 2\int_0^a f(x)\,dx - \left(2ab + \frac{a^3}{12}\right).$$

Sugerencia: Considere la desigualdad

$$0 \leq \int_0^a \left(f'(x) + x - \frac{a}{2}\right)^2 dx.$$

Fuente: Mathematics Magazine, vol. 84, núm. 4, octubre de 2011.

Integración tabular

La técnica de integración tabular también se aplica a integrales de la forma $\int f(x)g(x)\,dx$ cuando ninguna de las funciones puede derivarse de manera repetida hasta obtener cero. Por ejemplo, para evaluar

$$\int e^{2x}\cos x\,dx$$

iniciamos como antes, con una tabla listando las derivadas sucesivas de e^{2x} y las integrales de cos x:

e^{2x} y sus derivadas		cos x y sus integrales
e^{2x}	(+)	cos x
$2e^{2x}$	(−)	sen x
$4e^{2x}$	(+)	$-\cos x$

← *Deténgase aquí*: Esta fila es igual a la primera, salvo por factores constantes (4 a la izquierda, −1 a la derecha).

Detenemos la derivación y la integración tan pronto como lleguemos a una fila que sea igual a la primera, excepto por factores constantes. Interpretamos la tabla como

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = +(e^{2x}\operatorname{sen} x) - (2e^{2x}(-\cos x)) + \int (4e^{2x})(-\cos x)\,dx.$$

Tomamos los productos con el signo según las flechas diagonales, y una integral con su signo según la última flecha horizontal. Al transponer la integral de la derecha al lado izquierdo, se obtiene

$$5\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\operatorname{sen} x + 2e^{2x}\cos x$$

o bien,

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = \frac{e^{2x}\operatorname{sen} x + 2e^{2x}\cos x}{5} + C,$$

después de dividir entre 5 y sumar la constante de integración.

Use la integración tabular para evaluar las integrales en los ejercicios 33 a 40.

33. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$

34. $\int e^{3x}\operatorname{sen} 4x\,dx$

35. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x\,dx$

36. $\int \cos 5x \operatorname{sen} 4x\,dx$

37. $\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx$

38. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$

39. $\int \ln(ax)\,dx$

40. $\int x^2 \ln(ax)\,dx$

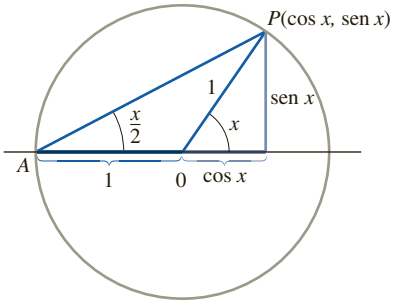
La sustitución $z = \tan(x/2)$

La sustitución

$$z = \tan\frac{x}{2} \tag{1}$$

reduce el problema de integración de una expresión racional en sen x y cos x a un problema de integración de una función racional de z. Esto, a la vez, se puede integrar por fracciones parciales.

De acuerdo con la figura,



se obtiene la relación

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}.$$

Para entender el efecto de la sustitución, calculamos

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{\sec^2(x/2)} - 1$$

$$= \frac{2}{1 + \tan^2(x/2)} - 1 = \frac{2}{1 + z^2} - 1$$

$$\cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \tag{2}$$

y

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\operatorname{sen}(x/2)}{\cos(x/2)}\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sec^2(x/2)} = \frac{2\tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1 + z^2}. \tag{3}$$

Por último, $x = 2\tan^{-1} z$, de modo que

$$dx = \frac{2\,dz}{1 + z^2}. \tag{4}$$

Ejemplos

a) $$\int \frac{1}{1 + \cos x}\,dx = \int \frac{1 + z^2}{2}\,\frac{2\,dz}{1 + z^2}$$

$$= \int dz = z + C$$

$$= \tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

b) $$\int \frac{1}{2 + \operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{1 + z^2}{2 + 2z + 2z^2}\,\frac{2\,dz}{1 + z^2}$$

$$= \int \frac{dz}{z^2 + z + 1} = \int \frac{dz}{(z + (1/2))^2 + 3/4}$$

$$= \int \frac{du}{u^2 + a^2}$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2z + 1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{1 + 2\tan(x/2)}{\sqrt{3}} + C$$

Use las sustituciones de las ecuaciones (1) a (4) para evaluar las integrales en los ejercicios 41 a 48. Integrales como éstas se presentan al calcular la velocidad angular promedio del eje de salida de una junta universal, cuando los ejes de entrada y salida no están alineados.

41. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x}$ **42.** $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}$

43. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}$ **44.** $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{1 - \cos x}$

45. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$ **46.** $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\cos\theta\,d\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$

47. $\displaystyle\int \frac{dt}{\operatorname{sen} t - \cos t}$ **48.** $\displaystyle\int \frac{\cos t\,dt}{1 - \cos t}$

Use la sustitución $z = \tan(\theta/2)$ para evaluar las integrales en los ejercicios 49 y 50.

49. $\displaystyle\int \sec\theta\,d\theta$ **50.** $\displaystyle\int \csc\theta\,d\theta$

La función gamma y la fórmula de Stirling

La función gamma de Euler $\Gamma(x)$ ("gamma de x"; Γ es la letra griega g mayúscula) utiliza una integral para extender la función factorial de los enteros no negativos a otros valores reales. La fórmula es

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt, \quad x > 0.$$

Para cada x positiva, el número $\Gamma(x)$ es la integral de $t^{x-1}e^{-t}$ con respecto a t, de 0 a ∞. La figura 8.28 muestra la gráfica de Γ cerca del origen. Verá cómo calcular $\Gamma(1/2)$ si resuelve el ejercicio adicional 23 del capítulo 15.

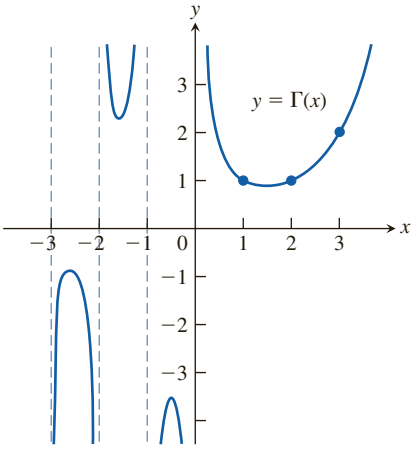


FIGURA 8.28 La función gamma de Euler $\Gamma(x)$ es una función continua de x cuyo valor en cada entero positivo $n + 1$ es $n!$. La fórmula de una integral definida para Γ es válida sólo para $x > 0$, pero Γ puede extenderse a valores negativos no enteros de x con la fórmula $\Gamma(x) = (\Gamma(x + 1))/x$, que es el tema del ejercicio 51.

51. Si n es un entero no negativo, $\Gamma(n + 1) = n!$

a) Demuestre que $\Gamma(1) = 1$.

b) Después, aplique integración por partes a la integral de $\Gamma(x + 1)$ para demostrar que $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$. Esto nos da

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1\\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2\\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 6\\ &\vdots\\ \Gamma(n + 1) &= n\,\Gamma(n) = n!\end{aligned} \tag{5}$$

c) Utilice inducción matemática con la finalidad de verificar la ecuación (5) para todo entero no negativo n.

52. Fórmula de Stirling El matemático escocés James Stirling (1692-1770) demostró que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e}{x}\right)^x\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\,\Gamma(x) = 1,$$

de modo que, para x grande

$$\Gamma(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\,(1 + \epsilon(x)), \quad \epsilon(x) \to 0 \text{ cuando } x \to \infty. \tag{6}$$

Al despreciar $\epsilon(x)$, llegamos a la aproximación

$$\Gamma(x) \approx \left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}} \quad \textbf{(Fórmula de Stirling)} \tag{7}$$

a) **Aproximación de Stirling para *n!*** Utilice la ecuación (7) y considere el hecho de que $n! = n\Gamma(n)$, para demostrar que

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} \quad \textbf{(Aproximación de Stirling)} \tag{8}$$

Como verá si resuelve el ejercicio 104 de la sección 10.1, la ecuación (8) conduce a la aproximación

$$\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e}. \tag{9}$$

T ***b)*** Compare el valor que da su calculadora para $n!$ con el valor que da la aproximación de Stirling para $n = 10, 20, 30, \ldots$, y así sucesivamente hasta alcanzar la capacidad de su calculadora.

T ***c)*** Un refinamiento de la ecuación (6) da

$$\Gamma(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\, e^{1/(12x)}(1 + \epsilon(x))$$

o

$$\Gamma(x) \approx \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\, e^{1/(12x)},$$

lo cual nos dice que

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}\, e^{1/(12n)}. \tag{10}$$

Compare los valores que dan para 10! su calculadora, la aproximación de Stirling y la ecuación (10).

Capítulo 8 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulos Mathematica/Maple

Aproximaciones de Riemann, trapezoidal y de Simpson

Parte I: Visualice el error en que se incurre al usar sumas de Riemann para aproximar el área debajo de una curva.
Parte II: Construya una tabla de valores y calcule la magnitud relativa del error como una función del tamaño del paso Δx.
Parte III: Investigue el efecto de la función derivada sobre el error.
Partes IV y V: Aproximaciones por medio de trapecios.
Parte VI: Aproximaciones por medio de la regla de Simpson.

Juegos de azar: Exploración de la técnica probabilística Monte Carlo para integración numérica
Explore gráficamente el método Monte Carlo para aproximar integrales definidas.

Cálculo de probabilidades con integrales impropias
Más exploraciones del método Monte Carlo para aproximar integrales definidas.

9 Ecuaciones diferenciales de primer orden

INTRODUCCIÓN Muchos problemas del mundo real, cuando se formulan matemáticamente, nos conducen a ecuaciones diferenciales. En capítulos anteriores vimos varias de estas ecuaciones cuando estudiamos fenómenos como el movimiento de un objeto a lo largo de una recta, el decaimiento de un material radiactivo, el crecimiento de una población y el enfriamiento de un objeto caliente colocado en un medio con temperatura más baja.

En la sección 4.7 hablamos de las ecuaciones diferenciales de la forma $dy/dx = f(x)$, donde f se conoce y y es una función desconocida de x. Vimos que cuando f es continua en algún intervalo, la solución general $y(x)$ se obtiene directamente por integración: $y = \int f(x)\,dx$. Después, en la sección 7.4, estudiamos las ecuaciones diferenciales de la forma $dy/dx = f(x, y)$, donde f es una función tanto de la variable independiente x como de la variable dependiente y. Allí aprendimos cómo obtener la solución general cuando la ecuación diferencial es separable. En este capítulo extenderemos nuestro estudio para incluir otras ecuaciones diferenciales de *primer orden* que se presentan comúnmente. Éstas sólo involucran primeras derivadas de la función desconocida $y(x)$, y modelan fenómenos como circuitos eléctricos sencillos, o la concentración resultante de una sustancia química que se agrega y se mezcla con algún otro fluido en un contenedor.

9.1 Soluciones, campos de dirección y el método de Euler

Iniciaremos esta sección definiendo las ecuaciones diferenciales generales que involucran primeras derivadas. Después, veremos los campos de dirección, que nos dan una imagen geométrica de las soluciones de tales ecuaciones. Muchas ecuaciones diferenciales no se pueden resolver obteniendo una fórmula explícita de la solución. Sin embargo, a menudo se obtienen aproximaciones numéricas a las soluciones. Aquí presentaremos uno de estos métodos, conocido como el *método de Euler*, el cual es la base de muchos otros métodos numéricos.

Ecuaciones diferenciales generales de primer orden y su solución

Una **ecuación diferencial de primer orden** es una ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

en la cual $f(x, y)$ es una función de dos variables definida en una región del plano xy. La ecuación es de *primer orden* porque sólo involucra la primera derivada dy/dx (y no a derivadas de orden superior). Observe que las ecuaciones

$$y' = f(x, y) \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}y = f(x, y)$$

son equivalentes a la ecuación (1), y en el texto se usarán indistintamente las tres formas.

Una **solución** de la ecuación (1) es una función diferenciable $y = y(x)$ definida en un intervalo I (tal vez no acotado) de valores de x tales que

$$\frac{d}{dx}y(x) = f(x, y(x))$$

en ese intervalo. Es decir, cuando $y(x)$ y su derivada $y'(x)$ se sustituyen en la ecuación (1), la ecuación resultante es verdadera para todos los valores de x en el intervalo I. La **solución general** de una ecuación diferencial de primer orden incluye todas las soluciones posibles. La solución general siempre incluye una constante arbitraria, pero el hecho de que una solución tenga esta propiedad no significa que sea la solución general. Es decir, una solución puede incluir una constante arbitraria sin ser la solución general. Para determinar que una solución *es* la solución general, se requiere de conocimientos más profundos de la teoría de ecuaciones diferenciales que se estudian en cursos más avanzados.

EJEMPLO 1 Demuestre que todo miembro de la familia de funciones

$$y = \frac{C}{x} + 2$$

es una solución de la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(2 - y)$$

en el intervalo $(0, \infty)$, donde C es cualquier constante.

Solución Al derivar $y = C/x + 2$, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = C\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + 0 = -\frac{C}{x^2}.$$

Necesitamos demostrar que la ecuación diferencial se satisface cuando sustituimos en ella y por las expresiones $C/x + 2$, y dy/dx por $-C/x^2$. Esto es, necesitamos verificar que para toda $x \in (0, \infty)$,

$$-\frac{C}{x^2} = \frac{1}{x}\left[2 - \left(\frac{C}{x} + 2\right)\right].$$

Esta última ecuación se obtiene inmediatamente desarrollando la expresión del lado derecho:

$$\frac{1}{x}\left[2 - \left(\frac{C}{x} + 2\right)\right] = \frac{1}{x}\left(-\frac{C}{x}\right) = -\frac{C}{x^2}.$$

Por lo tanto, para todo valor de C, la función $y = C/x + 2$ es una solución de la ecuación diferencial. ■

Como en el caso de la obtención de antiderivadas, a menudo necesitamos una solución *particular* en lugar de la solución general de la ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x, y)$. La **solución particular** que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$ es la solución $y = y(x)$ cuyo valor es y_0 cuando $x = x_0$. Así, la gráfica de la solución particular pasa por el punto (x_0, y_0) en el plano xy. Un **problema con valor inicial de primer orden** es una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ cuya solución debe satisfacer una condición inicial $y(x_0) = y_0$.

EJEMPLO 2 Demuestre que la función

$$y = (x + 1) - \frac{1}{3}e^x$$

es una solución del problema con valor inicial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = y - x, \qquad y(0) = \frac{2}{3}.$$

Solución La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = y - x$$

es una ecuación diferencial de primer orden con $f(x, y) = y - x$.

En el lado izquierdo de la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x + 1 - \frac{1}{3}e^x\right) = 1 - \frac{1}{3}e^x.$$

En el lado derecho de la ecuación:

$$y - x = (x + 1) - \frac{1}{3}e^x - x = 1 - \frac{1}{3}e^x.$$

La función satisface la condición inicial porque

$$y(0) = \left[(x + 1) - \frac{1}{3}e^x\right]_{x=0} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

La gráfica de la función se presenta en la figura 9.1. ■

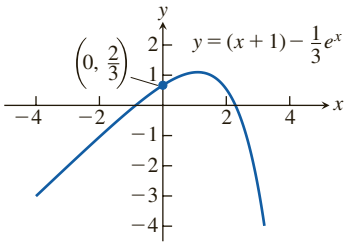


FIGURA 9.1 Gráfica de la solución del problema con valor inicial del ejemplo 2.

Campos de dirección: Visualización de las curvas solución

Cada vez que especificamos una condición inicial $y(x_0) = y_0$ para la solución de una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, necesitamos que la **curva solución** (gráfica de la solución) pase por el punto (x_0, y_0) y tenga una pendiente $f(x_0, y_0)$ en ese punto. Podemos representar estas pendientes dibujando pequeños segmentos de recta de pendiente $f(x, y)$ en puntos seleccionados (x, y) de la región del plano xy que constituye el dominio de f. Cada segmento tiene la misma pendiente que la curva solución que pasa por (x, y) y, por lo tanto, es tangente a la curva en ese punto. El diagrama resultante se denomina **campo de dirección** (o **campo de pendientes**), y ofrece una visualización de la forma general de las curvas solución. La figura 9.2*a*) muestra un campo de dirección, en tanto que un diagrama de una solución particular se presenta en la figura 9.2*b*). Vemos cómo estos segmentos de recta indican la dirección que la curva solución toma en cada punto por donde pasa.

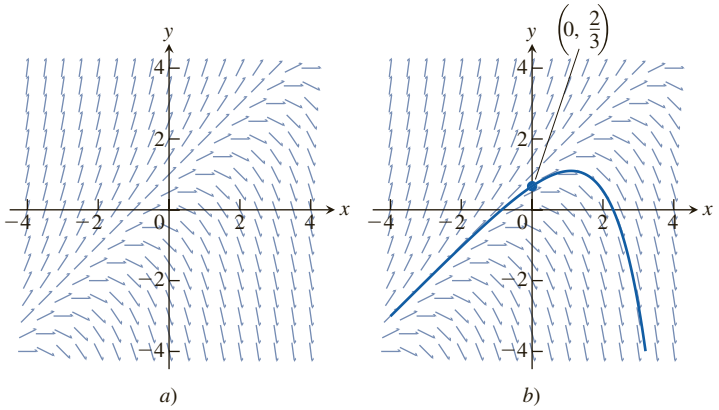


FIGURA 9.2 *a*) Campo de dirección para $\frac{dy}{dx} = y - x$. *b*) Curva solución particular que pasa por el punto $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ (ejemplo 2).

La figura 9.3 muestra tres campos de dirección y vemos cómo se comportan las curvas solución siguiendo los segmentos de recta tangentes en estos campos. Los campos de dirección son útiles porque muestran el comportamiento general de la familia de curvas solución de una ecuación diferencial específica.Por ejemplo, el campo de dirección de la

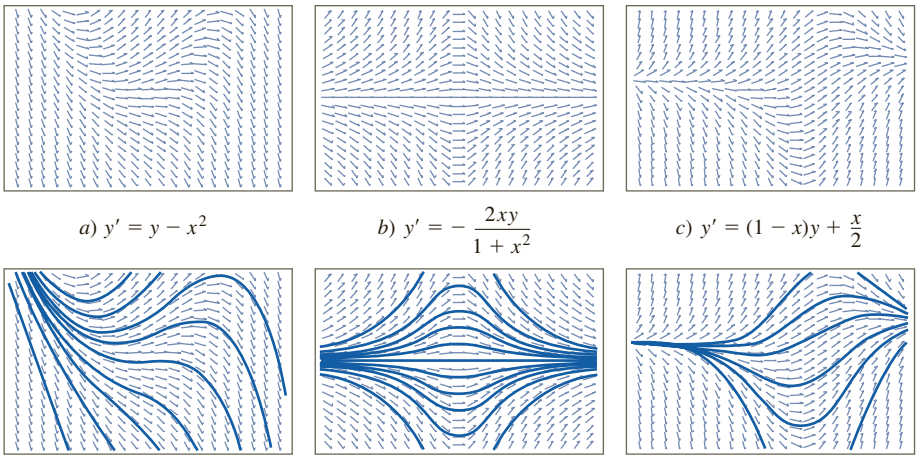


FIGURA 9.3 Campos de dirección (arriba) y algunas curvas solución (abajo). En gráficas que se obtienen por computadora, algunas veces los segmentos se representan con flechas, como aquí, pero deben considerarse como segmentos de recta tangentes.

figura 9.3*b*) revela que cada solución $y(x)$ de la ecuación diferencial especificada en la figura satisface $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = 0$. Veremos que el conocimiento del comportamiento global de las curvas solución a menudo resulta crucial para entender y predecir resultados en un sistema del mundo real modelado con una ecuación diferencial.

La construcción de un campo de dirección con lápiz y papel es una tarea muy tediosa. Todos nuestros ejemplos fueron generados por una computadora.

Método de Euler

Si no se necesita (o no se puede obtener de inmediato) una solución *exacta* con una fórmula explícita para un problema con valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, con frecuencia se utiliza una computadora para generar una tabla de valores numéricos aproximados de y para valores de x en un intervalo adecuado. Una tabla como ésta se denomina **solución numérica** del problema, y el método por el que la generamos se conoce como **método numérico**.

Dada una ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$ y una condición inicial $y(x_0) = y_0$, podemos aproximar la solución $y = y(x)$ por medio de su linealización

$$L(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{o} \qquad L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

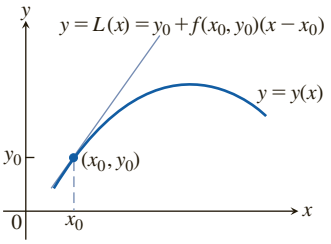


FIGURA 9.4 Linealización $L(x)$ de $y = y(x)$ en $x = x_0$.

La función $L(x)$ da una buena aproximación a la solución $y(x)$ en un intervalo pequeño alrededor de x_0 (figura 9.4). La base del método de Euler es colocar una cadena de linealizaciones para aproximar la curva en un intervalo de mayor longitud. A continuación veremos cómo funciona este método.

Sabemos que el punto (x_0, y_0) está en la curva solución. Suponga que especificamos un nuevo valor para la variable independiente, como $x_1 = x_0 + dx$. (Recuerde que $dx = \Delta x$ en la definición de diferenciales). Si el incremento dx es pequeño, entonces,

$$y_1 = L(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)\,dx$$

es una buena aproximación al valor solución exacto $y = y(x_1)$. Así, a partir del punto (x_0, y_0), que está *exactamente* en la curva solución, obtuvimos el punto (x_1, y_1), que está muy cercano al punto $(x_1, y(x_1))$ de la curva solución (figura 9.5).

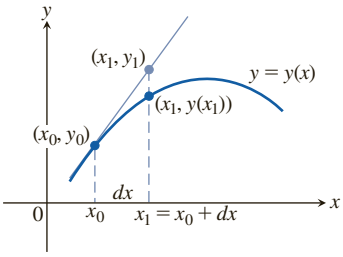


FIGURA 9.5 El primer paso de Euler aproxima a $y(x_1)$ con $y_1 = L(x_1)$.

Utilizando el punto (x_1, y_1) y la pendiente $f(x_1, y_1)$ de la curva solución que pasa por (x_1, y_1), ejecutamos un segundo paso. Hacemos $x_2 = x_1 + dx$, y usamos la linealización de la curva solución que pasa por (x_1, y_1) para calcular

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\,dx.$$

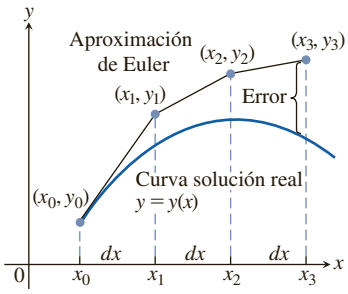


FIGURA 9.6 Tres pasos en la aproximación de Euler a la solución del problema con valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Cuando se ejecutan más pasos, por lo general los errores se acumulan, pero no en la forma exagerada en que aquí se muestra.

Esto brinda la siguiente aproximación (x_2, y_2) para valores a lo largo de la curva solución $y = y(x)$ (figura 9.6). Continuando de esta manera, ejecutamos un tercer paso desde el punto (x_2, y_2) con pendiente $f(x_2, y_2)$ para obtener la tercera aproximación

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\, dx,$$

y así sucesivamente. Literalmente, estamos construyendo una aproximación a una de las soluciones, siguiendo la dirección del campo de pendientes de la ecuación diferencial.

En la figura 9.6, los pasos se dibujaron a una escala grande para mostrar el proceso de construcción, de modo que la aproximación parece muy burda. En la práctica, dx sería lo suficientemente pequeña para hacer que la curva superior estuviera muy cercana a la curva en color y diera una buena aproximación.

EJEMPLO 3 Obtenga las primeras tres aproximaciones y_1, y_2, y_3 usando el método de Euler para el problema con valor inicial

$$y' = 1 + y, \qquad y(0) = 1,$$

iniciando en $x_0 = 0$ con $dx = 0.1$.

Solución Tenemos los valores iniciales $x_0 = 0$ y $y_0 = 1$. Entonces, determinamos los valores de x en los que tendrán lugar las aproximaciones de Euler: $x_1 = x_0 + dx = 0.1$, $x_2 = x_0 + 2\,dx = 0.2$, y $x_3 = x_0 + 3\,dx = 0.3$. Después, obtenemos

$$\begin{aligned}
\textit{Primera}: \quad y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\, dx \\
&= y_0 + (1 + y_0)\, dx \\
&= 1 + (1 + 1)(0.1) = 1.2 \\
\textit{Segunda}: \quad y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\, dx \\
&= y_1 + (1 + y_1)\, dx \\
&= 1.2 + (1 + 1.2)(0.1) = 1.42 \\
\textit{Tercera}: \quad y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2)\, dx \\
&= y_2 + (1 + y_2)\, dx \\
&= 1.42 + (1 + 1.42)(0.1) = 1.662
\end{aligned}$$

■

El proceso paso a paso desarrollado en el ejemplo 3 se puede continuar con facilidad. Usando valores igualmente espaciados para la variable independiente en la tabla de la solución numérica y generando n de ellos, se establece

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + dx \\
x_2 &= x_1 + dx \\
&\vdots \\
x_n &= x_{n-1} + dx.
\end{aligned}$$

Después se calculan las aproximaciones a la solución,

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\, dx \\
y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\, dx \\
&\vdots \\
y_n &= y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\, dx.
\end{aligned}$$

El número de pasos n puede ser tan grande como se desee, pero los errores se acumularán si n es demasiado grande.

El método de Euler es fácil de implementar en una computadora o en una calculadora. Un software genera una tabla de soluciones numéricas para un problema con valor inicial, permitiéndonos introducir x_0 y y_0, el número de pasos n y el tamaño del paso dx. Después, calcula los valores aproximados de la solución $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de manera iterativa, como se describió.

Al resolver la ecuación separable del ejemplo 3, determinamos que la solución exacta al problema con valor inicial es $y = 2e^x - 1$. Usaremos esta información en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Utilice el método de Euler para resolver

$$y' = 1 + y, \qquad y(0) = 1,$$

en el intervalo $0 \le x \le 1$, iniciando en $x_0 = 0$ y tomando ***a)*** $dx = 0.1$ y ***b)*** $dx = 0.05$. Compare las aproximaciones con los valores de la solución exacta $y = 2e^x - 1$.

Solución

a) Usamos una computadora para generar los valores aproximados de la tabla 9.1. La columna "error" se obtuvo restando los valores de Euler de los valores obtenidos con la solución exacta, ambos sin redondear. Después, todas las entradas se redondearon a cuatro cifras decimales.

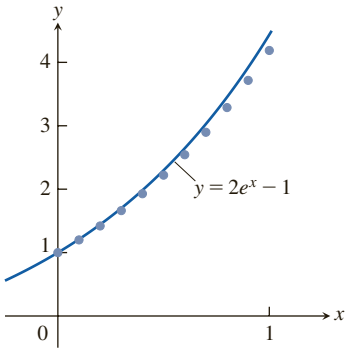


FIGURA 9.7 Gráfica de $y = 2e^x - 1$ sobrepuesta a un diagrama de dispersión de las aproximaciones de Euler de la tabla 9.1 (ejemplo 4).

TABLA 9.1 Solución de Euler para $y' = 1 + y$, $y(0) = 1$, tamaño del paso $dx = 0.1$

x	y (Euler)	y (exacta)	Error
0	1	1	0
0.1	1.2	1.2103	0.0103
0.2	1.42	1.4428	0.0228
0.3	1.662	1.6997	0.0377
0.4	1.9282	1.9836	0.0554
0.5	2.2210	2.2974	0.0764
0.6	2.5431	2.6442	0.1011
0.7	2.8974	3.0275	0.1301
0.8	3.2872	3.4511	0.1639
0.9	3.7159	3.9192	0.2033
1.0	4.1875	4.4366	0.2491

En el momento en que llegamos a $x = 1$ (después de 10 pasos), el error es aproximadamente del 5.6% de la solución exacta. En la figura 9.7 se presenta una gráfica de la curva de la solución exacta junto con el diagrama de dispersión de la solución de puntos de Euler de la tabla 9.1.

b) Una forma de intentar reducir el error es disminuir el tamaño del paso. La tabla 9.2 muestra los resultados y sus comparaciones con la solución exacta cuando disminuimos el tamaño del paso a 0.05, duplicando el número de pasos a 20. Como en la tabla 9.1 todos los cálculos se realizan antes de redondear. En este caso, cuando se llega a $x = 1$, el error relativo sólo es del 2.9% aproximadamente. ■

En el ejemplo 4, podría ser tentador reducir el tamaño del paso aún más para obtener una precisión mayor. Sin embargo, cada cálculo adicional no sólo requiere de más tiempo, sino, lo más importante, agrega errores de redondeo debido a las representaciones aproximadas de los números en la computadora.

El análisis del error y la investigación de los métodos para reducirlo cuando efectuamos cálculos numéricos son importantes, pero son propios de un curso más avanzado. Existen métodos numéricos más precisos que el de Euler, los cuales se analizan en estudios posteriores de ecuaciones diferenciales o en un curso de análisis numérico.

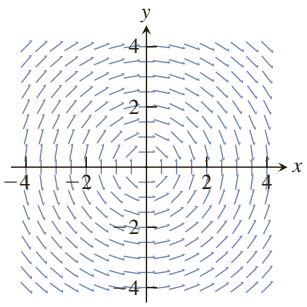
TABLA 9.2 Solución de Euler para $y' = 1 + y$, $y(0) = 1$, tamaño del paso $dx = 0.05$

x	y (Euler)	y (exacta)	Error
0	1	1	0
0.05	1.1	1.1025	0.0025
0.10	1.205	1.2103	0.0053
0.15	1.3153	1.3237	0.0084
0.20	1.4310	1.4428	0.0118
0.25	1.5526	1.5681	0.0155
0.30	1.6802	1.6997	0.0195
0.35	1.8142	1.8381	0.0239
0.40	1.9549	1.9836	0.0287
0.45	2.1027	2.1366	0.0340
0.50	2.2578	2.2974	0.0397
0.55	2.4207	2.4665	0.0458
0.60	2.5917	2.6442	0.0525
0.65	2.7713	2.8311	0.0598
0.70	2.9599	3.0275	0.0676
0.75	3.1579	3.2340	0.0761
0.80	3.3657	3.4511	0.0853
0.85	3.5840	3.6793	0.0953
0.90	3.8132	3.9192	0.1060
0.95	4.0539	4.1714	0.1175
1.00	4.3066	4.4366	0.1300

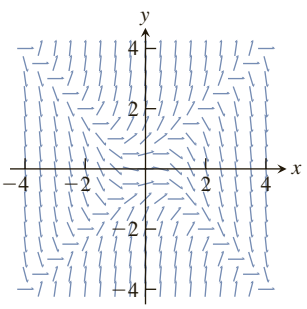
Ejercicios 9.1

Campos de dirección

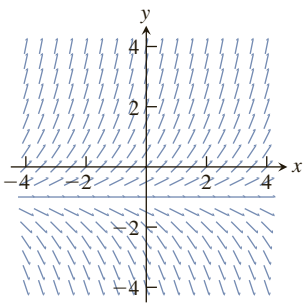
En los ejercicios 1 a 4, relacione las ecuaciones diferenciales con los campos de dirección graficados aquí.



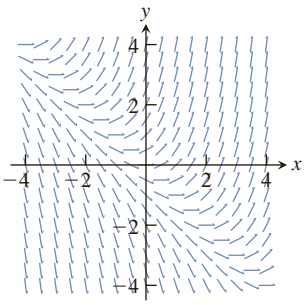
a)



b)



c)



d)

1. $y' = x + y$

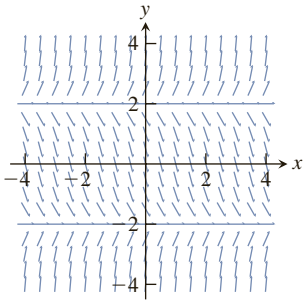
2. $y' = y + 1$

3. $y' = -\dfrac{x}{y}$

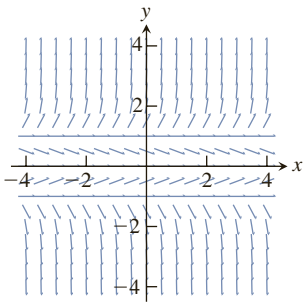
4. $y' = y^2 - x^2$

En los ejercicios 5 y 6, copie los campos de dirección y dibuje algunas de las curvas solución.

5. $y' = (y + 2)(y - 2)$



6. $y' = y(y + 1)(y - 1)$



Ecuaciones integrales

En los ejercicios 7 a 10, escriba una ecuación diferencial equivalente de primer orden y la condición inicial para y.

7. $y = -1 + \int_1^x (t - y(t))\, dt$

8. $y = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$

9. $y = 2 - \int_0^x (1 + y(t)) \operatorname{sen} t\, dt$

10. $y = 1 + \int_0^x y(t)\, dt$

Uso del método de Euler

En los ejercicios 11 a 16, utilice el método de Euler para calcular las primeras tres aproximaciones al problema con valor inicial dado, para el tamaño del incremento que se especifica. Calcule la solución exacta e investigue la exactitud de sus aproximaciones. Redondee sus resultados a cuatro decimales.

11. $y' = 1 - \frac{y}{x}, \quad y(2) = -1, \quad dx = 0.5$

12. $y' = x(1 - y), \quad y(1) = 0, \quad dx = 0.2$

13. $y' = 2xy + 2y, \quad y(0) = 3, \quad dx = 0.2$

14. $y' = y^2(1 + 2x), \quad y(-1) = 1, \quad dx = 0.5$

T 15. $y' = 2xe^{x^2}, \quad y(0) = 2, \quad dx = 0.1$

T 16. $y' = ye^x, \quad y(0) = 2, \quad dx = 0.5$

17. Utilice el método de Euler con $dx = 0.2$ para estimar $y(1)$ si $y' = y$ y $y(0) = 1$. ¿Cuál es el valor exacto de $y(1)$?

18. Utilice el método de Euler con $dx = 0.2$ para estimar $y(2)$ si $y' = y/x$ y $y(1) = 2$. ¿Cuál es el valor exacto de $y(2)$?

19. Utilice el método de Euler con $dx = 0.5$ para estimar $y(5)$ si $y' = y^2/\sqrt{x}$ y $y(1) = -1$. ¿Cuál es el valor exacto de $y(5)$?

20. Utilice el método de Euler con $dx = 1/3$ para estimar $y(2)$ si $y' = x \operatorname{sen} y$ y $y(0) = 1$. ¿Cuál es el valor exacto de $y(2)$?

21. Demuestre que la solución del problema con valor inicial

$$y' = x + y, \qquad y(x_0) = y_0$$

es

$$y = -1 - x + (1 + x_0 + y_0)\, e^{x - x_0}.$$

22. ¿Qué ecuación integral es equivalente al problema con valor inicial $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$?

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 23 a 28, obtenga un campo de dirección y agréguele gráficas de curvas solución que pasen por los puntos dados.

23. $y' = y$ con

a) $(0, 1)$ ***b)*** $(0, 2)$ ***c)*** $(0, -1)$

24. $y' = 2(y - 4)$ con

a) $(0, 1)$ ***b)*** $(0, 4)$ ***c)*** $(0, 5)$

25. $y' = y(x + y)$ con

a) $(0, 1)$ ***b)*** $(0, -2)$ ***c)*** $(0, 1/4)$ ***d)*** $(-1, -1)$

26. $y' = y^2$ con

a) $(0, 1)$ ***b)*** $(0, 2)$ ***c)*** $(0, -1)$ ***d)*** $(0, 0)$

27. $y' = (y - 1)(x + 2)$ con

a) $(0, -1)$ ***b)*** $(0, 1)$ ***c)*** $(0, 3)$ ***d)*** $(1, -1)$

28. $y' = \frac{xy}{x^2 + 4}$ con

a) $(0, 2)$ ***b)*** $(0, -6)$ ***c)*** $\left(-2\sqrt{3}, -4\right)$

En los ejercicios 29 y 30, obtenga un campo de dirección y grafique la solución particular en el intervalo especificado. Use el paquete para ED de un software matemático para obtener la solución general de la ecuación diferencial.

29. Una ecuación logística $y' = y(2 - y), \; y(0) = 1/2; \; 0 \le x \le 4, \; 0 \le y \le 3$

30. $y' = (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} y), \quad y(0) = 2; \quad -6 \le x \le 6, \quad -6 \le y \le 6$

Los ejercicios 31 y 32 no tienen solución explícita en términos de funciones elementales. Utilice un software matemático para explorar gráficamente cada una de las ecuaciones diferenciales.

31. $y' = \cos(2x - y), \quad y(0) = 2; \quad 0 \le x \le 5, \quad 0 \le y \le 5$

32. Una ecuación de Gompertz $y' = y(1/2 - \ln y), \; y(0) = 1/3; \; 0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 3$

33. Utilice un software matemático para obtener las soluciones de $y' + y = f(x)$ sujetas a la condición inicial $y(0) = 0$, si $f(x)$ es

a) $2x$ ***b)*** $\operatorname{sen} 2x$ ***c)*** $3e^{x/2}$ ***d)*** $2e^{-x/2} \cos 2x$.

Grafique las cuatro soluciones en el intervalo $-2 \le x \le 6$ para comparar los resultados.

34. ***a)*** Utilice un software matemático para graficar el campo de dirección de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}$$

en la región $-3 \le x \le 3$ y $-3 \le y \le 3$.

b) Separe las variables y utilice el paquete de integración de un software matemático para obtener la solución general en forma implícita.

c) Usando el paquete de graficación de funciones implícitas de un software matemático, dibuje las curvas solución para los valores arbitrarios de la constante $C = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$.

d) Obtenga y grafique la solución que satisfaga la condición inicial $y(0) = -1$.

En los ejercicios 35 a 38, utilice el método de Euler con el tamaño de paso que se especifica para estimar el valor de la solución en el punto x^* dado. Obtenga el valor exacto de la solución en x^*.

35. $y' = 2xe^{x^2}, \quad y(0) = 2, \quad dx = 0.1, \quad x^* = 1$

36. $y' = 2y^2(x - 1), \quad y(2) = -1/2, \quad dx = 0.1, \quad x^* = 3$

37. $y' = \sqrt{x}/y, \quad y > 0, \quad y(0) = 1, \quad dx = 0.1, \quad x^* = 1$

38. $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0, \quad dx = 0.1, \quad x^* = 1$

Utilice un software matemático para explorar gráficamente cada una de las ecuaciones diferenciales en los ejercicios 39 a 42. Ejecute los siguientes pasos como ayuda para las exploraciones.

a) Dibuje un campo de dirección para la ecuación diferencial en la ventana de visualización xy dada.

b) Obtenga la solución general de la ecuación diferencial usando el paquete para ED de un software matemático.

c) Grafique las soluciones para los valores de la constante arbitraria $C = -2, -1, 0, 1, 2$ sobrepuestas en la gráfica de su campo de dirección.

d) Obtenga y grafique la solución que satisfaga la condición inicial especificada en el intervalo $[0, b]$.

e) Obtenga la aproximación numérica de Euler para la solución del problema con valor inicial con 4 subintervalos del intervalo de x y grafique la aproximación de Euler sobrepuesta en la gráfica elaborada en el inciso *d)*.

f) Repita el inciso *e)* para 8, 16 y 32 subintervalos. Grafique estas tres aproximaciones de Euler sobreponiéndolas en la gráfica del inciso *e)*.

g) Obtenga el error (y(exacta) − y(Euler)) en el punto especificado $x = b$ para cada una de las aproximaciones de Euler. Comente la mejora en el porcentaje de error.

39. $y' = x + y, \quad y(0) = -7/10; \quad -4 \le x \le 4, \quad -4 \le y \le 4; \quad b = 1$

40. $y' = -x/y, \quad y(0) = 2; \quad -3 \le x \le 3, \quad -3 \le y \le 3; \quad b = 2$

41. $y' = y(2 - y), \quad y(0) = 1/2; \quad 0 \le x \le 4, \; 0 \le y \le 3; \quad b = 3$

42. $y' = (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} y), \quad y(0) = 2; \quad -6 \le x \le 6, \quad -6 \le y \le 6; \quad b = 3\pi/2$

9.2 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Una ecuación diferencial **lineal** de primer orden es una que puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \tag{1}$$

donde P y Q son funciones continuas de x. La ecuación (1) es la **forma estándar** de la ecuación lineal. Como la ecuación de crecimiento/decaimiento exponencial $dy/dx = ky$ (sección 7.2) puede representarse en la forma estándar

$$\frac{dy}{dx} - ky = 0,$$

vemos que es una ecuación lineal con $P(x) = -k$ y $Q(x) = 0$. La ecuación (1) es *lineal* (en y) porque y y su derivada dy/dx sólo aparecen a la primera potencia, no se multiplican entre sí y no aparecen como el argumento de una función (tal como sen y, e^y o $\sqrt{dy/dx}$).

EJEMPLO 1 Escriba la siguiente ecuación en forma estándar:

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \qquad x > 0.$$

Solución

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y$$

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{3}{x}y \qquad \text{Se divide entre } x.$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x \qquad \text{Forma estándar con } P(x) = -3/x \text{ y } Q(x) = x$$

Observe que $P(x)$ es $-3/x$, no $+3/x$. La forma estándar es $y' + P(x)y = Q(x)$, de manera que el signo menos es parte de la fórmula de $P(x)$. ■

Resolución de ecuaciones lineales

La ecuación

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

se resuelve multiplicando ambos lados por una función $v(x)$ *positiva* que transforme el lado izquierdo en la derivada del producto $v(x) \cdot y$. En un momento mostraremos cómo obtener v, pero primero deseamos mostrar cómo, una vez encontrada, proporciona la solución que buscamos.

Veamos por qué multiplicar por $v(x)$:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad \text{La ecuación original está en forma estándar.}$$

$$v(x)\frac{dy}{dx} + P(x)v(x)y = v(x)Q(x) \qquad \text{Se multiplica por } v(x) \text{ positiva.}$$

$$\frac{d}{dx}(v(x) \cdot y) = v(x)Q(x) \qquad \text{Se elige } v(x) \text{ de manera que } v\frac{dy}{dx} + Pvy = \frac{d}{dx}(v \cdot y).$$

$$v(x) \cdot y = \int v(x)Q(x)\,dx \qquad \text{Se integra con respecto a } x.$$

$$y = \frac{1}{v(x)}\int v(x)Q(x)\,dx \tag{2}$$

La ecuación (2) expresa la solución de la ecuación (1) en términos de las funciones $v(x)$ y de $Q(x)$. A $v(x)$ la denominamos **factor de integración** de la ecuación (1) porque su presencia hace que la ecuación se pueda integrar.

¿Por qué la fórmula de $P(x)$ no aparece también en la solución? Sí lo hace, pero indirectamente, en la construcción de la función positiva $v(x)$. Tenemos

$$\frac{d}{dx}(vy) = v\frac{dy}{dx} + Pvy \qquad \text{Condición impuesta a } v$$

$$v\frac{dy}{dx} + y\frac{dv}{dx} = v\frac{dy}{dx} + Pvy \qquad \text{Regla del producto para derivadas}$$

$$y\frac{dv}{dx} = Pvy \qquad \text{Se cancelan los términos } v\frac{dy}{dx}.$$

Esta última ecuación se cumple si

$$\frac{dv}{dx} = Pv$$

$$\frac{dv}{v} = P\,dx \qquad \text{Variable separada, } v > 0$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int P\,dx \qquad \text{Se integran ambos lados.}$$

$$\ln v = \int P\,dx \qquad \text{Como } v > 0, \text{ no necesitamos los signos en el valor absoluto de } \ln v.$$

$$e^{\ln v} = e^{\int P\,dx} \qquad \text{Exponenciar ambos lados para despejar } v.$$

$$v = e^{\int P\,dx} \tag{3}$$

Por lo tanto, una fórmula para la solución general de la ecuación (1) está dada por la ecuación (2), donde $v(x)$ está dada por la ecuación (3). Sin embargo, en lugar de memorizar la fórmula, sólo recuerde cómo obtener el factor de integración una vez que tenga la forma

estándar, de modo que $P(x)$ esté identificada correctamente. Cualquier antiderivada de P funciona para la ecuación (3).

> Para resolver la ecuación lineal $y' + P(x)y = Q(x)$, multiplique ambos lados por el factor de integración $v(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ e integre ambos lados.

En este procedimiento, cuando integre el producto del lado izquierdo, siempre obtendrá el producto $v(x)y$ del factor de integración y la función solución y por la forma en que se definió v.

EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \qquad x > 0.$$

Solución Primero escribimos la ecuación en forma estándar (ejemplo 1):

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x,$$

de modo que $P(x) = -3/x$ está identificada.

El factor de integración es

$$\begin{aligned} v(x) = e^{\int P(x)\,dx} &= e^{\int (-3/x)\,dx} \\ &= e^{-3\ln|x|} \qquad \text{La constante de integración es 0, de manera que } v \text{ es lo más simple posible.} \\ &= e^{-3\ln x} \qquad x > 0 \\ &= e^{\ln x^{-3}} = \frac{1}{x^3}. \end{aligned}$$

Ahora multiplicamos ambos lados de la forma estándar por $v(x)$ e integramos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3}\cdot\left(\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y\right) &= \frac{1}{x^3}\cdot x \\ \frac{1}{x^3}\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x^4}y &= \frac{1}{x^2} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}y\right) &= \frac{1}{x^2} \qquad \text{El lado izquierdo es } \frac{d}{dx}(v\cdot y). \\ \frac{1}{x^3}y &= \int \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \text{Se integran ambos lados.} \\ \frac{1}{x^3}y &= -\frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

Al despejar y en esta última ecuación, se obtiene la solución general:

$$y = x^3\left(-\frac{1}{x} + C\right) = -x^2 + Cx^3, \qquad x > 0. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Obtenga la solución particular de

$$3xy' - y = \ln x + 1, \qquad x > 0,$$

que satisface $y(1) = -2$.

Solución Con $x > 0$, escribimos la ecuación en forma estándar:

$$y' - \frac{1}{3x}y = \frac{\ln x + 1}{3x}.$$

Entonces, el factor de integración está dado por

$$v = e^{\int -dx/3x} = e^{(-1/3)\ln x} = x^{-1/3}. \qquad x > 0$$

Así,

$$x^{-1/3}y = \frac{1}{3}\int (\ln x + 1)x^{-4/3}\,dx. \qquad \text{El lado izquierdo es } vy.$$

Al integrar por partes el lado derecho, se obtiene

$$x^{-1/3}y = -x^{-1/3}(\ln x + 1) + \int x^{-4/3}\,dx + C.$$

Por lo tanto,

$$x^{-1/3}y = -x^{-1/3}(\ln x + 1) - 3x^{-1/3} + C$$

o, al despejar y,

$$y = -(\ln x + 4) + Cx^{1/3}.$$

Cuando $x = 1$ y $y = -2$, esta última ecuación se convierte en

$$-2 = -(0 + 4) + C,$$

de manera que

$$C = 2.$$

La sustitución de C en la ecuación de y produce la solución particular

$$y = 2x^{1/3} - \ln x - 4. \qquad \blacksquare$$

Para resolver la ecuación lineal del ejemplo 2, integramos ambos lados de la ecuación después de multiplicar cada lado por el factor de integración. Sin embargo, podemos reducir la cantidad de trabajo, como en el ejemplo 3, recordando que *siempre* que se integra el lado izquierdo se obtiene el producto, $v(x) \cdot y$, del factor de integración por la función solución. Según la ecuación (2), esto significa que

$$v(x)y = \int v(x)Q(x)\,dx. \tag{4}$$

Sólo necesitamos integrar el producto del factor de integración $v(x)$ por $Q(x)$ del lado derecho de la ecuación (1), y luego igualar el resultado con $v(x)y$ para obtener la solución general. Sin embargo, suele seguirse el procedimiento completo para destacar el papel que desempeña $v(x)$ en el proceso de solución, como vimos en el ejemplo 2.

Observe que si la función $Q(x)$ es idénticamente cero en la forma estándar dada por la ecuación (1), la ecuación lineal es separable y se puede resolver por el método de la sección 7.4:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \qquad Q(x) = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx \qquad \text{Se separan las variables.}$$

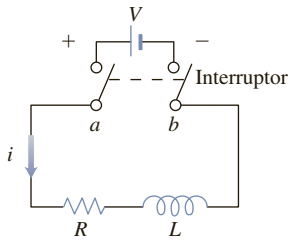


FIGURA 9.8 El circuito *RL* del ejemplo 4.

Circuitos *RL*

El diagrama de la figura 9.8 representa un circuito eléctrico cuya resistencia total es una constante de R ohms; su autoinductancia, mostrada como una bobina, es de L henries, también constante. Hay un interruptor cuyas terminales en a y b pueden cerrarse para conectar una fuente eléctrica constante de V volts.

La ley de Ohm, $V = RI$, tiene que modificarse para este circuito. La ecuación correcta a tenerse en cuenta tanto para la resistencia como para la inductancia es

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V, \tag{5}$$

donde i es la corriente en amperes y t es el tiempo en segundos. Resolviendo esta ecuación se puede predecir cómo fluirá la corriente después de cerrar el circuito.

EJEMPLO 4 El interruptor en el circuito *RL* de la figura 9.8 se cierra en el instante $t = 0$. ¿Cómo fluirá la corriente con el tiempo?

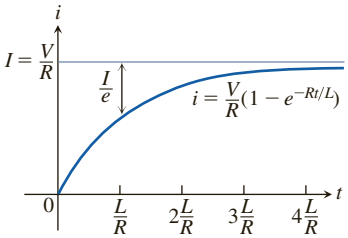


FIGURA 9.9 El crecimiento de la corriente en el circuito *RL* del ejemplo 4. I es el valor del estado estable de la corriente. El número $t = L/R$ es la constante de tiempo del circuito. La corriente se encuentra dentro del 5% de su valor de estado estable en 3 constantes de tiempo (ejercicio 27).

Solución La ecuación (5) es una ecuación diferencial lineal de primer orden de i como función de t. Su forma estándar es

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}, \tag{6}$$

y la solución correspondiente, dado que $i = 0$ cuando $t = 0$, es

$$i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-(R/L)t}. \tag{7}$$

(Dejamos para usted el cálculo de la solución en el ejercicio 28). Como R y L son positivas, $-(R/L)$ es negativa y $e^{-(R/L)t} \to 0$ cuando $t \to \infty$. Por lo tanto,

$$\lim_{t\to\infty} i = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-(R/L)t}\right) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}\cdot 0 = \frac{V}{R}.$$

En cualquier instante, la corriente es teóricamente menor que V/R, pero conforme pasa el tiempo, la corriente se aproxima al **valor de estado estable** V/R. De acuerdo con la ecuación

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V,$$

$I = V/R$ es la corriente que fluirá en el circuito ya sea que $L = 0$ (no hay inductancia) o que $di/dt = 0$ (corriente estable, i = constante) (figura 9.9).

La ecuación (7) expresa la solución de la ecuación (6) como la suma de dos términos: una solución de estado estable V/R y una solución transitoria $-(V/R)e^{-(R/L)t}$ que tiende a cero cuando $t \to \infty$. ■

Ejercicios 9.2

Ecuaciones lineales de primer orden

En los ejercicios 1 a 14, resuelva las ecuaciones diferenciales.

1. $x\dfrac{dy}{dx} + y = e^x, \quad x > 0$

2. $e^x\dfrac{dy}{dx} + 2e^x y = 1$

3. $xy' + 3y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}, \quad x > 0$

4. $y' + (\tan x)y = \cos^2 x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

5. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 1 - \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

6. $(1 + x)\,y' + y = \sqrt{x}$

7. $2y' = e^{x/2} + y$

8. $e^{2x}y' + 2e^{2x}y = 2x$

9. $xy' - y = 2x\ln x$

10. $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{x} - 2y, \quad x > 0$

11. $(t-1)^3\dfrac{ds}{dt}+4(t-1)^2s=t+1, \quad t>1$

12. $(t+1)\dfrac{ds}{dt}+2s=3(t+1)+\dfrac{1}{(t+1)^2}, \quad t>-1$

13. $\operatorname{sen}\theta\dfrac{dr}{d\theta}+(\cos\theta)r=\tan\theta, \quad 0<\theta<\pi/2$

14. $\tan\theta\dfrac{dr}{d\theta}+r=\operatorname{sen}^2\theta, \quad 0<\theta<\pi/2$

Resolución de problemas con valor inicial

En los ejercicios 15 a 20, resuelva los problemas con valor inicial.

15. $\dfrac{dy}{dt}+2y=3, \quad y(0)=1$

16. $t\dfrac{dy}{dt}+2y=t^3, \quad t>0, \quad y(2)=1$

17. $\theta\dfrac{dy}{d\theta}+y=\operatorname{sen}\theta, \quad \theta>0, \quad y(\pi/2)=1$

18. $\theta\dfrac{dy}{d\theta}-2y=\theta^3\sec\theta\tan\theta, \quad \theta>0, \quad y(\pi/3)=2$

19. $(x+1)\dfrac{dy}{dx}-2(x^2+x)y=\dfrac{e^{x^2}}{x+1}, \quad x>-1, \quad y(0)=5$

20. $\dfrac{dy}{dx}+xy=x, \quad y(0)=-6$

21. Resuelva el problema con valor inicial de crecimiento/decaimiento de y como una función de t considerando la ecuación diferencial como una ecuación lineal de primer orden con $P(x)=-k$ y $Q(x)=0$:

$$\frac{dy}{dt}=ky \quad (k \text{ constante}), \quad y(0)=y_0$$

22. Resuelva el siguiente problema con valor inicial para u como una función de t:

$$\frac{du}{dt}+\frac{k}{m}u=0 \quad (k \text{ y } m \text{ son constantes positivas}), \quad u(0)=u_0$$

a) como una ecuación lineal de primer orden.

b) como una ecuación separable.

Teoría y ejemplos

23. ¿Alguna de las siguientes ecuaciones es correcta? Justifique sus respuestas.

a) $x\displaystyle\int\frac{1}{x}\,dx=x\ln|x|+C$ ***b)*** $x\displaystyle\int\frac{1}{x}\,dx=x\ln|x|+Cx$

24. ¿Alguna de las siguientes ecuaciones es correcta? Justifique sus respuestas.

a) $\dfrac{1}{\cos x}\displaystyle\int\cos x\,dx=\tan x+C$

b) $\dfrac{1}{\cos x}\displaystyle\int\cos x\,dx=\tan x+\frac{C}{\cos x}$

25. Corriente en un circuito *RL* cerrado Después de que se cierra el circuito RL, ¿cuántos segundos tardará la corriente i en alcanzar la mitad de su valor de estado estable? Observe que el tiempo depende de R y L, y no del voltaje que se aplique.

26. Corriente en un circuito *RL* abierto Si en un circuito RL, el interruptor se abre cuando el circuito alcanza su estado estable, $I=V/R$, la disminución de la corriente (vea la figura) obedece la ecuación

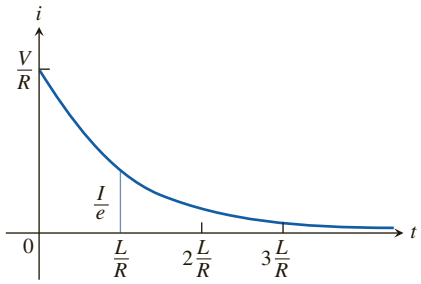
$$L\frac{di}{dt}+Ri=0,$$

que es la ecuación (5) con $V=0$.

a) Resuelva la ecuación para expresar i como una función de t.

b) ¿Cuánto tiempo después de que se abrió el circuito, la corriente caerá a la mitad de su valor original?

c) Demuestre que el valor de la corriente cuando $t=R/L$ es I/e. (El significado de este tiempo se explica en el siguiente ejercicio).



27. Constantes de tiempo Al número L/R del circuito RL de la figura 9.9, los ingenieros lo llaman *constante de tiempo*. El significado de la constante de tiempo es que la corriente alcanzará el 95% de su valor final dentro de tres constantes de tiempo a partir de que el circuito se cierra (figura 9.9). Por lo tanto, la constante de tiempo proporciona una medida de qué tan rápido alcanzará su equilibrio un circuito.

a) Determine el valor de i en la ecuación (7) que corresponda a $t=3L/R$, y demuestre que es alrededor del 95% del valor estable $I=V/R$.

b) ¿Aproximadamente qué porcentaje de la corriente de estado estable fluirá en el circuito 2 constantes de tiempo a partir de que se cierre el interruptor (por ejemplo, cuando $t=2L/R$)?

28. Deducción de la ecuación (7) del ejemplo 4

a) Demuestre que la solución de la ecuación

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{V}{L}$$

es

$$i=\frac{V}{R}+Ce^{-(R/L)t}.$$

b) Después, utilice la condición inicial $i(0)=0$ para determinar el valor de C. Esto completa la deducción de la ecuación (7).

c) Demuestre que $i=V/R$ es una solución de la ecuación (6) y que $i=Ce^{-(R/L)t}$ satisface la ecuación

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=0.$$

Una **ecuación diferencial de Bernoulli** tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n.$$

Observe que si $n = 0$ o 1, la ecuación de Bernoulli es lineal. Para otros valores de n, la sustitución $u = y^{1-n}$ transforma la ecuación de Bernoulli en la ecuación lineal

$$\frac{du}{dx} + (1 - n)P(x)u = (1 - n)Q(x).$$

Por ejemplo, en la ecuación

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{-x}y^2$$

tenemos $n = 2$, de modo que $u = y^{1-2} = y^{-1}$ y $du/dx = -y^{-2}dy/dx$. Entonces, $dy/dx = -y^2\, du/dx = -u^{-2}\, du/dx$. Al sustituir en la ecuación original, se obtiene

$$-u^{-2}\frac{du}{dx} - u^{-1} = e^{-x}u^{-2}$$

o, de manera equivalente,

$$\frac{du}{dx} + u = -e^{-x}.$$

Esta última ecuación es lineal en la variable dependiente (desconocida) u.

Resuelva las ecuaciones de Bernoulli en los ejercicios 29 a 32.

29. $y' - y = -y^2$ **30.** $y' - y = xy^2$

31. $xy' + y = y^{-2}$ **32.** $x^2y' + 2xy = y^3$

9.3 Aplicaciones

Ahora veremos cuatro aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden. La primera analiza un objeto que se desplaza a lo largo de una línea recta mientras enfrenta una fuerza que se opone al movimiento. La segunda es un modelo de crecimiento de población. La tercera aplicación considera una curva o curvas que intersecan ortogonalmente (es decir, en ángulo recto) a cada curva de una segunda familia de curvas. La aplicación final analiza concentraciones químicas que entran y salen de un contenedor. Los diferentes modelos involucran ecuaciones lineales de primer orden o separables.

Movimiento con resistencia proporcional a la velocidad

En algunos casos, es razonable suponer que la resistencia encontrada por un objeto en movimiento, tal como un automóvil que va en punto muerto y se detiene, es proporcional a su velocidad. Cuanto más rápido se mueva el objeto, mayor será la resistencia que presenta el aire que lo circunda. Imagine el objeto como una masa m que se mueve a lo largo de una recta coordenada con su función de posición s y velocidad v en el instante t. Según la segunda ley de Newton del movimiento, la fuerza de resistencia que se opone al movimiento es

$$\text{Fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración} = m\frac{dv}{dt}.$$

Si la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad, tenemos

$$m\frac{dv}{dt} = -kv \qquad \text{o} \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v \qquad (k > 0).$$

Ésta es una ecuación diferencial separable que representa un cambio exponencial. La solución de esta ecuación con la condición inicial $v = v_0$ en $t = 0$ es (sección 7.4)

$$v = v_0e^{-(k/m)t}. \tag{1}$$

¿Qué podemos aprender de la ecuación (1)? Por un lado, si m es grande, como la masa de un buque minero de 20,000 toneladas en el lago Erie, tardará mucho tiempo para que la velocidad se aproxime a cero (ya que t debe ser grande en el exponente de la ecuación para hacer que kt/m sea lo suficientemente grande para que v se vuelva pequeña). Podemos aprender aún más si integramos la ecuación (1) para obtener la posición s como una función del tiempo t.

Suponga que un objeto se desliza hasta detenerse, y que la única fuerza que actúa sobre él es una resistencia proporcional a su velocidad. ¿Cuánto se desliza? Para averiguarlo, iniciamos con la ecuación (1) y resolvemos el problema con valor inicial

$$\frac{ds}{dt} = v_0e^{-(k/m)t}, \qquad s(0) = 0.$$

La integración con respecto a t nos da

$$s = -\frac{v_0 m}{k} e^{-(k/m)t} + C.$$

Al sustituir $s = 0$ cuando $t = 0$, se obtiene

$$0 = -\frac{v_0 m}{k} + C \qquad \text{y} \qquad C = \frac{v_0 m}{k}.$$

Por lo tanto, la posición del cuerpo en el instante t es

$$s(t) = -\frac{v_0 m}{k} e^{-(k/m)t} + \frac{v_0 m}{k} = \frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-(k/m)t}). \tag{2}$$

Para determinar la distancia que se deslizará el objeto, obtenemos el límite de $s(t)$ cuando $t \to \infty$. Como $-(k/m) < 0$, sabemos que $e^{-(k/m)t} \to 0$ cuando $t \to \infty$, de manera que

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-(k/m)t})$$
$$= \frac{v_0 m}{k}(1 - 0) = \frac{v_0 m}{k}.$$

Por lo tanto,

$$\text{Distancia recorrida} = \frac{v_0 m}{k}. \tag{3}$$

El número $v_0 m/k$ es únicamente una cota superior (pero muy útil). Esto es cierto en la vida real al menos en un sentido: si m es grande, el cuerpo se deslizará una gran distancia.

En el sistema inglés, en el que el peso se mide en libras, la masa se mide en **slugs**. Así,

$$\text{Libras} = \text{slugs} \times 32,$$

suponiendo que la constante gravitacional es 32 ft/s^2.

EJEMPLO 1 Para un patinador sobre hielo de 192 lb, la k en la ecuación (1) es de aproximadamente $1/3$ slugs/s y $m = 192/32 = 6$ slugs. ¿Cuánto tardará el patinador en deslizarse desde una velocidad de 11 ft/s (7.5 mph) a una de 1 ft/s? ¿Qué distancia recorrerá antes de detenerse por completo?

Solución La primera pregunta se contesta despejando t de la ecuación (1):

$$11e^{-t/18} = 1 \qquad \text{Ecuación (1) con } k = 1/3,$$
$$e^{-t/18} = 1/11 \qquad m = 6, v_0 = 11, v = 1$$
$$-t/18 = \ln(1/11) = -\ln 11$$
$$t = 18 \ln 11 \approx 43\,\text{s}$$

La segunda pregunta se responde con la ecuación (3):

$$\text{Distancia recorrida} = \frac{v_0 m}{k} = \frac{11 \cdot 6}{1/3}$$
$$= 198 \text{ ft.}$$

Inexactitud del modelo de crecimiento exponencial de una población

En la sección 7.4 modelamos el crecimiento de una población con la ley de cambio exponencial:

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad P(0) = P_0$$

donde P es la población en el instante t, $k > 0$ es una tasa constante de crecimiento, y P_0 es el tamaño de la población en el instante $t = 0$. En la sección 7.4 obtuvimos la solución $P = P_0 e^{kt}$ para este modelo.

Para evaluar el modelo, observe que la ecuación diferencial de crecimiento exponencial indica que

$$\frac{dP/dt}{P} = k \tag{4}$$

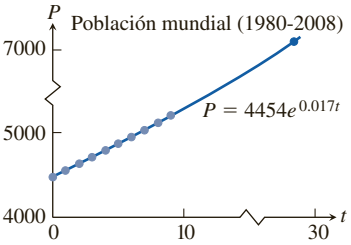


FIGURA 9.10 Observe que el valor de la solución $P = 4454e^{0.017t}$ es 7169 cuando $t = 28$, una cifra que supera a la población real de 2008 en aproximadamente 7%.

TABLA 9.3 Población mundial (a mediados de año)

Año	Población (millones)	$\Delta P/P$
1980	4454	$76/4454 \approx 0.0171$
1981	4530	$80/4530 \approx 0.0177$
1982	4610	$80/4610 \approx 0.0174$
1983	4690	$80/4690 \approx 0.0171$
1984	4770	$81/4770 \approx 0.0170$
1985	4851	$82/4851 \approx 0.0169$
1986	4933	$85/4933 \approx 0.0172$
1987	5018	$87/5018 \approx 0.0173$
1988	5105	$85/5105 \approx 0.0167$
1989	5190	

Fuente: Oficina del Censo de Estados Unidos (septiembre de 2007): www.census.gov/ipc/www/idb.

es constante. Esta razón se denomina **tasa de crecimiento relativo**. Ahora, la tabla 9.3 incluye los datos de la población mundial, registrados a mediados de cada año, desde 1980 hasta 1989. Tomando $dt = 1$ y $dP \approx \Delta P$, de acuerdo con la tabla, vemos que la tasa de crecimiento relativo en la ecuación (4) es aproximadamente la constante 0.017. Por lo tanto, con base en los datos tabulados, considerando que $t = 0$ representa 1980, $t = 1$ representa 1981, y así sucesivamente, la población mundial podría modelarse mediante el problema con valor inicial,

$$\frac{dP}{dt} = 0.017P, \qquad P(0) = 4454.$$

La solución de este problema con valor inicial nos da la función de población $P = 4454e^{0.017t}$. Para el año 2008 (de manera que $t = 28$), la solución pronostica que la población mundial a mediados de año sería de 7169 millones aproximadamente, o 7 200 millones aproximadamente (figura 9.10), que es una cifra mayor que la población real de 6707 millones, de acuerdo con los informes de la Oficina del Censo de Estados Unidos en ese año. Un modelo más realista consideraría factores ambientales y otros que afecten la tasa de crecimiento, la cual ha ido disminuyendo de manera constante hasta llegar a 0.012 aproximadamente, una cifra registrada desde 1987. Consideraremos un modelo como éste en la sección 9.4.

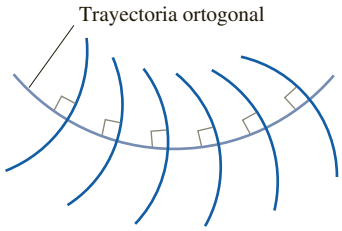


FIGURA 9.11 Una trayectoria ortogonal interseca una familia de curvas ortogonalmente, esto es, en ángulos rectos.

Trayectorias ortogonales

Una **trayectoria ortogonal** de una familia de curvas es una curva que interseca en ángulo recto, u *ortogonalmente*, a cada curva de la familia (figura 9.11). Por ejemplo, cada línea recta que pasa por el origen es una trayectoria ortogonal de la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = a^2$, con centro en el origen (figura 9.12). Estos sistemas de curvas ortogonales entre sí son de particular importancia en problemas físicos relacionados con el potencial eléctrico, en los cuales las curvas de una familia corresponden a la intensidad de un campo eléctrico, y las de la otra familia corresponden a un potencial eléctrico constante. Dichos sistemas también aparecen en problemas de hidrodinámica y de flujo de calor.

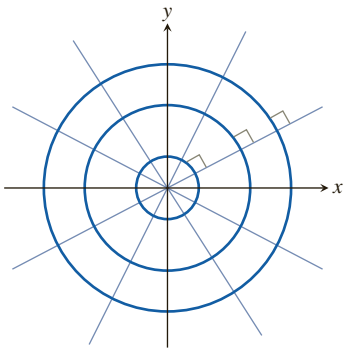


FIGURA 9.12 Cada línea recta que pasa por el origen es ortogonal a la familia de circunferencias con centro en el origen.

EJEMPLO 2 Obtenga las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $xy = a$, donde $a \neq 0$ es una constante arbitraria.

Solución Las curvas $xy = a$ constituyen una familia de hipérbolas que tienen a los ejes de coordenadas como asíntotas. Primero se obtienen las pendientes de cada curva de esta familia, es decir, sus valores dy/dx. Al diferenciar implícitamente $xy = a$, obtenemos

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

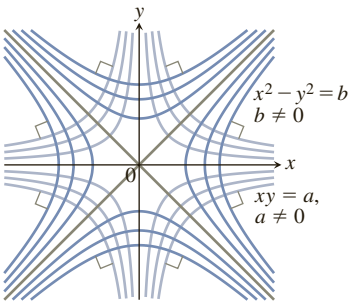


FIGURA 9.13 Cada curva es ortogonal a todas las curvas que pertenecen a la otra familia (ejemplo 2).

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y) de una de las hipérbolas $xy = a$ es $y' = -y/x$. En la trayectoria ortogonal, la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto debe ser el recíproco negativo, es decir, x/y. De esta forma, las trayectorias ortogonales deben satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

Esta ecuación diferencial es separable y la resolvimos en la sección 7.4:

$$y\,dy = x\,dx \qquad \text{Se separan las variables.}$$

$$\int y\,dy = \int x\,dx \qquad \text{Se integra en ambos lados.}$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y^2 - x^2 = b, \tag{5}$$

donde $b = 2C$ es una constante arbitraria. Las trayectorias ortogonales son la familia de hipérbolas dadas por la ecuación (5) y dibujadas en la figura 9.13. ■

Problemas de mezclas

Suponga que una sustancia química disuelta en una solución líquida (o dispersa en un gas) entra en un contenedor que almacena el líquido (o el gas) con, posiblemente, una cantidad especificada del químico disuelto. La mezcla se mantiene uniforme agitándola y sale del contenedor a una tasa conocida. En este proceso, a menudo es importante conocer la concentración de la sustancia química en el contenedor en cualquier instante. La ecuación diferencial que describe este proceso se basa en la fórmula

$$\begin{pmatrix}\text{Tasa de cambio}\\ \text{de la cantidad}\\ \text{en el contenedor}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Tasa a la cual}\\ \text{ingresa la}\\ \text{sustancia química}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Tasa a la cual}\\ \text{sale la sustancia}\\ \text{química}\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Si $y(t)$ es la cantidad de la sustancia química en el contenedor en el instante t y $V(t)$ es el volumen total del líquido en el contenedor en el instante t, entonces, la tasa de salida de la sustancia química en el instante t es

$$\begin{aligned}\text{Tasa de salida} &= \frac{y(t)}{V(t)} \cdot (\text{tasa del flujo de salida})\\ &= \begin{pmatrix}\text{concentración en el}\\ \text{contenedor en el instante } t\end{pmatrix} \cdot (\text{tasa del flujo de salida}).\end{aligned} \tag{7}$$

De acuerdo con esto, la ecuación 6 se convierte en

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix}\text{tasa a la que se}\\ \text{introduce la sustancia}\end{pmatrix} - \frac{y(t)}{V(t)} \cdot \begin{pmatrix}\text{tasa del flujo}\\ \text{de salida}\end{pmatrix} \tag{8}$$

Si, digamos, y se mide en libras, V en galones y t en minutos, las unidades de la ecuación (8) son

$$\frac{\text{libras}}{\text{minutos}} = \frac{\text{libras}}{\text{minutos}} - \frac{\text{libras}}{\text{galones}} \cdot \frac{\text{galones}}{\text{minutos}}.$$

EJEMPLO 3 En una refinería de petróleo, un tanque de almacenamiento contiene 2000 galones de gasolina que tiene inicialmente 100 lb de un aditivo disuelto. Preparándose para el invierno, se bombea al tanque gasolina que contiene 2 lb de aditivo por galón a una razón de 40 gal/min.

La solución bien mezclada se bombea fuera del contenedor a una razón de 45 gal/min. ¿Qué cantidad de aditivo se encuentra en el tanque 20 minutos después de que inicia el proceso de bombeo? (figura 9.14).

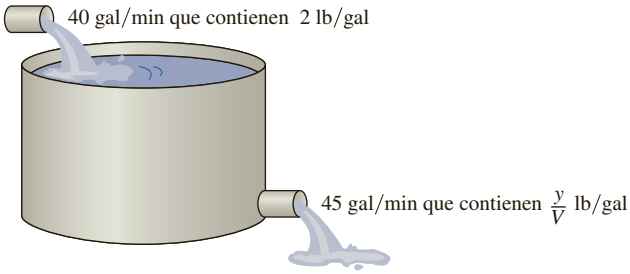


FIGURA 9.14 El tanque de almacenamiento del ejemplo 3 mezcla el líquido que entra con el almacenado, para producir el líquido que sale.

Solución Sea y la cantidad (en libras) de aditivo en el tanque en el instante t. Sabemos que $y = 100$ cuando $t = 0$. El número de galones de gasolina y aditivo en la solución en el tanque en cualquier instante t es

$$\begin{aligned} V(t) &= 2000 \text{ gal} + \left(40\frac{\text{gal}}{\text{min}} - 45\frac{\text{gal}}{\text{min}}\right)(t \text{ min}) \\ &= (2000 - 5t) \text{ gal}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{Tasa de salida} &= \frac{y(t)}{V(t)} \cdot \text{tasa del flujo de salida} && \text{Ecuación (7)} \\ &= \left(\frac{y}{2000 - 5t}\right)45 && \text{La tasa del flujo de salida es de 45 gal/min y } V = 2000 - 5t. \\ &= \frac{45y}{2000 - 5t}\frac{\text{lb}}{\text{min}}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \text{Razón de entrada} &= \left(2\frac{\text{lb}}{\text{gal}}\right)\left(40\frac{\text{gal}}{\text{min}}\right) \\ &= 80\frac{\text{lb}}{\text{min}}. \end{aligned}$$

La ecuación diferencial que modela el proceso de mezcla es

$$\frac{dy}{dt} = 80 - \frac{45y}{2000 - 5t} \qquad \text{Ecuación (8)}$$

en libras por minuto.

Para resolver esta ecuación diferencial, primero la escribimos en forma lineal estándar:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{45}{2000 - 5t}y = 80.$$

Por lo tanto, $P(t) = 45/(2000 - 5t)$ y $Q(t) = 80$. El factor de integración es

$$\begin{aligned} v(t) = e^{\int P\,dt} &= e^{\int \frac{45}{2000-5t}dt} \\ &= e^{-9\ln(2000-5t)} && 2000 - 5t > 0 \\ &= (2000 - 5t)^{-9}. \end{aligned}$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación estándar por $v(t)$ e integrando ambos lados, se obtiene

$$(2000 - 5t)^{-9} \cdot \left(\frac{dy}{dt} + \frac{45}{2000 - 5t} y \right) = 80(2000 - 5t)^{-9}$$

$$(2000 - 5t)^{-9} \frac{dy}{dt} + 45(2000 - 5t)^{-10} y = 80(2000 - 5t)^{-9}$$

$$\frac{d}{dt}\left[(2000 - 5t)^{-9} y \right] = 80(2000 - 5t)^{-9}$$

$$(2000 - 5t)^{-9} y = \int 80(2000 - 5t)^{-9}\, dt$$

$$(2000 - 5t)^{-9} y = 80 \cdot \frac{(2000 - 5t)^{-8}}{(-8)(-5)} + C.$$

La solución general es

$$y = 2(2000 - 5t) + C(2000 - 5t)^9.$$

Como $y = 100$ cuando $t = 0$, podemos determinar el valor de C:

$$100 = 2(2000 - 0) + C(2000 - 0)^9$$

$$C = -\frac{3900}{(2000)^9}.$$

La solución particular del problema con valor inicial es

$$y = 2(2000 - 5t) - \frac{3900}{(2000)^9}(2000 - 5t)^9.$$

La cantidad de aditivo en el tanque 20 minutos después de que inicia el bombeo es

$$y(20) = 2[\,2000 - 5(20)\,] - \frac{3900}{(2000)^9}[\,2000 - 5(20)\,]^9 \approx 1342 \text{ lb}. \quad \blacksquare$$

Ejercicios 9.3

Movimiento a lo largo de una recta

1. Deslizamiento de una bicicleta Un ciclista de 66 kg en una bicicleta de 7 kg deja de pedalear y se desliza, por el suelo plano, a 9 m/s. La k en la ecuación (1) es igual a 3.9 kg/s aproximadamente.

a) ¿Qué distancia recorrerá el ciclista antes de detenerse por completo?

b) ¿Cuánto tiempo le tomará al ciclista reducir su velocidad a 1 m/s?

2. Deslizamiento de un acorazado Suponga que un acorazado de la clase Iowa tiene una masa aproximada de 51,000 toneladas métricas (51,000,000 kg) y un valor de k en la ecuación (1) de aproximadamente 59,000 kg/s. Suponga que la nave pierde potencia cuando se está moviendo a una velocidad de 9 m/s.

a) ¿Aproximadamente qué distancia recorrerá el barco antes de detenerse?

b) ¿Aproximadamente cuánto tiempo tardará el barco en reducir su velocidad a 1 m/s?

3. Los datos de la tabla 9.4 fueron recolectados por Valerie Sharrits con un detector de movimiento y una CBL™; en ese entonces, Sharrits era profesora de matemáticas en St. Francis DeSales High School de Columbus, Ohio. La siguiente tabla muestra la distancia s (en metros) que se deslizó su hija Ashley en patines con ruedas en línea en t segundos, cuando tenía 10 años de edad. Obtenga un modelo para la posición de Ashley, en la forma de

la ecuación (2), con base en la información de la tabla 9.4. Su velocidad inicial fue $v_0 = 2.75$ m/s, su masa $m = 39.92$ kg (ella pesaba 88 lb), y la distancia total que se deslizó hasta detenerse fue de 4.91 m.

TABLA 9.4 Datos de patinaje de Ashley Sharrits

t (s)	s (m)	t (s)	s (m)	t (s)	s (m)
0	0	2.24	3.05	4.48	4.77
0.16	0.31	2.40	3.22	4.64	4.82
0.32	0.57	2.56	3.38	4.80	4.84
0.48	0.80	2.72	3.52	4.96	4.86
0.64	1.05	2.88	3.67	5.12	4.88
0.80	1.28	3.04	3.82	5.28	4.89
0.96	1.50	3.20	3.96	5.44	4.90
1.12	1.72	3.36	4.08	5.60	4.90
1.28	1.93	3.52	4.18	5.76	4.91
1.44	2.09	3.68	4.31	5.92	4.90
1.60	2.30	3.84	4.41	6.08	4.91
1.76	2.53	4.00	4.52	6.24	4.90
1.92	2.73	4.16	4.63	6.40	4.91
2.08	2.89	4.32	4.69	6.56	4.91

4. Deslizamiento hasta detenerse La tabla 9.5 muestra la distancia s (en metros) en términos del tiempo t (en segundos), que se deslizó Kelly Schmitzer en patines con ruedas en línea. Determine un modelo para su posición en la forma de la ecuación (2). Su velocidad inicial fue $v_0 = 0.80$ m/s, su masa $m = 49.90$ kg (110 lb), y la distancia total que se deslizó hasta detenerse fue de 1.32 m.

TABLA 9.5 Datos de patinaje de Kelly Schmitzer

t (s)	s (m)	t (s)	s (m)	t (s)	s (m)
0	0	1.5	0.89	3.1	1.30
0.1	0.07	1.7	0.97	3.3	1.31
0.3	0.22	1.9	1.05	3.5	1.32
0.5	0.36	2.1	1.11	3.7	1.32
0.7	0.49	2.3	1.17	3.9	1.32
0.9	0.60	2.5	1.22	4.1	1.32
1.1	0.71	2.7	1.25	4.3	1.32
1.3	0.81	2.9	1.28	4.5	1.32

Trayectorias ortogonales

En los ejercicios 5 a 10, obtenga las trayectorias ortogonales de la familia de curvas. Dibuje a varios miembros de cada familia.

5. $y = mx$ **6.** $y = cx^2$

7. $kx^2 + y^2 = 1$ **8.** $2x^2 + y^2 = c^2$

9. $y = ce^{-x}$ **10.** $y = e^{kx}$

11. Demuestre que las curvas $2x^2 + 3y^2 = 5$ y $y^2 = x^3$ son ortogonales.

12. Obtenga la familia de soluciones de la ecuación diferencial dada y la familia de trayectorias ortogonales. Grafique ambas familias.

a) $x\,dx + y\,dy = 0$ ***b)*** $x\,dy - 2y\,dx = 0$

Problemas de mezcla

13. Mezcla de sal Un depósito contiene inicialmente 100 galones de salmuera en la que están disueltas 50 lb de sal. Al depósito entra salmuera, que contiene 2 lb/gal de sal, a una tasa de 5 gal/min. La mezcla se mantiene uniforme agitándola, y sale del depósito a razón de 4 gal/min.

a) ¿A qué razón (libras por minuto) entra la sal al tanque en el instante t?

b) ¿Cuál es el volumen de salmuera en el instante t?

c) ¿A qué razón (libras por minuto) sale la sal del tanque en el instante t?

d) Escriba y resuelva el problema con valor inicial que describe el proceso de mezcla.

e) Obtenga la concentración de sal en el tanque 25 minutos después de que inicia el proceso.

14. Problema de mezcla Un tanque, con capacidad de 200 galones, contiene agua destilada hasta la mitad. En el instante $t = 0$, se introduce al tanque una solución que contiene 0.5 lb/gal de concentrado, a razón de 0.5 gal/min, y la mezcla bien agitada se extrae a razón de 3 gal/min.

a) ¿En qué instante se llena el tanque?

b) En el instante en que el tanque está lleno, ¿cuántas libras de concentrado habrá en él?

15. Mezcla de fertilizante Un tanque contiene 100 gal de agua dulce. Al tanque entra una solución que contiene 1 lb/gal de fertilizante soluble para césped, a razón de 1 gal/min, y la mezcla es bombeada hacia fuera del tanque a razón de 3 gal/min. Determine la cantidad máxima de fertilizante en el tanque y el instante en que se alcanza ese máximo.

16. Contaminación con monóxido de carbono Una sala ejecutiva de conferencias de una corporación, inicialmente libre de monóxido de carbono, contiene 4500 ft^3 de aire. Iniciando al tiempo $t = 0$, se inyecta a la sala humo de cigarrillos, el cual contiene 4% de monóxido de carbono, a razón de 0.3 ft^3/min. Un ventilador que pende del cielo raso mantiene el aire de la sala con buena circulación, y el aire abandona la sala con la misma velocidad de 0.3 ft^3/min. Determine el tiempo en que la concentración de monóxido de carbono en la sala llega al 0.01%.

9.4 Soluciones gráficas de ecuaciones diferenciales autónomas

En el capítulo 4 vimos que el signo de la primera derivada nos dice dónde es creciente y dónde decreciente la gráfica de una función. El signo de la segunda derivada indica la concavidad de la gráfica. Para resolver gráficamente ecuaciones diferenciales, podemos aprovechar el conocimiento que hemos acumulado acerca de cómo las derivadas determinan la forma de

una gráfica. Veremos que la habilidad para identificar un comportamiento físico a partir de gráficas es una herramienta poderosa para entender sistemas del mundo real. Las ideas iniciales de una solución gráfica son las nociones de la *línea de fase* y el *valor de equilibrio*. Llegamos a estas nociones investigando, desde un punto de vista muy diferente al estudiado en el capítulo 4, lo que ocurre cuando la derivada de una función diferenciable es cero.

Valores de equilibrio y líneas de fase

Cuando diferenciamos implícitamente la ecuación

$$\frac{1}{5}\ln(5y - 15) = x + 1,$$

obtenemos

$$\frac{1}{5}\left(\frac{5}{5y - 15}\right)\frac{dy}{dx} = 1.$$

Al despejar $y' = dy/dx$, obtenemos $y' = 5y - 15 = (5y - 3)$. En este caso, la derivada y' es una función sólo de y (la variable dependiente) y es cero cuando $y = 3$.

Una ecuación diferencial para la que dy/dx es una función sólo de y se conoce como ecuación diferencial **autónoma**. Investigaremos lo que sucede cuando la derivada es una ecuación autónoma igual a cero. Supondremos que las derivadas son continuas.

DEFINICIÓN Si $dy/dx = g(y)$ es una ecuación diferencial autónoma, entonces, los valores de y para los cuales $dy/dx = 0$ se denominan **valores de equilibrio** o **puntos de reposo**.

Por lo tanto, los valores de equilibrio son aquellos en los que no ocurren cambios en la variable dependiente, por lo que y está en *reposo*. El énfasis se hace en el valor de y donde $dy/dx = 0$, no en el valor de x, como estudiamos en el capítulo 4. Por ejemplo, los valores de equilibrio de la ecuación diferencial autónoma

$$\frac{dy}{dx} = (y + 1)(y - 2)$$

son $y = -1$ y $y = 2$.

Para obtener una solución gráfica de una ecuación diferencial autónoma, primero elaboramos una **línea de fase** para la ecuación, una gráfica en el eje y que muestra los valores de equilibrio de la ecuación junto con los intervalos donde dy/dx y d^2y/dx^2 son positivas y negativas. Entonces, sabemos dónde las soluciones son crecientes y dónde son decrecientes, y conocemos la concavidad de las curvas solución. Éstas son las características principales que obtuvimos en la sección 4.4, de modo que podemos determinar las formas de las curvas solución sin tener que obtener sus fórmulas.

EJEMPLO 1 Dibuje una línea de fase para la ecuación

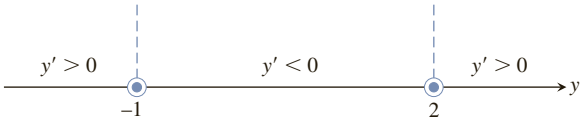
$$\frac{dy}{dx} = (y + 1)(y - 2)$$

y utilícela para dibujar las soluciones de la ecuación.

Solución

1. *Dibuje una recta numérica para* y *y marque los valores de equilibrio* $y = -1$ *y* $y = 2$, *donde* $dy/dx = 0$.

2. *Identifique y anote los intervalos donde* $y' > 0$ *y* $y' < 0$. Este paso se parece a lo que hicimos en la sección 4.3, sólo que ahora marcamos el eje y en lugar del eje x.



También se incluye la información acerca del signo de y' en la misma línea de fase. Como $y' > 0$ en el intervalo a la izquierda de $y = -1$, una solución de la ecuación diferencial con valor de y menor que -1 crecerá desde ahí hacia $y = -1$. Mostramos esta información dibujando una flecha en el intervalo que apunta hacia -1.

De forma análoga, $y' < 0$ entre $y = -1$ y $y = 2$, de modo que cualquier solución con un valor en este intervalo decrece hacia $y = -1$.

Para $y > 2$, tenemos que $y' > 0$, así que una solución con un valor de y mayor que 2 crecerá desde ahí sin cota.

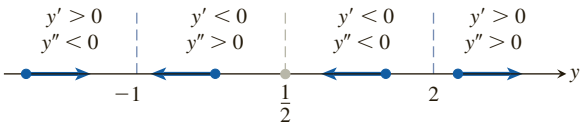
En resumen, las curvas solución por debajo de la recta horizontal $y = -1$ en el plano xy ascienden hacia $y = -1$. Las curvas solución entre las rectas $y = -1$ y $y = 2$ descienden de $y = 2$ hacia $y = -1$. Las curvas solución por arriba de $y = 2$ ascienden desde $y = 2$ y se mantienen creciendo.

3. *Calcule* y'' *y marque los intervalos donde* $y'' > 0$ *y* $y'' < 0$. Para obtener y'' se deriva y' *con respecto a* x, usando diferenciación implícita.

$$y' = (y + 1)(y - 2) = y^2 - y - 2 \qquad \text{Fórmula para } y' \ldots$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(y^2 - y - 2) \\ &= 2yy' - y' \qquad \text{Diferenciada implícitamente con respecto a } x \\ &= (2y - 1)y' \\ &= (2y - 1)(y + 1)(y - 2). \end{aligned}$$

Según esta fórmula, vemos que y'' cambia de signo en $y = -1$, $y = 1/2$ y $y = 2$. Agregamos la información del signo a la línea de fase.



4. *Dibuje varias curvas solución en el plano xy*. Las rectas horizontales $y = -1$, $y = 1/2$ y $y = 2$ dividen el plano en bandas horizontales en las que conocemos los signos de y' y y''. En cada banda, esta información nos indica si las curvas solución ascienden o descienden, y cómo se curvan cuando x aumenta (figura 9.15).

Las "líneas de equilibrio" $y = -1$ y $y = 2$ también son curvas solución. (Las funciones constantes $y = -1$ y $y = 2$ satisfacen la ecuación diferencial). Las curvas solución que cruzan la recta $y = 1/2$ tienen un punto de inflexión ahí. La concavidad cambia de cóncava hacia abajo (arriba de la recta) a cóncava hacia arriba (debajo de la recta).

Como se dijo en el paso 2, las soluciones en la banda central e inferior se aproximan al valor de equilibrio $y = -1$ cuando x aumenta. Las soluciones en la banda superior ascienden continuamente, alejándose del valor $y = 2$. ■

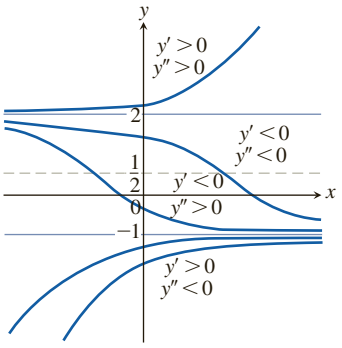


FIGURA 9.15 Las soluciones gráficas del ejemplo 1 incluyen las rectas horizontales $y = -1$ y $y = 2$, que pasan por los valores de equilibrio. Dos curvas solución nunca se tocan ni se cruzan.

Equilibrio estable y equilibrio inestable

Observe la figura 9.15 una vez más; analice en particular el comportamiento de las curvas solución cerca de los valores de equilibrio. Una vez que una curva solución tiene un valor cercano a $y = -1$, tiende de manera continua hacia ese valor; $y = -1$ es un **equilibrio estable**. El comportamiento cerca de $y = 2$ es justamente lo opuesto: todas las soluciones, excepto la solución de equilibrio $y = 2$ se mueven *alejándose* de ella cuando x aumenta. Llamamos a $y = 2$ un **equilibrio inestable**. Si la solución está *en* ese valor, permanece ahí, pero si está separada por cualquier cantidad, no importa qué tan pequeña sea, se alejará de esta línea de equilibrio. (En ocasiones, un valor de equilibrio es inestable porque una solución se aleja de él sólo por uno de los lados del punto).

Ahora que sabemos lo que buscamos, ya podemos ver este comportamiento en la línea de fase inicial (el segundo diagrama en el paso 2 del ejemplo 1). Las flechas se alejan de $y = 2$ y, una vez que están a la izquierda de $y = 2$, se dirigen hacia $y = -1$.

A continuación se presentan varios ejemplos de aplicaciones para los que podemos dibujar una familia de curvas solución de la ecuación diferencial con el método del ejemplo 1.

Ley de Newton sobre el enfriamiento

En la sección 7.4 resolvimos de manera analítica la ecuación diferencial

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_S), \qquad k > 0$$

que modela la ley de Newton sobre el enfriamiento. Aquí, H es la temperatura de un objeto en el instante t, y H_S es la temperatura constante del medio circundante.

Suponga que el medio ambiente (digamos, la habitación de una casa) tiene una temperatura constante de 15°C. Entonces, podemos expresar la diferencia de temperatura como $H(t) - 15$. Suponiendo que H es una función diferenciable del tiempo t, de acuerdo con la ley de Newton sobre el enfriamiento, existe una constante de proporcionalidad $k > 0$ tal que

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - 15) \tag{1}$$

(*menos* k es para obtener una derivada negativa cuando $H > 15$).

Como $dH/dt = 0$ en $H = 15$, la temperatura de 15°C es un valor de equilibrio. Si $H > 15$, la ecuación (1) indica que $(H - 15) > 0$ y $dH/dt < 0$. Si el objeto está más caliente que la habitación, se enfriará. De manera similar, si $H < 15$, entonces, $(H - 15) < 0$ y $dH/dt > 0$. Un objeto más frío que la habitación se calentará. Así, el comportamiento descrito por la ecuación (1) coincide con nuestra intuición con respecto a cómo debería comportarse la temperatura. Estas observaciones se representan en el diagrama de línea de fase inicial de la figura 9.16. El valor $H = 15$ es un equilibrio estable.

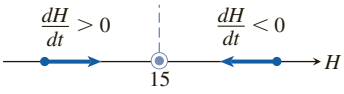


FIGURA 9.16 Primer paso en la construcción de la línea de fase para la ley de Newton sobre el enfriamiento. A la larga, la temperatura tiende al valor de equilibrio (la del medio circundante).

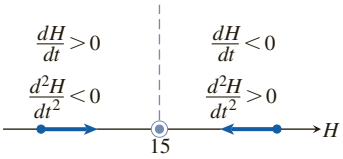


FIGURA 9.17 Línea de fase completa para la ley de Newton sobre el enfriamiento.

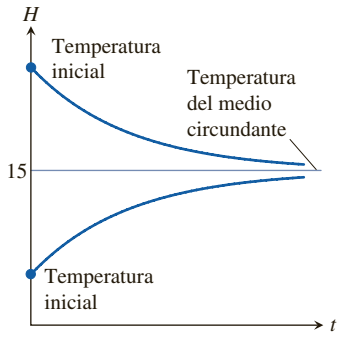


FIGURA 9.18 Temperatura contra tiempo. Sin importar la temperatura inicial, la temperatura del objeto, $H(t)$, tiende hacia los 15°C, la temperatura del medio que lo rodea.

Determinamos la concavidad de las curvas solución, derivando ambos lados de la ecuación (1) con respecto a t:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dH}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(-k(H - 15))$$

$$\frac{d^2H}{dt^2} = -k\frac{dH}{dt}.$$

Como $-k$ es negativo, vemos que d^2H/dt^2 es positiva cuando $dH/dt < 0$, y negativa cuando $dH/dt > 0$. La figura 9.17 agrega esta información a la línea de fase.

La línea de fase completa muestra que si la temperatura del objeto está por arriba del valor de equilibrio de 15°C, la gráfica de $H(t)$ es decreciente y cóncava hacia arriba. Si la temperatura está por debajo de los 15°C (la temperatura del medio ambiente), la gráfica de $H(t)$ es creciente y cóncava hacia abajo. Utilizamos esta información para dibujar curvas solución típicas (figura 9.18).

Según la curva solución ubicada en la parte superior de la figura 9.18, vemos que cuando el objeto se enfría, la razón a la que lo hace disminuye porque dH/dt se aproxima a cero. Esta observación está implícita en la ley de Newton sobre el enfriamiento y forma parte de la ecuación diferencial, pero el aplanamiento de la gráfica conforme transcurre el tiempo nos da una representación visual inmediata del fenómeno.

Análisis de la caída de un cuerpo que enfrenta una fuerza de resistencia

Newton observó que la razón de cambio en la cantidad de movimiento de un cuerpo que se mueve es igual a la fuerza neta que se le aplica. En términos matemáticos,

$$F = \frac{d}{dt}(mv), \tag{2}$$

donde F es la fuerza neta que actúa sobre el objeto, y m y v son la masa y la velocidad del objeto, respectivamente. Si m varía con el tiempo, como cuando el objeto es un cohete que quema combustible, el lado derecho de la ecuación (2) se expande a

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

aplicando la regla de la derivada de un producto. Sin embargo, en muchas situaciones, m es constante, $dm/dt = 0$, y la ecuación (2) toma la forma más simple

$$F = m\frac{dv}{dt} \qquad \text{o} \qquad F = ma, \tag{3}$$

conocida como la *segunda ley de Newton del movimiento* (vea la sección 9.3).

En caída libre, la aceleración constante debida a la gravedad se denota con g, y la fuerza que actúa hacia abajo en el cuerpo en caída es

$$F_p = mg,$$

la fuerza debida a la gravedad. Sin embargo, si consideramos un cuerpo real que cae en el aire –digamos, una moneda que cae desde una gran altura o un paracaidista que desciende de una altura aún mayor–, sabemos que la resistencia del aire es un factor que afecta la velocidad de caída. Un modelo más realista de caída libre debe incluir la resistencia del aire, mostrada como una fuerza F_r en el diagrama de la figura 9.19.

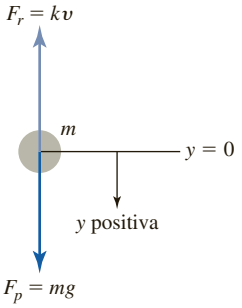


FIGURA 9.19 Un objeto que cae bajo la influencia de la gravedad, con una fuerza de resistencia que se supone proporcional a la velocidad.

Para velocidades bajas, muy por debajo de la velocidad del sonido, los experimentos físicos han demostrado que F_r es aproximadamente proporcional a la velocidad del cuerpo. Por lo tanto, la fuerza neta sobre el objeto en caída es

$$F = F_p - F_r,$$

con lo que se obtiene

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$
$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v. \tag{4}$$

Podemos usar una línea de fase para analizar las funciones de velocidad que resuelven esta ecuación diferencial.

El punto de equilibrio, que se obtiene igualando a cero el lado derecho de la ecuación (4), es

$$v = \frac{mg}{k}.$$

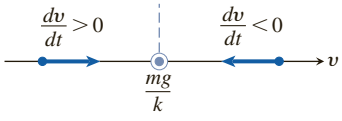


FIGURA 9.20 Línea de fase inicial para el cuerpo que cae enfrentando resistencia.

Si en un inicio, el cuerpo se mueve más rápido que esto, dv/dt es negativa y el cuerpo reduce su velocidad. Si el cuerpo se mueve a una velocidad por debajo de mg/k, entonces, $dv/dt > 0$ y el cuerpo aumenta su velocidad. Estas observaciones se representan en el diagrama inicial de línea de fase de la figura 9.20.

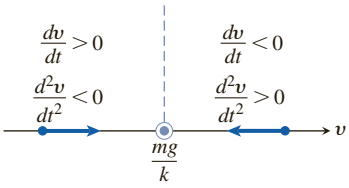


FIGURA 9.21 Línea de fase completa de un cuerpo en caída.

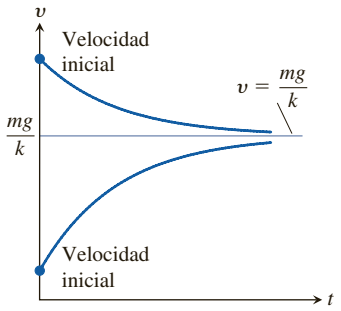


FIGURA 9.22 Curvas típicas de velocidad de un cuerpo que cae enfrentando resistencia del aire. El valor $v = mg/k$ es la velocidad límite.

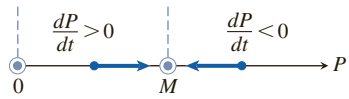


FIGURA 9.23 Línea de fase inicial para crecimiento logístico (ecuación 6).

Determinamos la concavidad de las curvas solución diferenciando ambos lados de la ecuación (4) con respecto a t:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(g - \frac{k}{m}v\right) = -\frac{k}{m}\frac{dv}{dt}.$$

Vemos que $d^2v/dt^2 < 0$ cuando $v < mg/k$ y $d^2v/dt^2 > 0$ cuando $v > mg/k$. La figura 9.21 agrega esta información a la línea de fase. Observe la similitud con la línea de fase de la ley de Newton sobre el enfriamiento (figura 9.17). Las curvas solución también son similares (figura 9.22).

La figura 9.22 muestra dos curvas solución que son típicas. Sin importar la velocidad inicial, vemos que la velocidad del cuerpo tiende al valor límite $v = mg/k$. Este valor, un punto de equilibrio estable, se denomina **velocidad límite** del cuerpo. Los paracaidistas pueden variar su velocidad límite de 95 mph a 180 mph modificando la cantidad del área del cuerpo que se opone a la caída, lo que afecta el valor de k.

Crecimiento logístico de población

En la sección 9.3 examinamos el fenómeno del crecimiento poblacional con el modelo de cambio exponencial. Es decir, si P representa el número de individuos y no consideramos los movimientos de migración, entonces,

$$\frac{dP}{dt} = kP, \tag{5}$$

donde $k > 0$ es la razón de nacimientos menos la razón de mortalidad por individuo por unidad de tiempo.

Como el ambiente natural sólo tiene un número limitado de recursos para sustentar la vida, es razonable suponer que sólo una población máxima M pueda alojarse en él. Cuando la población se aproxima a esta **población límite** o **capacidad de sustentación**, los recursos se vuelven menos abundantes y la razón de crecimiento k disminuye. Una relación sencilla que muestra este comportamiento es

$$k = r(M - P),$$

donde $r > 0$ es una constante. Observe que k disminuye cuando P aumenta hacia M, y que k es negativa si P es mayor que M. Al sustituir k por $r(M - P)$ en la ecuación (5), se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P = rMP - rP^2. \tag{6}$$

El modelo dado por la ecuación (6) se conoce como **crecimiento logístico**.

Podemos pronosticar el comportamiento de la población en el tiempo analizando la línea de fase de la ecuación (6). Los valores de equilibrio son $P = M$ y $P = 0$, y podemos ver que $dP/dt > 0$ si $0 < P < M$ y $dP/dt < 0$ si $P > M$. Estas observaciones están registradas en la línea de fase de la figura 9.23.

Determinamos la concavidad de las curvas de población derivando ambos lados de la ecuación (6) con respecto a t:

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(rMP - rP^2)\\ &= rM\frac{dP}{dt} - 2rP\frac{dP}{dt}\\ &= r(M - 2P)\frac{dP}{dt}.\end{aligned} \tag{7}$$

Si $P = M/2$, entonces, $d^2P/dt^2 = 0$. Si $P < M/2$, entonces, $(M - 2P)$ y dP/dt son positivas y $d^2P/dt^2 > 0$. Si $M/2 < P < M$, entonces, $(M - 2P) < 0$, $dP/dt > 0$, y $d^2P/dt^2 < 0$.

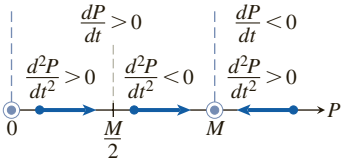


FIGURA 9.24 Línea de fase completa del crecimiento logístico (ecuación 6).

Si $P > M$, entonces, $(M - 2P)$ y dP/dt son negativas y $d^2P/dt^2 > 0$. Esta información se agrega a la línea de fase (figura 9.24).

Las rectas $P = M/2$ y $P = M$ dividen el primer cuadrante del plano tP en bandas horizontales en las que conocemos los signos de dP/dt y d^2P/dt^2. En cada banda, sabemos cómo ascienden y descienden las curvas solución, y cómo se curvan conforme transcurre el tiempo. Las rectas de equilibrio $P = 0$ y $P = M$ son curvas de población. Las curvas de población que cruzan la recta $P = M/2$ tienen un punto de inflexión allí, lo que les da una forma **sigmoidea** (curvada en dos direcciones como la letra S). La figura 9.25 muestra curvas de población típicas. Observe que cada curva de población se aproxima al límite de población M cuando $t \longrightarrow \infty$.

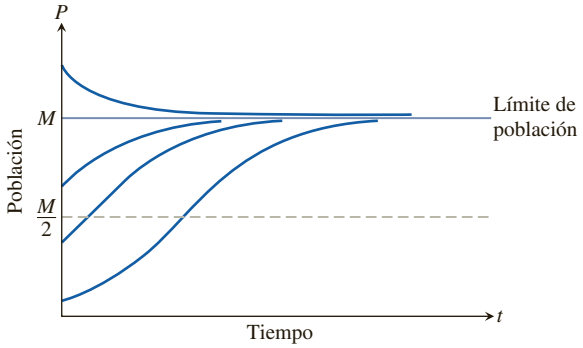


FIGURA 9.25 Curvas de población de crecimiento logístico.

Ejercicios 9.4

Líneas de fase y curvas solución

En los ejercicios 1 a 8,

a) Identifique los valores de equilibrio. ¿Cuáles son estables y cuáles son inestables?

b) Elabore una línea de fase. Identifique los signos de y' y y''.

c) Dibuje algunas curvas solución.

1. $\dfrac{dy}{dx} = (y + 2)(y - 3)$

2. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4$

3. $\dfrac{dy}{dx} = y^3 - y$

4. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 2y$

5. $y' = \sqrt{y}, \quad y > 0$

6. $y' = y - \sqrt{y}, \quad y > 0$

7. $y' = (y - 1)(y - 2)(y - 3)$

8. $y' = y^3 - y^2$

Modelos de crecimiento de población

Las ecuaciones diferenciales autónomas de los ejercicios 9 a 12 representan modelos de crecimiento de población. En cada uno de los ejercicios, analice la línea de fase para hacer un dibujo de las curvas solución de $P(t)$, eligiendo diferentes valores iniciales $P(0)$. ¿Cuáles equilibrios son estables y cuáles son inestables?

9. $\dfrac{dP}{dt} = 1 - 2P$

10. $\dfrac{dP}{dt} = P(1 - 2P)$

11. $\dfrac{dP}{dt} = 2P(P - 3)$

12. $\dfrac{dP}{dt} = 3P(1 - P)\left(P - \dfrac{1}{2}\right)$

13. Cambio catastrófico del crecimiento logístico Suponga que la población saludable de alguna especie crece en un ambiente limitado, y que la población actual P_0 está bastante cerca de la capacidad de sustentación M_0. Esta situación podría presentarse en una población de peces que viven en un lago de agua dulce en una zona selvática. Repentinamente, una catástrofe como la erupción volcánica del Monte Santa Elena, contamina el lago y destruye una parte significativa del alimento y del oxígeno de los que dependen los peces. El resultado es un ambiente nuevo con una capacidad de sustentación M_1 considerablemente menor que M_0 y, de hecho, menor para la población actual P_0. Considerando un instante antes de la catástrofe, dibuje una curva de "antes y después" para mostrar la manera en que la población de peces responde al cambio de ambiente.

14. Control de población El departamento de caza y pesca de cierto estado planea otorgar permisos de caza para controlar la población de venados (un ejemplar por permiso). Se sabe que si la población de venados cae por debajo de cierto nivel m, la especie se extinguirá. También se sabe que si la población de venados crece por arriba de la capacidad de sustentación M, la población se reducirá a M, como consecuencia de enfermedades y nutrición deficiente.

a) Analice qué tan razonable es el siguiente modelo para calcular la tasa de crecimiento de la población de venados como una función del tiempo:

$$\frac{dP}{dt} = rP(M - P)(P - m),$$

donde P es la población de venados y r es una constante positiva de proporcionalidad. Incluya una línea de fase.

b) Explique cómo difiere este modelo del modelo logístico $dP/dt = rP(M - P)$. ¿Es mejor o peor que el modelo logístico?

c) Demuestre que si $P > M$ para toda t, entonces, $\lim_{t\to\infty} P(t) = M$.

d) ¿Qué sucede si $P < m$ para toda t?

e) Explique las soluciones de la ecuación diferencial. ¿Cuáles son los puntos de equilibrio del modelo? Explique la dependencia del valor de estado estable de P con respecto a los valores iniciales de P. ¿Aproximadamente cuántos permisos deben expedirse?

Aplicaciones y ejemplos

15. Paracaidismo Si un cuerpo de masa m, que cae desde el reposo bajo la acción de la gravedad, enfrenta una resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad, entonces, la velocidad del cuerpo a t segundos de la caída satisface la ecuación

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \qquad k > 0$$

donde k es una constante que depende de las propiedades aerodinámicas del cuerpo y de la densidad del aire. (Suponga que la caída es demasiado corta para verse afectada por cambios en la densidad del aire).

a) Dibuje una línea de fase para la ecuación.

b) Elabore un dibujo de una curva típica de velocidad.

c) Para un paracaidista de 110 lb ($mg = 110$), si medimos el tiempo en segundos y la distancia en pies, un valor típico de k es 0.005. ¿Cuál es la velocidad límite del paracaidista? Repita el ejercicio considerando un paracaidista de 200 lb.

16. Resistencia proporcional a $\sqrt{v}$ Un cuerpo de masa m se lanza verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial v_0. Suponga que la fuerza de resistencia es proporcional a la raíz cuadrada de la velocidad y determine la velocidad límite a partir de un análisis gráfico.

17. Navegación Un velero viaja con un curso recto, con una fuerza constante de 50 lb hacia delante ejercida por el viento. La otra fuerza que actúa sobre el bote es la resistencia del agua. La fuerza de resistencia es numéricamente igual a cinco veces la rapidez del bote, y la velocidad inicial es de 1 ft/s. ¿Cuál es la velocidad máxima, en ft/s, del bote bajo este viento?

18. Difusión de información Los sociólogos reconocen un fenómeno denominado *difusión social*, que se refiere a la propagación de información, la innovación tecnológica o las modas culturales en una población. Los miembros de la población se pueden dividir en dos clases: los que conocen la información y los que la desconocen. En una población fija cuyo tamaño se conoce, es razonable suponer que la velocidad de difusión es proporcional al número de personas que conocen la información por el número de individuos que aún no la conocen. Si X denota el número de individuos que tienen la información en una población de N personas, entonces, un modelo matemático para la difusión social está dado por

$$\frac{dX}{dt} = kX(N - X),$$

donde t representa el tiempo en días y k es una constante positiva.

a) Discuta si el modelo es razonable.

b) Elabore una línea de fase identificando los signos de X' y X''.

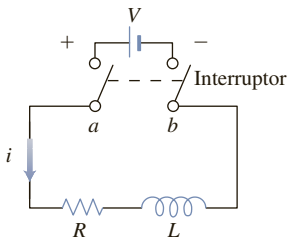
c) Dibuje curvas de solución representativas.

d) Pronostique el valor de X para el que la información se propaga más rápidamente. ¿Cuántas personas recibirán, tarde o temprano, la información?

19. Corriente en un circuito *RL* El siguiente diagrama representa un circuito eléctrico cuya resistencia total es una constante de R ohms; su autoinductancia, mostrada como una bobina, es de L henries, también constante. Hay un interruptor cuyas terminales a y b pueden cerrarse para conectar una fuente eléctrica constante de V volts. Según la sección 9.2, tenemos

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V,$$

donde i es la corriente en amperes y t es el tiempo en segundos.



Realice un análisis de línea de fase para dibujar la curva solución, suponiendo que el interruptor en el circuito *RL* se cierra en el instante $t = 0$. ¿Qué le sucede a la corriente cuando $t \to \infty$? Este valor se denomina *solución de estado estable*.

20. Una perla en el champú Suponga que una perla se está hundiendo en un fluido viscoso, como el champú, sujeta a una fuerza de fricción que se opone al hundimiento y es proporcional a la velocidad. Suponga también que hay una fuerza de resistencia de flotación ejercida por el champú. De acuerdo con el *principio de Arquímedes*, la fuerza de flotación es igual al peso del fluido desplazado por el objeto (la perla en este caso). Sean m la masa de la perla y P la masa del champú desplazado por la perla al descender. Realice lo siguiente.

a) Elabore un dibujo que muestre las fuerzas que actúan sobre la perla al hundirse, como en la figura 9.19.

b) Si $v(t)$ es la velocidad de la perla como una función del tiempo t, escriba una ecuación diferencial que modele la velocidad de la perla como un cuerpo que cae.

c) Construya una línea de fase que muestre los signos de v' y v''.

d) Elabore un dibujo de curvas solución típicas.

e) ¿Cuál es la velocidad límite de la perla?

9.5 Sistemas de ecuaciones y planos de fase

En algunas situaciones estamos obligados a considerar no sólo una sino varias ecuaciones diferenciales de primer orden. El conjunto de ecuaciones se conoce como **sistema** de ecuaciones diferenciales. En esta sección presentaremos un enfoque para entender los sistemas a través de un procedimiento gráfico conocido como *análisis del plano fase*. Presentaremos este análisis en el contexto de modelación de poblaciones de truchas y robalos que viven juntos en un estanque.

Planos fase

Un sistema general de dos ecuaciones diferenciales de primer grado puede tener la forma

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = G(x, y).$$

Este sistema se denomina **autónomo** porque dx/dt y dy/dt no dependen de la variable independiente t, sino sólo de las variables dependientes x y y. Una **solución** del sistema consiste en un par de funciones $x(t)$ y $y(t)$ que satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones diferenciales para toda t en algún intervalo de tiempo (finito o infinito).

No se puede considerar una sola de estas ecuaciones para obtener soluciones $x(t)$ o $y(t)$ porque las derivadas dependen tanto de x como de y. Para entender las soluciones, observaremos juntas a ambas variables dependientes graficando los puntos $(x(t), y(t))$ en el plano xy, iniciando en algún punto específico. Por lo tanto, las funciones solución definen una curva solución que pasa por ese punto específico, llamada **trayectoria** del sistema. El plano xy, en el cual residen estas trayectorias, se conoce como **plano fase**. Así, consideramos juntas ambas soluciones y estudiamos el comportamiento de todas las trayectorias solución en el plano fase. Es posible demostrar que dos trayectorias nunca se cruzan ni se tocan. (Las trayectorias solución son ejemplos de *curvas paramétricas*, las cuales se estudiarán con detalle en el capítulo 11).

Modelo de competencia-depredador

Imagine dos clases de peces, digamos de truchas y robalos, compitiendo por los mismos recursos limitados (como alimento y oxígeno) en un estanque. Considere que $x(t)$ representa el número de truchas y $y(t)$ el número de robalos que viven en el estanque en el instante t. En la realidad, $x(t)$ y $y(t)$ siempre tienen valores enteros, pero los aproximaremos mediante funciones diferenciales con valores reales. Esto nos permite aplicar los métodos de ecuaciones diferenciales.

Las razones de cambio de estas poblaciones se ven afectadas por algunos factores. Conforme transcurre el tiempo, cada especie se reproduce, así que se supone que cada población aumenta proporcionalmente a su tamaño. Si consideramos este hecho por sí solo, nos llevaría a concluir que cada especie experimenta un crecimiento exponencial. Sin embargo, existe un efecto compensatorio por el hecho de que las dos especies están en competencia. Un número grande de robalos tiende a causar una disminución en el número de truchas, y viceversa. En nuestro modelo, la magnitud de este efecto es proporcional a la frecuencia con la que las dos especies interactúan, lo que, a la vez, es proporcional a xy, el producto de las dos poblaciones. Estas consideraciones nos llevan al siguiente modelo de crecimiento de truchas y robalos en el estanque:

$$\frac{dx}{dt} = (a - by)x, \tag{1a}$$
$$\frac{dy}{dt} = (m - nx)y. \tag{1b}$$

Aquí, $x(t)$ representa la población de truchas, $y(t)$ la población de robalos, y a, b, m y n son constantes positivas. Entonces, una solución de este sistema es un par de funciones $x(t)$ y $y(t)$ que nos dan la población de cada especie en el instante t. Cada ecuación (1) incluye ambas funciones desconocidas x y y, de modo que no es posible resolverlas individualmente. Así que utilizaremos un análisis gráfico para estudiar las trayectorias solución de este **modelo de competencia-depredador**.

Analizaremos ahora la naturaleza del plano fase en el modelo de población truchas-robalos. Nos interesa el primer cuadrante del plano xy, donde $x \geq 0$ y $y \geq 0$, puesto que las poblaciones no pueden ser negativas. Primero determinamos dónde las poblaciones de truchas y de robalos son constantes. Observe que los valores $(x(t), y(t))$ no cambian cuando $dx/dt = 0$ y $dy/dt = 0$; entonces, las ecuaciones 1a) y 1b) se convierten en

$$(a - by)x = 0,$$
$$(m - nx)y = 0.$$

Este par de ecuaciones simultáneas tiene dos soluciones: $(x, y) = (0, 0)$ y $(x, y) = (m/n, a/b)$. En estos valores (x, y), denominados **puntos de equilibrio** o **de reposo**, las dos poblaciones

permanecen constantes todo el tiempo. El punto (0, 0) representa un estanque que no alberga miembros de ninguna de las dos especies; el punto $(m/n, a/b)$ corresponde a un estanque con un número invariable de cada especie.

A continuación, observamos que si $y = a/b$, entonces, la ecuación 1a) implica que $dx/dt = 0$, de modo que la población de truchas $x(t)$ es constante. De manera similar, si $x = m/n$, entonces, la ecuación 1b) implica que $dy/dt = 0$, y la población de robalos $y(t)$ es constante. Esta información está registrada en la figura 9.26.

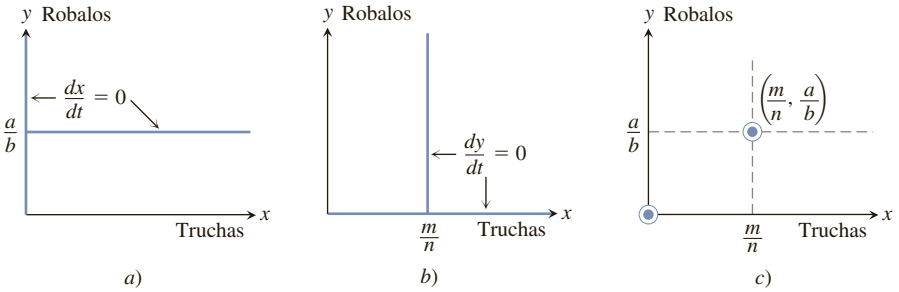


FIGURA 9.26 Puntos de reposo en el modelo de competencia-depredador dados por las ecuaciones 1a) y 1b).

Al establecer nuestro modelo de competencia-depredador, generalmente no se conocen los valores exactos de a, b, m y n. Sin embargo, es posible analizar el sistema de ecuaciones (1) para conocer la naturaleza de las trayectorias solución. Comenzamos por determinar los signos de dx/dt y dy/dt en el plano fase. Aun cuando $x(t)$ representa el número de truchas y $y(t)$ el número de robalos en el tiempo t, visualizamos el par de valores $(x(t), y(t))$ como un punto que describe una trayectoria curva en el plano fase. Cuando dx/dt es positiva, $x(t)$ aumenta y el punto se mueve hacia la derecha en el plano fase. Si dx/dt es negativa, el punto se mueve hacia la izquierda. Asimismo, el punto se mueve hacia arriba cuando dy/dt es positiva, y hacia abajo cuando dy/dt es negativa.

Vimos que $dy/dt = 0$ a lo largo de la recta vertical $x = m/n$. A la izquierda de esta recta, dy/dt es positiva porque $dy/dt = (m - nx)y$ y $x < m/n$. Así, las trayectorias en este lado de la recta se dirigen hacia arriba. A la derecha de esta recta, dy/dt es negativa y las trayectorias apuntan hacia abajo. Las direcciones de las trayectorias asociadas se indican en la figura 9.27. De manera análoga, arriba de la recta horizontal $y = a/b$, tenemos que $dx/dt < 0$ y las trayectorias apuntan hacia la izquierda; debajo de esta recta apuntan hacia la derecha, como se observa en la figura 9.28. La combinación de esta información nos da cuatro regiones distintas en el plano, A, B, C y D; las direcciones de sus trayectorias se muestran en la figura 9.29.

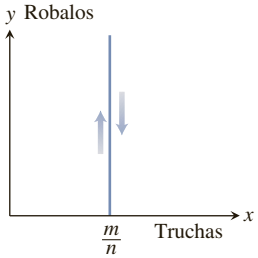


FIGURA 9.27 A la izquierda de la recta $x = m/n$, las trayectorias se mueven hacia arriba, y a la derecha de la recta se mueven hacia abajo.

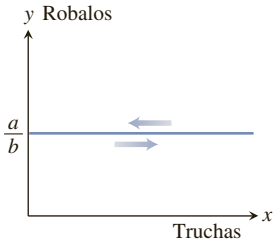


FIGURA 9.28 Arriba de la recta $y = a/b$, las trayectorias se mueven hacia la izquierda, y debajo de ella se mueven hacia la derecha.

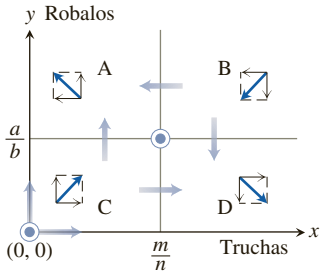


FIGURA 9.29 Composición del análisis gráfico de las direcciones de las trayectorias en las cuatro regiones determinadas por $x = m/n$ y $y = a/b$.

A continuación, examinamos lo que sucede cerca de los puntos de equilibrio. Las trayectorias cerca del punto (0, 0) se alejan de él hacia arriba y a la derecha. El comportamiento cerca del punto de equilibrio $(m/n, a/b)$ depende de la región en la que inicia la trayectoria. Por ejemplo, si comienza en la región B, entonces, se moverá hacia abajo y hacia la izquierda hacia el punto de equilibrio. Dependiendo de dónde inicie la trayectoria, se puede mover hacia abajo en la región D, hacia la izquierda en la región A, o quizás en línea recta hacia el punto de

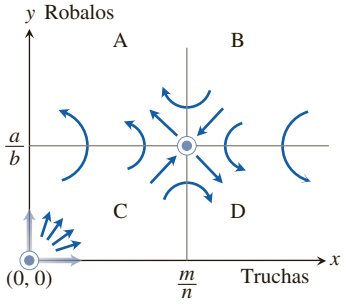


FIGURA 9.30 Movimiento a lo largo de las trayectorias cerca de los puntos de reposo (0, 0) y $(m/n, a/b)$.

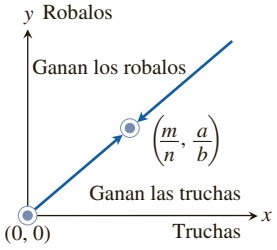


FIGURA 9.31 Resultados cualitativos del análisis del modelo competencia-depredador. Existen exactamente dos trayectorias que se aproximan al punto $(m/n, a/b)$.

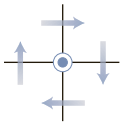


FIGURA 9.32 Dirección de la trayectoria cerca del punto de reposo (0, 0).

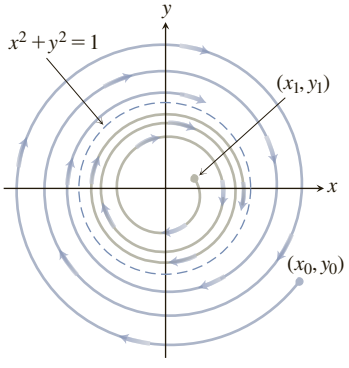


FIGURA 9.34 La solución $x^2 + y^2 = 1$ es un ciclo límite.

equilibrio. Si entra en las regiones A o D, entonces, continuará su movimiento alejándose del punto de reposo. Se dice que ambos puntos de reposo son **inestables**, lo que quiere decir (en este escenario) que hay trayectorias cerca de cada punto que se alejan de ellos. Estas características se señalan en la figura 9.30.

Resulta que en cada una de las mitades del plano por arriba y por debajo de la recta $y = a/b$, hay exactamente una trayectoria que se aproxima al punto de equilibrio $(m/n, a/b)$ (vea el ejercicio 7). Hacia arriba de cada una de estas dos trayectorias, la población de robalos aumenta, y hacia abajo de ellas disminuye. Las dos trayectorias que se aproximan al punto de equilibrio se presentan en la figura 9.31.

El análisis gráfico nos hace concluir que, considerando los supuestos del modelo de competencia-depredador, es improbable que ambas especies alcancen niveles de equilibrio. Esto se debe a que sería casi imposible que la población de peces se moviera exactamente a lo largo de una de las dos trayectorias de aproximación todo el tiempo. Además, el punto inicial de población (x_0, y_0) determina cuál de las dos especies tiene probabilidad de sobrevivir con el tiempo, y la coexistencia de las especies es muy improbable.

Limitaciones del método de análisis del plano-fase

A diferencia de la situación del modelo competencia-depredador, no siempre es posible determinar el comportamiento de las trayectorias cerca de un punto de reposo. Por ejemplo, suponga que sabemos que las trayectorias cerca de un punto de reposo, elegido aquí como el origen (0, 0), se comportan como las de la figura 9.32. La información proporcionada por esta figura no es suficiente para distinguir entre las tres trayectorias posibles mostradas en la figura 9.33. Incluso si pudiéramos determinar que una trayectoria cerca de un punto de equilibrio se parece a la de la figura 9.33*c*), no sabríamos cómo se comportan las otras trayectorias. Podría suceder que una trayectoria más cercana al origen se comportara de acuerdo con los movimientos que se describen en la figura 9.33*a*) o en la 9.33*b*). La trayectoria en espiral de la figura 9.33*b*) en realidad nunca puede alcanzar el punto de reposo en un lapso de tiempo finito.

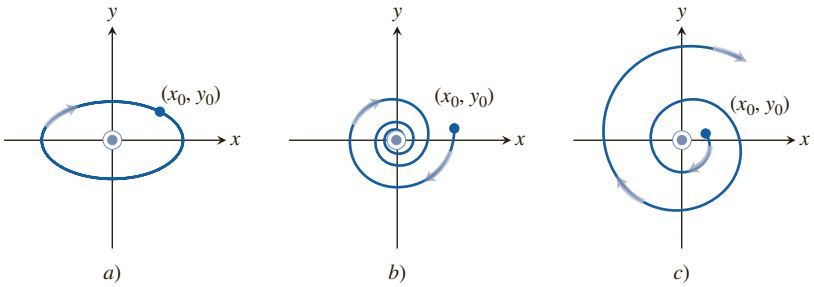


FIGURA 9.33 Movimientos de tres trayectorias posibles: *a*) movimiento periódico, *b*) movimiento asintótico hacia un punto de reposo estable, y *c*) movimiento cerca de un punto de reposo inestable.

Otro tipo de comportamiento

Es posible demostrar que el sistema

$$\frac{dx}{dt} = y + x - x(x^2 + y^2), \tag{2a}$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y - y(x^2 + y^2) \tag{2b}$$

sólo tiene un punto de equilibrio en (0, 0). Incluso si una trayectoria iniciara en la circunferencia unitaria recorriéndola en el sentido de las manecillas del reloj, cuando $x^2 + y^2 = 1$, tendríamos que $dy/dx = -x/y$ (vea el ejercicio 2). Si una trayectoria inicia dentro de la circunferencia unitaria, su movimiento en espiral hacia fuera se aproximará asintóticamente al círculo cuando $t \to \infty$. Si una trayectoria inicia fuera de la circunferencia unitaria, su movimiento en espiral hacia dentro también se aproximará asintóticamente a la circunferencia cuando $t \to \infty$. La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ se conoce como **ciclo límite** del sistema (figura 9.34). En este sistema, los valores de x y y finalmente se vuelven periódicos.

Ejercicios 9.5

1. Enuncie tres consideraciones importantes que se ignoran en el modelo competencia-depredador como se presentó en el texto.
2. En los sistemas 2*a*) y 2*b*), demuestre que cualquier trayectoria que inicie en la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ recorrerá la circunferencia unitaria en una solución periódica. Primero, introduzca coordenadas polares y rescriba el sistema como $dr/dt = r(1 - r^2)$ y $-d\theta/dt = -1$.
3. Desarrolle un modelo del crecimiento de truchas y robalos, suponiendo que, en aislamiento, las truchas experimentan un decaimiento exponencial [de modo que $a < 0$ en las ecuaciones 1*a*) y 1*b*)] y que la población de robalos crece logísticamente con un límite de población M. Analice gráficamente el movimiento cerca de los puntos de reposo en su modelo. ¿Es posible la coexistencia?
4. ¿Cómo podría validarse el modelo de competencia-depredador? Incluya una explicación de cómo podrían estimarse las diferentes constantes a, b, m y n. ¿Cómo podrían las autoridades utilizar el modelo para garantizar la supervivencia de ambas especies?
5. Considere otro modelo de competencia-depredador definido por

$$\frac{dx}{dt} = a\left(1 - \frac{x}{k_1}\right)x - bxy,$$

$$\frac{dy}{dt} = m\left(1 - \frac{y}{k_2}\right)y - nxy,$$

donde x y y representan poblaciones de truchas y robalos, respectivamente.

   a) ¿Qué supuestos se hacen implícitamente acerca del crecimiento de las poblaciones de truchas y robalos en ausencia de competencia?

   b) Interprete las constantes a, b, m, n, k_1 y k_2 en términos del problema físico.

   c) Ejecute un análisis gráfico:

   i. Obtenga los niveles de equilibrio posibles.

   ii. Determine si es posible la coexistencia.

   iii. Elija varios puntos típicos de inicio y dibuje trayectorias típicas en el plano fase.

   iv. Interprete los resultados pronosticados por su análisis gráfico en términos de las constantes a, b, m, n, k_1 y k_2.

   Nota: Cuando llegue al inciso **iii**, se dará cuenta de que existen cinco casos. Necesitará analizarlos todos.

6. **Un modelo económico** Considere el siguiente modelo económico. Sea P el precio de un artículo en el mercado. Sea Q la cantidad de artículos disponibles en el mercado. Tanto P como Q son funciones del tiempo. Si se consideran el precio y la cantidad como dos factores que interactúan, podría proponerse el siguiente modelo:

$$\frac{dP}{dt} = aP\left(\frac{b}{Q} - P\right),$$

$$\frac{dQ}{dt} = cQ(fP - Q),$$

donde a, b, c y f, son constantes positivas. Analice y justifique la idoneidad del modelo.

   a) Si $a = 1$, $b = 20{,}000$, $c = 1$ y $f = 30$, obtenga los puntos de equilibrio de este sistema. Si es posible, clasifique cada punto de equilibrio con respecto a su estabilidad. Si un punto no se puede clasificar fácilmente, dé una explicación.

   b) Ejecute un análisis gráfico de estabilidad para determinar lo que sucederá con los niveles de P y Q conforme el tiempo t crece.

   c) Haga una interpretación económica de las curvas que determinan los puntos de equilibrio.

7. **Dos trayectorias se aproximan al equilibrio** Demuestre que las dos trayectorias que conducen a $(m/n, a/b)$ mostradas en la figura 9.31 son únicas, realizando los siguientes pasos.

   a) Aplique la regla de la cadena a los sistemas 1*a*) y 1*b*) para deducir la siguiente ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(m - nx)y}{(a - by)x}.$$

   b) Separe las variables, integre y exponencie para obtener

$$y^a e^{-by} = Kx^m e^{-nx},$$

   donde K es una constante de integración.

   c) Sea $f(y) = y^a/e^{by}$ y $g(x) = x^m/e^{nx}$. Demuestre que $f(y)$ tiene un solo máximo $M_y = (a/eb)^a$ cuando $y = a/b$ como se muestra en la figura 9.35. De forma análoga, demuestre que $g(x)$ tiene un máximo único $M_x = (m/en)^m$ cuando $x = m/n$, también mostrado en la figura 9.35.

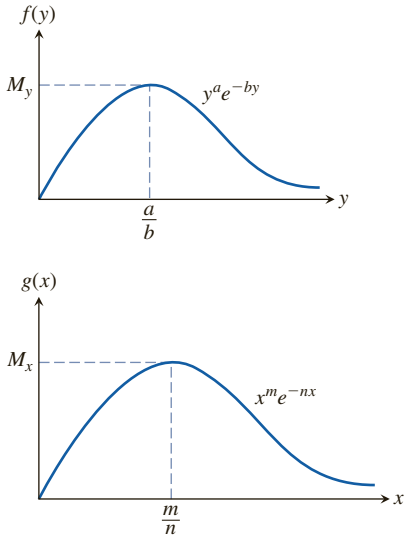


FIGURA 9.35 Gráficas de las funciones $f(y) = y^a/e^{by}$ y $g(x) = x^m/e^{nx}$.

   d) Considere qué sucede cuando (x, y) se aproxima a $(m/n, a/b)$. Tome los límites del inciso *b*) cuando $x \to m/n$ y $y \to a/b$ para demostrar que

$$\lim_{\substack{x \to m/n \\ y \to a/b}} \left[\left(\frac{y^a}{e^{by}}\right)\left(\frac{e^{nx}}{x^m}\right)\right] = K$$

   o $M_y/M_x = K$. Por lo tanto, cualquier trayectoria solución que se aproxime a $(m/n, a/b)$ debe satisfacer

$$\frac{y^a}{e^{by}} = \left(\frac{M_y}{M_x}\right)\left(\frac{x^m}{e^{nx}}\right).$$

   e) Demuestre que sólo una trayectoria puede aproximarse a $(m/n, a/b)$ desde abajo de la recta $y = a/b$. Elija $y_0 < a/b$. En la figura 9.35 se observa que $f(y_0) < M_y$, lo que implica que

$$\frac{M_y}{M_x}\left(\frac{x^m}{e^{nx}}\right) = {y_0}^a/e^{by_0} < M_y.$$

Esto, a la vez, implica que

$$\frac{x^m}{e^{nx}} < M_x.$$

La figura 9.35 nos dice que para $g(x)$ existe un valor único $x_0 < m/n$ que satisface la desigualdad anterior. Es decir, para cada $y < a/b$, existe un valor único de x que satisface la ecuación del inciso *d*). Por lo tanto, sólo puede existir una trayectoria solución que se aproxima a $(m/n, a/b)$ desde abajo, como se muestra en la figura 9.36.

f) Utilice un argumento similar para demostrar que la trayectoria solución que nos lleva a $(m/n, a/b)$ es única si $y_0 > a/b$.

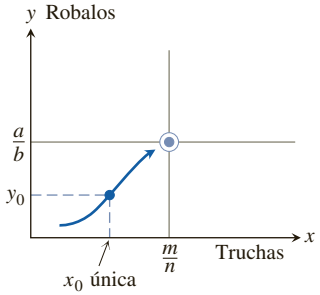


FIGURA 9.36 Para cualquier $y < a/b$ sólo una trayectoria solución nos lleva al punto de reposo $(m/n, a/b)$.

8. Demuestre que la ecuación diferencial de segundo orden $y'' = F(x, y, y')$ se puede reducir a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = z,$$
$$\frac{dz}{dx} = F(x, y, z).$$

¿Puede hacerse algo parecido con la ecuación diferencial de n-ésimo orden $y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$?

Ecuaciones Lotka-Volterra del modelo depredador-presa

En 1925, Lotka y Volterra presentaron las ecuaciones *depredador-presa*, un sistema de ecuaciones que modela las poblaciones de dos especies, una de las cuales es presa de la otra. Suponga que $x(t)$ representa el número de conejos que viven en una región en el instante t, y $y(t)$ el número de zorros en la misma región. Conforme transcurre el tiempo, el número de conejos aumenta a una tasa proporcional a su población, y disminuye a una tasa proporcional al número de encuentros entre conejos y zorros. Los zorros, que compiten entre sí por alimento, aumentan de número en una tasa proporcional al número de encuentros con conejos, pero disminuyen a una tasa proporcional al número de zorros. Se supone que el número de encuentros entre conejos y zorros es proporcional al producto de las dos poblaciones. Estos supuestos nos conducen al sistema autónomo

$$\frac{dx}{dt} = (a - by)x$$
$$\frac{dy}{dt} = (-c + dx)y$$

donde a, b, c y d son constantes positivas. Los valores de estas constantes varían de acuerdo con la situación específica que se está modelando. Podemos estudiar la naturaleza de los cambios de población sin definir estas constantes con valores específicos.

9. ¿Qué ocurre con la población de conejos si no hay zorros presentes?

10. ¿Qué ocurre con la población de zorros si no hay conejos presentes?

11. Demuestre que $(0, 0)$ y $(c/d, a/b)$ son puntos de equilibrio. Explique el significado de cada uno de estos puntos.

12. Demuestre, por diferenciación, que la función

$$C(t) = a \ln y(t) - by(t) - dx(t) + c \ln x(t)$$

es constante cuando $x(t)$ y $y(t)$ son positivas y satisfacen las ecuaciones del modelo depredador-presa.

Mientras que x y y pueden cambiar con el tiempo, $C(t)$ no lo hace. Por lo tanto, C es una *cantidad que se conserva* y su existencia nos lleva a la *ley de conservación*. Una trayectoria que inicia en el punto (x, y) en el instante $t = 0$ proporciona un valor de C que permanece sin cambio en instantes futuros. Cada valor de la constante C proporciona una trayectoria del sistema autónomo, y estas trayectorias se acercan, en lugar de formar espirales hacia dentro o hacia fuera. Las poblaciones de conejos y zorros oscilan entre ciclos repetidos a lo largo de una trayectoria fija. La figura 9.37 muestra varias trayectorias del sistema depredador-presa.

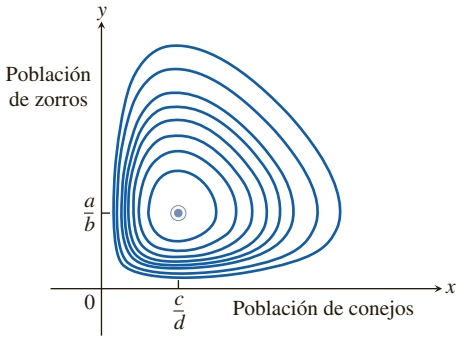


FIGURA 9.37 Algunas trayectorias a lo largo de las cuales se conserva C.

13. Utilizando un procedimiento similar al del texto para el modelo competencia-depredador, demuestre que cada trayectoria es recorrida en sentido contrario al de las manecillas del reloj conforme el tiempo t crece.

A lo largo de cada trayectoria, tanto la población de conejos como la de zorros fluctúan entre sus niveles máximo y mínimo. Los niveles máximo y mínimo de la población de conejos se presentan cuando la trayectoria interseca la recta horizontal $y = a/b$. Para la población de zorros, se presentan donde la trayectoria interseca la recta vertical $x = c/d$. Cuando la población de conejos es máxima, la población de zorros está por debajo de su valor máximo. Conforme la población de conejos disminuye desde este punto en el tiempo, nos movemos en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de la trayectoria, y la población de zorros crece hasta que alcanza su valor máximo. En ese punto, la población de conejos ha declinado hasta $x = c/d$ y ya no está en su valor pico. Vemos que la población de zorros alcanza su valor máximo tiempo después que la de los conejos. La población de depredadores alcanza sus valores máximos *tiempo después* que la población de las presas. Este efecto de rezago se muestra en la figura 9.38, que incluye las gráficas tanto de $x(t)$ como de $y(t)$.

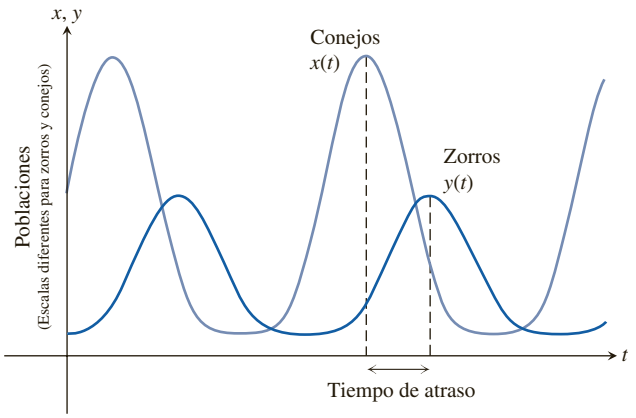


FIGURA 9.38 Las poblaciones de zorros y conejos oscilan periódicamente; el valor máximo en la población de zorros se presenta después del máximo de la población de conejos.

14. En algún instante durante el ciclo de la trayectoria, un lobo invade el territorio de los zorros y conejos, come algunos conejos y después se aleja. ¿Significa esto que la población de zorros, a partir de entonces, tendrá un valor máximo menor? Justifique su respuesta.

Capítulo 9 Preguntas de repaso

1. ¿Qué es una ecuación diferencial de primer orden? ¿Cuándo una función es una solución de tal ecuación?

2. ¿Qué es una solución general? ¿Y una solución particular?

3. ¿Qué es el campo de dirección de una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$? ¿Qué se puede aprender de estos campos?

4. Describa el método de Euler para resolver numéricamente el problema con valor inicial $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$. Dé un ejemplo. Comente la exactitud del método. ¿Por qué podría ser necesario resolver de manera numérica un problema con valor inicial?

5. ¿Cómo se resuelven las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden?

6. ¿Qué es una trayectoria ortogonal de una familia de curvas? Describa cómo se obtiene una para una familia determinada de curvas.

7. ¿Qué es una ecuación diferencial autónoma? ¿Qué son los valores de equilibrio? ¿En qué difieren de los puntos críticos? ¿Qué es un valor de equilibrio estable? ¿Qué es un valor de equilibrio inestable?

8. ¿Cómo se construye la línea de fase para una ecuación diferencial autónoma? ¿De qué manera nos ayuda la línea de fase para elaborar una gráfica que muestre cualitativamente una solución de la ecuación diferencial?

9. ¿Por qué el modelo exponencial no es realista para predecir crecimiento poblacional a largo plazo? ¿Cómo corrige el modelo logístico la deficiencia del modelo exponencial para el crecimiento poblacional? ¿Qué es la ecuación diferencial logística? ¿Cuál es la forma de su solución? Describa la gráfica de la solución logística.

10. ¿Qué es un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales? ¿Cuál es la solución de un sistema como éste? ¿Qué es una trayectoria del sistema?

Capítulo 9 Ejercicios de práctica

En los ejercicios 1 a 16, resuelva la ecuación diferencial.

1. $y' = xe^y\sqrt{x-2}$

2. $y' = xye^{x^2}$

3. $\sec x\, dy + x\cos^2 y\, dx = 0$

4. $2x^2\, dx - 3\sqrt{y}\csc x\, dy = 0$

5. $y' = \dfrac{e^y}{xy}$

6. $y' = xe^{x-y}\csc y$

7. $x(x-1)\, dy - y\, dx = 0$

8. $y' = (y^2 - 1)x^{-1}$

9. $2y' - y = xe^{x/2}$

10. $\dfrac{y'}{2} + y = e^{-x}\operatorname{sen} x$

11. $xy' + 2y = 1 - x^{-1}$

12. $xy' - y = 2x\ln x$

13. $(1 + e^x)\, dy + (ye^x + e^{-x})\, dx = 0$

14. $e^{-x}\, dy + (e^{-x}y - 4x)\, dx = 0$

15. $(x + 3y^2)\, dy + y\, dx = 0$ (*Sugerencia*: $d(xy) = y\, dx + x\, dy$)

16. $x\, dy + (3y - x^{-2}\cos x)\, dx = 0, \quad x > 0$

Problemas con valor inicial

En los ejercicios 17 a 22, resuelva el problema con valor inicial.

17. $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} + 2y = x, \quad x > -1, \quad y(0) = 1$

18. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 1, \quad x > 0, \quad y(1) = 1$

19. $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = x^2, \quad y(0) = -1$

20. $x\, dy + (y - \cos x)\, dx = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

21. $xy' + (x - 2)y = 3x^3e^{-x}, \quad y(1) = 0$

22. $y\, dx + (3x - xy + 2)\, dy = 0, \quad y(2) = -1, \quad y < 0$

Método de Euler

En los ejercicios 23 y 24, utilice el método de Euler para resolver el problema con valor inicial en el intervalo que se especifica, iniciando en x_0 con $dx = 0.1$.

T **23.** $y' = y + \cos x, \quad y(0) = 0; \quad 0 \le x \le 2; \quad x_0 = 0$

T **24.** $y' = (2 - y)(2x + 3), \; y(-3) = 1; \; -3 \le x \le -1; \; x_0 = -3$

En los ejercicios 25 y 26, utilice el método de Euler con $dx = 0.05$ para estimar $y(c)$, donde y es la solución del problema con valor inicial dado.

T **25.** $c = 3; \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - 2y}{x + 1}, \quad y(0) = 1$

T **26.** $c = 4; \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 2y + 1}{x}, \quad y(1) = 1$

En los ejercicios 27 y 28, utilice el método de Euler para resolver gráficamente el problema con valor inicial, iniciando en $x_0 = 0$ con

a) $dx = 0.1$. ***b)*** $dx = -0.1$.

T **27.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{e^{x+y+2}}, \quad y(0) = -2$

T **28.** $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2 + y}{e^y + x}, \quad y(0) = 0$

Campos de dirección

En los ejercicios 29 a 32, dibuje una parte del campo de dirección de la ecuación. Después, agregue a su dibujo la curva solución que pasa por el punto $P(1, -1)$. Utilice el método de Euler con $x_0 = 1$ y $dx = 0.2$ para estimar $y(2)$. Redondee sus respuestas a cuatro cifras decimales. Obtenga por comparación el valor exacto de $y(2)$.

29. $y' = x$ **30.** $y' = 1/x$

31. $y' = xy$ **32.** $y' = 1/y$

Ecuaciones diferenciales autónomas y líneas de fase

En los ejercicios 33 y 34:

a) Identifique los valores de equilibrio. ¿Cuáles son estables y cuáles inestables?

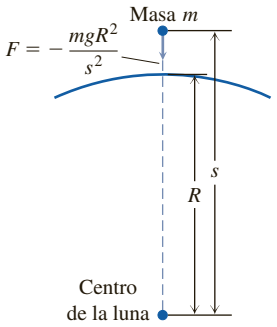
b) Construya una línea de fase. Identifique los signos de y' y y''.

c) Dibuje un grupo representativo de curvas solución.

33. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 1$ **34.** $\dfrac{dy}{dx} = y - y^2$

Aplicaciones

35. Velocidad de escape La atracción gravitacional F ejercida por una luna sin atmósfera sobre un cuerpo de masa m, a una distancia s del centro de la luna, está dada por la ecuación $F = -mg\,R^2 s^{-2}$, donde g es la aceleración de la gravedad en la superficie de la luna y R es su radio (vea la figura). La fuerza F es negativa, ya que actúa en la dirección en que s disminuye.



a) Si el cuerpo se proyecta verticalmente hacia arriba desde la superficie de la luna con una velocidad inicial v_0 en el instante $t = 0$, utilice la segunda ley de Newton, $F = ma$, para demostrar que la velocidad del cuerpo en la posición s está dada por la ecuación

$$v^2 = \frac{2gR^2}{s} + {v_0}^2 - 2gR.$$

Por lo tanto, la velocidad permanece positiva mientras $v_0 \ge \sqrt{2gR}$. La velocidad $v_0 = \sqrt{2gR}$ es la **velocidad de escape** de la luna. Un cuerpo lanzado hacia arriba con ésta o una velocidad mayor, escapará de la atracción gravitacional de la luna.

b) Demuestre que si $v_0 = \sqrt{2gR}$, entonces,

$$s = R\left(1 + \frac{3v_0}{2R}t\right)^{2/3}.$$

36. Deslizamiento hasta detenerse La tabla 9.6 muestra la distancia s (en metros) que se deslizó Jonathan Krueger en patines con ruedas en línea en t segundos. Determine un modelo de su posición en la forma de la ecuación (2) de la sección 9.3. Su velocidad inicial era $v_0 = 0.86$ m/s, su masa $m = 30.84$ kg (él pesaba 68 lb), y la distancia total que se deslizó fue de 0.97 m.

TABLA 9.6 Datos de patinaje de Jonathan Krueger

t (s)	s (m)	t (s)	s (m)	t (s)	s (m)
0	0	0.93	0.61	1.86	0.93
0.13	0.08	1.06	0.68	2.00	0.94
0.27	0.19	1.20	0.74	2.13	0.95
0.40	0.28	1.33	0.79	2.26	0.96
0.53	0.36	1.46	0.83	2.39	0.96
0.67	0.45	1.60	0.87	2.53	0.97
0.80	0.53	1.73	0.90	2.66	0.97

Capítulo 9 Ejercicios adicionales y avanzados

Teoría y aplicaciones

1. Transporte a través de la membrana celular En ciertas condiciones, el resultado del movimiento de una sustancia disuelta que atraviesa la membrana de una célula se describe con la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = k\frac{A}{V}(c - y).$$

En esta ecuación, y es la concentración de la sustancia dentro de la célula, y dy/dt es la tasa a la que cambia y con respecto

al tiempo. Las letras k, A, V y c representan constantes: k es el *coeficiente de permeabilidad* (una propiedad de la membrana), A es el área de la superficie de la membrana, V es el volumen de la célula, y c es la concentración de la sustancia fuera de la célula. La ecuación indica que la razón a la que cambia la concentración dentro de la célula es proporcional a la diferencia entre la concentración en ella y la concentración en el exterior.

a) Resuelva la ecuación para $y(t)$, usando y_0 para denotar $y(0)$.

b) Determine la concentración de estado estable, $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

2. Altura de un cohete Si una fuerza externa F actúa sobre un sistema cuya masa varía con el tiempo, la ley de Newton sobre el movimiento es

$$\frac{d(mv)}{dt} = F + (v + u)\frac{dm}{dt}.$$

En esta ecuación, m es la masa del sistema en el instante t, v su velocidad, y $v + u$ es la velocidad de la masa que está entrando al sistema (o saliendo de éste) a una velocidad dm/dt. Suponga que un cohete de masa inicial m_0 parte del reposo, pero se conduce hacia arriba por medio de la combustión de parte de su masa, a una razón constante de $dm/dt = -b$ unidades por segundo y a una velocidad constante relativa del cohete de $u = -c$. La única fuerza externa que actúa sobre el cohete es $F = -mg$ debida a la gravedad. Con estos supuestos, demuestre que la altura del cohete por arriba del suelo después de t segundos (t pequeño en comparación con m_0/b) es

$$y = c\left[t + \frac{m_0 - bt}{b}\ln\frac{m_0 - bt}{m_0}\right] - \frac{1}{2}gt^2.$$

3. ***a***) Suponga que $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en el intervalo $[a, b]$. Utilice la primera parte del teorema fundamental del cálculo, para demostrar que cualquier función y que satisface la ecuación

$$v(x)y = \int v(x)Q(x)\,dx + C$$

para $v(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ es una solución de la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

b) Si $C = y_0 v(x_0) - \int_{x_0}^{x} v(t)Q(t)\,dt$, demuestre que cualquier solución y en el inciso *a*) satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

4. (*Continuación del ejercicio 3*). Considere las mismas hipótesis del ejercicio 3 y que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación lineal de primer orden que satisfacen la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

a) Verifique que $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ satisface el problema con valor inicial

$$y' + P(x)y = 0, \quad y(x_0) = 0.$$

b) Para el factor de integración $v(x) = e^{\int P(x)\,dx}$, demuestre que

$$\frac{d}{dx}(v(x)[\,y_1(x) - y_2(x)\,]) = 0.$$

Concluya que $v(x)[y_1(x) - y_2(x)] \equiv$ constante.

c) Con base en el inciso *a*), tenemos que $y_1(x_0) - y_2(x_0) = 0$. Como $v(x) > 0$ para $a < x < b$, utilice el inciso *b*) para establecer que $y_1(x) - y_2(x) \equiv 0$ en el intervalo (a, b). Por lo tanto, $y_1(x) = y_2(x)$ para toda $a < x < b$.

Ecuaciones homogéneas

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

se denomina *homogénea*. Se puede transformar en una ecuación cuyas variables son separables al definir una variable nueva $v = y/x$. Entonces, $y = vx$ y

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial original y agrupando términos con variables semejantes, obtenemos la ecuación separable

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v - F(v)} = 0.$$

Después de resolver esta ecuación separable, la solución de la ecuación original se obtiene cuando se sustituye v por y/x.

Resuelva las ecuaciones homogéneas en los ejercicios 5 a 10. Primero escriba la ecuación en la forma de una ecuación homogénea.

5. $(x^2 + y^2)\,dx + xy\,dy = 0$

6. $x^2\,dy + (y^2 - xy)\,dx = 0$

7. $(xe^{y/x} + y)\,dx - x\,dy = 0$

8. $(x + y)\,dy + (x - y)\,dx = 0$

9. $y' = \dfrac{y}{x} + \cos\dfrac{y - x}{x}$

10. $\left(x\,\text{sen}\,\dfrac{y}{x} - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}\,dy = 0$

Capítulo 9 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulos Mathematica/Maple

Dosis de medicamentos*: *¿Son efectivas? ¿Son seguras?
Formule y resuelva un modelo con valor inicial para la absorción de medicamentos en el torrente sanguíneo.

Ecuaciones diferenciales de primer orden y campos de dirección
Dibuje los campos de dirección y las curvas solución para varias condiciones iniciales de algunas ecuaciones diferenciales de primer orden.

10 Sucesiones y series infinitas

INTRODUCCIÓN Hasta el momento, en cálculo nos hemos centrado en el estudio de la derivada y la integral de una función. Ahora nos dedicaremos a un tercer tema importante e interesante en el análisis y cálculo de funciones, llamado *series infinitas*. Estas series nos ofrecen formas precisas para expresar muchos números y funciones, conocidos y nuevos, como sumas aritméticas con una cantidad infinita de términos. Por ejemplo, aprenderemos que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

y

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} - \frac{x^8}{40{,}320} - \cdots.$$

Con frecuencia, los científicos e ingenieros simplifican un problema sustituyendo una función con una aproximación; para ello, utilizan los primeros términos de la serie que corresponde a la función. Un método representa una función diferenciable conocida $f(x)$ como una suma infinita de potencias de x, de manera que tome la apariencia de un "polinomio con un número infinito de términos", tal como sucede con la función coseno expresada anteriormente. Además, el método amplía nuestro conocimiento de cómo evaluar, diferenciar e integrar polinomios, de manera que será posible trabajar con funciones más generales que las que hemos encontrado hasta ahora. Con frecuencia, las nuevas funciones son soluciones a ecuaciones diferenciales que surgen en importantes aplicaciones de las matemáticas a ciencias e ingeniería.

Todos sabemos cómo sumar dos números, o incluso varios. Pero, ¿cómo sumar una cantidad infinita de números? O bien, de manera más general, ¿cómo sumar una cantidad infinita de potencias de x? En este capítulo responderemos estas preguntas, que son parte de la teoría de sucesiones y series infinitas.

Al igual que en el cálculo diferencial e integral, los límites desempeñan un importante papel en el desarrollo de las series infinitas.

10.1 Sucesiones

Las sucesiones son fundamentales en el estudio de series infinitas y en muchas aplicaciones de las matemáticas. Vimos un ejemplo de una sucesión cuando estudiamos el método de Newton en la sección 4.6. Allí generamos una sucesión de aproximaciones x_n que cada vez era más cercana a la raíz de una función diferenciable. Ahora analizaremos sucesiones generales de números y las condiciones en las cuales convergen hacia un número finito.

Representación de sucesiones

Una sucesión es una lista de números

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

en un orden determinado. Cada a_1, a_2, a_3, etcétera, representa un número. Éstos son los **términos** de la sucesión. Por ejemplo, la sucesión

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots, 2n, \ldots$$

tiene como primer término $a_1 = 2$, como segundo término $a_2 = 4$ y como n-ésimo término $a_n = 2n$. El entero n se denomina **índice** de a_n e indica dónde aparece a_n en la lista. El orden es importante. La sucesión $2, 4, 6, 8, \ldots$ no es la misma que la sucesión $4, 2, 6, 8, \ldots$
Podemos considerar la sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

como una función que envía el 1 a a_1, el 2 a a_2, el 3 a a_3 y, en general, envía el entero positivo n al n-ésimo término a_n. Con mayor precisión, una **sucesión infinita** de números es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos.
La función asociada a la sucesión

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots, 2n, \ldots$$

envía el 1 a $a_1 = 2$, el 2 a $a_2 = 4$, y así sucesivamente. El comportamiento general de dicha sucesión se describe por medio de la fórmula $a_n = 2n$.

Asimismo, podemos hacer que el dominio esté constituido por los enteros mayores que un número dado n_0, y también permitimos las sucesiones de este tipo. Por ejemplo, la sucesión

$$12, 14, 16, 18, 20, 22, \ldots$$

se describe por medio de la fórmula $a_n = 10 + 2n$. También puede describirse mediante la sencilla fórmula $b_n = 2n$, donde el índice n inicia en 6 y aumenta a partir de ahí. Para tener fórmulas más sencillas, permitimos que el primer índice de la sucesión sea cualquier entero. En la sucesión anterior, $\{a_n\}$ inicia con a_1, mientras que $\{b_n\}$ inicia con b_6.

Las sucesiones pueden describirse anotando las reglas que especifican sus elementos, tal como

$$a_n = \sqrt{n}, \quad b_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \quad c_n = \frac{n-1}{n}, \quad d_n = (-1)^{n+1},$$

o bien, mediante el listado de sus términos:

$$\{a_n\} = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\}$$

$$\{b_n\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ldots\right\}$$

$$\{c_n\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right\}$$

$$\{d_n\} = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}.$$

En ocasiones, también escribimos una sucesión usando la regla a la que obedecen, como sucede, por ejemplo, con

$$\{a_n\} = \{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}.$$

La figura 10.1 muestra dos formas de representar gráficamente las sucesiones. La primera coloca los primeros puntos a partir de $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ en el eje real. El segundo método presenta la gráfica de la función que define la sucesión. La función sólo está definida para entradas enteras, mientras que la gráfica consiste en algunos puntos en el plano xy, ubicados en $(1, a_1), (2, a_2), \ldots, (n, a_n), \ldots$

Convergencia y divergencia

En ocasiones, los números en una sucesión se aproximan a un solo valor conforme el índice n crece. Lo anterior ocurre en la sucesión

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\},$$

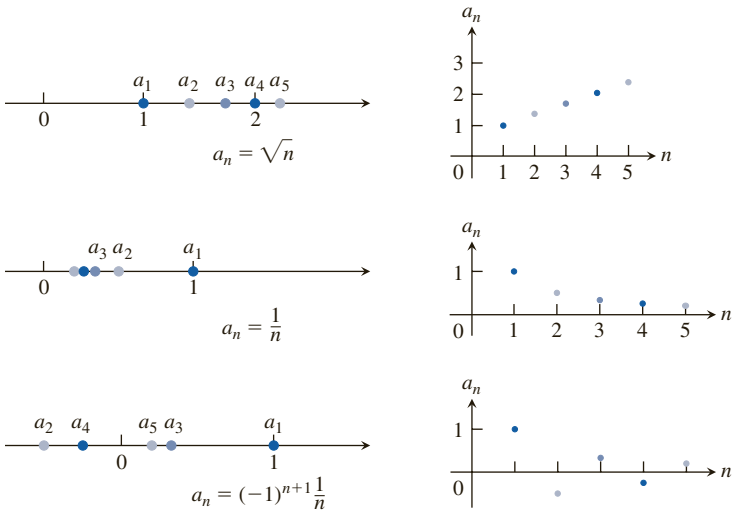


FIGURA 10.1 Las sucesiones pueden representarse como puntos en una recta real o como puntos en el plano, donde el eje horizontal n es el número índice del término y el eje vertical a_n es su valor.

cuyos términos se aproximan a 0 cuando n se hace grande, y en la sucesión

$$\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, 1 - \frac{1}{n}, \ldots\right\},$$

cuyos términos se aproximan a 1. Por otra parte, sucesiones como

$$\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\}$$

tienen términos que se hacen más grandes que cualquier número cuando n aumenta, en tanto que sucesiones como

$$\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}$$

saltan de 1 a -1, y nunca convergen a un solo valor. La siguiente definición capta el significado de tener una sucesión que converge a un valor límite. Indica que si avanzamos lo suficiente en la sucesión, tomando el índice n mayor que algún valor N, la diferencia entre a_n y el límite de la sucesión se hace menor que cualquier número preestablecido $\epsilon > 0$.

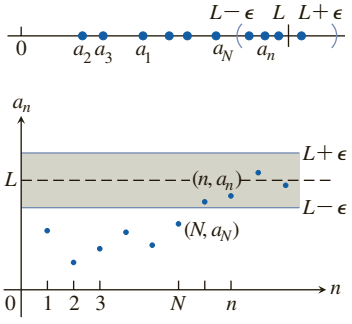


FIGURA 10.2 En la representación de una sucesión como puntos en el plano, $a_n \to L$ si $y = L$ es una asíntota horizontal de la sucesión de puntos $\{(n, a_n)\}$. En esta figura, todas las a_n, después de a_N, están a menos de ϵ de L.

DEFINICIONES La sucesión $\{a_n\}$ **converge** al número L si, para todo número positivo ϵ, existe un entero N tal que, para toda n,

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \epsilon.$$

Si no existe tal número L, decimos que $\{a_n\}$ **diverge**.

Si $\{a_n\}$ converge a L, escribimos $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ o, simplemente, $a_n \to L$ y llamamos a L el **límite** de la sucesión (figura 10.2).

La definición es muy similar a la definición del límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a ∞ [$\lim_{n\to\infty} f(x)$, en la sección 2.6]. Aprovecharemos tal relación para calcular límites de sucesiones.

EJEMPLO 1 Demuestre que

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ***b)*** $\lim_{n\to\infty} k = k$ (cualquier constante k)

Solución

a) Suponga que $\epsilon > 0$. Debemos demostrar que existe un entero N tal que, para toda n,

$$n > N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon.$$

Dicha implicación se cumple si $(1/n) < \epsilon$ o $n > 1/\epsilon$. Si N es cualquier entero mayor que $1/\epsilon$, la implicación se cumplirá para toda $n > N$. Esto demuestra que $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$.

b) Suponga que $\epsilon > 0$. Debemos demostrar que existe un entero N, tal que para toda n

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |k - k| < \epsilon.$$

Como $k - k = 0$, es posible utilizar cualquier entero positivo para N y la implicación se cumplirá. Esto demuestra que $\lim_{n\to\infty} k = k$ para cualquier constante k. ■

EJEMPLO 2 Demuestre que la sucesión $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}$ diverge.

Solución Suponga que la sucesión converge a algún número L. Si elegimos $\epsilon = 1/2$ en la definición de límite, todos los términos a_n de la sucesión con índice n mayor que algún N deben estar a no más de $\epsilon = 1/2$ de L. Puesto que el número 1 aparece en forma repetida como un elemento de la sucesión cada dos términos, debemos considerar que el número 1 está a menos de $\epsilon = 1/2$ de distancia de L. Se sigue que $|L - 1| < 1/2$ o, de manera equivalente, $1/2 < L < 3/2$. De la misma forma, el número -1 aparece de manera repetida en la sucesión con índice arbitrariamente grande. Así que también debemos tener que $|L - (-1)| < 1/2$ o, de manera equivalente, $-3/2 < L < -1/2$. Pero el número L no puede estar en ambos intervalos $(1/2, 3/2)$ y $(-3/2, -1/2)$, ya que no se traslapan. Por lo tanto, no existe el límite L y la sucesión diverge.

Observe que el mismo argumento funciona para cualquier número positivo ϵ menor que 1, no sólo $1/2$. ■

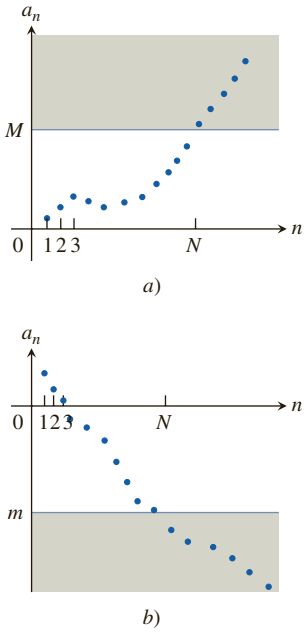


FIGURA 10.3 *a)* La sucesión diverge a ∞ porque, sin importar qué número M se elija, los términos de la sucesión, a partir de algún índice N, están en la banda sombreada por arriba de M. *b)* La sucesión diverge a $-\infty$, pues todos los términos después de algún índice N están por debajo de cualquier número elegido m.

La sucesión $\{\sqrt{n}\}$ también diverge, pero por una razón diferente. Cuando n aumenta, sus términos se hacen mayores que cualquier número fijo. Describimos el comportamiento de esta sucesión escribiendo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty.$$

Al indicar que infinito es el límite de una sucesión, no decimos que la diferencia entre los términos a_n y ∞ se haga más pequeña cuando n aumenta. Ni tampoco aseguramos que existe algún número infinito al que la sucesión se aproxime. Sólo utilizamos una notación que refleja la idea de que, tarde o temprano, a_n se hace y permanece mayor que cualquier número fijo cuando n aumenta (vea la figura 10.3*a*). Los términos de una sucesión también pueden decrecer hacia menos infinito, como en la figura 10.3*b*).

DEFINICIÓN La sucesión $\{a_n\}$ **diverge a infinito** si para todo número M existe un entero N, tal que para todo n mayor que N, $a_n > M$. Si se cumple la condición, escribimos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{o} \qquad a_n \to \infty.$$

De manera análoga, si para todo número m existe un entero N, tal que para todo $n > N$, tenemos $a_n < m$, entonces, decimos que $\{a_n\}$ **diverge a menos infinito** y escribimos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \text{o} \qquad a_n \to -\infty.$$

Una sucesión puede divergir sin que dicha divergencia sea a infinito o a menos infinito, como vimos en el ejemplo 2. Las sucesiones $\{1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, \ldots\}$ y $\{1, 0, 2, 0, 3, 0, \ldots\}$ también son ejemplos de tales divergencias.

La convergencia o divergencia de una sucesión no resulta afectada por los valores de cualquier cantidad de sus términos iniciales (sin importar si omitimos o cambiamos los primeros 10, 1000, o incluso el primer millón de términos). En la figura 10.2 se observa que sólo la parte de la sucesión que queda después de que se han eliminado algunos de los términos iniciales determina si la sucesión tiene un límite, y cuál es el valor de éste en caso de que exista.

Cálculo de límites de sucesiones

Como las sucesiones son funciones con dominio restringido a los enteros positivos, no es demasiado sorprendente que los teoremas acerca de límites de funciones estudiados en el capítulo 2 tengan su versión para sucesiones.

TEOREMA 1: Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales, y sean A y B números reales. Las siguientes reglas se cumplen si $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = B$.

1. *Regla de la suma:* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$
2. *Regla de la diferencia:* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$
3. *Regla del múltiplo constante:* $\lim_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot B$ (cualquier número k)
4. *Regla del producto:* $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
5. *Regla del cociente:* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$ si $B \neq 0$

La demostración es semejante a la del teorema 1 de la sección 2.2, por lo que se omite.

EJEMPLO 3 Si combinamos el teorema 1 con los límites del ejemplo 1, tendremos

a) $\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = -1 \cdot \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = -1 \cdot 0 = 0$ Regla del múltiplo constante y el ejemplo 1*a*)

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 1 - 0 = 1$ Regla de la diferencia y el ejemplo 1*a*)

c) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{5}{n^2} = 5 \cdot \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 5 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ Regla del producto

d) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{4 - 7n^6}{n^6 + 3} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{(4/n^6) - 7}{1 + (3/n^6)} = \dfrac{0 - 7}{1 + 0} = -7.$ Reglas de la suma y el cociente ■

Sea cuidadoso al aplicar el teorema 1. Por ejemplo, éste en ningún momento afirma que cada una de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tenga límite si su suma $\{a_n + b_n\}$ posee un límite. Por ejemplo, $\{a_n\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y $\{b_n\} = \{-1, -2, -3, \ldots\}$ divergen, pero su suma $\{a_n + b_n\} = \{0, 0, 0, \ldots\}$ claramente converge a 0.

Una consecuencia del teorema 1 es que todo múltiplo diferente de cero de una sucesión divergente, $\{a_n\}$, diverge. Suponga lo contrario, es decir, que $\{ca_n\}$ converge para algún número $c \neq 0$. Entonces, si tomamos $k = 1/c$, en la regla del múltiplo constante en el teorema 1, veremos que la sucesión

$$\left\{\frac{1}{c} \cdot ca_n\right\} = \{a_n\}$$

converge. Por lo tanto, $\{ca_n\}$ no puede converger, a menos que $\{a_n\}$ también converja. Si $\{a_n\}$ no converge, entonces, $\{ca_n\}$ no converge.

El siguiente teorema es la versión para sucesiones del teorema del sándwich de la sección 2.2. En el ejercicio 109 se le pedirá que demuestre el teorema. (Vea la figura 10.4).

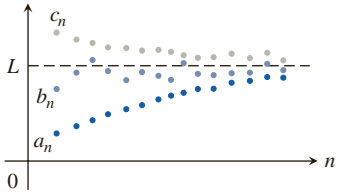


FIGURA 10.4 Los términos de la sucesión $\{b_n\}$ están comprendidos entre los de $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$, lo que los lleva al mismo límite común L.

TEOREMA 2: Teorema del sándwich para sucesiones Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones de números reales. Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ se cumple para toda n mayor que algún índice N, y si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, entonces, también $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Una consecuencia inmediata del teorema 2 es que si $|b_n| \leq c_n$ y $c_n \to 0$, entonces, $b_n \to 0$, ya que $-c_n \leq b_n \leq c_n$. Consideraremos este hecho en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Como $1/n \to 0$, sabemos que

a) $\dfrac{\cos n}{n} \to 0$ ya que $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\cos n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$;

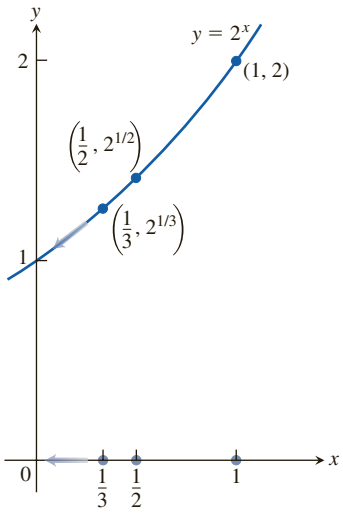


FIGURA 10.5 Cuando $n \to \infty$, $1/n \to 0$ y $2^{1/n} \to 2^0$ (ejemplo 6). Los términos de $\{1/n\}$ se muestran en el eje x; los términos de $\{2^{1/n}\}$ se muestran como los valores de y en la gráfica de $f(x) = 2^x$.

b) $\dfrac{1}{2^n} \to 0$ ya que $0 \le \dfrac{1}{2^n} \le \dfrac{1}{n}$;

c) $(-1)^n \dfrac{1}{n} \to 0$ ya que $-\dfrac{1}{n} \le (-1)^n \dfrac{1}{n} \le \dfrac{1}{n}$. ■

La aplicación de los teoremas 1 y 2 se amplió por medio de un teorema que establece que el hecho de aplicar funciones continuas a una sucesión convergente produce una sucesión convergente. A continuación, enunciamos el teorema, dejando su demostración para el ejercicio 110.

TEOREMA 3: Teorema de la función continua para sucesiones Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Si $a_n \to L$ y si f es una función continua en L y está definida para toda a_n, entonces, $f(a_n) \to f(L)$.

EJEMPLO 5 Demuestre que $\sqrt{(n+1)/n} \to 1$.

Solución Sabemos que $(n+1)/n \to 1$. Si tomamos $f(x) = \sqrt{x}$ y $L = 1$ en el teorema 3, obtendremos $\sqrt{(n+1)/n} \to \sqrt{1} = 1$. ■

EJEMPLO 6 La sucesión $\{1/n\}$ converge a 0. Tomando $a_n = 1/n$, $f(x) = 2^x$ y $L = 0$ en el teorema 3, veremos que $2^{1/n} = f(1/n) \to f(L) = 2^0 = 1$. La sucesión $\{2^{1/n}\}$ converge a 1 (figura 10.5). ■

Uso de la regla de L'Hôpital

El siguiente teorema formaliza la relación entre $\lim_{n\to\infty} a_n$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Nos permite utilizar la regla de L'Hôpital para determinar los límites de algunas sucesiones.

TEOREMA 4 Suponga que $f(x)$ es una función definida para toda $x \ge n_0$, y que $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales tal que $a_n = f(n)$ para $n \ge n_0$. Entonces,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Demostración Suponga que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. Entonces, para cada número positivo ϵ, existe un número M tal que, para toda x,

$$x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Sea N un entero mayor que M y mayor o igual que n_0. Entonces,

$$n > N \quad \Rightarrow \quad a_n = f(n) \quad \text{y} \quad |a_n - L| = |f(n) - L| < \epsilon.$$ ■

EJEMPLO 7 Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Solución La función $(\ln x)/x$ está definida para toda $x \ge 1$ y coincide con la sucesión dada en los enteros positivos. Por lo tanto, de acuerdo con el teorema 4, $\lim_{n\to\infty} (\ln n)/n$ será igual a $\lim_{x\to\infty} (\ln x)/x$, si este último existe. Una sola aplicación de la regla de L'Hôpital indica que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Concluimos que $\lim_{n\to\infty} (\ln n)/n = 0$. ■

Cuando utilizamos la regla de L'Hôpital para determinar el límite de una sucesión, con frecuencia tratamos a n como si fuera una variable continua real y derivamos directamente con respecto a n. Esto nos ahorra el trabajo de rescribir la fórmula para a_n, como lo hicimos en el ejemplo 7.

EJEMPLO 8 ¿La sucesión cuyo n-ésimo término es

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$$

converge? Si es así, determine el $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Solución El límite conduce a la forma indeterminada 1^∞. Podemos aplicar la regla de L'Hôpital si cambiamos primero a la forma $\infty \cdot 0$ y tomamos el logaritmo natural de a_n:

$$\begin{aligned}\ln a_n &= \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \\ &= n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right).\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \ln a_n &= \lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) && \text{Forma } \infty\cdot 0 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{1/n} && \text{Forma } \frac{0}{0} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{-2/(n^2-1)}{-1/n^2} && \text{Regla de L'Hôpital: diferenciar el numerador y el denominador.} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2-1} = 2.\end{aligned}$$

Como $\ln a_n \to 2$ y $f(x) = e^x$ es continua, el teorema 4 nos dice que

$$a_n = e^{\ln a_n} \to e^2.$$

La sucesión $\{a_n\}$ converge a e^2. ■

Límites que aparecen con frecuencia

El siguiente teorema indica algunos límites que surgen con frecuencia.

TEOREMA 5 Las seis sucesiones siguientes convergen a los límites que se listan:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3. $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \quad (x > 0)$

4. $\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (|x| < 1)$

5. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad$ (cualquier x)

6. $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad$ (cualquier x)

En las fórmulas 3 a 6, x permanece fija cuando $n \to \infty$.

Demostración El primer límite se calculó en el ejemplo 7. Los siguientes dos se demuestran tomando logaritmos y aplicando el teorema 4 (ejercicios 107 y 108). Las demostraciones restantes se incluyen en el apéndice 5. ■

EJEMPLO 9 Éstos son ejemplos de límites del teorema 5.

a) $\dfrac{\ln(n^2)}{n} = \dfrac{2\ln n}{n} \to 2 \cdot 0 = 0$ Fórmula 1

b) $\sqrt[n]{n^2} = n^{2/n} = (n^{1/n})^2 \to (1)^2 = 1$ Fórmula 2

c) $\sqrt[n]{3n} = 3^{1/n}(n^{1/n}) \to 1 \cdot 1 = 1$ Fórmula 3 con $x = 3$ y fórmula 2

d) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$ Fórmula 4 con $x = -\dfrac{1}{2}$

e) $\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^n = \left(1 + \dfrac{-2}{n}\right)^n \to e^{-2}$ Fórmula 5 con $x = -2$

f) $\dfrac{100^n}{n!} \to 0$ Fórmula 6 con $x = 100$ ■

Notación factorial
La notación $n!$ ("n factorial") significa el producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ de los enteros desde 1 hasta n. Observe que $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ Por lo tanto, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, y $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5 \cdot 4! = 120$. Definimos 0! como 1. Los factoriales crecen aún más rápido que las exponenciales, como sugiere la tabla. Los valores en la tabla se redondearon.

n	e^n	$n!$
1	3	1
5	148	120
10	22,026	3,628,800
20	4.9×10^8	2.4×10^{18}

Definiciones recursivas

Hasta ahora hemos calculado cada a_n de manera directa a partir del valor de n. Pero, en ocasiones, las sucesiones se definen de manera **recursiva**, lo cual da

1. El valor (o los valores) del término (o de los términos) inicial(es), y
2. Una regla, denominada **fórmula recursiva**, para calcular cualquier término posterior a partir de los términos que le anteceden.

EJEMPLO 10

a) Los enunciados $a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + 1$ para $n > 1$ definen la sucesión $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ de enteros positivos. Con $a_1 = 1$, tenemos $a_2 = a_1 + 1 = 2$, $a_3 = a_2 + 1 = 3$, y así sucesivamente.

b) Los enunciados $a_1 = 1$ y $a_n = n \cdot a_{n-1}$ para $n > 1$ definen la sucesión $1, 2, 6, 24, \ldots, n!, \ldots$ de factoriales. Con $a_1 = 1$, tenemos $a_2 = 2 \cdot a_1 = 2$, $a_3 = 3 \cdot a_2 = 6$, $a_4 = 4 \cdot a_3 = 24$, etcétera.

c) Los enunciados $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ para $n > 2$ definen la sucesión 1, 1, 2, 3, 5,..., de **números de Fibonacci**. Con $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$, tenemos $a_3 = 1 + 1 = 2$, $a_4 = 2 + 1 = 3$, $a_5 = 3 + 2 = 5$, y así sucesivamente.

d) Como vemos al aplicar el método de Newton (ejercicio 135), las proposiciones $x_0 = 1$ y $x_{n+1} = x_n - [(\text{sen } x_n - x_n^2)/(\cos x_n - 2x_n)]$ para $n > 0$ definen una sucesión que, cuando converge, da una solución de la ecuación sen $x - x^2 = 0$. ■

Sucesiones monótonas acotadas

Dos conceptos que desempeñan un papel importante en la determinación de la convergencia de una sucesión son los de sucesión *acotada* y de sucesión *monótona*.

DEFINICIONES Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada por arriba** si existe un número M tal que $a_n \le M$ para toda n. El número M es una **cota superior** para $\{a_n\}$. Si M es una cota superior para $\{a_n\}$, pero ningún número menor que M es una cota superior para $\{a_n\}$, entonces, M es la **mínima cota superior** para $\{a_n\}$.

Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada por abajo** si existe un número m tal que $a_n \ge m$ para toda n. El número m es una **cota inferior** para $\{a_n\}$. Si m es una cota inferior para $\{a_n\}$, pero ningún número mayor que m es una cota inferior para $\{a_n\}$, entonces, m es la **máxima cota inferior** para $\{a_n\}$.

Si $\{a_n\}$ está acotada por arriba y por abajo, entonces, $\{a_n\}$ **está acotada**. Si $\{a_n\}$ no está acotada, decimos que $\{a_n\}$ es una sucesión **no acotada**.

EJEMPLO 11

a) La sucesión $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ no tiene cota superior, ya que en algún momento sobrepasa a todo número M. Sin embargo, está acotada por abajo por todo número real menor o igual que 1. El número $m = 1$ es la máxima cota inferior de la sucesión.

b) La sucesión $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ está acotada por arriba por todo número real mayor o igual que 1. La cota superior $M = 1$ es la mínima cota superior (ejercicio 127). La sucesión también está acotada por abajo por todo número menor o igual que $\frac{1}{2}$, que es su máxima cota inferior. ■

Las sucesiones convergentes están acotadas.

Si una sucesión $\{a_n\}$ converge al número L, entonces, por definición, existe un número N tal que $|a_n - L| < 1$, si $n > N$. Esto es,

$$L - 1 < a_n < L + 1 \quad \text{para } n > N.$$

Si M es un número mayor que $L + 1$ y también mayor que la cantidad finita de números $a_1, a_2, \ldots, a_N$, entonces, para todo índice n tenemos $a_n \leq M$, por lo que $\{a_n\}$ está acotada por arriba. De manera análoga, si m es un número menor que $L - 1$ y menor que los números $a_1, a_2, \ldots, a_N$, entonces, m es una cota inferior de la sucesión. Por lo tanto, todas las sucesiones convergentes están acotadas.

Si bien es cierto que toda sucesión convergente está acotada, existen sucesiones acotadas que no son convergentes. Un ejemplo es la sucesión acotada $\{(-1)^{n+1}\}$ analizada en el ejemplo 2. Aquí, el problema es que algunas sucesiones acotadas saltan dentro de una banda determinada por cualquier cota inferior m y cualquier cota superior M (figura 10.6). Un tipo importante de sucesión que no se comporta de esa manera es aquella en la que cada término es al menos tan grande, o al menos tan pequeño, como su predecesor.

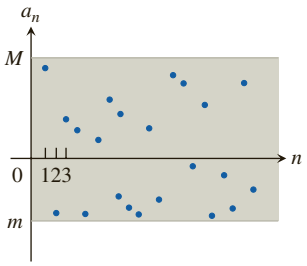


FIGURA 10.6 Algunas sucesiones acotadas saltan dentro de sus cotas y no convergen a límite alguno.

DEFINICIONES Una sucesión $\{a_n\}$ es **no decreciente** si $a_n \leq a_{n+1}$ para toda n. Esto es, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$ La sucesión es **no creciente** si $a_n \geq a_{n+1}$ para toda n. La sucesión $\{a_n\}$ es **monótona** si es no decreciente o no creciente.

EJEMPLO 12

a) La sucesión $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ es no decreciente.

b) La sucesión $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ es no decreciente.

c) La sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ es no creciente.

d) La sucesión constante $3, 3, 3, \ldots, 3, \ldots$ es tanto no decreciente como no creciente.

e) La sucesión $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ es no monótona. ■

Una sucesión no decreciente que está acotada por arriba siempre tiene una mínima cota superior. Asimismo, una sucesión no creciente acotada por abajo siempre cuenta con una máxima cota inferior. Tales resultados tienen como base la *propiedad de completitud* de los números reales analizada en el apéndice 6. Ahora demostramos que si L es la mínima cota superior de una sucesión no decreciente, entonces, la sucesión converge a L, y que si L es la máxima cota inferior de una sucesión no creciente, entonces, la sucesión converge a L.

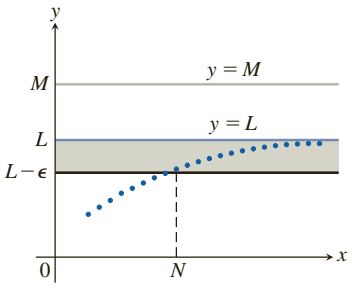


FIGURA 10.7 Si los términos de una sucesión no decreciente tienen una cota superior M, entonces, tienen un límite $L \leq M$.

TEOREMA 6: Teorema de la sucesión monótona Si una sucesión $\{a_n\}$ está acotada y es monótona, entonces, la sucesión converge.

Demostración Suponga que $\{a_n\}$ es no decreciente, L es su mínima cota superior y trazamos los puntos $(1, a_1)$, $(2, a_2)$,... (n, a_n),... en el plano xy. Si M es una cota superior de la sucesión, todos estos puntos estarán en la recta $y = M$ o debajo de ésta (figura 10.7). La

recta $y = L$ será la más baja. Ninguno de los puntos (n, a_n) estará por arriba de $y = L$, pero algunos estarán por arriba de cualquier recta inferior $y = L - \epsilon$, si ϵ es un número positivo. La sucesión converge a L, ya que

a) $a_n \leq L$ para *todos* los valores de n, y

b) dado cualquier $\epsilon > 0$, existe al menos un entero N para el que $a_N > L - \epsilon$.

El hecho de que $\{a_n\}$ sea no decreciente nos indica, además, que

$$a_n \geq a_N > L - \epsilon \qquad \text{para toda } n \geq N.$$

Por lo tanto, *todos* los números a_n posteriores al N-ésimo número estarán a una distancia menor que ϵ de L. Ésta es precisamente la condición para que L sea el límite de la sucesión $\{a_n\}$. La demostración para sucesiones no crecientes acotadas por abajo es similar. ■

Es importante hacer notar que el teorema 6, en ningún momento, afirma que las sucesiones convergentes sean monótonas. La sucesión $\{(-1)^{n+1}/n\}$ converge y está acotada, pero no es monótona, ya que alterna entre valores positivos y negativos, cuando se aproxima a cero. Lo que indica el teorema es que una sucesión no decreciente converge cuando está acotada por arriba, aunque de otra forma, diverge a infinito.

Ejercicios 10.1

Encontrar los términos de una sucesión

En cada uno de los ejercicios 1 a 6, se presenta una fórmula para el n-ésimo término a_n de la sucesión $\{a_n\}$. Determine los valores de a_1, a_2, a_3 y a_4.

1. $a_n = \dfrac{1 - n}{n^2}$

2. $a_n = \dfrac{1}{n!}$

3. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n - 1}$

4. $a_n = 2 + (-1)^n$

5. $a_n = \dfrac{2^n}{2^{n+1}}$

6. $a_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$

Cada uno de los ejercicios 7 a 12 presenta el primer término (o los dos primeros términos) de la sucesión con una fórmula recursiva para los términos restantes. Escriba los diez primeros términos de la sucesión.

7. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (1/2^n)$

8. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n/(n + 1)$

9. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = (-1)^{n+1} a_n/2$

10. $a_1 = -2, \quad a_{n+1} = n a_n/(n + 1)$

11. $a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

12. $a_1 = 2, \quad a_2 = -1, \quad a_{n+2} = a_{n+1}/a_n$

Encontrar la fórmula de una sucesión

En los ejercicios 13 a 26, halle una fórmula para el n-ésimo término de la sucesión.

13. La sucesión $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ — Números 1 con signos alternados

14. La sucesión $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ — Números 1 con signos alternados

15. La sucesión $1, -4, 9, -16, 25, \ldots$ — Cuadrados de los enteros positivos, con signos alternados

16. La sucesión $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$ — Recíprocos de los cuadrados de los enteros positivos, con signos alternados

17. $\frac{1}{9}, \frac{2}{12}, \frac{2^2}{15}, \frac{2^3}{18}, \frac{2^4}{21}, \ldots$ — Potencias de 2 divididas entre múltiplos de 3

18. $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{3}{20}, \frac{5}{30}, \ldots$ — Enteros cuya diferencia es 2, divididos entre productos de enteros consecutivos

19. La sucesión $0, 3, 8, 15, 24, \ldots$ — Cuadrados de los enteros positivos disminuidos en 1

20. La sucesión $-3, -2, -1, 0, 1, \ldots$ — Enteros a partir de -3

21. La sucesión $1, 5, 9, 13, 17, \ldots$ — Uno de cada dos enteros positivos impares

22. La sucesión $2, 6, 10, 14, 18, \ldots$ — Uno de cada dos enteros positivos pares

23. $\frac{5}{1}, \frac{8}{2}, \frac{11}{6}, \frac{14}{24}, \frac{17}{120}, \ldots$ — Enteros cuya diferencia es 3, divididos entre factoriales

24. $\frac{1}{25}, \frac{8}{125}, \frac{27}{625}, \frac{64}{3125}, \frac{125}{15{,}625}, \ldots$ — Cubos de enteros positivos divididos entre potencias de 5

25. La sucesión $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ — Números 1 y 0 alternados

26. La sucesión $0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, \ldots$ — Todos los enteros positivos repetidos

Convergencia y divergencia

¿Cuáles de las sucesiones $\{a_n\}$ en los ejercicios 27 a 90 convergen, y cuáles divergen? Determine el límite de cada sucesión convergente.

27. $a_n = 2 + (0.1)^n$

28. $a_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n}$

29. $a_n = \dfrac{1 - 2n}{1 + 2n}$

30. $a_n = \dfrac{2n + 1}{1 - 3\sqrt{n}}$

31. $a_n = \dfrac{1 - 5n^4}{n^4 + 8n^3}$

32. $a_n = \dfrac{n + 3}{n^2 + 5n + 6}$

33. $a_n = \dfrac{n^2 - 2n + 1}{n - 1}$

34. $a_n = \dfrac{1 - n^3}{70 - 4n^2}$

35. $a_n = 1 + (-1)^n$

36. $a_n = (-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

37. $a_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

38. $a_n = \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)\left(3 + \frac{1}{2^n}\right)$

39. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

40. $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

41. $a_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$

42. $a_n = \frac{1}{(0.9)^n}$

43. $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$

44. $a_n = n\pi \cos(n\pi)$

45. $a_n = \frac{\operatorname{sen} n}{n}$

46. $a_n = \frac{\operatorname{sen}^2 n}{2^n}$

47. $a_n = \frac{n}{2^n}$

48. $a_n = \frac{3^n}{n^3}$

49. $a_n = \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$

50. $a_n = \frac{\ln n}{\ln 2n}$

51. $a_n = 8^{1/n}$

52. $a_n = (0.03)^{1/n}$

53. $a_n = \left(1 + \frac{7}{n}\right)^n$

54. $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

55. $a_n = \sqrt[n]{10n}$

56. $a_n = \sqrt[n]{n^2}$

57. $a_n = \left(\frac{3}{n}\right)^{1/n}$

58. $a_n = (n+4)^{1/(n+4)}$

59. $a_n = \frac{\ln n}{n^{1/n}}$

60. $a_n = \ln n - \ln(n+1)$

61. $a_n = \sqrt[n]{4^n n}$

62. $a_n = \sqrt[n]{3^{2n+1}}$

63. $a_n = \frac{n!}{n^n}$ (*Sugerencia:* Compare con $1/n$.)

64. $a_n = \frac{(-4)^n}{n!}$

65. $a_n = \frac{n!}{10^{6n}}$

66. $a_n = \frac{n!}{2^n \cdot 3^n}$

67. $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/(\ln n)}$

68. $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

69. $a_n = \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$

70. $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

71. $a_n = \left(\frac{x^n}{2n+1}\right)^{1/n}, \quad x > 0$

72. $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

73. $a_n = \frac{3^n \cdot 6^n}{2^{-n} \cdot n!}$

74. $a_n = \frac{(10/11)^n}{(9/10)^n + (11/12)^n}$

75. $a_n = \tanh n$

76. $a_n = \operatorname{senh}(\ln n)$

77. $a_n = \frac{n^2}{2n-1} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

78. $a_n = n\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$

79. $a_n = \sqrt{n} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}}$

80. $a_n = (3^n + 5^n)^{1/n}$

81. $a_n = \tan^{-1} n$

82. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \tan^{-1} n$

83. $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{2^n}}$

84. $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$

85. $a_n = \frac{(\ln n)^{200}}{n}$

86. $a_n = \frac{(\ln n)^5}{\sqrt{n}}$

87. $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

88. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+n}}$

89. $a_n = \frac{1}{n}\int_1^n \frac{1}{x}dx$

90. $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^p}dx, \quad p > 1$

Sucesiones definidas recursivamente

En los ejercicios 91 a 98, suponga que cada sucesión converge, y determine su límite.

91. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{72}{1 + a_n}$

92. $a_1 = -1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 6}{a_n + 2}$

93. $a_1 = -4, \quad a_{n+1} = \sqrt{8 + 2a_n}$

94. $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{8 + 2a_n}$

95. $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \sqrt{5a_n}$

96. $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 12 - \sqrt{a_n}$

97. $2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \ldots$

98. $\sqrt{1}, \sqrt{1 + \sqrt{1}}, \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}, \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}}, \ldots$

Teoría y ejemplos

99. El primer término de una sucesión es $x_1 = 1$. Cada término subsiguiente es la suma de todos los que le preceden:

$$x_{n+1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Escriba una cantidad suficiente de términos de la sucesión, con la finalidad de deducir una fórmula general de x_n que se cumpla para $n \geq 2$.

100. Una sucesión de números racionales se describe como sigue:

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \ldots, \frac{a}{b}, \frac{a+2b}{a+b}, \ldots.$$

Aquí, los numeradores forman una sucesión, los denominadores una segunda sucesión, y sus cocientes una tercera. Sean x_n y y_n, respectivamente, el numerador y el denominador de la n-ésima fracción $r_n = x_n/y_n$.

a) Verifique que ${x_1}^2 - 2{y_1}^2 = -1$, ${x_2}^2 - 2{y_2}^2 = +1$ y, con mayor generalidad, que si $a^2 - 2b^2 = -1$ o $+1$, entonces,

$$(a+2b)^2 - 2(a+b)^2 = +1 \quad \text{o} \quad -1,$$

respectivamente.

b) Las fracciones $r_n = x_n/y_n$ tienden a un límite cuando n aumenta. ¿Cuál es ese límite? [*Sugerencia:* Utilice el inciso *a*) para demostrar que ${r_n}^2 - 2 = \pm(1/{y_n})^2$ y que y_n no es menor que n).

101. Método de Newton Las siguientes sucesiones provienen de la fórmula recursiva para el método de Newton,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

¿La sucesión converge? Si es así, ¿en qué valor? En cada caso, comience por identificar la función f que genera la sucesión.

a) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}$

b) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{\tan x_n - 1}{\sec^2 x_n}$

c) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - 1$

102. ***a)*** Suponga que $f(x)$ es diferenciable para toda x en $[0, 1]$ y que $f(0) = 0$. Defina la sucesión $\{a_n\}$ por medio de la regla $a_n = nf(1/n)$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n = f'(0)$. Utilice el resultado del inciso *a)* para determinar los límites de las siguientes sucesiones $\{a_n\}$.

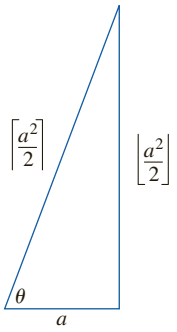
b) $a_n = n \tan^{-1}\dfrac{1}{n}$ ***c)*** $a_n = n(e^{1/n} - 1)$

d) $a_n = n \ln\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)$

103. Ternas pitagóricas Una terna de enteros positivos a, b y c se denomina **terna pitagórica** si $a^2 + b^2 = c^2$. Sea a un entero positivo impar, y sean

$$b = \left\lfloor \frac{a^2}{2} \right\rfloor \quad \text{y} \quad c = \left\lceil \frac{a^2}{2} \right\rceil,$$

respectivamente, el piso entero y el techo entero de $a^2/2$.



a) Demuestre que $a^2 + b^2 = c^2$. (*Sugerencia:* Deje que $a = 2n + 1$, y exprese b y c en términos de n).

b) Por medio de un cálculo directo, o con base en la figura anterior, determine

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\left\lfloor \dfrac{a^2}{2} \right\rfloor}{\left\lceil \dfrac{a^2}{2} \right\rceil}.$$

104. La raíz *n*-ésima de *n*!

a) Demuestre que $\lim_{n\to\infty}(2n\pi)^{1/(2n)} = 1$ y de aquí, por medio de la aproximación de Stirling [vea el ejercicio adicional 52*a*) del capítulo 8], que

$$\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e} \quad \text{para valores grandes de } n.$$

T ***b)*** Pruebe la aproximación del inciso *a)* para $n = 40, 50, 60, \ldots$, tanto como se lo permita su calculadora.

105. ***a)*** Suponiendo que $\lim_{n\to\infty}(1/n^c) = 0$ si c es cualquier constante positiva, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^c} = 0$$

si c es cualquier constante positiva.

b) Demuestre que $\lim_{n\to\infty}(1/n^c) = 0$, si c es cualquier constante positiva. (*Sugerencia:* Considere que si $\epsilon = 0.001$ y $c = 0.04$, ¿qué tan grande debe ser N para asegurar que $|1/n^c - 0| < \epsilon$, si $n > N$?).

106. El teorema del *zipper* Demuestre el "teorema del *zipper*" para sucesiones: Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen a L, entonces, la sucesión

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$$

converge a L.

107. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

108. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$, $(x > 0)$.

109. Demuestre el teorema 2.

110. Demuestre el teorema 3.

En los ejercicios 111 a 114, determine si la sucesión es monótona y si está acotada.

111. $a_n = \dfrac{3n + 1}{n + 1}$ **112.** $a_n = \dfrac{(2n + 3)!}{(n + 1)!}$

113. $a_n = \dfrac{2^n 3^n}{n!}$ **114.** $a_n = 2 - \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{2^n}$

¿Cuáles de las sucesiones en los ejercicios 115 a 124 convergen, y cuáles divergen? Justifique sus respuestas.

115. $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ **116.** $a_n = n - \dfrac{1}{n}$

117. $a_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$ **118.** $a_n = \dfrac{2^n - 1}{3^n}$

119. $a_n = ((-1)^n + 1)\left(\dfrac{n + 1}{n}\right)$

120. El primer término de una sucesión es $x_1 = \cos(1)$. Los siguientes términos son $x_2 = x_1$ o $\cos(2)$, el que sea mayor, y $x_3 = x_2$ o $\cos(3)$, el que sea mayor (aquel que esté más a la derecha). En general,

$$x_{n+1} = \text{máx}\,\{x_n, \cos(n + 1)\}.$$

121. $a_n = \dfrac{1 + \sqrt{2n}}{\sqrt{n}}$ **122.** $a_n = \dfrac{n + 1}{n}$

123. $a_n = \dfrac{4^{n+1} + 3^n}{4^n}$

124. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n - 3$

En los ejercicios 125 y 126, utilice la definición de convergencia para demostrar el límite indicado.

125. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\text{sen } n}{n} = 0$ **126.** $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = 1$

127. La sucesión $\{n/(n + 1)\}$ tiene una mínima cota superior de 1 Demuestre que si M es un número menor que 1, los términos de $\{n/(n + 1)\}$ superan finalmente a M. Es decir, que si $M < 1$, existe un entero N tal que $n/(n + 1) > M$, siempre que $n > N$. Puesto que $n/(n + 1) < 1$ para toda n, esto demuestra que 1 es una cota superior mínima de $\{n/(n + 1)\}$.

128. Unicidad de la cota superior mínima Demuestre que si M_1 y M_2 son cotas superiores mínimas de la sucesión $\{a_n\}$, entonces, $M_1 = M_2$. Es decir, una sucesión no puede tener dos cotas superiores mínimas diferentes.

129. ¿Es verdad que una sucesión $\{a_n\}$ de números positivos tiene que converger si está acotada por arriba? Justifique su respuesta.

130. Demuestre que si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, entonces, a cada número positivo ϵ le corresponde un entero N tal que para toda m y n,

$$m > N \quad \text{y} \quad n > N \quad \Rightarrow \quad |a_m - a_n| < \epsilon.$$

131. Unicidad de límites Demuestre que los límites de las sucesiones son únicos; es decir, si L_1 y L_2 son números tales que $a_n \to L_1$ y $a_n \to L_2$, entonces, $L_1 = L_2$.

132. Límites y subsucesiones Si los términos de una sucesión aparecen en otra sucesión en el orden dado, decimos que la primera sucesión es una **subsucesión** de la segunda. Demuestre que si dos subsucesiones de una sucesión $\{a_n\}$ tienen límites diferentes, $L_1 \neq L_2$, entonces, $\{a_n\}$ diverge.

133. Para una sucesión $\{a_n\}$, los términos con índice par se simbolizan como a_{2k}, y los términos de índice impar, como a_{2k+1}. Demuestre que si $a_{2k} \to L$ y $a_{2k+1} \to L$, entonces, $a_n \to L$.

134. Demuestre que una sucesión $\{a_n\}$ converge a 0 si y sólo si la sucesión de valores absolutos $\{|a_n|\}$ converge a 0.

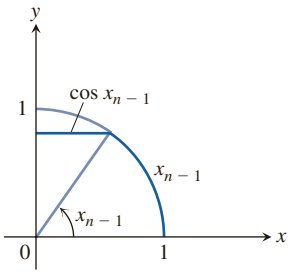
135. Sucesiones generadas por el método de Newton El método de Newton, aplicado a una función diferenciable $f(x)$, inicia con un valor x_0 y, a partir de éste, construye una sucesión de números $\{x_n\}$ que, en circunstancias favorables, converge a un cero de f. La fórmula recursiva para la sucesión es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

a) Demuestre que la fórmula recursiva para $f(x) = x^2 - a$, $a > 0$, puede escribirse como $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$.

T ***b)*** Si comenzamos con $x_0 = 1$ y $a = 3$, habrá que calcular los términos sucesivos de la sucesión hasta que el resultado empiece a repetirse. ¿A qué número se aproxima? Explique.

T **136. Una definición recursiva de $\pi/2$** Si comienza con $x_1 = 1$ y define los términos subsiguientes de $\{x_n\}$ de acuerdo con la regla $x_n = x_{n-1} + \cos x_{n-1}$, generará una sucesión que converge rápidamente en $\pi/2$. ***a)*** Inténtelo. ***b)*** Utilizando la figura adjunta, explique por qué es tan rápida la convergencia.



EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Utilice un software matemático para realizar los siguientes pasos para las sucesiones de los ejercicios 137 a 148.

a) Calcule y, luego, grafique los primeros 25 términos de la sucesión. ¿La sucesión parece estar acotada por arriba o por abajo? ¿Parece que converge o diverge? Si converge, ¿cuál es el límite L?

b) Si la sucesión converge, determine un entero N tal que $|a_n - L| \leq 0.01$ para $n \geq N$. ¿Cuánto debe avanzar en la sucesión para obtener términos que estén a menos de 0.0001 de L?

137. $a_n = \sqrt[n]{n}$

138. $a_n = \left(1 + \dfrac{0.5}{n}\right)^n$

139. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{5^n}$

140. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (-2)^n$

141. $a_n = \operatorname{sen} n$

142. $a_n = n \operatorname{sen} \dfrac{1}{n}$

143. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$

144. $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$

145. $a_n = (0.9999)^n$

146. $a_n = (123456)^{1/n}$

147. $a_n = \dfrac{8^n}{n!}$

148. $a_n = \dfrac{n^{41}}{19^n}$

10.2 Series infinitas

Una *serie infinita* es la suma de una sucesión infinita de números

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

El objetivo de esta sección es entender el significado de una suma infinita y desarrollar métodos para su cálculo. Como en una serie infinita existe una cantidad infinita de sumandos, no podemos simplemente seguir sumando para ver qué resulta. En vez de ello, vemos qué se obtiene si se suman los n primeros términos de la sucesión y nos detenemos. La suma de los n primeros términos

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

es una suma finita común y puede calcularse por medio de una suma usual, la cual se denomina *n-ésima suma parcial*. Conforme n se hace grande, esperamos que las sumas parciales se acerquen cada vez más a un valor límite, en el mismo sentido en el que los términos de una sucesión se aproximan a un límite, como se analizó en la sección 10.1.

Por ejemplo, para asignar un significado a una expresión como

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots,$$

sumamos los términos de uno en uno desde el inicio y buscamos un patrón de crecimiento de las sumas.

Suma parcial		Valor	Expresión para la suma parcial
Primera:	$s_1 = 1$	1	$2 - 1$
Segunda:	$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$2 - \frac{1}{2}$
Tercera:	$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$	$2 - \frac{1}{4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-ésima	$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$	$2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

En realidad, existe un patrón. Las sumas parciales forman una sucesión cuyo n-ésimo término es

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Dicha sucesión de sumas parciales converge a 2, ya que $\lim_{n\to\infty}(1/2^{n-1}) = 0$. Decimos que

$$\text{“la suma de la serie infinita } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots \text{ es 2”}.$$

¿La suma de cualquier número finito de términos en esta serie es igual a 2? No. ¿Realmente podemos sumar, de uno en uno, un número infinito de términos? No, pero es posible definir su suma si la definimos como el límite de la sucesión de sumas parciales cuando $n \to \infty$, en este caso, 2 (figura 10.8). Nuestro conocimiento de sucesiones y límites nos permite rebasar las fronteras de las sumas finitas.

DEFINICIÓN Dada una sucesión de números $\{a_n\}$, una expresión de la forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

es **una serie infinita**. El número a_n es el ***n*-ésimo término** de la serie. La sucesión $\{s_n\}$, definida como

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \end{aligned}$$

es la **sucesión de sumas parciales** de la serie, donde el número s_n es la ***n*-ésima suma parcial**. Si la sucesión de sumas parciales converge a un límite L, decimos que la serie **converge** y que su **suma** es L. En este caso, también escribimos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L.$$

Si la sucesión de sumas parciales de la serie no converge, decimos que la serie **diverge**.

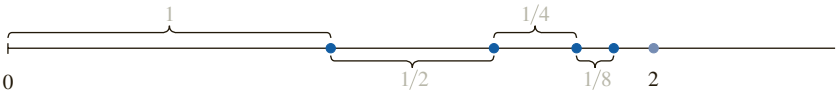


FIGURA 10.8 Conforme las longitudes 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, . . . se suman una a una, el resultado se aproxima a 2.

Cuando empezamos a estudiar una serie dada $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, tal vez no sepamos si converge o diverge. En cualquier caso, es conveniente usar la notación sigma (de suma) para escribir la serie como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \qquad \text{o} \qquad \sum a_n$$

Una útil abreviación cuando se entiende que la suma es de 1 a ∞

Series geométricas

Las **series geométricas** son series de la forma

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1},$$

donde a y r son números reales fijos y $a \neq 0$. También es posible escribir la serie como $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$. La **razón** r puede ser positiva, como en

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots, \qquad r = 1/2, a = 1$$

o negativa, como en

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \cdots. \qquad r = -1/3, a = 1$$

Si $r = 1$, la n-ésima suma parcial de la serie geométrica es

$$s_n = a + a(1) + a(1)^2 + \cdots + a(1)^{n-1} = na,$$

y la serie diverge, porque $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, según sea el signo de a. Si $r = -1$, la serie diverge porque las n-ésimas sumas parciales alternan entre a y 0. Si $|r| \neq 1$, la convergencia o divergencia de la serie se determina de esta forma:

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$rs_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \qquad \text{Multiplique } s_n \text{ por } r.$$

$$s_n - rs_n = a - ar^n \qquad \text{Reste } rs_n \text{ de } s_n. \text{ La mayoría de los términos del lado derecho se cancelan.}$$

$$s_n(1 - r) = a(1 - r^n) \qquad \text{Factorice.}$$

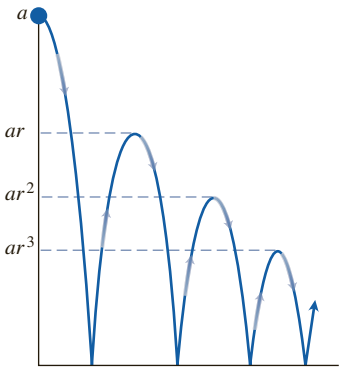
$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \quad (r \neq 1). \qquad \text{Podemos despejar } s_n \text{ si } r \neq 1.$$

Si $|r| < 1$, entonces, $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ (como en la sección 10.1) y $s_n \to a/(1 - r)$. Si $|r| > 1$, entonces, $|r^n| \to \infty$ y la serie diverge.

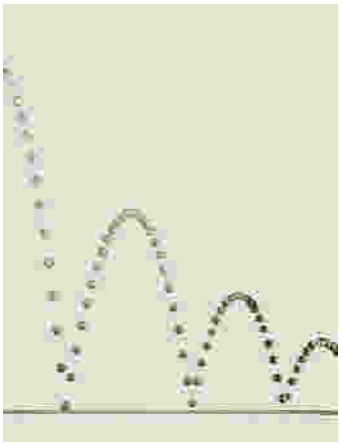
Si $|r| < 1$, la serie geométrica $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ converge a $a/(1 - r)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r}, \qquad |r| < 1.$$

Si $|r| \to 1$, la serie diverge.



a)



b)

FIGURA 10.9 *a*) El ejemplo 3 muestra cómo utilizar una serie geométrica para calcular la distancia vertical total recorrida por una pelota que rebota, si la altura de cada rebote se reduce en el factor r. *b*) Una fotografía estroboscópica de una pelota que rebota. (*Fuente: PSSC Physics*, 2a. ed. Reimpresa con permiso de Educational Development Center, Inc.)

Hemos determinado cuándo una serie geométrica converge o diverge, y en qué valor. Con frecuencia, podemos determinar que una serie converge sin saber en qué valor lo hace, como veremos en varias de las siguientes secciones. La fórmula $a/(1-r)$ para la suma de una serie geométrica *sólo* se aplica cuando el índice de la suma inicia con $n=1$ en la expresión $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ (o cuando el índice es $n=0$, si escribimos la serie como $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$).

EJEMPLO 1 La serie geométrica con $a=1/9$ y $r=1/3$ es

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1/9}{1-(1/3)}=\frac{1}{6}.$$

EJEMPLO 2 La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 5}{4^n}=5-\frac{5}{4}+\frac{5}{16}-\frac{5}{64}+\cdots$$

es una serie geométrica con $a=5$ y $r=-1/4$. Converge en

$$\frac{a}{1-r}=\frac{5}{1+(1/4)}=4.$$

EJEMPLO 3 Se deja caer una pelota desde a metros de altura sobre una superficie plana. Cada vez que la pelota toca la superficie, después de caer una distancia h, rebota hasta una distancia rh, donde r es positiva, pero menor que 1. Determine la distancia total que recorre la pelota hacia arriba y hacia abajo (figura 10.9).

Solución La distancia total es

$$s=a+\underbrace{2ar+2ar^2+2ar^3+\cdots}_{\text{Esta suma es } 2ar/(1-r).}=a+\frac{2ar}{1-r}=a\frac{1+r}{1-r}.$$

Por ejemplo, si $a=6$ metros y $r=2/3$, la distancia es

$$s=6\cdot\frac{1+(2/3)}{1-(2/3)}=6\left(\frac{5/3}{1/3}\right)=30\text{ m}.$$

EJEMPLO 4 Exprese el decimal periódico 5.232323. . . como la razón de dos enteros.

Solución Con base en la definición de un número decimal, obtenemos una serie geométrica

$$\begin{aligned}5.232323\ldots &= 5+\frac{23}{100}+\frac{23}{(100)^2}+\frac{23}{(100)^3}+\cdots\\ &= 5+\frac{23}{100}\underbrace{\left(1+\frac{1}{100}+\left(\frac{1}{100}\right)^2+\cdots\right)}_{1/(1-0.01)} \qquad a=1,\ r=1/100\\ &= 5+\frac{23}{100}\left(\frac{1}{0.99}\right)=5+\frac{23}{99}=\frac{518}{99}\end{aligned}$$

Por desgracia, las fórmulas como la que se emplea para la suma de una serie geométrica convergente son escasas, por lo que con frecuencia tenemos que conformarnos con un valor estimado de las sumas de las series (después estudiaremos algo más sobre ello). Sin embargo, el siguiente ejemplo es otro caso en el que podemos hallar el valor exacto de la suma.

EJEMPLO 5 Determine la suma de la serie "telescópica" $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Solución Buscamos un patrón en la sucesión de sumas parciales que pueda conducirnos a una fórmula para s_k. La observación clave es la descomposición en fracciones parciales

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

de manera que

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

y

$$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

Al suprimir los paréntesis y cancelar los términos adyacentes de signos opuestos, la suma se reduce a

$$s_k = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Ahora vemos que $s_k \to 1$ cuando $k \to \infty$. La serie converge y la suma es 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$ ■

Criterio del término *n*-ésimo para una serie divergente

Una razón de que una serie no converja es que sus términos no puedan volverse pequeños.

EJEMPLO 6 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n} + \cdots$$

diverge porque las sumas parciales crecen, finalmente, por encima de cualquier número asignado. Cada término es mayor que 1, por lo cual la suma de n términos tiene que ser mayor que n. ■

Observe que $\lim_{n\to\infty} a_n$ tiene que ser igual a cero si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Para entender por qué, hagamos que S represente la suma de la serie y que $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ sea la n-ésima suma parcial. Cuando n es grande, tanto s_n como s_{n-1} están cerca de S, por lo que su diferencia, a_n, es próxima a cero. En términos más formales,

$$a_n = s_n - s_{n-1} \quad \to \quad S - S = 0.$$ Regla de la diferencia para sucesiones

Esto conduce al siguiente teorema.

¡Cuidado!
El teorema 7 *no* dice que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $a_n \to 0$. Es posible que una serie diverja cuando $a_n \to 0$.

TEOREMA 7 Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces, $a_n \to 0$.

El teorema 7 conduce a un criterio para detectar el tipo de divergencia que ocurrió en el ejemplo 6.

Criterio del término *n*-ésimo para la divergencia
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe o es diferente de cero.

EJEMPLO 7 Los siguientes son ejemplos de series divergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ diverge porque $n^2 \to \infty$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ diverge porque $\dfrac{n+1}{n} \to 1$. $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ diverge porque $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ no existe.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+5}$ diverge porque $\lim_{n\to\infty} \dfrac{-n}{2n+5} = -\dfrac{1}{2} \neq 0$. ■

EJEMPLO 8 La serie

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{2 \text{ términos}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{4 \text{ términos}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{2^n \text{ términos}} + \cdots$$

diverge, ya que los términos se pueden reunir infinitamente en grupos que suman 1, por lo que las sumas parciales aumentan sin cota. Sin embargo, los términos de la serie forman una sucesión que converge a cero. El ejemplo 1 de la sección 10.3 muestra que la serie armónica $\sum 1/n$ también se comporta de esta manera. ■

Combinación de series

Siempre que tenemos dos series convergentes, podemos sumarlas o restarlas término a término, o bien, multiplicarlas por constantes para crear nuevas series convergentes.

TEOREMA 8 Si $\sum a_n = A$ y $\sum b_n = B$ son series convergentes, entonces,

1. *Regla de la suma:* $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A + B$
2. *Regla de la diferencia:* $\sum (a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n = A - B$
3. *Regla del múltiplo constante:* $\sum ka_n = k\sum a_n = kA$ (cualquier número k).

Demostración Las tres reglas para series provienen de las reglas análogas para sucesiones del teorema 1, sección 10.1. Para demostrar la regla de la suma en el caso de series, sean

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Entonces, las sumas parciales de $\sum (a_n + b_n)$ son

$$\begin{aligned} s_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n) \\ &= A_n + B_n. \end{aligned}$$

Como $A_n \to A$ y $B_n \to B$, tenemos $s_n \to A + B$, según la regla de la suma para sucesiones. La demostración de la regla de la diferencia es similar.

Para demostrar la regla del múltiplo constante en el caso de series, observe que las sumas parciales de $\sum ka_n$ forman la sucesión

$$s_n = ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n = k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = kA_n,$$

que converge a kA por la regla del múltiplo constante en el caso de sucesiones. ■

Como corolarios del teorema 8, tenemos los siguientes resultados. Omitimos sus demostraciones.

1. Todo múltiplo constante distinto de cero, de una serie divergente, diverge.
2. Si $\sum a_n$ converge y $\sum b_n$ diverge, entonces, tanto $\sum (a_n + b_n)$ como $\sum (a_n - b_n)$ divergen.

¡Cuidado! Recuerde que $\sum(a_n + b_n)$ puede converger a pesar de que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ diverjan. Por ejemplo, $\sum a_n = 1 + 1 + 1 + \cdots$ y $\sum b_n = (-1) + (-1) + (-1) + \cdots$ divergen, mientras que $\sum(a_n + b_n) = 0 + 0 + 0 + \cdots$ converge a 0.

EJEMPLO 9 Encuentre las sumas de las siguientes series.

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 1}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}} \qquad \text{Regla de la diferencia}$$

$$= \frac{1}{1 - (1/2)} - \frac{1}{1 - (1/6)} \qquad \text{Serie geométrica con } a = 1 \text{ y } r = 1/2, 1/6$$

$$= 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \qquad \text{Regla del múltiplo constante}$$

$$= 4\left(\frac{1}{1 - (1 \ \ 2)} \right) \qquad \text{Serie geométrica con } a = 1, r = 1/2$$

$$= 8$$

■

Adición o eliminación de términos

En una serie siempre podemos agregar o eliminar un número finito de términos sin alterar la convergencia o divergencia de la serie, aunque en el caso de la convergencia, esto suele modificar la suma. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces, $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ converge para cualquier $k > 1$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

Inversamente, si $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ converge para toda $k > 1$, entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n}$$

y

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \right) - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125}.$$

La convergencia o divergencia de una serie no se ve afectada por algunos de sus primeros términos. Sólo la "cola" de las series, es decir, la parte que permanece cuando la suma va más allá de una cantidad finita de sus términos iniciales, es la que determina si la serie converge o diverge.

Renumeración de los términos

Mientras se preserve el orden de sus términos, es posible renumerar cualquier serie sin alterar su convergencia. Para aumentar en h unidades el valor inicial del índice, se sustituye la n en la fórmula de a_n por $n - h$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

Para reducir en h unidades el valor inicial del índice, se sustituye la n en la fórmula de a_n por $n + h$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

Vimos esto al iniciar una serie geométrica con el índice $n = 0$, en vez del índice $n = 1$, pero podemos también usar cualquier valor del índice inicial. Por lo regular, damos preferencia a indizaciones que conducen a expresiones más sencillas.

EJEMPLO 10 Podemos escribir la serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \qquad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}}, \qquad \text{o incluso como} \qquad \sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}}.$$

Las sumas parciales siguen siendo las mismas, sin importar la indización que se elija. ■

Ejercicios 10.2

Encontrar de las *n*-ésimas sumas parciales

En los ejercicios 1 a 6, determine una fórmula para la n-ésima suma parcial de cada serie y utilícela para encontrar la suma de la serie, si ésta converge.

1. $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots$

2. $\frac{9}{100} + \frac{9}{100^2} + \frac{9}{100^3} + \cdots + \frac{9}{100^n} + \cdots$

3. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$

4. $1 - 2 + 4 - 8 + \cdots + (-1)^{n-1}\,2^{n-1} + \cdots$

5. $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots$

6. $\frac{5}{1\cdot 2} + \frac{5}{2\cdot 3} + \frac{5}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{5}{n(n+1)} + \cdots$

Series con términos geométricos

En los ejercicios 7 a 14, escriba los primeros ocho términos de cada serie para mostrar cómo comienza. Después, encuentre la suma de la serie o demuestre que diverge.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$

8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{7}{4^n}\right)$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{4^n}$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n}\right)$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{5^n}\right)$

En los ejercicios 15 a 18, determine si la serie geométrica converge o diverge. Si una serie converge, determine su suma.

15. $1 + \left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \cdots$

16. $1 + (-3) + (-3)^2 + (-3)^3 + (-3)^4 + \cdots$

17. $\left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^3 + \left(\frac{1}{8}\right)^4 + \left(\frac{1}{8}\right)^5 + \cdots$

18. $\left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^3 + \left(\frac{-2}{3}\right)^4 + \left(\frac{-2}{3}\right)^5 + \left(\frac{-2}{3}\right)^6 + \cdots$

Decimales periódicos

En los ejercicios 19 a 26, exprese cada uno de los números como la razón de dos enteros.

19. $0.\overline{23} = 0.23\ 23\ 23\ldots$

20. $0.\overline{234} = 0.234\ 234\ 234\ldots$

21. $0.\overline{7} = 0.7777\ldots$

22. $0.\overline{d} = 0.dddd\ldots$, donde d es un dígito

23. $0.0\overline{6} = 0.06666\ldots$

24. $1.\overline{414} = 1.414\ 414\ 414\ldots$

25. $1.24\overline{123} = 1.24\ 123\ 123\ 123\ldots$

26. $3.\overline{142857} = 3.142857\ 142857\ldots$

Aplicación del criterio del *n*-ésimo término

En los ejercicios 27 a 34, utilice el criterio del n-ésimo término para la divergencia con la finalidad de demostrar que la serie es divergente, o bien, indique si la prueba no es concluyente.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+10}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}$

29. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$

32. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{e^n+n}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{1}{n}$

34. $\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\pi$

Series telescópicas

En los ejercicios 35 a 40, determine una fórmula para la n-ésima suma parcial de la serie y utilícela para determinar si la serie converge o diverge. Si una serie converge, determine su suma.

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n^2} - \frac{3}{(n+1)^2}\right)$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\sqrt{n+1} - \ln\sqrt{n}\right)$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} (\tan(n) - \tan(n-1))$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right)\right)$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}\right)$

Determine la suma de cada serie en los ejercicios 41 a 48.

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{1/n}} - \frac{1}{2^{1/(n+1)}}\right)$

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right)$

48. $\sum_{n=1}^{\infty} (\tan^{-1}(n) - \tan^{-1}(n+1))$

Convergencia o divergencia

En los ejercicios 49 a 68, ¿cuáles series convergen y cuáles divergen? Justifique sus respuestas. Si una serie converge, calcule su suma.

49. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

50. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n$

51. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{2^n}$

52. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n$

53. $\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

54. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{5^n}$

55. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n}$

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{1}{3^n}$

57. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^n}$

58. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}, \quad |x| > 1$

59. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n}$

60. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

61. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}$

62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

63. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}$

64. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 4^n}{3^n + 4^n}$

65. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

66. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)$

67. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$

68. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n\pi}}{\pi^{ne}}$

Series geométricas con una variable *x*

En cada una de las series geométricas de los ejercicios 69 a 72, escriba algunos de los primeros términos para determinar a y r; luego, calcule la suma de la serie. Después, exprese la desigualdad $|r| < 1$ en términos de x, y determine los valores de x para los cuales la desigualdad se satisface y la serie converge.

69. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

70. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

71. $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$

72. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{3 + \operatorname{sen} x}\right)^n$

En los ejercicios 73 a 78, encuentre los valores de x para los cuales converge la serie geométrica dada. También determine la suma de la serie (como función de x) para los valores de x.

73. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$

74. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{-2n}$

75. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n$

76. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n$

77. $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}^n x$

78. $\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

Teoría y ejemplos

79. La serie del ejercicio 5 también se puede escribir como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{y} \quad \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}.$$

Escríbala como una suma que empieza con ***a)*** $n = -2$, ***b)*** $n = 0$, ***c)*** $n = 5$.

80. La serie del ejercicio 6 también se puede escribir como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(n+1)(n+2)}.$$

Escríbala como una suma que empieza con ***a)*** $n = -1$, ***b)*** $n = 3$, ***c)*** $n = 20$.

81. Construya una serie infinita de términos diferentes de cero cuya suma sea

a) 1 ***b)*** -3 ***c)*** 0

82. (*Continuación del ejercicio 81*). ¿Puede construir una serie infinita de términos diferentes de cero que converja en cualquier número que desee? Explique su respuesta.

83. Con un ejemplo, muestre que $\sum(a_n/b_n)$ puede ser divergente, a pesar de que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ converjan y ninguna b_n sea igual a 0.

84. Encuentre series geométricas convergentes $A = \sum a_n$ y $B = \sum b_n$ para ilustrar el hecho de que $\sum a_n b_n$ puede converger sin ser igual a AB.

85. Demuestre con un ejemplo que $\sum(a_n/b_n)$ puede converger en un valor diferente de A/B a pesar de que $A = \sum a_n$, $B = \sum b_n \neq 0$ y ninguna b_n sea igual a 0.

86. Si $\sum a_n$ converge y $a_n > 0$ para toda n, ¿qué se puede decir acerca de $\sum(1/a_n)$? Justifique su respuesta.

87. ¿Qué sucede cuando a una serie divergente se le agrega o elimina un número finito de términos? Justifique sus dos respuestas.

88. Si $\sum a_n$ converge y $\sum b_n$ diverge, ¿qué se puede decir acerca de su suma término a término $\sum(a_n + b_n)$? Justifique su respuesta.

89. Construya una serie geométrica $\sum ar^{n-1}$ que converja en el número 5, si

a) $a = 2$ ***b)*** $a = 13/2$.

90. Determine el valor de b para el cual

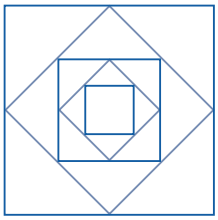
$$1 + e^b + e^{2b} + e^{3b} + \cdots = 9.$$

91. ¿Para qué valores de r la serie infinita

$$1 + 2r + r^2 + 2r^3 + r^4 + 2r^5 + r^6 + \cdots$$

converge? Calcule la suma cuando la serie converge.

92. La siguiente figura muestra los cinco primeros cuadrados de una sucesión de cuadrados. El cuadrado exterior mide 4 m^2 de área. Cada uno de los cuadrados interiores se obtiene al unir los puntos medios de los lados del cuadrado en el que está inscrito. Calcule la suma de las áreas de todos los cuadrados.



93. Dosis de medicamento Un paciente toma una tableta de 300 mg para controlar la presión arterial alta todas las mañanas a la misma hora. La concentración del medicamento en el cuerpo del paciente disminuye exponencialmente con una razón constante de $k = 0.12$ por hora.

a) ¿Cuántos miligramos de medicamento permanecen en el cuerpo del paciente justo antes de que tome la segunda tableta? ¿Y antes de tomar la tercera tableta?

b) A largo plazo, después de tomar el medicamento durante al menos seis meses, ¿qué cantidad de medicamento hay en el cuerpo del paciente justo antes de tomar la siguiente tableta en el horario matutino acostumbrado?

94. Demuestre que el error $(L - s_n)$ resultante al reemplazar una serie geométrica convergente por una de sus sumas parciales s_n es $ar^n/(1 - r)$.

95. El conjunto de Cantor Para construir este conjunto, comenzamos con el intervalo cerrado [0, 1]. De este intervalo, eliminamos el intervalo abierto de en medio (1/3, 2/3), quedando dos intervalos cerrados [0, 1/3] y [2/3, 1]. En un segundo paso eliminamos, de los dos intervalos restantes, el tercer intervalo abierto de en medio. Así, de [0, 1/3], eliminamos el intervalo abierto (1/9, 2/9), y de [2/3, 1], eliminamos (7/9, 8/9). De esta forma, nos quedan cuatro intervalos cerrados: [0, 1/9], [2/9, 1/3], [2/3, 7/9] y [8/9, 1]. En el siguiente paso, eliminamos el tercer intervalo abierto ubicado en el medio de cada intervalo cerrado que queda. Así, se elimina (1/27, 2/27) de [0, 1/9], para dejar los intervalos cerrados [0, 1/27] y [2/27, 1/9]; también se elimina (7/27, 8/27) de [2/9, 1/3], para dejar [2/9, 7/27] y [8/27, 1/3], y así sucesivamente. Continuamos el proceso sin detenernos, eliminando en cada paso el tercer intervalo (abierto) de cada intervalo cerrado que queda del paso anterior. Los números que quedan en el intervalo [0, 1], después de que se han eliminado los terceros intervalos ubicados en el medio, son los puntos en el conjunto de Cantor (llamado así en honor de George Cantor, 1845-1918). Este conjunto tiene algunas propiedades interesantes.

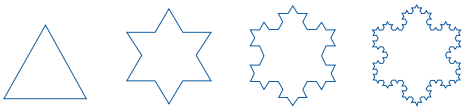
a) El conjunto de Cantor contiene una cantidad infinita de números en [0, 1]. Liste 12 números que pertenezcan al conjunto de Cantor.

b) Demuestre, mediante la suma de series geométricas adecuadas, que la longitud de todos los terceros intervalos abiertos ubicados en el medio que se han eliminado de [0, 1] es igual a 1.

96. Curva copo de nieve de Helga von Koch Esta curva tiene una longitud infinita y delimita una región con área finita. Para saber por qué ocurre esto, supongamos que la curva se generó a partir de un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud 1.

a) Calcule la longitud L_n de la n-ésima curva C_n y demuestre que $\lim_{n\to\infty} L_n = \infty$.

b) Determine el área A_n de la región delimitada por C_n, y calcule $\lim_{n\to\infty} A_n = (8/5)A_1$.



10.3 Criterio de la integral

La pregunta más básica que podemos plantear acerca de una serie es si converge o no. En esta sección, y en las dos siguientes, analizaremos esta pregunta al estudiar las series con términos no negativos. Tales series convergen si su sucesión de sumas parciales está acotada. Si establecemos que una serie determinada converge, por lo general, no disponemos de una fórmula para sumarla. Así que, en el caso de una serie convergente, necesitamos investigar el error implicado cuando se utiliza una suma parcial para aproximar su suma total.

Sumas parciales no decrecientes

Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie infinita con $a_n \geq 0$ para toda n. Entonces, cada suma parcial es mayor o igual que su precedente, ya que $s_{n+1} = s_n + a_n$. De esta forma,

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \cdots .$$

Como las sumas parciales forman una sucesión no decreciente, el teorema de la sucesión monótona (teorema 6, sección 10.1) nos indica los siguientes resultados.

COROLARIO DEL TEOREMA 6 Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos no negativos converge si y sólo si sus sumas parciales están acotadas por arriba.

EJEMPLO 1 Como una aplicación del corolario anterior, considere la **serie armónica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots .$$

Aunque el n-ésimo término, $1/n$, tiende a cero, la serie diverge, ya que no hay cota superior para sus sumas parciales. Para ver por qué, agrupe los términos de la serie de la siguiente manera:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> \frac{2}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> \frac{4}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{> \frac{8}{16} = \frac{1}{2}} + \cdots .$$

La suma de los primeros dos términos es 1.5. La suma de los siguientes dos términos es $1/3 + 1/4$, que es mayor que $1/4 + 1/4 = 1/2$. La suma de los siguientes cuatro términos es $1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8$, que es mayor que $1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 = 1/2$. La suma de los siguientes ocho términos es $1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16$, que es mayor que $8/16 = 1/2$. La suma de los siguientes 16 términos es mayor que $16/32 = 1/2$, y así sucesivamente. En general, la suma de 2^n términos que finalizan con $1/2^{n+1}$ es mayor que $2^n/2^{n+1} = 1/2$. Si $n = 2^k$, la suma parcial s_n es mayor que $k/2$, de manera que la sucesión de sumas parciales no está acotada por arriba. La serie armónica diverge. ■

Criterio de la integral

Ahora introducimos el criterio de la integral con una serie que está relacionada con la serie armónica, pero cuyo n-ésimo término es $1/n^2$, en vez de $1/n$.

EJEMPLO 2 ¿La siguiente serie converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

Solución Determinamos la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ comparándola con $\int_1^{\infty}(1/x^2)\,dx$. Para realizar la comparación, consideramos los términos de la serie como los valores de la función $f(x) = 1/x^2$, e interpretamos dichos valores como las áreas de los rectángulos bajo la curva $y = 1/x^2$.

Como muestra la figura 10.10,

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\ &= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \\ &< f(1) + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx && \text{La suma de las áreas de los rectángulos es menor que el área bajo la gráfica.} \\ &< 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx && \int_1^n (1/x^2)\,dx < \int_1^{\infty}(1/x^2)\,dx \\ &< 1 + 1 = 2. && \text{Como en el ejemplo 3, de la sección 8.8, } \int_1^{\infty}(1/x^2)\,dx = 1. \end{aligned}$$

Así, las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ están acotadas por arriba (por 2), y la serie converge. ■

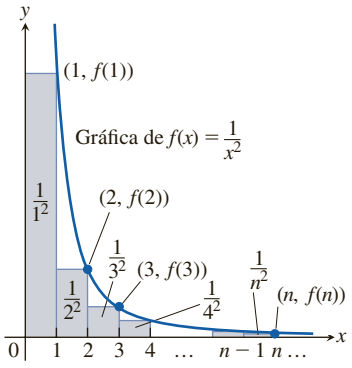


FIGURA 10.10 La suma de las áreas de los rectángulos bajo la gráfica de $f(x) = 1/x^2$ es menor que el área bajo la gráfica (ejemplo 2).

¡Cuidado!
La serie y la integral no necesitan tener el mismo valor en el caso de que converjan. Como veremos en el ejemplo 6,

$\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2) \neq \int_1^{\infty}(1/x^2)\,dx = 1.$

TEOREMA 9: Criterio de la integral Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos. Suponga que $a_n = f(n)$, donde f es una función decreciente, positiva y continua de x para toda $x \geq N$ (N es un entero positivo). Entonces, tanto la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ como la integral $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ convergen, o bien, ambas divergen.

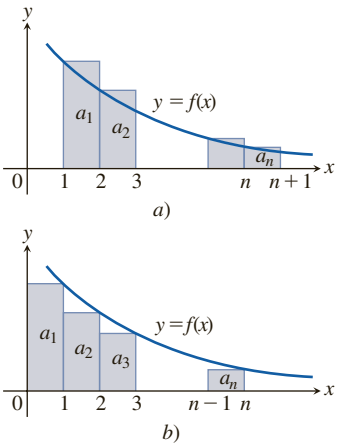


FIGURA 10.11 Tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ como la integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, sujetas a las condiciones del criterio de la integral, convergen, o bien, ambas divergen.

Demostración Establecemos el criterio para el caso $N = 1$. La prueba para una N general es similar.

Iniciamos con la suposición de que f es una función decreciente con $f(n) = a_n$ para toda n. Lo anterior nos lleva a observar que los rectángulos de la figura 10.11*a*), que tienen áreas a_1, $a_2, \ldots, a_n$, colectivamente, encierran más área que la que está debajo de la curva $y = f(x)$, desde $x = 1$ hasta $x = n + 1$. Esto es,

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \le a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

En la figura 10.11*b*) los rectángulos se colocaron a la izquierda en vez de a la derecha. Si por el momento no consideramos el primer rectángulo, de área a_1, veremos que

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \le \int_1^n f(x)\,dx.$$

Si incluimos a_1, tenemos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le a_1 + \int_1^n f(x)\,dx.$$

Al combinar estos resultados, se obtiene

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \le a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le a_1 + \int_1^n f(x)\,dx.$$

Tales desigualdades se cumplen para cada n y continúan cumpliéndose cuando $n \to \infty$.

Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es finita, la desigualdad del lado derecho indica que $\sum a_n$ es finita. Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es infinita, la desigualdad del lado izquierdo indica que $\sum a_n$ es infinita. De aquí que tanto la serie como la integral sean finitas, o bien, ambas sean infinitas. ■

EJEMPLO 3 Demuestre que la ***p* serie**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

(p es un número real constante) converge si $p > 1$, y diverge si $p \le 1$.

Solución Si $p > 1$, entonces, $f(x) = 1/x^p$ es una función positiva decreciente de x. Ya que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^{\infty} x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b$$

$$= \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{1-p}(0-1) = \frac{1}{p-1}, \qquad b^{p-1} \to \infty \text{ cuando } b \to \infty \text{ porque } p - 1 > 0.$$

por el criterio de la integral, la serie converge. Enfatizamos que la suma de la p serie *no* es $1/(p-1)$. La serie converge, pero no sabemos a qué valor.

Si $p \le 0$, la serie diverge por el criterio del n-ésimo término. Si $0 < p < 1$, entonces, $1 - p > 0$ y

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}(b^{1-p} - 1) = \infty.$$

De acuerdo con el criterio de la integral, la serie diverge.

La *p* serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

converge si $p > 1$, y diverge si $p \leq 1$.

Si $p = 1$, tenemos la serie armónica (divergente)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots.$$

Hay convergencia para $p > 1$, pero divergencia para cualquier otro valor de p. ■

La p serie, con $p = 1$, es la **serie armónica** (ejemplo 1). El criterio de la p serie indica que la serie armónica es *apenas* divergente; si, por ejemplo, aumentamos p a 1.000000001, ¡la serie es convergente!

La lentitud con la que las sumas parciales de la serie armónica se aproximan a infinito es impresionante. Por ejemplo, para que las sumas parciales sean mayores que 20, se deben tomar alrededor de 178 millones de términos. (También vea el ejercicio 43*b*).

EJEMPLO 4 La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(1/(n^2 + 1))$ no es una p serie, pero converge por el criterio de la integral. La función $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ es positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$, y

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \lim_{b\to\infty} \left[\arctan x\right]_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[\arctan b - \arctan 1\right] \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

El criterio de la integral indica que la serie converge, pero $\pi/4$ *no* es la suma de la serie. ■

EJEMPLO 5 Determine la convergencia o divergencia de las series.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ ***b)*** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$

Soluciones

a) Al aplicar el criterio de la integral, se encuentra que

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}} dx &= \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{du}{e^u} \qquad u = x^2,\ du = 2x\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-u}\right]_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2e^b} + \frac{1}{2e}\right) = \frac{1}{2e}.\end{aligned}$$

Puesto que la integral converge, también la serie converge.

b) De nuevo aplicamos el criterio de la integral,

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{dx}{2^{\ln x}} &= \int_0^{\infty} \frac{e^u\,du}{2^u} \qquad u = \ln x,\ x = e^u,\ dx = e^u\,du \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^u du \\ &= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\ln\left(\frac{e}{2}\right)}\left(\left(\frac{e}{2}\right)^b - 1\right) = \infty. \qquad (e/2) > 1\end{aligned}$$

Como la integral impropia diverge, también la serie diverge. ■

Estimación del error

Para algunas series convergentes, tal como la serie geométrica o la serie telescópica del ejemplo 5, sección 10.2, podemos encontrar la suma total de la serie. Es decir, podemos encontrar el valor límite S de la sucesión de sumas parciales. Sin embargo, para la mayoría

de las series convergentes, no podemos encontrar fácilmente la suma total. No obstante, podemos *estimar* la suma sumando los n primeros términos para obtener s_n, pero se necesita saber qué tanto difiere s_n de la suma total S.

Suponga que, por el criterio de la integral, se demuestra que una serie $\sum a_n$ es convergente, y que deseamos estimar el tamaño del **residuo** R_n midiendo la diferencia entre la suma total S de la serie y su n-ésima suma parcial s_n. Esto es, deseamos estimar

$$R_n = S - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots .$$

Para obtener una cota inferior para el residuo, comparamos la suma de las áreas de los rectángulos con el área bajo la curva $y = f(x)$ para $x \geq n$ (vea la figura 10.11a). Se observa que

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots \geq \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx.$$

De forma análoga, con base en la figura 10.11b), encontramos una cota superior con

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots \leq \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Tales comparaciones demuestran el siguiente resultado, que proporciona cotas para el tamaño del residuo.

Cotas para el residuo en el criterio de la integral

Suponga que $\{a_k\}$ es una sucesión de términos positivos con $a_k = f(k)$, donde f es una función positiva, decreciente y continua de x para toda $x \geq n$, y que $\sum a_n$ converge a S. Entonces, el residuo $R_n = S - s_n$ satisface las desigualdades

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq R_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Si sumamos las sumas parciales, s_n, a cada lado de las desigualdades en (1), obtendremos

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq S \leq s_n + \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx \tag{2}$$

ya que $s_n + R_n = S$. Las desigualdades en (2) son útiles para la estimación del error al aproximar la suma de una serie que, por el criterio de la integral, se sabe que es convergente. El error no puede ser mayor que la longitud del intervalo que contiene a S, con extremos identificados mediante la expresión (2).

EJEMPLO 6 Estime la suma de la serie $\sum(1/n^2)$; para ello, emplee las desigualdades en (2) y $n = 10$.

Solución Tenemos que

$$\int_{n}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_n^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Utilizando este resultado con las desigualdades en (2), obtendremos

$$s_{10} + \frac{1}{11} \leq S \leq s_{10} + \frac{1}{10}.$$

Si tomamos $s_{10} = 1 + (1/4) + (1/9) + (1/16) + \cdots + (1/100) \approx 1.54977$, esta última desigualdad da

$$1.64068 \leq S \leq 1.64997.$$

Si aproximamos la suma S mediante el punto medio de este intervalo, encontraremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx 1.6452.$$

La *p* serie para $p = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.64493$$

El error en dicha aproximación es menor que la mitad de la longitud del intervalo, por lo que el error es menor que 0.005. Usando una *serie trigonométrica de Fourier* (que se estudia en cálculo avanzado), es posible demostrar que S es igual a $\pi^2/6 \approx 1.64493$. ■

Ejercicios 10.3

Aplicación del criterio de la integral

Utilice el criterio de la integral para determinar si las series en los ejercicios 1 a 10 convergen o divergen. Asegúrese de verificar que se cumplan las condiciones del criterio de la integral.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ **2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.2}}$ **3.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}$ **5.** $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$ **6.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$ **8.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln (n^2)}{n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n/3}}$ **10.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-4}{n^2-2n+1}$

Determinación de convergencia o divergencia

En los ejercicios 11 a 40, ¿cuáles series convergen y cuáles divergen? Justifique sus respuestas. (Cuando verifique una respuesta, recuerde que existe más de una forma de determinar la convergencia y la divergencia de las series).

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ **12.** $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ **13.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+1}$ **15.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$ **16.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\sqrt{n}}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{8^n}$ **18.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{n}$ **19.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

20. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ **21.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ **22.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n+3}$

23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{n+1}$ **24.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ **25.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ **27.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$ **28.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+1\right)}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n}$ **30.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 3)^n}$

31. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(1/n)}{(\ln n)\sqrt{\ln^2 n - 1}}$ **32.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ **34.** $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{1}{n}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$ **36.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+e^n}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \tan^{-1} n}{1+n^2}$ **38.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech} n$ **40.** $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech}^2 n$

Teoría y ejemplos

¿Para qué valores de a, si acaso, las series de los ejercicios 41 y 42 convergen?

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n+2} - \frac{1}{n+4}\right)$ **42.** $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2a}{n+1}\right)$

43. ***a)*** Elabore un dibujo como el de las figuras 10.11*a*) y 10.11*b*) para demostrar que las sumas parciales de la serie armónica satisfacen las desigualdades

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$\le 1 + \int_1^n \frac{1}{x}dx = 1 + \ln n.$$

T

b) No hay ninguna evidencia empírica de la divergencia de la serie armónica, aunque sabemos que diverge. Las sumas parciales crecen muy lentamente. Para ver lo que queremos decir, suponga que el proceso de suma inició en $s_1 = 1$, hace 13 mil millones de años, el día en que se creó el Universo, y que se suma un nuevo término cada *segundo*. ¿Qué tan grande sería el valor de la suma parcial s_n el día de hoy, suponiendo años de 365 días?

44. ¿Existen valores de x para los cuales $\sum_{n=1}^{\infty}(1/nx)$ converja? Justifique su respuesta.

45. ¿Es cierto que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie divergente de números positivos, entonces, también existe una serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de números positivos con $b_n < a_n$ para toda n? ¿Existe una serie divergente de números positivos que sea "la más pequeña"? Justifique sus respuestas.

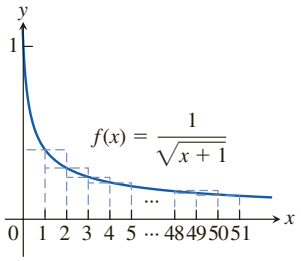
46. (*Continuación del ejercicio 45*). ¿Existe una serie convergente de números positivos que sea "la más grande"? Explique su respuesta.

47. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1/\sqrt{n+1}\right)$ **diverge**

a) Utilice la siguiente gráfica para demostrar que la suma parcial $s_{50} = \sum_{n=1}^{50} \left(1/\sqrt{n+1}\right)$

$$\int_1^{51} \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx < s_{50} < \int_0^{50} \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx.$$

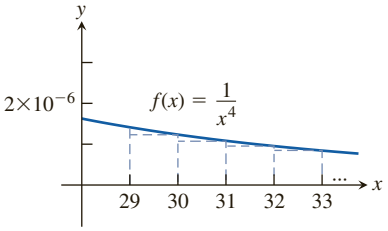
Concluya que $11.5 < s_{50} < 12.3$.



b) ¿Cuál debería ser el valor de n para que la suma parcial $s_n = \sum_{i=1}^{n} \left(1/\sqrt{i+1}\right)$ satisfaga $s_n > 1000$?

48. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^4)$ converge

a) Utilice la siguiente gráfica para determinar la cota superior para el error si $s_{30} = \sum_{n=1}^{30} (1/n^4)$ se usa para estimar el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^4)$.



b) Determine n de manera que la suma parcial $s_n = \sum_{i=1}^{n} (1/i^4)$ estime el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^4)$ con un error, a lo sumo, de 0.000001.

49. Estime el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^3)$ a no más de 0.01 de su valor exacto.

50. Estime el valor de $\sum_{n=2}^{\infty} (1/(n^2+4))$ a no más de 0.1 de su valor exacto.

51. ¿Cuántos términos de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^{1.1})$ deberían utilizarse para estimar su valor con un error, a lo sumo, de 0.00001?

52. ¿Cuántos términos de la serie convergente $\sum_{n=4}^{\infty} (1/n(\ln n)^3)$ deberían utilizarse para estimar su valor con un error, a lo sumo, de 0.01?

53. El criterio de condensación de Cauchy El criterio de condensación de Cauchy afirma: Sea $\{a_n\}$ una sucesión no creciente ($a_n \geq a_{n+1}$ para toda n) de términos positivos que converge a 0. Entonces, $\sum a_n$ converge si y sólo si $\sum 2^n a_{2^n}$ converge. Por ejemplo, $\sum(1/n)$ diverge, ya que $\sum 2^n \cdot (1/2^n) = \sum 1$ diverge. Demuestre por qué este criterio funciona.

54. Utilice el criterio de condensación de Cauchy, del ejercicio 53, para demostrar que

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$, y diverge si $p \leq 1$.

55. *p* serie logarítmica

a) Demuestre que la integral impropia

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} \quad (p \text{ es una constante positiva})$$

converge si y sólo si $p > 1$.

b) ¿Qué implicaciones tiene el hecho en el inciso *a)* con respecto a la convergencia de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}?$$

Justifique su respuesta.

56. (*Continuación del ejercicio 55*). Utilice el resultado del ejercicio 55 para determinar cuáles de las siguientes series convergen y cuáles divergen. En cada caso, justifique su respuesta.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)}$ ***b)*** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1.01}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n^3)}$ ***d)*** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

57. Constante de Euler Gráficas como las de la figura 10.11 sugieren que, cuando n aumenta, hay poco cambio en la diferencia entre la suma

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

y la integral

$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{x} dx.$$

Para explorar tal idea, realice los siguientes pasos.

a) Tomando $f(x) = 1/x$ en la demostración del teorema 9, demuestre que

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln n$$

o

$$0 < \ln(n+1) - \ln n \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \leq 1.$$

Por lo tanto, la sucesión

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

está acotada por abajo y por arriba.

b) Demuestre que

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1) - \ln n,$$

y utilice el resultado para demostrar que la sucesión $\{a_n\}$ del inciso *a)* es decreciente.

Como una sucesión decreciente que está acotada por abajo converge, los números a_n definidos en el inciso *a)* convergen:

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \to \gamma.$$

El número γ, cuyo valor es 0.5772..., se conoce como la *constante de Euler*.

58. Utilice el criterio de la integral para demostrar que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$$

converge.

59. ***a)*** Para la serie $\sum(1/n^3)$, utilice las desigualdades en la ecuación (2) con $n = 10$ para determinar un intervalo que contenga a la suma S.

b) Como en el ejemplo 5, utilice el punto medio del intervalo determinado en el inciso *a)* para aproximar la suma de la serie. ¿Cuál es el error máximo de su aproximación?

60. Repita el ejercicio 59 usando la serie $\sum(1/n^4)$.

61. Área Considere la sucesión $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$. En cada subintervalo $(1/(n+1), 1/n)$ dentro del intervalo $[0, 1]$, construya un rectángulo con área a_n que tenga una altura $1/n$ y ancho igual a la longitud del subintervalo. Encuentre el área total $\sum a_n$ de todos los rectángulos. (*Sugerencia:* Utilice el resultado del ejemplo 5 de la sección 10.2).

62. Área Repita el ejercicio 61, usando trapezoides en lugar de rectángulos. Es decir, en el subintervalo $(1/(n+1), 1/n)$, sea a_n el área del trapezoide con alturas $y = 1/(n+1)$ en $x = 1/(n+1)$, y $y = 1/n$ en $x = 1/n$.

10.4 Criterios de comparación

Hemos visto cómo determinar la convergencia de series geométricas, p series, y algunas otras. Podemos demostrar la convergencia de muchas series más si comparamos sus términos con los de una serie cuya convergencia sea conocida.

TEOREMA 10: Criterio de comparación Sean $\sum a_n$, $\sum c_n$ y $\sum d_n$ series con términos no negativos. Suponga que para algún entero N

$$d_n \le a_n \le c_n \qquad \text{para toda} \qquad n > N.$$

a) Si $\sum c_n$ converge, entonces, $\sum a_n$ también converge.

b) Si $\sum d_n$ diverge, entonces, $\sum a_n$ también diverge.

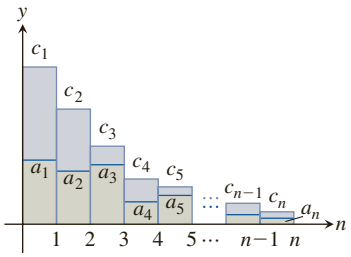


FIGURA 10.12 Si el área total $\sum c_n$ de los rectángulos más altos, c_n, es finita, entonces, también lo será el área total $\sum a_n$ de los rectángulos más cortos a_n.

Demostración En el inciso ***a)***, las sumas parciales de $\sum a_n$ están acotadas por abajo por

$$M = a_1 + a_2 + \cdots + a_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n.$$

Por lo tanto, forman una sucesión no decreciente con un límite $L \le M$. Esto es, si $\sum c_n$ converge, entonces, también $\sum a_n$. La figura 10.12 ilustra dicho resultado, donde cada término de cada serie se interpreta como el área de un rectángulo (al igual que lo hicimos para el criterio de la integral en la figura 10.11).

En el inciso *b)*, las sumas parciales de $\sum a_n$ no están acotadas por arriba. Si lo estuvieran, las sumas parciales para $\sum d_n$ estarían acotadas por

$$M^* = d_1 + d_2 + \cdots + d_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

y $\sum d_n$ tendría que converger en vez de divergir. ■

EJEMPLO 1 Aplicamos el teorema 10 a varias series.

a) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n - 1}$$

diverge, ya que su n-ésimo término

$$\frac{5}{5n - 1} = \frac{1}{n - \frac{1}{5}} > \frac{1}{n}$$

es mayor que el n-ésimo término de la serie armónica divergente.

b) La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

converge, ya que todos sus términos son positivos y menores o iguales que los correspondientes términos de

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots.$$

La serie geométrica del lado izquierdo converge, por lo que tenemos

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1 - (1/2)} = 3.$$

El hecho de que 3 sea una cota superior para las sumas parciales de $\sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)$ no significa que la serie converja en 3. Como veremos en la sección 10.9, la serie converge a e.

c) La serie

$$5 + \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + 1 + \frac{1}{2 + \sqrt{1}} + \frac{1}{4 + \sqrt{2}} + \frac{1}{8 + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2^n + \sqrt{n}} + \cdots$$

converge. Para ver esto, ignoramos los primeros tres términos y comparamos el resto con los de la serie geométrica convergente $\sum_{n=0}^{\infty}(1/2^n)$. El término $1/\left(2^n + \sqrt{n}\right)$ de la sucesión truncada es menor que el término correspondiente, $1/2^n$, de la serie geométrica. Vemos que, término a término, tenemos la comparación

$$1 + \frac{1}{2 + \sqrt{1}} + \frac{1}{4 + \sqrt{2}} + \frac{1}{8 + \sqrt{3}} + \cdots \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots.$$

Así, por una aplicación del criterio de comparación, la serie truncada y la serie original convergen. ■

Criterio de comparación del límite

Ahora introducimos un criterio de comparación, que es particularmente útil en series en las que a_n es una función racional.

TEOREMA 11: Criterio de comparación del límite Suponga que $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para toda $n \geq N$ (N es un entero).

1. Si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c > 0$, entonces, tanto $\sum a_n$ como $\sum b_n$ convergen, o bien, ambas divergen.
2. Si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces, $\sum a_n$ converge.
3. Si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ y $\sum b_n$ diverge, entonces, $\sum a_n$ diverge.

Demostración Demostraremos la parte 1. Las partes 2 y 3 se dejan como los ejercicios 55*a*) y *b*). Como $c/2 > 0$, existe un entero N tal que para toda n

$$n > N \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < \frac{c}{2}.$$

La definición de límite con $\epsilon = c/2$, $L = c$, y a_n reemplazada por a_n/b_n

Así, para $n > N$,

$$-\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} - c < \frac{c}{2},$$

$$\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2},$$

$$\left(\frac{c}{2}\right)b_n < a_n < \left(\frac{3c}{2}\right)b_n.$$

Si $\sum b_n$ converge, entonces, $\sum (3c/2)b_n$ converge y $\sum a_n$ converge por el criterio de comparación directa. Si $\sum b_n$ diverge, entonces, por el criterio de comparación directa, $\sum (c/2)b_n$ y $\sum a_n$ divergen. ■

EJEMPLO 2 ¿Cuáles de las siguientes series convergen y cuáles divergen?

a) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{9} + \dfrac{7}{16} + \dfrac{9}{25} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 1}{(n + 1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 1}{n^2 + 2n + 1}$

b) $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{15}+\cdots=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$

c) $\dfrac{1+2\ln 2}{9}+\dfrac{1+3\ln 3}{14}+\dfrac{1+4\ln 4}{21}+\cdots=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+n\ln n}{n^2+5}$

Solución Aplicamos el criterio de comparación del límite a cada serie.

a) Sea $a_n=(2n+1)/(n^2+2n+1)$. Para n grande, como los términos principales dominan, esperamos que a_n se comporte como $2n/n^2=2/n$, así que tomamos $b_n=1/n$. Ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ \text{diverge}$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+2n+1}=2,$$

de acuerdo con la parte 1 del criterio de comparación del límite, Σa_n diverge. También podríamos haber utilizado $b_n=2/n$, pero $1/n$ es más sencillo.

b) Sea $a_n=1/(2^n-1)$. Para n grande, esperamos que a_n se comporte como $1/2^n$, así que tomamos $b_n=1/2^n$. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\ \text{converge}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-(1/2^n)}\\&=1,\end{aligned}$$

de acuerdo con la parte 1 del criterio de comparación del límite, Σa_n converge.

c) Sea $a_n=(1+n\ln n)/(n^2+5)$. Para n grande, esperamos que a_n se comporte como $(n\ln n)/n^2=(\ln n)/n$, que es mayor que $1/n$ para $n\geq 3$, así que tomamos $b_n=1/n$. Ya que

$$\sum_{n=2}^{\infty}b_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\ \text{diverge}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2\ln n}{n^2+5}\\&=\infty,\end{aligned}$$

de acuerdo con la parte 3 del criterio de comparación del límite, Σa_n diverge. ■

EJEMPLO 3 ¿La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{3/2}}$ converge?

Solución Puesto que $\ln n$ crece más lentamente que n^c para cualquier constante positiva c (ejercicio 105, sección 10.1), es posible comparar la serie con una p serie convergente. Para obtener la p serie, vemos que

$$\frac{\ln n}{n^{3/2}}<\frac{n^{1/4}}{n^{3/2}}=\frac{1}{n^{5/4}}$$

para n suficientemente grande. Luego, tomando $a_n = (\ln n)/n^{3/2}$ y $b_n = 1/n^{5/4}$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/4}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{(1/4)n^{-3/4}} \qquad \text{Regla de L'Hôpital}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^{1/4}} = 0.$$

Como $\sum b_n = \sum(1/n^{5/4})$ es una p serie con $p > 1$, converge, por lo que $\sum a_n$ converge de acuerdo con la parte 2 del criterio de comparación del límite. ■

Ejercicios 10.4

Criterio de comparación

En los ejercicios 1 a 8, utilice el criterio de comparación para determinar si cada serie converge o diverge.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 30}$ **2.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^4 + 2}$ **3.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - 1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^2 - n}$ **5.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^{3/2}}$ **6.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+4}{n^4 + 4}}$ **8.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n^2 + 3}}$

Criterio de comparación del límite

En los ejercicios 9 a 16, utilice el criterio de comparación del límite para determinar si cada serie converge o diverge.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^3 - n^2 + 3}$

(*Sugerencia:* Comparación del límite con $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$)

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^2 + 2}}$

(*Sugerencia:* Comparación del límite con $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/\sqrt{n}\right)$)

11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n^2 + 1)(n-1)}$ **12.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3 + 4^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt{n}\,4^n}$ **14.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n$

15. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

(*Sugerencia:* Comparación del límite con $\sum_{n=2}^{\infty}(1/n)$)

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

(*Sugerencia:* Comparación del límite con $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$)

Determinación de convergencia o divergencia

En los ejercicios 17 a 54, ¿cuáles de las series convergen y cuáles divergen? Emplee cualquier método y justifique sus respuestas.

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}$ **18.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n + \sqrt{n}}$ **19.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{2^n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{n^2}$ **21.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n - 1}$ **22.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2\sqrt{n}}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n + 1}{n(n+1)(n+2)}$ **24.** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n^3 - 3n}{n^2(n-2)(n^2 + 5)}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$ **26.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}}$ **27.** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$ **29.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ **30.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \ln n}$ **32.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ **33.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2 - 1}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$ **35.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n2^n}$ **36.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2^n}{n^2 2^n}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1} + 1}$ **38.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} + 1}{3^n}$ **39.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 + 3n} \cdot \frac{1}{5n}$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n}$ **41.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - n}{n2^n}$ **42.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}\,e^n}$

43. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$

[*Sugerencia:* Primero demuestre que $(1/n!) \le (1/n(n-1))$ para $n \ge 2$].

44. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+2)!}$ **45.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n}$ **46.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{1}{n}$

47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^{1.1}}$ **48.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sec^{-1} n}{n^{1.3}}$ **49.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth n}{n^2}$

50. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{n^2}$ **51.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ **52.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$

53. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2 + 3 + \cdots + n}$ **54.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}$

Teoría y ejemplos

55. Demuestre ***a)*** la parte 2 y ***b)*** la parte 3 del criterio de comparación del límite.

56. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente de números no negativos, ¿qué puede decir acerca de $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/n)$? Explique.

57. Suponga que $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para $n \ge N$ (N es un entero). Si $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = \infty$ y $\sum a_n$ converge, ¿qué puede decir con respecto a $\sum b_n$? Justifique su respuesta.

58. Demuestre que si $\sum a_n$ es una serie convergente de términos no negativos, entonces, $\sum a_n^2$ converge.

59. Suponga que $a_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Demuestre que $\sum a_n$ diverge.

60. Suponga que $a_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$. Demuestre que $\sum a_n$ converge.

61. Demuestre que $\sum_{n=2}^{\infty} ((\ln n)^q / n^p)$ converge para $-\infty < q < \infty$ y $p > 1$.

(*Sugerencia:* Comparación del límite con $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n^r$ para $1 < r < p$).

62. (*Continuación del ejercicio 61*). Demuestre que $\sum_{n=2}^{\infty} ((\ln n)^q / n^p)$ diverge para $-\infty < q < \infty$ y $0 < p < 1$.

(*Sugerencia:* Comparación del límite con una p serie adecuada).

63. Números decimales Cualquier número real en el intervalo [0, 1] se puede representar por un decimal (no necesariamente único) como

$$0.d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \cdots,$$

donde d_i es uno de los enteros 0, 1, 2, 3, . . . , 9. Demuestre que la serie del lado derecho siempre converge.

64. Si Σa_n es una serie convergente de términos positivos, demuestre que Σ sen (a_n) converge.

En los ejercicios 65 a 70, utilice los resultados de los ejercicios 61 y 62 para determinar si cada serie converge o diverge.

65. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n^4}$

66. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{\ln n}{n}}$

67. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^{1000}}{n^{1.001}}$

68. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^{1/5}}{n^{0.99}}$

69. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1}(\ln n)^3}$

70. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\ln n}$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

71. Aún no se sabe si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \operatorname{sen}^2 n}$$

converge o diverge. Utilice un software matemático para explorar el comportamiento de la serie y realice los siguientes pasos.

a) Defina la sucesión de sumas parciales

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^3 \operatorname{sen}^2 n}.$$

¿Qué sucede al tratar de determinar el límite de s_k cuando $k \to \infty$? ¿Su software matemático puede determinar una respuesta en forma cerrada para este límite?

b) Trace los primeros 100 puntos (k, s_k) para la sucesión de sumas parciales. ¿Parece que converge? ¿Cuál cree que es el límite?

c) Ahora trace los primeros 200 puntos (k, s_k). Analice el comportamiento y explíquelo con sus palabras.

d) Trace los primeros 400 puntos (k, s_k). ¿Qué sucede cuando $k = 355$? Calcule el número $355/113$. Con base en sus cálculos, explique qué sucedió en $k = 355$. ¿Para qué valores de k pronosticaría que este comportamiento ocurrirá nuevamente?

72. ***a)*** Utilice el teorema 8 para demostrar que

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

donde $S = \sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$, la suma de una p serie convergente.

b) Con base en el ejemplo 5 de la sección 10.2, demuestre que

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}.$$

c) Explique por qué al tomar los primeros M términos en la serie del inciso *b)*, se obtiene una mejor aproximación para S que al tomar los primeros M en la serie original $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$.

d) Se sabe que el valor exacto de S es $\pi^2/6$. ¿Cuál de las sumas

$$\sum_{n=1}^{1000000} \frac{1}{n^2} \quad \text{o} \quad 1 + \sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n^2(n+1)}$$

da una mejor aproximación para S?

10.5 Convergencia absoluta; criterios de la raíz y de la razón

Cuando algunos términos de una serie son positivos y otros negativos, la serie puede converger o no. Por ejemplo, la serie geométrica

$$5 - \frac{5}{4} + \frac{5}{16} - \frac{5}{64} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 5\left(\frac{-1}{4}\right)^n \tag{1}$$

converge (ya que $|r| = \frac{1}{4} < 1$), mientras que la serie geométrica diferente

$$1 - \frac{5}{4} + \frac{25}{16} - \frac{125}{64} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-5}{4}\right)^n \tag{2}$$

diverge (ya que $|r| = 5/4 > 1$). En la serie (1), se cancelan algunos términos en las sumas parciales, lo que puede ayudar a la propiedad de convergencia de la serie. Sin embargo, si hacemos positivos todos los términos de la serie (1) para formar la nueva serie

$$5 + \frac{5}{4} + \frac{5}{16} + \frac{5}{64} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left|5\left(\frac{-1}{4}\right)^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty} 5\left(\frac{1}{4}\right)^n,$$

vemos que aún converge. Para series generales con términos positivos y negativos, podemos aplicar los criterios de convergencia antes estudiados a series de valores absolutos de sus términos. Al hacerlo, nos dirigimos naturalmente al siguiente concepto.

DEFINICIÓN Una serie $\sum a_n$ **converge absolutamente** (o es **absolutamente convergente**) si la correspondiente serie de valores absolutos, $\sum |a_n|$, converge.

Así, la serie geométrica (1) es absolutamente convergente. Observamos, además, que ésta también es convergente. Esta situación siempre es verdad: una serie absolutamente convergente también es convergente, lo que ahora se demostrará.

TEOREMA 12: Criterio de la convergencia absoluta Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Demostración Para toda n,

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n|, \text{ de manera que } 0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|.$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ converge y, de acuerdo con el criterio de comparación directa, la serie no negativa $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ converge. La igualdad $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$ ahora nos permite expresar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ como la diferencia de dos series convergentes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ■

EJEMPLO 1 Este ejemplo da dos series que convergen absolutamente.

a) Para $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots$, la correspondiente serie de valores absolutos es la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots.$$

La serie original converge, ya que ésta converge absolutamente.

b) Para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} = \frac{\operatorname{sen} 1}{1} + \frac{\operatorname{sen} 2}{4} + \frac{\operatorname{sen} 3}{9} + \cdots$, que incluye tanto términos positivos como negativos, la correspondiente serie de valores absolutos es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} \right| = \frac{|\operatorname{sen} 1|}{1} + \frac{|\operatorname{sen} 2|}{4} + \cdots,$$

que converge por comparación con $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$, ya que $|\operatorname{sen} n| \le 1$ para toda n. La serie original converge absolutamente; por lo tanto, también converge. ■

¡Cuidado! Sea precavido cuando utilice el teorema 12. Una serie convergente *no* necesita convergencia absoluta, como veremos en la siguiente sección.

Criterio de la razón

El criterio de la razón mide la tasa de crecimiento (o disminución) de una serie examinando la razón a_{n+1}/a_n. Para una serie geométrica $\sum ar^n$, esta razón es una constante $((ar^{n+1})/(ar^n) = r)$, y la serie converge si y sólo si su razón, en valor absoluto, es menor que 1. El criterio de la razón es una regla poderosa para ampliar ese resultado.

TEOREMA 13: Criterio de la razón Sea Σa_n una serie y suponga que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho.$$

Entonces, ***a***) la serie *converge absolutamente* si $\rho < 1$; ***b***) la serie *diverge* si $\rho > 1$ o ρ es infinito; ***c***) el criterio *no es concluyente* si $\rho = 1$.

Demostración

***a*) $\rho < 1$.** Sea r un número entre ρ y 1. Entonces, el número $\epsilon = r - \rho$ es positivo. Como

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \rho,$$

entonces, a_{n+1}/a_n debe estar a menos de ϵ de distancia de ρ cuando n es suficientemente grande, digamos, para toda $n \geq N$. En particular,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \rho + \epsilon = r, \qquad \text{cuando } n \geq N.$$

Esto es,

$$\begin{aligned}
|a_{N+1}| &< r|a_N|,\\
|a_{N+2}| &< r|a_{N+1}| < r^2|a_N|,\\
|a_{N+3}| &< r|a_{N+2}| < r^3|a_N|,\\
&\vdots\\
|a_{N+m}| &< r|a_{N+m-1}| < r^m|a_N|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{m=N}^{\infty} |a_m| = \sum_{m=0}^{\infty} |a_{N+m}| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |a_N|\, r^m = |a_N| \sum_{m=0}^{\infty} r^m.$$

La serie geométrica del lado derecho converge, ya que $0 < r < 1$, de manera que la serie de valores absolutos $\sum_{m=N}^{\infty} |a_m|$ converge por el criterio de comparación. Ya que el hecho de agregar o eliminar una cantidad finita de términos en una serie no afecta su propiedad de convergencia o divergencia, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ también converge. Es decir, la serie Σa_n es absolutamente convergente.

***b*) $1 < \rho \leq \infty$.** A partir de cierto índice M,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \qquad \text{y} \qquad |a_M| < |a_{M+1}| < |a_{M+2}| < \cdots.$$

Los términos de la serie no tienden a cero cuando n tiende a infinito, de manera que por el criterio del n-ésimo término, la serie diverge.

***c*) $\rho = 1$.** Las dos series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

demuestran que debe utilizarse algún otro criterio para convergencia cuando $\rho = 1$.

$$\text{Para } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}: \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \to 1.$$

$$\text{Para } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}: \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1^2 = 1.$$

En ambos casos, $\rho = 1$, pero la primera serie diverge, mientras que la segunda converge. ■

Con frecuencia, el criterio de la razón es efectivo cuando los términos de una serie incluyen factoriales de expresiones que implican a n o expresiones elevadas a un exponente que involucra a n.

EJEMPLO 2 Investigue la convergencia de las siguientes series.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$ ***b)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$ ***c)*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!n!}{(2n)!}$

Solución A cada serie le aplicamos el criterio de la razón.

a) Para la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(2^n + 5)/3^n$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2^{n+1} + 5)/3^{n+1}}{(2^n + 5)/3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{n+1} + 5}{2^n + 5} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2 + 5 \cdot 2^{-n}}{1 + 5 \cdot 2^{-n}}\right) \to \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}.$$

La serie converge absolutamente (y, por lo tanto, converge), ya que $\rho = 2/3$ es menor que 1. Eso *no* significa que $2/3$ sea la suma de la serie. De hecho,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \frac{1}{1 - (2/3)} + \frac{5}{1 - (1/3)} = \frac{21}{2}.$$

b) Si $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$, entonces, $a_{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$ y

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n!n!(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+1} \to 4.$$

La serie diverge porque $\rho = 4$ es mayor que 1.

c) Si $a_n = 4^n n!n!/(2n)!$, entonces,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n n!n!}$$

$$= \frac{4(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+1} \to 1.$$

Puesto que el límite es $\rho = 1$, con base en el criterio de la razón, no es posible determinar si la serie converge. Cuando observamos que $a_{n+1}/a_n = (2n+2)/(2n+1)$, concluimos que a_{n+1} siempre es mayor que a_n, ya que $(2n+2)/(2n+1)$ siempre es mayor que 1. Por lo tanto, todos los términos son mayores o iguales que $a_1 = 2$, mientras el n-ésimo término no se aproxima a cero cuando $n \to \infty$. La serie diverge. ■

Criterio de la raíz

Los criterios de convergencia que tenemos hasta ahora para $\sum a_n$ funcionan mejor cuando la fórmula de a_n es relativamente sencilla. Sin embargo, considere la serie con los términos

$$a_n = \begin{cases} n/2^n, & n \text{ impar} \\ 1/2^n, & n \text{ par.} \end{cases}$$

Para investigar la convergencia, escribimos varios términos de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{7}{2^7} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{5}{32} + \frac{1}{64} + \frac{7}{128} + \cdots.$$

Claramente, no es una serie geométrica. El n-ésimo término se aproxima a cero cuando $n \to \infty$, así que el criterio del n-ésimo término no nos indica si la serie diverge. El criterio de la integral no parece prometedor. El criterio de la razón produce

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}, & n \text{ impar} \\ \dfrac{n+1}{2}, & n \text{ par.} \end{cases}$$

Cuando $n \to \infty$, la razón es grande y pequeña en forma alternada, y no tiene límite. Sin embargo, veremos que el siguiente criterio establece que la serie converge.

TEOREMA 14: Criterio de la raíz Sea $\sum a_n$ una serie y suponga que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

Entonces, ***a***) la serie *converge absolutamente* si $\rho < 1$; ***b***) la serie *diverge* si $\rho > 1$ o ρ es infinita; ***c***) el criterio *no es concluyente* si $\rho = 1$.

Demostración

a) **$\rho < 1$.** Elijamos una $\epsilon > 0$ tan pequeña que $\rho + \epsilon < 1$. Como $\sqrt[n]{|a_n|} \to \rho$, los términos $\sqrt[n]{|a_n|}$ finalmente se encuentran a una distancia menor que ϵ de ρ. Así que existe un índice M, tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \epsilon \qquad \text{cuando } n \geq M.$$

Entonces, también es cierto que

$$|a_n| < (\rho + \epsilon)^n \qquad \text{para } n \geq M.$$

Ahora, $\sum_{n=M}^{\infty} (\rho + \epsilon)^n$, una serie geométrica con razón $(\rho + \epsilon) < 1$, converge. Por el criterio de comparación, $\sum_{n=M}^{\infty} |a_n|$ converge, de lo cual se sigue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + \cdots + |a_{M-1}| + \sum_{n=M}^{\infty} |a_n|$$

converge. Por lo tanto, $\sum a_n$ converge absolutamente.

b) **$1 < \rho \leq \infty$.** Para todos los índices más allá de algún entero M, tenemos $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, de manera que $|a_n| > 1$ para $n > M$. Los términos de la serie no convergen a cero. Por el criterio del n-ésimo término, la serie diverge.

c) **$\rho = 1$.** Las series $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ indican que el criterio no es concluyente cuando $\rho = 1$. La primera serie diverge y la segunda converge, pero en ambos casos $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1$.

EJEMPLO 3 Nuevamente, considere la serie con términos $a_n = \begin{cases} n/2^n, & n \text{ impar} \\ 1/2^n, & n \text{ par.} \end{cases}$

¿La serie $\sum a_n$ converge?

Solución Al aplicar el criterio de la raíz, encontramos que

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{n}/2, & n \text{ impar} \\ 1/2, & n \text{ par.} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2} \le \sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{\sqrt[n]{n}}{2}.$$

Como $\sqrt[n]{n} \to 1$ (teorema 5, sección 10.1), tenemos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/2$ por el teorema del sándwich. El límite es menor que 1, así que, por el criterio de la raíz, la serie converge. ■

EJEMPLO 4 ¿Cuáles de las siguientes series convergen y cuáles divergen?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$ *c)* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$

Solución A cada serie le aplicamos el criterio de la raíz. Observe que cada serie tiene términos positivos.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ converge porque $\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} \to \frac{1^2}{2} < 1.$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$ diverge porque $\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = \frac{2}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3} \to \frac{2}{1^3} > 1.$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$ converge porque $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+n}\right)^n} = \frac{1}{1+n} \to 0 < 1.$ ■

Ejercicios 10.5

Aplicación del criterio de la razón

En los ejercicios 1 a 8, utilice el criterio de la razón para determinar si cada serie converge absolutamente o diverge.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{3^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)^2}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n3^{n-1}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(-4)^n}$

6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2(n+2)!}{n!\, 3^{2n}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{(2n+3)\ln(n+1)}$

Aplicación del criterio de la raíz

En los ejercicios 9 a 16, utilice el criterio de la raíz para determinar si cada serie converge absolutamente o diverge.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(2n+5)^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(3n)^n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+3}{3n-5}\right)^n$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\ln\left(e^2 + \frac{1}{n}\right)\right)^{n+1}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{(3+(1/n))^{2n}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(*Sugerencia:* $\lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n = e^x$)

16. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1+n}}$

Determinación de convergencia o divergencia

En los ejercicios 17 a 44, utilice cualquier método para determinar si la serie converge o diverge. Justifique su respuesta.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 e^{-n}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} n!(-e)^{-n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{1.25^n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\ln n)^n}{n^n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^e}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{(-2)^n}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n + 1)(n + 2)}{n!}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}(n^3)$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n + 3)!}{3!n!3^n}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n(n + 1)!}{3^n n!}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n + 1)!}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-n)^n}$

39. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-n}{(\ln n)^n}$

40. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^{(n/2)}}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \ln n}{n(n + 2)!}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3 2^n}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n + 3)(2^n + 3)}{3^n + 2}$

Términos definidos de manera recursiva ¿Cuáles de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definidas mediante las fórmulas que se presentan en los ejercicios 45 a 54, convergen y cuáles divergen? Justifique sus respuestas.

45. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1 + \operatorname{sen} n}{n} a_n$

46. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1 + \tan^{-1} n}{n} a_n$

47. $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{3n - 1}{2n + 5} a_n$

48. $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n + 1} a_n$

49. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2}{n} a_n$

50. $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$

51. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1 + \ln n}{n} a_n$

52. $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{n + \ln n}{n + 10} a_n$

53. $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n}$

54. $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = (a_n)^{n+1}$

Convergencia o divergencia

¿Cuáles de las series en los ejercicios 55 a 62 convergen, y cuáles divergen? Justifique sus respuestas.

55. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n! n!}{(2n)!}$

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n)!}{n!(n + 1)!(n + 2)!}$

57. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$

58. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}}$

59. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{(n^2)}}$

60. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2^n)^2}$

61. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{4^n 2^n n!}$

62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{[2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)](3^n + 1)}$

Teoría y ejemplos

63. Ni el criterio de la razón ni el criterio de la raíz ayudan con las p series. Inténtelo con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

y demuestre que ambos criterios fallan al dar información acerca de la convergencia.

64. Demuestre que ni el criterio de la razón ni el de la raíz dan información acerca de la convergencia de

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} \qquad (p \text{ constante}).$$

65. Sea $a_n = \begin{cases} n/2^n, & \text{si } n \text{ es un número primo} \\ 1/2^n, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

¿La serie $\sum a_n$ converge? Justifique su respuesta.

66. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(n^2)}/n!$ diverge. Recuerde que, de acuerdo con la ley de los exponentes, se tiene $2^{(n^2)} = (2^n)^n$.

10.6 Series alternantes y convergencia condicional

Una serie en la que los términos son positivos y negativos en forma alternada es una **serie alternante**. A continuación se presentan tres ejemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \tag{1}$$

$$-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^n 4}{2^n} + \cdots \tag{2}$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots + (-1)^{n+1} n + \cdots \tag{3}$$

Con base en tales ejemplos, vemos que el n-ésimo término de una serie alternante es de la forma

$$a_n = (-1)^{n+1}u_n \qquad \text{o} \qquad a_n = (-1)^n u_n,$$

donde $u_n = |a_n|$ es un número positivo.

La serie (1), llamada **serie armónica alternante**, converge, como veremos en un momento. La serie (2), una serie geométrica con razón $r = -1/2$, converge a $-2/[1 + (1/2)] = -4/3$. La serie (3) diverge, ya que el n-ésimo término no se aproxima a cero.

Probamos la convergencia de la serie armónica alternante aplicando el criterio de la serie alternante. El criterio es para la *convergencia* de una serie alternante, por lo que no puede utilizarse para concluir que tal serie diverge. El criterio también es válido para la serie alternante $-u_1 + u_2 - u_3 + \cdots$, como la serie (2) que se presentó anteriormente.

TEOREMA 15: Criterio de la serie alternante La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

converge si se satisfacen las siguientes tres condiciones:

1. Todas las u_n son positivas.
2. Las u_n positivas (en algún momento) son no crecientes: $u_n \geq u_{n+1}$ para toda $n \geq N$, para algún entero N.
3. $u_n \to 0$.

Demostración Suponga que $N = 1$. Si n es un entero par, digamos, $n = 2m$, entonces, la suma de los primeros n términos es

$$\begin{aligned} s_{2m} &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m}) \\ &= u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}. \end{aligned}$$

La primera igualdad muestra que s_{2m} es la suma de m términos no negativos, ya que cada término entre paréntesis es positivo o cero. De aquí que $s_{2m+2} \geq s_{2m}$, y la sucesión $\{s_{2m}\}$ es no decreciente. La segunda igualdad muestra que $s_{2m} \leq u_1$. Como $\{s_{2m}\}$ es no decreciente y está acotada por arriba, tiene un límite, digamos,

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = L. \tag{4}$$

Si n es un entero impar, por ejemplo, $n = 2m + 1$, entonces, la suma de los primeros n términos es $s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}$. Ya que $u_n \to 0$,

$$\lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$$

y, cuando $m \to \infty$,

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1} \to L + 0 = L. \tag{5}$$

Al combinar los resultados de las ecuaciones (4) y (5), se obtiene $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ (sección 10.1, ejercicio 133). ■

EJEMPLO 1 La serie armónica alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

claramente satisface los tres requisitos del teorema 15 con $N = 1$; por lo tanto, converge. ■

En vez de verificar directamente la definición $u_n \geq u_{n+1}$, una segunda forma de demostrar que la sucesión $\{u_n\}$ es no creciente consiste en definir una función diferenciable $f(x)$ que satisfaga $f(n) = u_n$. Esto es, los valores de f coinciden con los valores de la sucesión en

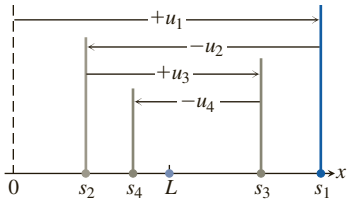


FIGURA 10.13 Las sumas parciales de una serie alternante, que satisface las hipótesis del teorema 15 para $N = 1$, oscilan alrededor del límite desde el principio.

todo entero positivo n. Si $f'(x) \leq 0$ para toda x mayor o igual que algún entero positivo N, entonces, $f(x)$ es no creciente para $x \geq N$. Se deduce que $f(n) \geq f(n+1)$ o $u_n \geq u_{n+1}$ para $n \geq N$.

EJEMPLO 2 Considere la sucesión donde $u_n = 10n/(n^2 + 16)$. Defina $f(x) = 10x/(x^2 + 16)$. Entonces, con base en la regla de la derivada de un cociente,

$$f'(x) = \frac{10(16 - x^2)}{(x^2 + 16)^2} \leq 0 \qquad \text{siempre que } x \geq 4.$$

Se sigue que $u_n \geq u_{n+1}$ para $n \geq 4$. Esto es, la sucesión $\{u_n\}$ es no creciente para $n \geq 4$. ■

Una interpretación gráfica de las sumas parciales (figura 10.13) muestra cómo una serie alternante converge a su límite L cuando se satisfacen las tres condiciones del teorema 15 con $N = 1$. A partir del origen del eje x, establecemos la distancia positiva $s_1 = u_1$. Para determinar el punto correspondiente a $s_2 = u_1 - u_2$, regresamos una distancia igual a u_2. Ya que $u_2 \leq u_1$, no regresamos más allá del origen. Continuamos de esta manera el vaivén, regresando y avanzando conforme los signos de la serie lo demanden. Pero para $n \geq N$, cada paso de avance o de regreso es más corto (o a lo sumo del mismo tamaño) que el anterior, ya que $u_{n+1} \leq u_n$. Como el n-ésimo término tiende a cero conforme n aumenta, el tamaño de paso hacia adelante o de regreso se hace cada vez más pequeño. Oscilamos al cruzar el límite L, y la amplitud de la oscilación tiende a cero. El límite L se encuentra entre cualesquiera dos sumas sucesivas s_n y s_{n+1}; por lo tanto, difiere de s_n por una cantidad menor que u_{n+1}.

Puesto que

$$|L - s_n| < u_{n+1} \qquad \text{para } n \geq N,$$

podemos hacer estimaciones útiles de las sumas de series alternantes convergentes.

TEOREMA 16: Teorema de estimación para series alternantes Si la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ satisface las tres condiciones del teorema 15, entonces, para $n \geq N$,

$$s_n = u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{n+1}u_n$$

se aproxima a la suma L de la serie con un error cuyo valor absoluto es menor que u_{n+1}, el valor absoluto del primer término que no se utiliza. Además, la suma L se encuentra entre cualesquiera dos sumas parciales s_n y s_{n+1}, mientras que el residuo, $L - s_n$, tiene el mismo signo que el primer término que no se utiliza.

Dejamos para el ejercicio 61 la verificación del signo del residuo.

EJEMPLO 3 Aplicamos el teorema 16 con una serie cuya suma conocemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \frac{1}{256} - \cdots.$$

El teorema indica que si truncamos la serie después del octavo término, prescindiremos de un total que es positivo y menor que $1/256$. La suma de los primeros ocho términos es $s_8 = 0.6640625$ y la suma de los primeros nueve términos es $s_9 = 0.66796875$. La suma de la serie geométrica es

$$\frac{1}{1 - (-1/2)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3},$$

y observamos que $0.6640625 < (2/3) < 0.66796875$. La diferencia, $(2/3) - 0.6640625 = 0.0026041666\ldots$, es positiva y menor que $(1/256) = 0.00390625$. ■

Si sustituimos todos los términos negativos en la serie alternante del ejemplo 3, cambiándolos por términos positivos, obtenemos la serie geométrica $\sum 1/2^n$. Tanto la serie original como la nueva serie de valores absolutos convergen (aunque en diferentes valores). Para una serie absolutamente convergente, el hecho de cambiar cantidades infinitas de términos negativos en la serie por valores positivos no altera su propiedad de seguir siendo una serie convergente. Otra serie convergente podría comportarse de forma distinta. La serie armónica alternante convergente tiene infinitamente muchos términos negativos, pero si cambiamos sus términos negativos a valores positivos, la serie resultante es la serie armónica divergente. Así, la presencia de cantidades infinitas de términos negativos es esencial para la convergencia de la serie armónica alternante. La siguiente terminología distingue estos dos tipos de serie convergente.

DEFINICIÓN Una serie convergente que no es absolutamente convergente es **condicionalmente convergente**.

La serie armónica alternante es condicionalmente convergente, o **converge condicionalmente**. El siguiente ejemplo extiende ese resultado a la p serie alternante.

EJEMPLO 4 Si p es una constante positiva, la sucesión $\{1/n^p\}$ es una sucesión decreciente con límite cero. Por lo tanto, la p serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots, \quad p > 0$$

converge.

Si $p > 1$, la serie converge absolutamente como una p serie ordinaria. Si $0 < p \leq 1$, la serie converge condicionalmente por el criterio de la serie alternante. Por ejemplo,

$$\text{Convergencia absoluta } (p = 3/2): \quad 1 - \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} - \frac{1}{4^{3/2}} + \cdots$$

$$\text{Convergencia condicional } (p = 1/2): \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$ ■

Debemos tener cuidado cuando se usa una serie condicionalmente convergente. Hemos visto, en el caso de la serie armónica alternante, que alterar los signos de cantidades infinitas de términos de una serie condicionalmente convergente puede modificar su estado de convergencia. Aún más, el solo hecho de cambiar el orden de aparición de cantidades infinitas de sus términos también podría tener un efecto significativo, como veremos ahora.

Reordenamiento de la serie

Siempre es posible reordenar los términos de una suma *finita*. Lo mismo es cierto para una serie infinita que es absolutamente convergente (vea el ejercicio 70 para un bosquejo de la demostración).

TEOREMA 17: Teorema de reordenamiento para series absolutamente convergentes Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, mientras $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ es cualquier reordenamiento de la sucesión $\{a_n\}$, entonces, $\sum b_n$ converge absolutamente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Por otra parte, si reordenamos los términos de una serie condicionalmente convergente, obtendremos resultados diferentes. En efecto, para cualquier número real r, es posible reordenar una serie condicionalmente convergente para que su suma sea igual a r. (Omitimos la

demostración de este hecho). A continuación se presenta un ejemplo de cómo sumar los términos de una serie condicionalmente convergente con diferentes órdenes, en tanto cada orden dé un valor diferente para la suma.

EJEMPLO 5 Sabemos que la serie armónica alternante $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ converge a algún número L. Además, por el teorema 16, L está entre las sumas parciales sucesivas $s_2 = 1/2$ y $s_3 = 5/6$, por lo que $L \neq 0$. Si multiplicamos la serie por 2, obtendremos

$$2L = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \cdots\right)$$

$$= 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \frac{2}{11} - \cdots.$$

Ahora cambiamos el orden de esta última suma agrupando cada par de términos con el mismo denominador impar, pero dejamos los términos negativos con denominadores pares como están colocados (de manera que los denominadores sean los enteros positivos en su orden natural). Este reacomodo da

$$(2 - 1) - \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{8} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \cdots\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = L.$$

Así que mediante un reordenamiento de los términos de la serie condicionalmente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1}/n$, la serie se transforma en $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$, que es la serie armónica alternante. Si las dos series son iguales, implicaría que $2L = L$, lo cual es falso, ya que $L \neq 0$. ■

El ejemplo 5 indica que no es posible reordenar los términos de una serie condicionalmente convergente y esperar que la nueva serie sea igual que la original. Cuando utilizamos una serie condicionalmente convergente, los términos habrán de sumarse en el orden en que se dan para obtener un resultado correcto. Por otra parte, el teorema 17 garantiza que los términos de una serie absolutamente convergente puedan sumarse en cualquier orden sin afectar el resultado.

Resumen de criterios

Hemos desarrollado varios criterios para determinar la convergencia o divergencia de series infinitas de constantes. Existen otros criterios que no hemos presentado y que se estudian en algunos cursos más avanzados. A continuación se presenta un resumen de los criterios que hemos considerado.

1. **Criterio del *n*-ésimo término:** Si no es verdad que $a_n \to 0$, entonces, la serie diverge.
2. **Serie geométrica:** La serie $\sum ar^n$ converge si $|r| < 1$; de otra forma, diverge.
3. ***p* serie:** $\sum 1/n^p$ converge si $p > 1$; de otra forma, diverge.
4. **Series con términos no negativos:** Intente con el criterio de la integral, o intente comparar con una serie conocida mediante el criterio de comparación o el criterio de comparación del límite. Pruebe con el criterio de la razón o el criterio de la raíz.
5. **Series con algunos términos negativos:** ¿La serie $\sum |a_n|$ converge de acuerdo con el criterio de la razón o de la raíz, o por alguno otro de los criterios mencionados anteriormente? Recuerde que la convergencia absoluta implica convergencia.
6. **Series alternantes:** $\sum a_n$ converge si la serie satisface las condiciones del criterio de la serie alternante.

Ejercicios 10.6

Determinación de convergencia o divergencia

En los ejercicios 1 a 14, ¿cuáles de las series alternantes convergen y cuáles divergen? Algunas de las series no satisfacen las condiciones del criterio de la serie alternante.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{3/2}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n3^n}$
4. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{4}{(\ln n)^2}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2+1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2+5}{n^2+4}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n^2}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{10^n}{(n+1)!}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{10}\right)^n$
10. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln n}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$

Convergencia absoluta y convergencia condicional

¿Cuáles de las series en los ejercicios 15 a 48 convergen absolutamente, cuáles convergen y cuáles divergen? Justifique sus respuestas.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(0.1)^n$
16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(0.1)^n}{n}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$
19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^3+1}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^n}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n+3}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3+n}{5+n}$
24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n}$
25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+n}{n^2}$
26. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt[n]{10}\right)$
27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}n^2(2/3)^n$
28. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\ln n}$
29. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\tan^{-1}n}{n^2+1}$
30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{n-\ln n}$
31. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n+1}$
32. $\sum_{n=1}^{\infty}(-5)^{-n}$
33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-100)^n}{n!}$
34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2n+1}$
35. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$
36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\ldots}{n}$
37. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)^n}{(2n)^n}$
38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n!)^2}{(2n)!}$
39. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(2n)!}{2^n n!n}$
40. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$
41. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$
42. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$
43. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$
44. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$
45. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\operatorname{sech} n$
46. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\operatorname{csch} n$
47. $\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{12}-\frac{1}{14}+\cdots$
48. $1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}-\frac{1}{49}-\frac{1}{64}+\cdots$

Estimación del error

En los ejercicios 49 a 52, estime la magnitud del error en el que se incurre al utilizar la suma de los primeros cuatro términos para aproximar la suma de toda la serie.

49. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$
50. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{10^n}$
51. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(0.01)^n}{n}$ Como verá en la sección 10.7, la suma es ln (1.01).
52. $\frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n,\quad 0<t<1$

En los ejercicios 53 a 56, determine cuántos términos deben utilizarse para estimar la suma de toda la serie con un error menor que 0.001.

53. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n^2+3}$
54. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$
55. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\left(n+3\sqrt{n}\right)^3}$
56. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln(\ln(n+2))}$

T Aproxime las sumas de los ejercicios 57 y 58 con un error de magnitud menor que 5×10^{-6}.

57. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(2n)!}$ Como verá en la sección 10.9, la suma es cos 1, el coseno de 1 radián.
58. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n!}$ Como verá en la sección 10.9, la suma es e^{-1}.

Teoría y ejemplos

59. ***a)*** La serie

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{27}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{2^n}+\cdots$$

no cumple una de las condiciones del teorema 14. ¿Cuál?

b) Determine la suma de la serie del inciso *a)* mediante el teorema 17.

T **60.** El límite L de una serie alternante que satisface las condiciones del teorema 15 se encuentra entre los valores de cualesquiera dos sumas parciales consecutivas. Lo anterior sugiere utilizar el promedio

$$\frac{s_n + s_{n+1}}{2} = s_n + \frac{1}{2}(-1)^{n+2}a_{n+1}$$

para estimar L. Calcule

$$s_{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{21}$$

como una aproximación a la suma de la serie armónica alternante. La suma exacta es $\ln 2 = 0.69314718\ldots$

61. El signo del residuo de una serie alternante que satisface las condiciones del teorema 15 Demuestre la afirmación del teorema 16 en el sentido de que siempre que una serie alternante que satisface las condiciones del teorema 15 se aproxima mediante una de sus sumas parciales, el residuo (la suma de los términos sin utilizar) tiene el mismo signo que el primer término no utilizado. (*Sugerencia:* Agrupe los términos del residuo en pares consecutivos).

62. Demuestre que la suma de los primeros $2n$ términos de la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

es igual a la suma de los primeros n términos de la serie

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots.$$

¿Estas series convergen? ¿Cuál es la suma de los primeros $2n + 1$ términos de la primera serie? Si la serie converge, ¿cuál es su suma?

63. Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

64. Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

65. Demuestre que si las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen absolutamente, entonces, lo mismo sucede con:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ ***b)*** $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ (cualquier número k)

66. Demuestre por medio de un ejemplo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ puede divergir incluso si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen.

67. Si $\sum a_n$ converge absolutamente, demuestre que $\sum {a_n}^2$ converge.

68. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right),$$

¿converge o diverge? Justifique su respuesta.

T **69.** En la serie armónica alternante, suponga que el objetivo es reordenar los términos para obtener una nueva serie que converja en $-1/2$. Inicie el nuevo arreglo con el primer término negativo, que es $-1/2$. Siempre que obtenga una suma que sea menor o igual que $-1/2$, comience por introducir términos positivos, tomados en orden, hasta que la nueva suma sea mayor que $-1/2$. Después, sume términos negativos hasta que, de nuevo, el total sea menor o igual que $-1/2$. Continúe con este proceso hasta que sus sumas parciales hayan estado por arriba del valor objetivo al menos tres veces, y termine en éste o debajo de éste. Si s_n es la suma de los n primeros términos de su nueva serie, trace los puntos (n, s_n) para ilustrar el comportamiento de las sumas.

70. Bosquejo de la demostración del teorema del reordenamiento (teorema 17)

a) Sea ϵ un número real positivo, sea $L = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y sea $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. Demuestre que para algún índice N_1 y para algún índice $N_2 \ge N_1$,

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |a_n| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad |s_{N_2} - L| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como todos los términos $a_1, a_2, \ldots, a_{N_2}$ aparecen en algún lugar de la sucesión $\{b_n\}$, existe un índice $N_3 \ge N_2$ tal que si $n \ge N_3$, entonces, $\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) - s_{N_2}$ es, cuando mucho, una suma de términos a_m con $m \ge N_1$. Por lo tanto, si $n \ge N_3$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k - L\right| \le \left|\sum_{k=1}^{n} b_k - s_{N_2}\right| + |s_{N_2} - L|$$

$$\le \sum_{k=N_1}^{\infty} |a_k| + |s_{N_2} - L| < \epsilon.$$

b) El argumento en el inciso *a)* demuestra que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ahora demuestre que como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ converge a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

10.7 Series de potencias

Ahora que sabemos analizar la convergencia de series infinitas de números, es posible estudiar sumas que parecen "polinomios infinitos". Estos polinomios se denominan *series de potencias*, porque están definidos como series infinitas de potencias de alguna variable, en nuestro caso, x. Al igual que los polinomios, las series de potencias pueden sumarse, restarse, multiplicarse, diferenciarse e integrarse, para obtener nuevas series de potencias. Con series de potencias, podemos extender los métodos del cálculo que se han desarrollado para una amplia gama de funciones, haciendo que las técnicas del cálculo sean aplicables en un entorno mucho más amplio.

Series de potencias y convergencia

Comenzaremos con la definición formal, que especifica la notación y los términos que se utilizarán para las series de potencias.

DEFINICIONES **Una serie de potencias alrededor de $x = 0$** es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots. \tag{1}$$

Una **serie de potencias alrededor de $x = a$** es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + \cdots + c_n (x - a)^n + \cdots \tag{2}$$

en la cual el **centro** a y los **coeficientes** $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ son constantes.

La ecuación (1) es el caso especial que se obtiene al considerar $a = 0$ en la ecuación (2). Veremos que una serie de potencias define una función $f(x)$ en cierto intervalo donde ésta converge. Además, se demostrará que esta función es continua y diferenciable en el interior de ese intervalo.

EJEMPLO 1 Al considerar que, en la ecuación (1), todos los coeficientes son 1, resulta la serie geométrica de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots.$$

Ésta es la serie geométrica, con su primer término 1 y razón x. Converge a $1/(1 - x)$ para $|x| < 1$. Expresamos este hecho escribiendo

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \qquad -1 < x < 1. \tag{3}$$

■

Serie de potencias para el recíproco

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

Hasta aquí hemos usado la ecuación (3) como una fórmula para la suma de la serie de la derecha. Ahora cambiaremos de enfoque: pensaremos en las sumas parciales de la serie del lado derecho como polinomios $P_n(x)$ que se aproximan a la función de la izquierda. Para valores de x cercanos a cero, sólo necesitamos tomar unos cuantos términos de la serie para obtener una buena aproximación. Al avanzar hacia $x = 1$ o -1, se requieren más términos. La figura 10.14 muestra las gráficas de $f(x) = 1/(1 - x)$ y los polinomios de aproximación

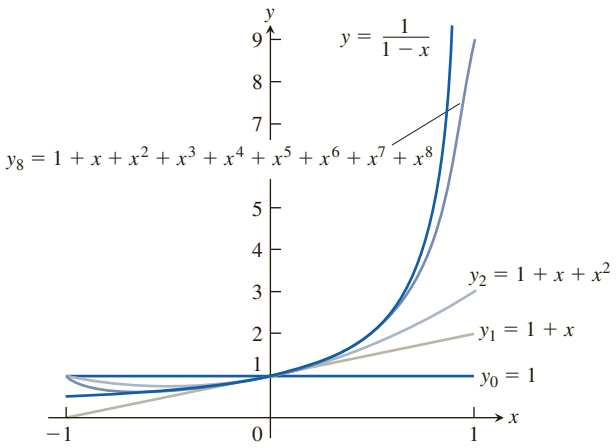


FIGURA 10.14 Las gráficas de $f(x) = 1/(1 - x)$ en el ejemplo 1 y cuatro de sus polinomios de aproximación.

$y_n = P_n(x)$ para $n = 0, 1, 2$ y 8. La función $f(x) = 1/(1 - x)$ no es continua en los intervalos que contengan a $x = 1$, donde tiene una asíntota vertical. Las aproximaciones no se aplican cuando $x \geq 1$.

EJEMPLO 2 La serie de potencias

$$1 - \frac{1}{2}(x - 2) + \frac{1}{4}(x - 2)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x - 2)^n + \cdots \tag{4}$$

concuerda con la ecuación (2), con $a = 2$, $c_0 = 1$, $c_1 = -1/2$, $c_2 = 1/4, \ldots,$ $c_n = (-1/2)^n$. Ésta es una serie geométrica cuyo primer término es 1 y la razón es $r = -\dfrac{x - 2}{2}$. La serie converge para $\left|\dfrac{x - 2}{2}\right| < 1$ o $0 < x < 4$. La suma es

$$\frac{1}{1 - r} = \frac{1}{1 + \dfrac{x - 2}{2}} = \frac{2}{x},$$

de manera que

$$\frac{2}{x} = 1 - \frac{(x - 2)}{2} + \frac{(x - 2)^2}{4} - \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x - 2)^n + \cdots, \qquad 0 < x < 4.$$

La serie (4) genera aproximaciones polinomiales útiles de $f(x) = 2/x$ para valores de x cercanos a 2:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x - 2) = 2 - \frac{x}{2}$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x - 2) + \frac{1}{4}(x - 2)^2 = 3 - \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{4},$$

y así sucesivamente (figura 10.15). ■

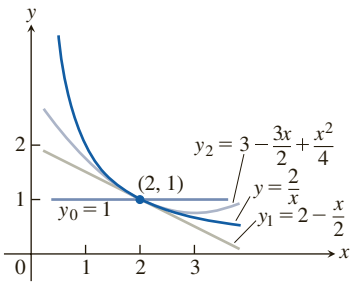


FIGURA 10.15 Las gráficas de $f(x) = 2/x$ y sus primeros tres polinomios de aproximación (ejemplo 2).

El siguiente ejemplo ilustra cómo determinar la convergencia o divergencia de una serie de potencias mediante el criterio de la razón.

EJEMPLO 3 ¿Para qué valores de x convergen las siguientes series de potencias?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n - 1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

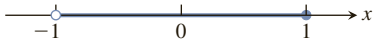
d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots$

Solución Aplique el criterio de la razón a la serie $\sum |u_n|$, donde u_n es el n-ésimo término de la serie de potencias en cuestión.

a) $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{x^{n+1}}{n + 1} \cdot \dfrac{n}{x}\right| = \dfrac{n}{n + 1}|x| \to |x|.$

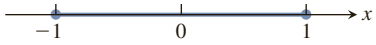
La serie converge absolutamente para $|x| < 1$. Diverge si $|x| > 1$ porque el n-ésimo término no converge a cero. En $x = 1$, obtenemos la serie armónica alternante $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots,$ que es convergente. En $x = -1$, tenemos $-1 - 1/2 - 1/3 - 1/4 - \cdots,$

la negativa de la serie armónica, que es divergente. La serie en *a*) converge para $-1 < x \leq 1$, y diverge para cualquier otro valor.



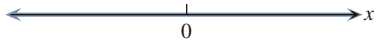
b) $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \dfrac{2n-1}{x^{2n-1}}\right| = \dfrac{2n-1}{2n+1}x^2 \to x^2.$ $\quad 2(n+1)-1 = 2n+1$

La serie converge absolutamente para $x^2 < 1$. Diverge para $x^2 > 1$ porque el *n*-ésimo término no converge a cero. En $x = 1$, la serie se vuelve $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots$, que converge como indica el teorema de la serie alternante. También converge a $x = -1$ porque vuelve a ser una serie alternante que satisface las condiciones de la convergencia. El valor en $x = -1$ es el negativo del valor en $x = 1$. La serie en *b*) converge para $-1 \leq x \leq 1$, y diverge con cualquier otro valor.



c) $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{x^n}\right| = \dfrac{|x|}{n+1} \to 0$ para toda x. $\quad \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1)}$

La serie tiene convergencia absoluta para toda *x*.



d) $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = (n+1)|x| \to \infty$, excepto cuando $x = 0$.

La serie diverge para todos los valores de *x*, excepto para $x = 0$.

■

El ejemplo anterior ilustra cómo podría converger una serie de potencias. El siguiente resultado muestra que si una serie de potencias converge para más de un valor, entonces, converge sobre un intervalo de valores. El intervalo podría ser finito o infinito y contener uno, ambos o ninguno de los extremos del intervalo. Veremos que cada extremo de un intervalo finito se debe probar de forma independiente acerca de la convergencia o la divergencia.

TEOREMA 18: Teorema de convergencia para series de potencias Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ converge para $x = c \neq 0$, entonces, tiene convergencia absoluta para toda *x*, con $|x| < |c|$. Si la serie diverge para $x = d$, entonces, diverge para toda *x* con $|x| > |d|$.

Demostración La demostración utiliza el criterio de comparación, ya que se compara la serie dada con una serie geométrica convergente.

Supongamos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ converge. Entonces, $\lim_{n\to\infty} a_n c^n = 0$ por el criterio del *n*-ésimo término. Por lo tanto, existe un entero *N* tal que $|a_n c^n| < 1$ para toda $n > N$. Es decir,

$$|a_n| < \frac{1}{|c|^n} \qquad \text{para } n > N \tag{5}$$

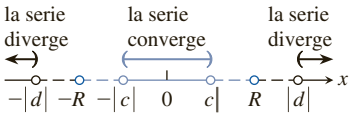


FIGURA 10.16 La convergencia de $\sum a_n x^n$ en $x = c$ implica convergencia absoluta en el intervalo $-|c| < x < |c|$; la divergencia en $x = d$ implica divergencia para $|x| > d$. El corolario del teorema 18 asegura la existencia de un radio de convergencia $R \geq 0$. Para $|x| < R$, la serie converge absolutamente; en cambio, para $|x| > R$, diverge.

Tomemos ahora cualquier x, tal que $|x| < |c|$, de manera que $|x|/|c| < 1$. Si se multiplican ambos lados de la ecuación (5) por $|x|^n$, se obtiene

$$|a_n|\,|x|^n < \frac{|x|^n}{|c|^n} \qquad \text{para } n > N.$$

Como $|x/c| < 1$, se sigue que la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} |x/c|^n$ converge. Por el criterio de comparación (teorema 10), la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|x^n|$ converge, por lo que la serie original $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene convergencia absoluta para $-|c| < x < |c|$ como asegura el teorema. (Vea la figura 10.16).

Ahora suponga que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge en $x = d$. Si x es un número con $|x| > |d|$ y la serie converge a x, entonces, la primera mitad del teorema demuestra que la serie también converge a d, al contrario de lo que indica nuestra suposición. Así que la serie diverge para toda x con $|x| > |d|$. ■

Para simplificar la notación, el teorema 18 se ocupa de la convergencia de series de la forma $\sum a_n x^n$. Para series de la forma $\sum a_n (x - a)^n$, podemos sustituir $x - a$ por x', y aplicar luego los resultados a la serie $\sum a_n (x')^n$.

Radio de convergencia de una serie de potencias

El teorema que acabamos de demostrar y los ejemplos que hemos examinado nos llevan a la conclusión de que una serie de potencias $\sum c_n (x - a)^n$ se comporta en alguna de las siguientes tres formas. Puede converger sólo en $x = a$, converger en todas partes, o bien, converger en algún intervalo de radio R centrado en a. Lo anterior se demuestra como un corolario del teorema 18.

COROLARIO DEL TEOREMA 18 La convergencia de la serie $\sum c_n (x - a)^n$ se describe por medio de una de las siguientes tres posibilidades:

1. Existe un número positivo R tal que la serie diverge para x, con $|x - a| > R$, pero converge absolutamente para x con $|x - a| < R$. La serie puede converger o no en cualquiera de los extremos $x = a - R$ y $x = a + R$.
2. La serie tiene convergencia absoluta para toda x ($R = \infty$).
3. La serie converge a $x = a$ y diverge en cualquier otro lugar ($R = 0$).

Demostración Primero consideramos el caso donde $a = 0$, por lo que tenemos una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ centrada en 0. Si la serie converge a todas partes, estamos en el caso 2. Si converge sólo en $x = 0$, estamos en el caso 3. De otra forma, existe un número distinto de cero, d, tal que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n d^n$ diverge. Sea S el conjunto de valores de x para los cuales la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge. El conjunto S no incluye a x con $|x| > |d|$, ya que el teorema 18 implica que la serie diverge en todos esos valores; así que el conjunto S está acotado. Por la propiedad de completitud de los números reales (apéndice 6), el conjunto S tiene una mínima cota superior R. (Éste es el menor número con la propiedad de que todos los elementos de S son menores que o iguales a R). Como no estamos en el caso 3, la serie converge a algún número $b \neq 0$ y, de acuerdo con el teorema 18, también en el intervalo abierto $(-|b|, |b|)$. Por lo tanto, $R > 0$.

Si $|x| < R$, entonces, existe un número c en S con $|x| < c < R$, ya que, de otra forma, R no sería la mínima cota superior para S. La serie converge a c, ya que $c \in S$, así que la serie converge absolutamente en x, de acuerdo con el teorema 18.

Ahora suponga que $|x| > R$. Si la serie converge a x, esto implica, según el teorema 18, que converge absolutamente en el intervalo abierto $(-|x|, |x|)$, por lo que S contiene dicho

intervalo. Ya que R es una cota superior para S, se sigue que $|x| \le R$, lo cual es una contradicción. De esta forma, si $|x| > R$, entonces, la serie diverge. Lo anterior demuestra el corolario para series de potencias con centro en $a = 0$.

Para una serie de potencias centrada en un punto arbitrario $x = a$, considere que $x' = x - a$ y repita el argumento, reemplazando x por x'. Como $x' = 0$, cuando $x = a$, la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x')^n|$ en un intervalo abierto de radio R con centro en $x' = 0$ corresponde a la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x - a)^n|$ en un intervalo abierto de radio R con centro en $x = a$. ■

Se dice que R es el **radio de convergencia** de la serie de potencias, mientras el intervalo de radio R con centro en $x = a$ se denomina **intervalo de convergencia**. El intervalo de convergencia puede ser abierto, cerrado o semiabierto, lo que depende de la serie que se trate en particular. En puntos x con $|x - a| < R$, la serie converge absolutamente. Si la serie converge para todos los valores de x, decimos que su radio de convergencia es infinito. Si converge sólo en $x = a$, afirmamos que su radio de convergencia es cero.

Cómo demostrar si una serie de potencias converge

1. *Utilice el criterio de la razón (o el criterio de la raíz) para determinar el intervalo donde la serie converge absolutamente*. Por lo común, es un intervalo abierto.

$$|x - a| < R \qquad \text{o} \qquad a - R < x < a + R.$$

2. *Si el intervalo de convergencia absoluta es finito, pruebe la convergencia o la divergencia en cada punto extremo*, como en los ejemplos 3*a*) y *b*). Utilice un criterio de comparación, el criterio de la integral o el criterio de la serie alternante.
3. *Si el intervalo de convergencia absoluta es $a - R < x < a + R$, la serie diverge para $|x - a| > R$* (ni siquiera tiene convergencia condicional), ya que el n-ésimo término no se aproxima a cero para esos valores de x.

Operaciones sobre series de potencias

En la intersección de sus intervalos de convergencia, dos series de potencias pueden sumarse y restarse término a término al igual que las series de constantes (teorema 8). Se multiplican igual que los polinomios, aunque con frecuencia nos limitamos al cálculo del producto de los primeros términos, que son los más importantes. El siguiente resultado proporciona una fórmula para los coeficientes en el producto, pero omitimos la demostración. (La serie de potencias se puede dividir también en una forma similar a como se dividen los polinomios, pero aquí no damos una fórmula para el coeficiente general).

TEOREMA 19: Teorema de la multiplicación de series para series de potencias

Si $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ tienen convergencia absoluta para $|x| < R$ y

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

entonces, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge absolutamente en $A(x)B(x)$ para $|x| < R$:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

La determinación del coeficiente general c_n en el producto de dos series de potencias podría ser muy tediosa, y el término tal vez sería difícil de manejar. El siguiente cálculo

ofrece una ilustración de un producto en el cual determinamos los primeros términos al multiplicar los términos de la segunda serie por cada término de la primera:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$= (1 + x + x^2 + \cdots)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right) \qquad \text{Multiplique la segunda serie...}$$

$$= \underbrace{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right)}_{\text{por } 1} + \underbrace{\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \cdots\right)}_{\text{por } x} + \underbrace{\left(x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} - \cdots\right)}_{\text{por } x^2} + \cdots$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{6}\cdots. \qquad \text{y agrupe los términos de las primeras cuatro potencias.}$$

También es posible sustituir x por una función $f(x)$ en una serie de potencias convergente.

TEOREMA 20: Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para $|x| < R$, entonces, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (f(x))^n$ converge absolutamente para cualquier función continua f en $|f(x)| < R$.

Como $1/(1 - x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge absolutamente para $|x| < 1$, a partir del teorema 20 se deduce que $1/(1 - 4x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(4x^2)^n$ converge absolutamente para $|4x^2| < 1$ o $|x| < 1/2$.

Un teorema de cálculo avanzado afirma que una serie de potencias puede diferenciarse término a término en cada punto interior de su intervalo de convergencia.

TEOREMA 21 Teorema de la diferenciación término a término Si $\sum c_n(x - a)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces, define una función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n \qquad \text{en el intervalo} \qquad a - R < x < a + R.$$

Esta función f tiene derivadas de todos los órdenes dentro del intervalo, por lo que es posible obtener las derivadas si diferenciamos la serie original término a término:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - a)^{n-1},$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1) c_n (x - a)^{n-2},$$

y así sucesivamente. Cada una de estas series derivadas converge a todos los puntos del intervalo $a - R < x < a + R$.

EJEMPLO 4 Determine la serie para $f'(x)$ y $f''(x)$ si

$$f(x) = \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad -1 < x < 1.$$

Solución Derivamos, término a término, la serie de potencias en el lado derecho:

$$f'(x) = \frac{1}{(1 - x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \qquad -1 < x < 1;$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \cdots$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, \qquad -1 < x < 1. \quad \blacksquare$$

¡Cuidado! La diferenciación término a término tal vez no funcione con series de otro tipo. Por ejemplo, la serie trigonométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n!x)}{n^2}$$

converge para toda x. Pero si diferenciamos término a término, obtenemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cos(n!x)}{n^2},$$

que diverge para toda x. Ésta no es una serie de potencias, ya que no es una suma de potencias enteras positivas de x.

También se cumple que una serie de potencias puede integrarse término a término en todo su intervalo de convergencia. Este resultado se demuestra en un curso más avanzado.

TEOREMA 22: Teorema de integración término a término Suponga que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

converge para $a - R < x < a + R$ $(R > 0)$. De esta forma,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

converge para $a - R < x < a + R$ y

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

para $a - R < x < a + R$.

EJEMPLO 5 Identifique la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \qquad -1 \le x \le 1.$$

Solución Derivamos la serie original término a término y obtenemos

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \qquad -1 < x < 1.$$ Teorema 21

Ésta es una serie geométrica cuyo primer término es 1 y su razón es $-x^2$, así que

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ahora integramos $f'(x) = 1/(1+x^2)$ para obtener

$$\int f'(x)\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + C.$$

La serie para $f(x)$ es cero cuando $x = 0$, así que $C = 0$. Por lo tanto,

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \tan^{-1}x, \qquad -1 < x < 1. \tag{6}$$

El número π como una serie

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Es posible demostrar que la serie también converge a $\tan^{-1} x$ en los extremos $x = \pm 1$, pero omitimos tal demostración. ■

Observe que la serie original del ejemplo 5 converge a ambos extremos del intervalo original de convergencia, pero el teorema 22 sólo puede garantizar la convergencia de la serie de las derivadas dentro del intervalo.

EJEMPLO 6 La serie

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$$

converge en el intervalo abierto $-1 < t < 1$. Por lo tanto,

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots \Big]_0^x \qquad \text{Teorema 22}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

o

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \qquad -1 < x < 1.$$

También es posible demostrar que con $x = 1$, la serie converge al número ln 2, aunque eso no lo garantizaba el teorema. ■

Suma de la serie armónica alternante

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Ejercicios 10.7

Intervalos de convergencia

En los ejercicios 1 a 36, ***a)*** encuentre el radio y el intervalo de convergencia de la serie. ¿Para qué valores de x la serie converge ***b)*** absolutamente y ***c)*** condicionalmente?

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x+1)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}\,3^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^{2n}}{n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3\,3^n}$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{\sqrt{n}+3}$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}$

18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n(n^2+1)}$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}x^n}{3^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}(2x+5)^n$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n) \cdot (x+1)^{n-1}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n}(x-2)^n}{3n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n) x^n$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

26. $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-4)^n$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+2)^n}{n2^n}$

28. $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n (n+1)(x-1)^n$

29. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}$ Obtenga la información que necesite acerca de $\sum 1/(n(\ln n)^2)$ en el ejercicio 55 de la sección 10.3.

30. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$ Obtenga la información que necesite acerca de $\sum 1/(n \ln n)$ en el ejercicio 54 de la sección 10.3.

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^{n+1}}{2n+2}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^n$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{n^2 \cdot 2^n} x^{n+1}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2} x^n$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)(x-3)^n$

En los ejercicios 37 a 40, determine el radio de convergencia.

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n} x^n$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}\right)^2 x^n$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^n (2n)!} x^n$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n$

(*Sugerencia:* Aplique el criterio de la raíz).

En los ejercicios 41 a 48, utilice el teorema 20 para determinar el intervalo de convergencia de cada una de las series y, dentro de este intervalo, la suma de las series como una función de x.

41. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$

42. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (e^x-4)^n$

43. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$

44. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{9^n}$

45. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2}-1\right)^n$

46. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

47. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n$

48. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n$

Uso de la serie geométrica

49. En el ejemplo 2 representamos la función $f(x) = 2/x$ como una serie de potencias en $x = 2$. Utilice una serie geométrica para representar $f(x)$ como una serie de potencias en $x = 1$, y encuentre su intervalo de convergencia.

50. Utilice una serie geométrica para representar cada una de las funciones dadas como una serie de potencias en $x = 0$, y encuentre sus intervalos de convergencia.

a) $f(x) = \dfrac{5}{3-x}$ ***b)*** $g(x) = \dfrac{3}{x-2}$

51. Represente la función $g(x)$ en el ejercicio 50 como una serie de potencias en $x = 5$, y encuentre el intervalo de convergencia.

52. ***a)*** Encuentre el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{4^{n+2}} x^n.$$

b) Represente la serie de potencias del inciso *a)* como una serie de potencias en $x = 3$, e identifique el intervalo de convergencia de la nueva serie. (Más adelante en el capítulo, comprenderá por qué el nuevo intervalo de convergencia no necesariamente incluye todos los números del intervalo de convergencia original).

Teoría y ejemplos

53. ¿Para qué valores de x la serie

$$1 - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{4}(x-3)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n + \cdots$$

converge? ¿Cuál es su suma? ¿Qué serie se obtiene al diferenciar término a término la serie dada? ¿Para qué valores de x converge la nueva serie? ¿Cuál es su suma?

54. Si integra la serie del ejercicio 53, término a término, ¿qué nueva serie obtiene? ¿Para qué valores de x converge la nueva serie, y qué otro nombre recibe su suma?

55. La serie

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

converge a sen x para toda x.

a) Halle los seis primeros términos de una serie para cos x. ¿Para qué valores de x debería ser convergente la serie?

b) Al sustituir x por $2x$ en la serie para sen x, determine una serie que converja en sen $2x$ para toda x.

c) Con el resultado de *a)* y la multiplicación de series, calcule los seis primeros términos de una serie para 2 sen x cos x. Compare su respuesta con la del inciso *b)*.

56. La serie

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

converge a e^x para toda x.

a) Halle una serie para $(d/dx)e^x$. ¿Obtiene la serie para e^x? Justifique su respuesta.

b) Halle una serie para $\int e^x\,dx$. ¿Obtiene la serie para e^x? Justifique su respuesta.

c) Sustituya x por $-x$ en la serie para e^x y determine una serie que converja en e^{-x} para toda x. Multiplique después la serie por e^x y e^{-x}, y encuentre los seis primeros términos de una serie para $e^{-x} \cdot e^x$.

57. La serie

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \cdots$$

converge a tan x para $-\pi/2 < x < \pi/2$.

a) Determine los cinco primeros términos de la serie para $\ln|\sec x|$. ¿Para qué valores de x debería converger la serie?

b) Halle los cinco primeros términos de la serie para $\sec^2 x$. ¿Para qué valores de x debería converger esta serie?

c) Compruebe su resultado del inciso *b)* elevando al cuadrado la serie propuesta para sec x en el ejercicio 58.

58. La serie

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \cdots$$

converge a sec x para $-\pi/2 < x < \pi/2$.

a) Determine los cinco primeros términos de una serie de potencias para la función $\ln|\sec x + \tan x|$. ¿Para qué valores de x debería converger la serie?

b) Halle los cuatro primeros términos de una serie para sec x tan x. ¿Para qué valores de x debería converger la serie?

c) Compruebe su resultado del inciso *b)* multiplicando la serie para sec x por la serie propuesta para tan x en el ejercicio 57.

59. Unicidad de las series de potencias convergentes

a) Demuestre que si dos series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ son convergentes e iguales para todos los valores de x en un intervalo abierto $(-c, c)$, entonces, $a_n = b_n$ para toda n. [*Sugerencia:* Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Diferencie término a término para demostrar que a_n y b_n son iguales a $f^{(n)}(0)/(n!)$].

b) Demuestre que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ para toda x en un intervalo abierto $(-c, c)$, entonces, $a_n = 0$ para toda n.

60. La suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2/2^n)$ Para determinar la suma de esta serie: exprese $1/(1 - x)$ como una serie geométrica; diferencie ambos lados de la ecuación resultante con respecto a x; multiplique ambos lados del resultado por x; nuevamente, diferencie; otra vez, multiplique por x e iguale x a $1/2$. ¿Qué obtiene?

10.8 Series de Taylor y de Maclaurin

Hemos visto cómo la serie geométrica puede utilizarse con la finalidad de generar una serie de potencias para funciones que tienen una forma especial, como $f(x) = 1/(1 - x)$ o $g(x) = 3/(x - 2)$. Ahora ampliamos nuestra capacidad para representar una función mediante una serie de potencias. En esta sección veremos cómo ciertas funciones infinitamente diferenciables generan las series de potencias conocidas como *series de Taylor*. En muchos casos, tales series pueden brindar útiles aproximaciones polinomiales de las funciones que las generaron. Los científicos y matemáticos emplean las series de Taylor con mucha frecuencia; de ahí que éste sea uno de los temas más importantes de las series infinitas.

Representaciones de series

A partir del teorema 21, sabemos que la suma de una serie de potencias es una función continua con derivadas de todos los órdenes, dentro de su intervalo de convergencia I. Pero, ¿qué se diría de lo contrario? Si una función $f(x)$ tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo, ¿se podrá expresar como una serie de potencias en, al menos, parte de ese intervalo? Si esto es posible, ¿cuáles serán sus coeficientes?

Es posible responder fácilmente a la última pregunta si suponemos que $f(x)$ es la suma de una serie de potencias alrededor de $x = a$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$$
$$= a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n + \cdots$$

con un radio de convergencia positivo. Mediante diferenciación repetida término a término, dentro del intervalo de convergencia I, obtenemos

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - a) + 3a_3(x - a)^2 + \cdots + na_n(x - a)^{n-1} + \cdots,$$
$$f''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - a) + 3 \cdot 4a_4(x - a)^2 + \cdots,$$
$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x - a) + 3 \cdot 4 \cdot 5a_5(x - a)^2 + \cdots,$$

siendo la n-ésima derivada, para toda n,

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \text{una suma de términos con } (x - a) \text{ como factor.}$$

Puesto que todas estas ecuaciones son válidas cuando $x = a$, tenemos

$$f'(a) = a_1, \qquad f''(a) = 1 \cdot 2a_2, \qquad f'''(a) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3,$$

y, en general,

$$f^{(n)}(a) = n!a_n.$$

Dichas fórmulas revelan un patrón en los coeficientes de cualquier serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ que converge a los valores de f en I ("que representa a f en I"). Si esa serie *existe* (lo que aún está en duda), entonces, sólo hay una de tales series y su n-ésimo coeficiente es

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Si f tiene una representación como serie, ésta debe ser

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots. \tag{1}$$

Pero si empezamos con una función arbitraria f, infinitamente diferenciable en un intervalo que incluye a $x = a$, y la usamos para generar la serie de la ecuación (1), entonces, ¿la serie convergerá en $f(x)$ en cada x en el intervalo de convergencia? La respuesta es quizá para algunas funciones sí, pero para otras no será así (como veremos en el ejemplo 4).

Series de Taylor y Maclaurin

La serie en el lado derecho de la ecuación (1) es la más importante y útil que estudiaremos en este capítulo.

DEFINICIONES Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en algún intervalo que contenga a a como un punto interior. De esta forma, la **serie de Taylor generada por f en $x = a$** es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots.$$

La **serie de Maclaurin de f** es la serie de Taylor generada por f en $x = 0$, esto es,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots.$$

Con frecuencia, la serie de Maclaurin generada por f se conoce como serie de Taylor de f.

EJEMPLO 1 Encuentre la serie de Taylor generada por $f(x) = 1/x$ en $a = 2$. ¿Converge la serie en $1/x$? Si es así, ¿dónde?

Solución Necesitamos determinar $f(2), f'(2), f''(2),...$ Al derivar, tenemos

$$f(x) = x^{-1}, \quad f'(x) = -x^{-2}, \quad f''(x) = 2!x^{-3}, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)},$$

de manera que

$$f(2) = 2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad f'(2) = -\frac{1}{2^2}, \quad \frac{f''(2)}{2!} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3}, \quad \ldots, \quad \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

La serie de Taylor es

$$f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + \cdots$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \cdots + (-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \cdots.$$

Ésta es una serie geométrica con $1/2$ como primer término y razón $r = -(x-2)/2$. Converge absolutamente para $|x-2| < 2$, y su suma es

$$\frac{1/2}{1 + (x-2)/2} = \frac{1}{2 + (x-2)} = \frac{1}{x}.$$

En este ejemplo, la serie de Taylor generada por $f(x) = 1/x$ en $a = 2$ converge a $1/x$ para $|x-2| < 2$ o $0 < x < 4$. ■

Polinomios de Taylor

La linealización de una función diferenciable f en un punto a es el polinomio de grado 1 dado por

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

En la sección 3.9 usamos dicha linealización para aproximar $f(x)$ en valores de x cercanos a a. Si f tiene derivadas de orden mayor en a, entonces, también tiene aproximaciones polinomiales de orden mayor, una para cada derivada disponible. Estos polinomios se conocen como polinomios de Taylor de f.

DEFINICIÓN Sea f una función con derivadas de orden k para $k = 1, 2, \ldots, N$ en algún intervalo que contenga a a como un punto interior. Entonces, para cualquier entero n, desde 0 hasta N, el **polinomio de Taylor de orden *n*** generado por f en $x = a$ es el polinomio

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

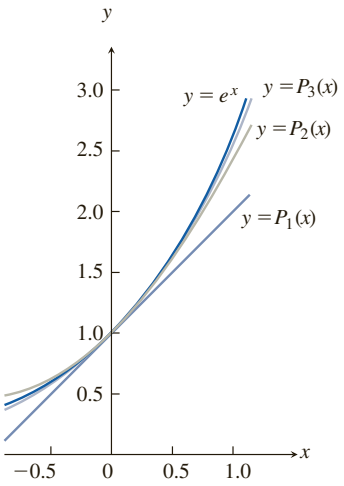


FIGURA 10.17 La gráfica de $f(x) = e^x$ y sus polinomios de Taylor

$P_1(x) = 1 + x$

$P_2(x) = 1 + x + (x^2/2!)$

$P_3(x) = 1 + x + (x^2/2!) + (x^3/3!)$.

Observe la muy cercana aproximación cerca del centro $x = 0$ (ejemplo 2).

Decimos que un polinomio de Taylor es de *orden n* y no de *grado n*, porque $f^{(n)}(a)$ puede ser cero. Por ejemplo, los dos primeros polinomios de Taylor de $f(x) = \cos x$ en $x = 0$ son $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = 1$. El polinomio de primer orden tiene grado 0, no 1.

Del mismo modo que la linealización de f en $x = a$ ofrece la mejor aproximación lineal de f en la vecindad de a, los polinomios de Taylor de orden mayor brindan "las mejores" aproximaciones polinomiales de sus respectivos grados. (Vea el ejercicio 40).

EJEMPLO 2 Determine la serie de Taylor y los polinomios de Taylor generados por $f(x) = e^x$ en $x = 0$.

Solución Puesto que $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$, para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, la serie de Taylor generada por f en $x = 0$ (figura 10.17) es

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Ésta es también la serie de Maclaurin para e^x. En la siguiente sección veremos que la serie converge a e^x para toda x.

El polinomio de Taylor de orden n en $x = 0$ es

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

■

EJEMPLO 3 Determine la serie de Taylor y los polinomios de Taylor generados por $f(x) = \cos x$ en $x = 0$.

Solución El coseno y sus derivadas son

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, & f'(x) &= -\operatorname{sen} x, \\ f''(x) &= -\cos x, & f^{(3)}(x) &= \operatorname{sen} x, \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \cos x, & f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^{n+1} \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

En $x = 0$, los cosenos son 1 y los senos son 0, por lo cual

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n, \qquad f^{(2n+1)}(0) = 0.$$

La serie de Taylor generada por f en 0 es

$$\begin{aligned} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ = 1 + 0 \cdot x - \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot x^3 + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Ésta también es la serie de Maclaurin para cos x. Observe que sólo las potencias pares de x aparecen en la serie de Taylor generada por la función coseno, lo cual es congruente con el hecho de que sea una función par. En la sección 10.9, veremos que la serie converge a cos x para toda x.

Como $f^{(2n+1)}(0) = 0$, los polinomios de Taylor de órdenes $2n$ y $2n + 1$ son idénticos:

$$P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

La figura 10.18 revela qué tan bien estos polinomios aproximan a $f(x) = \cos x$, cerca de $x = 0$. Sólo se muestra la parte del lado derecho de las gráficas, ya que las gráficas son simétricas con respecto al eje y. ■

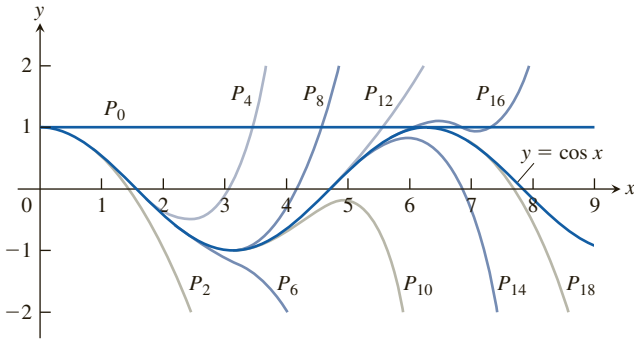


FIGURA 10.18 Los polinomios

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

convergen a cos x cuando $n \to \infty$. Podemos deducir el comportamiento de cos x, a una distancia arbitrariamente grande, si se conocen sólo los valores del coseno y sus derivadas en $x = 0$ (ejemplo 3).

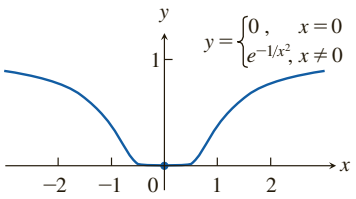


FIGURA 10.19 La gráfica de la extensión continua de $y = e^{-1/x^2}$ es tan plana en el origen que todas sus derivadas allí son cero (ejemplo 4). Por lo tanto, su serie de Taylor, que es cero en todas partes, no representa la misma función.

EJEMPLO 4 Es posible demostrar (aunque no con facilidad) que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \end{cases}$$

(figura 10.19) tiene derivadas de todos los órdenes en $x = 0$, y que $f^{(n)}(0) = 0$ para toda n. Esto significa que la serie de Taylor generada por f en $x = 0$ es

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$
$$= 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n + \cdots$$
$$= 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots.$$

La serie converge para toda x (su suma es 0), pero converge a $f(x)$ sólo cuando $x = 0$. Esto es, la serie de Taylor generada por $f(x)$ en este ejemplo *no* es igual a la función $f(x)$ en todo el intervalo de convergencia. ■

Aún quedan pendientes dos preguntas:

1. ¿Para qué valores de x cabe esperar normalmente que una serie de Taylor converja en la función que la genera?
2. ¿Cuál es la precisión con la que los polinomios de Taylor de una función aproximan la función en un intervalo dado?

Las respuestas se presentarán en la siguiente sección por medio del teorema de Taylor.

Ejercicios 10.8

Determinación de polinomios de Taylor

En los ejercicios 1 a 10, determine los polinomios de Taylor de órdenes 0, 1, 2 y 3 generados por f en a.

1. $f(x) = e^{2x}, \quad a = 0$
2. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = 0$
3. $f(x) = \ln x, \quad a = 1$
4. $f(x) = \ln(1 + x), \quad a = 0$
5. $f(x) = 1/x, \quad a = 2$
6. $f(x) = 1/(x + 2), \quad a = 0$
7. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/4$
8. $f(x) = \tan x, \quad a = \pi/4$
9. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$
10. $f(x) = \sqrt{1 - x}, \quad a = 0$

Determinación de series de Taylor en $x = 0$ (series de Maclaurin)

Determine las series de Maclaurin para las funciones de los ejercicios 11 a 22.

11. e^{-x}
12. xe^x
13. $\dfrac{1}{1 + x}$
14. $\dfrac{2 + x}{1 - x}$
15. $\operatorname{sen} 3x$
16. $\operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$
17. $7\cos(-x)$
18. $5\cos \pi x$
19. $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
20. $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
21. $x^4 - 2x^3 - 5x + 4$
22. $\dfrac{x^2}{x + 1}$

Determinación de las series de Taylor y de Maclaurin

En los ejercicios 23 a 32, determine la serie de Taylor generada por f en $x = a$.

23. $f(x) = x^3 - 2x + 4, \quad a = 2$
24. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 8, \quad a = 1$
25. $f(x) = x^4 + x^2 + 1, \quad a = -2$
26. $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 2, \quad a = -1$
27. $f(x) = 1/x^2, \quad a = 1$
28. $f(x) = 1/(1 - x)^3, \quad a = 0$
29. $f(x) = e^x, \quad a = 2$
30. $f(x) = 2^x, \quad a = 1$
31. $f(x) = \cos(2x + (\pi/2)), \quad a = \pi/4$
32. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad a = 0$

En los ejercicios 33 a 36, determine los primeros tres términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para cada función, y los valores de x para los cuales la serie converge absolutamente.

33. $f(x) = \cos x - (2/(1 - x))$
34. $f(x) = (1 - x + x^2)e^x$
35. $f(x) = (\operatorname{sen} x)\ln(1 + x)$
36. $f(x) = x \operatorname{sen}^2 x$

Teoría y ejemplos

37. Utilice la serie de Taylor generada por e^x en $x = a$ para demostrar que

$$e^x = e^a\left[1 + (x - a) + \frac{(x - a)^2}{2!} + \cdots\right].$$

38. (*Continuación del ejercicio 37*). Determine la serie de Taylor generada por e^x en $x = 1$. Compare su respuesta con la fórmula del ejercicio 37.

39. Suponga que $f(x)$ tiene derivadas hasta de orden n en $x = a$. Demuestre que el polinomio de Taylor de orden n y sus primeras n derivadas tienen los mismos valores que f y sus primeras n derivadas en $x = a$.

40. Propiedades de aproximación de los polinomios de Taylor Suponga que $f(x)$ es diferenciable en un intervalo centrado en $x = a$, y que $g(x) = b_0 + b_1(x - a) + \cdots + b_n(x - a)^n$ es un polinomio de grado n con coeficientes constantes $b_0, \ldots, b_n$. Sea $E(x) = f(x) - g(x)$. Demuestre que si imponemos a g las condiciones

i. $E(a) = 0$ El error de la aproximación es cero en $x = a$.

ii. $\lim_{x \to a} \dfrac{E(x)}{(x - a)^n} = 0,$ El error es despreciable si se compara con $(x - a)^n$.

entonces,

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Así, el polinomio de Taylor $P_n(x)$ es el único polinomio de grado menor o igual que n, cuyo error es cero en $x = a$ y despreciable cuando se compara con $(x - a)^n$.

Aproximaciones cuadráticas El polinomio de Taylor de orden 2 generado por una función $f(x)$, dos veces diferenciable en $x = a$, se denomina *aproximación cuadrática* de f en $x = a$. En los ejercicios 41 a 46, determine ***a)*** la linealización (polinomio de Taylor de orden 1) y ***b)*** la aproximación cuadrática de f en $x = 0$.

41. $f(x) = \ln(\cos x)$ **42.** $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$

43. $f(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ **44.** $f(x) = \cosh x$

45. $f(x) = \operatorname{sen} x$ **46.** $f(x) = \tan x$

10.9 Convergencia de series de Taylor

En la última sección preguntamos cuándo puede esperarse que una serie de Taylor para una función converja en la función (que la generó). Responderemos la pregunta en esta sección con el siguiente teorema.

TEOREMA 23: Teorema de Taylor Si f y sus primeras n derivadas $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ son continuas en el intervalo cerrado entre a y b, y si $f^{(n)}$ es diferenciable en el intervalo abierto entre a y b, entonces, existe un número c, entre a y b, tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}.$$

El teorema de Taylor es una generalización del teorema del valor medio (ejercicio 45). Al final de esta sección se presenta una demostración del teorema de Taylor.

Cuando aplicamos el teorema de Taylor, generalmente queremos mantener a fija y utilizar b como variable independiente. La fórmula de Taylor es más fácil de usar en esas circunstancias si cambiamos b por x. He aquí una versión del teorema con este cambio.

Fórmula de Taylor

Si f tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto I que contiene a a, entonces, para cada entero positivo n y para cada x de I,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x), \tag{1}$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1} \quad \text{para alguna } c \text{ entre } a \text{ y } x. \tag{2}$$

Cuando expresamos el teorema de Taylor de esta forma, nos dice que para cada $x \in I$,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

La función $R_n(x)$ está determinada por el valor de la $(n+1)$-ésima derivada, $f^{(n+1)}$, en un punto c, el cual depende de a y x, y se encuentra entre ellos. Para cualquier valor de n que elijamos, la ecuación nos da una aproximación polinomial de f de ese orden y también una fórmula para el error cometido al usar esa aproximación sobre el intervalo I.

La ecuación (1) se conoce como **fórmula de Taylor**. La función $R_n(x)$ se llama **residuo de orden *n*** o **término de error** para la aproximación de f por medio de $P_n(x)$ sobre I.

Si $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para toda $x \in I$, decimos que la serie de Taylor generada por f en $x = a$ **converge a** f en I, y escribimos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k.$$

Con frecuencia podemos estimar R_n sin conocer el valor de c, como ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Demuestre que la serie de Taylor generada por $f(x) = e^x$ en $x = 0$ converge a $f(x)$ para todo valor real de x.

Solución La función tiene derivadas de todos los órdenes en todo el intervalo $I = (-\infty, \infty)$. Las ecuaciones (1) y (2) con $f(x) = e^x$ y $a = 0$ dan

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

El polinomio del ejemplo 2, de la sección 10.8.

y

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \text{para alguna } c \text{ entre 0 y } x.$$

Ya que e^x es una función creciente de x, e^c está entre $e^0 = 1$ y e^x. Cuando x es negativa, c también lo es, y $e^c < 1$. Cuando x es cero, $e^x = 1$ y $R_n(x) = 0$. Cuando x es positiva, c también lo es, y $e^c < e^x$. Por lo tanto, para $R_n(x)$, expresada como antes,

$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{cuando } x \le 0, \qquad e^c < 1$$

y

$$|R_n(x)| < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{cuando } x > 0. \qquad e^c < e^x$$

Por último, puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \qquad \text{para toda } x,$$

Teorema 5, sección 10.1

$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ y la serie converge a e^x para toda x. Por lo tanto,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots. \tag{3}$$

■

El número *e* como una serie

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Podemos utilizar el resultado del ejemplo 1 con $x = 1$ para escribir

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n(1),$$

donde para alguna c entre 0 y 1,

$$R_n(1) = e^c \frac{1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}. \qquad e^c < e^1 < 3$$

Estimación del residuo

Con frecuencia, es posible estimar $R_n(x)$ como lo hicimos en el ejemplo 1. Este método de estimación es tan conveniente que lo enunciaremos como teorema para referencias futuras.

TEOREMA 24: Teorema de estimación del residuo Si existe una constante positiva M tal que $|f^{(n+1)}(t)| \le M$ para toda t entre x y a, inclusive, entonces el término residual $R_n(x)$ del teorema de Taylor satisface la desigualdad

$$|R_n(x)| \le M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Si esta desigualdad se cumple para toda n, y f satisface todas las demás condiciones del teorema de Taylor, entonces, la serie converge a $f(x)$.

Los siguientes dos ejemplos utilizan el teorema 24 para demostrar que las series de Taylor generadas por las funciones seno y coseno convergen a esas funciones.

EJEMPLO 2 Demuestre que la serie de Taylor para sen x en $x = 0$ converge para toda x.

Solución La función y sus derivadas son

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x, & f'(x) &= \cos x, \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x, & f'''(x) &= -\cos x, \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \operatorname{sen} x, & f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^k \cos x, \end{aligned}$$

de manera que

$$f^{(2k)}(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

La serie sólo tiene términos de potencia impar y, para $n = 2k+1$, el teorema de Taylor nos da

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+1}(x).$$

Todas las derivadas de sen x tienen valores absolutos menores o iguales que 1, así que podemos aplicar el teorema de estimación del residuo con $M = 1$ para obtener

$$|R_{2k+1}(x)| \le 1 \cdot \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}.$$

Del teorema 5, regla 6, tenemos $(|x|^{2k+2}/(2k+2)!) \to 0$ cuando $k \to \infty$, cualquiera que sea el valor de x, por lo que $R_{2k+1}(x) \to 0$ y la serie de Maclaurin para sen x converge a sen x para toda x. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots. \tag{4}$$

■

EJEMPLO 3 Demuestre que la serie de Taylor para cos x en $x = 0$ converge a cos x para todos los valores de x.

Solución Sumamos el término residual al polinomio de Taylor para cos x (ejemplo 3, sección 10.8), con la finalidad de obtener la fórmula de Taylor para cos x, con $n = 2k$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k}(x).$$

Puesto que las derivadas del coseno tienen un valor absoluto menor o igual que 1, el teorema de estimación del residuo con $M = 1$ produce

$$|R_{2k}(x)| \le 1 \cdot \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Para todo valor de x, $R_{2k}(x) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Por lo tanto, la serie converge a cos x para todo valor de x. Así que

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots. \tag{5}$$

■

Uso de la serie de Taylor

Como toda serie de Taylor es una serie de potencias, las operaciones de suma, resta y multiplicación de series de Taylor son válidas en la intersección de sus intervalos de convergencia.

EJEMPLO 4 Mediante series conocidas y utilizando operaciones con series de potencias, determine los primeros términos de la serie de Taylor para cada una de las siguientes funciones.

a) $\frac{1}{3}(2x + x\cos x)$ ***b)*** $e^x \cos x$

Solución

a) $$\frac{1}{3}(2x + x\cos x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{3 \cdot 4!} - \cdots = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{72} - \cdots$$

b) $$e^x \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)$$

Multiplique la primera serie por cada término de la segunda serie.

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) - \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{2!2!} + \frac{x^5}{2!3!} + \cdots\right)$$

$$+ \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{4!} + \frac{x^6}{2!4!} + \cdots\right) + \cdots$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \cdots$$

■

Por el teorema 20, podemos utilizar la serie de Taylor de la función f para determinar la serie de Taylor de $f(u(x))$, donde $u(x)$ es cualquier función continua. La serie de Taylor resultante de dicha sustitución convergerá para toda x tal que $u(x)$ esté dentro del intervalo

de convergencia de la serie de Taylor de f. Por ejemplo, es posible determinar la serie de Taylor para cos $2x$ si se sustituye x por $2x$ en la serie de Taylor correspondiente a cos x:

$$\cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots \qquad \text{Ecuación (5) con } 2x \text{ en vez de } x$$

$$= 1 - \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4x^4}{4!} - \frac{2^6x^6}{6!} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}x^{2k}}{(2k)!}.$$

EJEMPLO 5 ¿Para qué valores de x podemos sustituir sen x por $x - (x^3/3!)$, si introducimos un error de magnitud no mayor que 3×10^{-4}?

Solución Aquí es posible aprovechar el hecho de que la serie de Taylor para sen x es una serie alternante para todo valor de x diferente de cero. Según el teorema de estimación de series alternantes (sección 10.6), el error al truncar

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

después de $(x^3/3!)$ no es mayor que

$$\left|\frac{x^5}{5!}\right| = \frac{|x|^5}{120}.$$

Por lo tanto, el error será menor o igual que 3×10^{-4} si

$$\frac{|x|^5}{120} < 3 \times 10^{-4} \quad \text{o} \quad |x| < \sqrt[5]{360 \times 10^{-4}} \approx 0.514. \qquad \text{Redondeado hacia abajo, por seguridad}$$

El teorema de estimación de series alternantes nos dice algo que el teorema de estimación del residuo omite: que la estimación $x - (x^3/3!)$ para sen x es una subestimación cuando x es positiva, porque entonces, $x^5/120$ es positiva.

La figura 10.20 muestra la gráfica de sen x, junto con las de algunos de sus polinomios de aproximación de Taylor. La gráfica de $P_3(x) = x - (x^3/3!)$ es casi indistinguible de la curva del seno cuando $0 \le x \le 1$. ■

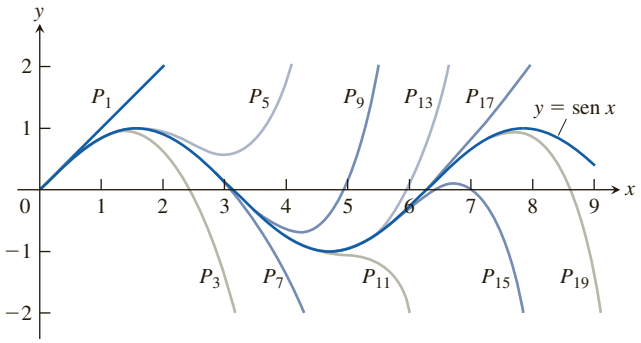


FIGURA 10.20 Los polinomios

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

convergen a sen x cuando $n \to \infty$. Observe cómo $P_3(x)$ aproxima muy bien a la curva del seno para $x \le 1$ (ejemplo 5).

Una demostración del teorema de Taylor

Demostramos el teorema de Taylor suponiendo que $a < b$. La demostración para $a > b$ es casi igual.

El polinomio de Taylor

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

y sus primeras n derivadas coinciden con la función f y sus primeras n derivadas en $x = a$. No alteramos esa coincidencia si sumamos otro término de la forma $K(x-a)^{n+1}$, donde K es cualquier constante, ya que tal término y sus primeras n derivadas son todas iguales a cero en $x = a$. La nueva función

$$\phi_n(x) = P_n(x) + K(x - a)^{n+1}$$

y sus primeras n derivadas aún coinciden con f y sus primeras n derivadas en $x = a$.

Ahora elegimos el valor particular de K que hace que la curva $y = \phi_n(x)$ coincida con la curva original $y = f(x)$ en $x = b$. En símbolos,

$$f(b) = P_n(b) + K(b - a)^{n+1}, \qquad \text{o} \qquad K = \frac{f(b) - P_n(b)}{(b - a)^{n+1}}. \tag{6}$$

Con K definida por la ecuación (6), la función

$$F(x) = f(x) - \phi_n(x)$$

mide la diferencia entre la función original f y la función de aproximación ϕ_n para cada x en $[a, b]$.

Ahora utilizamos el teorema de Rolle (sección 4.2). Primero, ya que $F(a) = F(b) = 0$, y F y F' son continuas en $[a, b]$, sabemos que

$$F'(c_1) = 0 \qquad \text{para alguna } c_1 \text{ en } (a, b).$$

Ahora, como $F'(a) = F'(c_1) = 0$, y F' y F'' son continuas en $[a, c_1]$, sabemos que

$$F''(c_2) = 0 \qquad \text{para alguna } c_2 \text{ en } (a, c_1).$$

El teorema de Rolle, aplicado de manera sucesiva a F'', F''', . . . , $F^{(n-1)}$, implica la existencia de

$$\begin{aligned}
&c_3 \quad \text{en } (a, c_2) && \text{tal que } F'''(c_3) = 0,\\
&c_4 \quad \text{en } (a, c_3) && \text{tal que } F^{(4)}(c_4) = 0,\\
&\quad\ \vdots\\
&c_n \quad \text{en } (a, c_{n-1}) && \text{tal que } F^{(n)}(c_n) = 0.
\end{aligned}$$

Por último, como $F^{(n)}$ es continua en $[a, c_n]$ y diferenciable en (a, c_n), y $F^{(n)}(a) = F^{(n)}(c_n) = 0$, el teorema de Rolle implica que existe un número c_{n+1} en (a, c_n) tal que

$$F^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0. \tag{7}$$

Si derivamos $F(x) = f(x) - P_n(x) - K(x-a)^{n+1}$ un total de $n + 1$ veces, obtenemos

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 - (n + 1)!K. \tag{8}$$

Juntas, las ecuaciones (7) y (8) producen

$$K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} \qquad \text{para algún número } c = c_{n+1} \text{ en } (a, b). \tag{9}$$

Las ecuaciones (6) y (9) dan

$$f(b) = P_n(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Esto concluye la demostración. ■

Ejercicios 10.9

Encontrar series de Taylor

Utilice sustitución (como en el ejemplo 4) para determinar la serie de Taylor en $x = 0$ de las funciones en los ejercicios 1 a 10.

1. e^{-5x} **2.** $e^{-x/2}$ **3.** $5\,\text{sen}\,(-x)$

4. $\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ **5.** $\cos 5x^2$ **6.** $\cos\left(x^{2/3}/\sqrt{2}\right)$

7. $\ln(1+x^2)$ **8.** $\tan^{-1}(3x^4)$ **9.** $\frac{1}{1+\frac{3}{4}x^3}$

10. $\frac{1}{2-x}$

Utilice operaciones con series de potencias para determinar la serie de Taylor en $x = 0$ de las funciones en los ejercicios 11 a 28.

11. xe^x **12.** $x^2\,\text{sen}\,x$ **13.** $\frac{x^2}{2} - 1 + \cos x$

14. $\text{sen}\,x - x + \frac{x^3}{3!}$ **15.** $x\cos \pi x$ **16.** $x^2\cos(x^2)$

17. $\cos^2 x$ (*Sugerencia:* $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$.)

18. $\text{sen}^2 x$ **19.** $\frac{x^2}{1-2x}$ **20.** $x\ln(1+2x)$

21. $\frac{1}{(1-x)^2}$ **22.** $\frac{2}{(1-x)^3}$ **23.** $x\tan^{-1}x^2$

24. $\text{sen}\,x \cdot \cos x$ **25.** $e^x + \frac{1}{1+x}$ **26.** $\cos x - \text{sen}\,x$

27. $\frac{x}{3}\ln(1+x^2)$ **28.** $\ln(1+x) - \ln(1-x)$

Determine los primeros cuatro términos distintos de cero en la serie de Maclaurin para las funciones en los ejercicios 29 a 34.

29. $e^x\,\text{sen}\,x$ **30.** $\frac{\ln(1+x)}{1-x}$ **31.** $(\tan^{-1}x)^2$

32. $\cos^2 x \cdot \text{sen}\,x$ **33.** $e^{\text{sen}\,x}$ **34.** $\text{sen}\,(\tan^{-1}x)$

Estimación del error

35. Estime el error si se utiliza $P_3(x) = x - (x^3/6)$ para aproximar el valor de sen x en $x = 0.1$.

36. Estime el error si se utiliza $P_4(x) = 1 + x + (x^2/2) + (x^3/6) + x^4/24)$ para aproximar el valor de e^x en $x = 1/2$.

37. ¿Para qué valores aproximados de x puede reemplazar sen x por $x - (x^3/6)$, con un error de magnitud no mayor que 5×10^{-4}? Justifique su respuesta.

38. Si cos x se sustituye por $1 - (x^2/2)$ y $|x| < 0.5$, ¿cuál es el error estimado? ¿$1 - (x^2/2)$ tiende a ser demasiado grande o demasiado pequeño? Justifique su respuesta.

39. ¿Qué tan cercana es la aproximación sen $x = x$ cuando $|x| < 10^{-3}$? ¿Para cuáles de estos valores de x resulta que $x <$ sen x?

40. La estimación $\sqrt{1+x} = 1 + (x/2)$ se utiliza cuando x es pequeña. Estime el error cuando $|x| < 0.01$.

41. La aproximación $e^x = 1 + x + (x^2/2)$ se utiliza cuando x es pequeña. Aplique el teorema de estimación del residuo para estimar el error cuando $|x| < 0.1$.

42. (*Continuación del ejercicio 41*). Cuando $x < 0$, la serie para e^x es una serie alternante. Utilice el teorema de estimación de series alternantes para calcular el error resultante al sustituir e^x por $1 + x + (x^2/2)$ cuando $-0.1 < x < 0$. Compare esta nueva estimación con la que obtuvo en el ejercicio 41.

Teoría y ejemplos

43. Utilice la identidad $\text{sen}^2 x = (1 - \cos 2x)/2$, con la finalidad de obtener la serie de Maclaurin para $\text{sen}^2 x$. A continuación, diferencie esta serie y determine la serie de Maclaurin para 2 sen x cos x. Compruebe que esta última es la serie correspondiente a sen $2x$.

44. (*Continuación del ejercicio 43*). Aplique la identidad $\cos^2 x = \cos 2x + \text{sen}^2 x$, con la finalidad de determinar una serie de potencias para $\cos^2 x$.

45. El teorema de Taylor y el teorema del valor medio Explique por qué el teorema del valor medio (teorema 4, sección 4.2) es un caso especial del teorema de Taylor.

46. Linealizaciones en puntos de inflexión Demuestre que si la gráfica de una función dos veces diferenciable $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = a$, entonces, la linealización de f en $x = a$ también es la aproximación cuadrática de f en $x = a$. Esto explica por qué se ajustan tan bien las rectas tangentes en los puntos de inflexión.

47. El (segundo) criterio de la segunda derivada Utilice la ecuación

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c_2)}{2}(x-a)^2$$

para demostrar lo siguiente.

Suponga que f tiene primera y segunda derivadas continuas, y que $f'(a) = 0$. Entonces,

a) f tiene un máximo local en a si $f'' \le 0$ en todo un intervalo, en cuyo interior se encuentra a;

b) f tiene un mínimo local en a si $f'' \ge 0$ en todo un intervalo, en cuyo interior se encuentra a.

48. Una aproximación cúbica Utilice la fórmula de Taylor con $a = 0$ y $n = 3$ para determinar la aproximación cúbica estándar de $f(x) = 1/(1 - x)$ en $x = 0$. Encuentre una cota superior para la magnitud del error introducido en la aproximación cuando $|x| \le 0.1$.

49. ***a)*** Use la fórmula de Taylor con $n = 2$ para determinar la aproximación cuadrática de $f(x) = (1 + x)^k$ en $x = 0$ (k es una constante).

b) Si $k = 3$, ¿aproximadamente para qué valores de x en el intervalo $[0, 1]$ el error de la aproximación cuadrática será menor que $1/100$?

50. Mejores aproximaciones de π

a) Sea P una aproximación de π con precisión de n decimales. Demuestre que $P + \operatorname{sen} P$ da una aproximación correcta hasta de $3n$ decimales. (*Sugerencia:* Sea $P = \pi + x$).

T ***b)*** Inténtelo con una calculadora.

51. La serie de Taylor generada por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Una función definida por una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, con radio de convergencia $R > 0$, tiene una serie de Taylor que converge a la función en todos los puntos de $(-R, R)$. Demuestre que así es; para ello, demuestre que la serie de Taylor generada por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es la misma serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Una consecuencia inmediata de esto es que series como

$$x \operatorname{sen} x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \cdots$$

y

$$x^2 e^x = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \cdots,$$

obtenidas al multiplicar la serie de Taylor por potencias de x, así como las series resultantes de la integración y la diferenciación de series de potencias convergentes son, en sí mismas, las series de Taylor generadas por las funciones que representan.

52. Series de Taylor para funciones pares e impares (*Continuación del ejercicio 59, sección 10.7*). Suponga que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para toda x en un intervalo abierto $(-R, R)$. Demuestre que:

a) Si f es par, entonces, $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$, es decir, la serie de Taylor para f en $x = 0$ sólo incluye potencias pares de x.

b) Si f es impar, entonces, $a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = 0$, es decir, la serie de Taylor para f en $x = 0$ sólo incluye potencias impares de x.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

La fórmula de Taylor con $n = 1$ y $a = 0$ proporciona la linealización de una función en $x = 0$. Con $n = 2$ y $n = 3$, obtenemos las aproximaciones cuadráticas y cúbicas estándar. En estos ejercicios exploramos los errores asociados con estas aproximaciones. Aquí trataremos de responder dos preguntas:

a) ¿Para qué valores de x la función puede sustituirse por cada aproximación con un error menor que 10^{-2}?

b) ¿Cuál es el máximo error que podemos esperar si sustituimos la función por cada aproximación en el intervalo especificado?

Con un software matemático, realice los siguientes pasos que le ayudarán a responder las preguntas *a)* y *b)* para las funciones y los intervalos de los ejercicios 53 a 58.

Paso 1: Trace la función sobre el intervalo que se especifica.

Paso 2: Determine los polinomios de Taylor $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$ en $x = 0$.

Paso 3: Calcule la $(n + 1)$-ésima derivada $f^{(n+1)}(c)$ asociada con el término residual para cada polinomio de Taylor. Trace la gráfica de la derivada como una función de c sobre el intervalo especificado y calcule su máximo valor absoluto, M.

Paso 4: Calcule el residuo $R_n(x)$ para cada polinomio. Use la M estimada en el paso 3 en vez de $f^{(n+1)}(c)$; trace $R_n(x)$ sobre el intervalo especificado. Estime después los valores de x que responden la pregunta *a)*.

Paso 5: Compare su error estimado con el error real $E_n(x) = |f(x) - P_n(x)|$; para ello, trace la gráfica de $E_n(x)$ en el intervalo especificado. Esto le ayudará a responder la pregunta *b)*.

Paso 6: Trace juntas la función y sus tres aproximaciones de Taylor. Analice las gráficas en relación con la información obtenida en los pasos 4 y 5.

53. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x}}, \quad |x| \le \dfrac{3}{4}$

54. $f(x) = (1 + x)^{3/2}, \quad -\dfrac{1}{2} \le x \le 2$

55. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad |x| \le 2$

56. $f(x) = (\cos x)(\operatorname{sen} 2x), \quad |x| \le 2$

57. $f(x) = e^{-x} \cos 2x, \quad |x| \le 1$

58. $f(x) = e^{x/3} \operatorname{sen} 2x, \quad |x| \le 2$

10.10 La serie binomial y aplicaciones de las series de Taylor

Podemos usar a las series de Taylor para solucionar los problemas que, de otro modo, serían insuperables. Por ejemplo, muchas funciones tienen antiderivadas que no se pueden expresar mediante funciones conocidas. En esta sección mostramos cómo evaluar integrales de estas funciones representándolas como series de Taylor. También mostramos cómo pueden utilizarse las series de Taylor para evaluar límites que conducen a formas indeterminadas, y cómo se pueden utilizar las series de Taylor para extender la función exponencial de números reales a complejos. Comenzamos con un análisis de la serie binomial, que proviene de la serie de Taylor de la función $f(x) = (1 + x)^m$, y concluimos la sección con la tabla 10.1, que presenta series de Taylor utilizadas con frecuencia.

La serie binomial para potencias y raíces

La serie de Taylor generada por $f(x) = (1 + x)^m$, cuando m es constante, es

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k + \cdots. \quad (1)$$

Esta serie, llamada **serie binomial**, converge absolutamente para $|x| < 1$. Para deducir la serie, primero listamos la función y sus derivadas:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x)^m \\ f'(x) &= m(1 + x)^{m-1} \\ f''(x) &= m(m-1)(1 + x)^{m-2} \\ f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(1 + x)^{m-3} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)(1 + x)^{m-k}. \end{aligned}$$

Luego, las evaluamos en $x = 0$ y las sustituimos en la fórmula de la serie de Taylor para obtener la serie (1).

Si m es un entero mayor o igual que cero, la serie termina después de $(m + 1)$ términos, ya que los coeficientes a partir de $k = m + 1$ son iguales a cero.

Si m no es un entero positivo o cero, la serie es infinita y converge para $|x| < 1$. Para ver por qué, sea u_k el término que incluye a x^k. Luego, aplique el criterio de la razón para convergencia absoluta, con la finalidad de ver que

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{m-k}{k+1}x\right| \to |x| \quad \text{cuando } k \to \infty.$$

Nuestra deducción de la serie binomial sólo muestra que es generada por $(1 + x)^m$ y converge para $|x| < 1$. La deducción no muestra que la serie converge a $(1 + x)^m$. De hecho, converge, pero dejamos la demostración para el ejercicio 58. La siguiente formulación es una manera sucinta de expresar la serie.

Serie binomial

Para $-1 < x < 1$,

$$(1 + x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k,$$

donde definimos

$$\binom{m}{1} = m, \qquad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!},$$

y

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!} \qquad \text{para } k \geq 3.$$

EJEMPLO 1 Si $m = -1$,

$$\binom{-1}{1} = -1, \qquad \binom{-1}{2} = \frac{-1(-2)}{2!} = 1,$$

y

$$\binom{-1}{k} = \frac{-1(-2)(-3)\cdots(-1-k+1)}{k!} = (-1)^k\left(\frac{k!}{k!}\right) = (-1)^k.$$

Con estos valores para los coeficientes y luego de reemplazar x por $-x$, la fórmula de la serie binomial produce la conocida serie geométrica

$$(1+x)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^k x^k + \cdots. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Por el ejemplo 1, sección 3.9, sabemos que $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ para $|x|$ pequeña. Con $m = 1/2$, la serie binomial da aproximaciones cuadráticas y de orden superior, junto con estimaciones del error que provienen del teorema de estimación de la serie alternante:

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/2} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 \\ &\qquad + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!}x^4 + \cdots \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots.\end{aligned}$$

Al sustituir la x se obtienen otras aproximaciones. Por ejemplo,

$$\sqrt{1-x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \qquad \text{para } |x^2| \text{ pequeña,}$$

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}} \approx 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} \qquad \text{para } \left|\frac{1}{x}\right| \text{ pequeña, esto es, } |x| \text{ grande.} \quad \blacksquare$$

Evaluación de integrales no elementales

En ocasiones, utilizamos una serie de Taylor para determinar la suma de una serie de potencias dada en términos de una función conocida. Por ejemplo,

$$x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots = (x^2) - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} - \frac{(x^2)^7}{7!} + \cdots = \operatorname{sen} x^2.$$

En los ejercicios 59 a 62 se presentan más ejemplos.

Las series de Taylor se pueden utilizar para expresar integrales no elementales en términos de series. Integrales como $\int \operatorname{sen} x^2\, dx$ surgen en el estudio de la difracción de la luz.

EJEMPLO 3 Exprese $\int \operatorname{sen} x^2\, dx$ como una serie de potencias.

Solución En la serie para sen x, sustituimos x por x^2 para obtener:

$$\operatorname{sen} x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} - \cdots.$$

Por lo tanto,

$$\int \operatorname{sen} x^2\, dx = C + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \frac{x^{19}}{19\cdot 9!} - \cdots. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Estime $\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx$ con un error menor que 0.001.

Solución Con la integral indefinida del ejemplo 3, fácilmente se encuentra que

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \frac{1}{15\cdot 7!} + \frac{1}{19\cdot 9!} - \cdots.$$

La serie en el lado derecho es alternante, y por evaluaciones numéricas encontramos que

$$\frac{1}{11\cdot 5!} \approx 0.00076$$

es el primer término numéricamente menor que 0.001. La suma de los dos términos precedentes da

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} \approx 0.310.$$

Con dos términos más, podríamos estimar

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx \approx 0.310268$$

con un error menor que 10^{-6}. Con un solo término más, tenemos

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} + \frac{1}{6894720} \approx 0.310268303,$$

con un error de aproximadamente 1.08×10^{-9}. Para garantizar esta precisión con la fórmula de error para la regla del trapecio, se requeriría el uso de unos 8000 subintervalos. ■

Arco tangente

En el ejemplo 5 de la sección 10.7, encontramos una serie para $\tan^{-1} x$ diferenciando para obtener

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

e integrando para llegar a

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Sin embargo, no demostramos el teorema de integración término a término en el cual se basa esta conclusión. Ahora deduciremos de nuevo la serie, integrando ambos lados de la fórmula finita

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}, \tag{2}$$

cuyo último término se obtiene sumando los términos residuales como una serie geométrica con primer término $a = (-1)^{n+1}t^{2n+2}$ y razón $r = -t^2$. Si se integran ambos lados de la ecuación (2) desde $t = 0$ hasta $t = x$, resulta

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x),$$

donde

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.$$

El denominador del integrando es mayor o igual que 1, por lo cual

$$|R_n(x)| \le \int_0^{|x|} t^{2n+2}\,dt = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

Si $|x| \le 1$, el lado derecho de esta desigualdad se aproxima a cero cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ si $|x| \le 1$ y

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| \le 1.$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \qquad |x| \le 1. \tag{3}$$

Tomamos este camino, en vez de determinar de manera directa la serie de Taylor, ya que las fórmulas para las derivadas de orden superior de $\tan^{-1} x$ son inmanejables. Cuando consideramos que $x = 1$ en la ecuación (3), obtenemos la **fórmula de Leibniz**:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots.$$

Como esta serie converge con demasiada lentitud, no es útil para aproximar π a muchos decimales. La serie para $\tan^{-1} x$ converge más rápidamente cuando x es cercana a cero. Por esa razón, quienes utilizan series para $\tan^{-1} x$ con la finalidad de calcular π, emplean varias identidades trigonométricas.

Por ejemplo, si

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{1}{3},$$

entonces,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

y

$$\frac{\pi}{4} = \alpha + \beta = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}.$$

Ahora la ecuación (3) podría usarse con $x = 1/2$ para evaluar $\tan^{-1}(1/2)$ y con $x = 1/3$ para obtener $\tan^{-1}(1/3)$. La suma de estos resultados, multiplicada por 4, da π.

Evaluación de formas indeterminadas

En ocasiones, evaluamos formas indeterminadas si expresamos las funciones en cuestión como series de Taylor.

EJEMPLO 5 Evalúe

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - 1}.$$

Solución Representamos $\ln x$ como una serie de Taylor en potencias de $x - 1$. Esto se consigue calculando la serie de Taylor generada por $\ln x$ en $x = 1$, ya sea directamente o sustituyendo x por $x - 1$ en la serie para $\ln x$ que vimos en el ejemplo 6 de la sección 10.7. En cualquiera de las dos formas, obtenemos

$$\ln x = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \cdots,$$

de donde encontramos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x\to 1}\left(1 - \frac{1}{2}(x - 1) + \cdots\right) = 1. \qquad \blacksquare$$

Desde luego, este límite en particular también se puede evaluar mediante la regla de L'Hôpital.

EJEMPLO 6 Evalúe

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \tan x}{x^3}.$$

Solución Las series de Taylor para sen x y tan x, hasta los términos en x^5, son

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \qquad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots.$$

Restando las series término a término, se obtiene

$$\operatorname{sen} x - \tan x = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{8} - \cdots = x^3\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots\right).$$

Después de dividir ambos lados entre x^3 y tomar límites, se obtiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots\right)$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

■

Si usamos series para calcular $\lim_{n\to 0}((1/\operatorname{sen} x) - (1/x))$, no sólo determinamos dicho límite, sino que también descubrimos una fórmula de aproximaciones para csc x.

EJEMPLO 7 Determine $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right)$.

Solución Usando álgebra y la serie de Taylor para sen x, tenemos

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)}{x \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)}$$

$$= \frac{x^3\left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \cdots\right)}{x^2\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots\right)} = x \cdot \frac{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(x \cdot \frac{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots}\right) = 0.$$

Por el cociente de la derecha, podemos ver que si $|x|$ es pequeño, entonces,

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \approx x \cdot \frac{1}{3!} = \frac{x}{6} \qquad \text{o} \qquad \operatorname{csc} x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{6}.$$

■

Identidad de Euler

Un número complejo es un número de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales e $i = \sqrt{-1}$ (vea el apéndice 7). Si sustituimos $x = i\theta$ (θ es real) en la serie de Taylor para e^x y aplicamos las relaciones

$$i^2 = -1, \qquad i^3 = i^2 i = -i, \qquad i^4 = i^2 i^2 = 1, \qquad i^5 = i^4 i = i,$$

y así sucesivamente, para simplificar el resultado, obtenemos

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta.$$

Esto no *demuestra* que $e^{i\theta} = \cos u + i\,\text{sen}\,\theta$, ya que aún no hemos definido lo que significa elevar e a una potencia imaginaria. Más bien, indica cómo definir $e^{i\theta}$ para ser coherentes con lo que sabemos acerca de la función exponencial para números reales.

DEFINICIÓN

Para cualquier número real θ, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ (4)

La ecuación (4), denominada **identidad de Euler**, nos permite definir e^{a+bi} como $e^a \cdot e^{bi}$ para cualquier número complejo $a + bi$. Una consecuencia de la identidad es la ecuación

$$e^{i\pi} = -1.$$

Cuando se escribe en la forma $e^{i\pi} + 1 = 0$, esta ecuación combina cinco de las constantes más importantes en matemáticas.

TABLA 10.1 Series de Taylor utilizadas con frecuencia

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\text{sen}\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| \leq 1$$

Ejercicios 10.10

Series binomiales

Determine los cuatro primeros términos de la serie binomial para las funciones de los ejercicios 1 a 10.

1. $(1 + x)^{1/2}$ **2.** $(1 + x)^{1/3}$ **3.** $(1 - x)^{-3}$

4. $(1 - 2x)^{1/2}$ **5.** $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-2}$ **6.** $\left(1 - \frac{x}{3}\right)^{4}$

7. $(1 + x^3)^{-1/2}$ **8.** $(1 + x^2)^{-1/3}$

9. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/2}$ **10.** $\frac{x}{\sqrt[3]{1 + x}}$

Determine la serie binomial para las funciones de los ejercicios 11 a 14.

11. $(1 + x)^4$ **12.** $(1 + x^2)^3$

13. $(1 - 2x)^3$ **14.** $\left(1 - \frac{x}{2}\right)^4$

Aproximaciones e integrales no elementales

T En los ejercicios 15 a 18, estime por medio de series los valores de las integrales con un error de magnitud menor que 10^{-5}. (La sección de respuestas presenta los valores de las integrales redondeados a siete decimales).

15. $\int_0^{0.6} \operatorname{sen} x^2\, dx$ **16.** $\int_0^{0.4} \frac{e^{-x} - 1}{x}\, dx$

17. $\int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{1 + x^4}}\, dx$ **18.** $\int_0^{0.35} \sqrt[3]{1 + x^2}\, dx$

T Por medio de series, aproxime los valores de las integrales de los ejercicios 19 a 22 con un error de magnitud menor que 10^{-8}.

19. $\int_0^{0.1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ **20.** $\int_0^{0.1} e^{-x^2}\, dx$

21. $\int_0^{0.1} \sqrt{1 + x^4}\, dx$ **22.** $\int_0^{1} \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx$

23. Estime el error si $\cos t^2$ se aproxima mediante $1 - \frac{t^4}{2} + \frac{t^8}{4!}$ en la integral $\int_0^1 \cos t^2\, dt$.

24. Estime el error si $\cos \sqrt{t}$ se calcula en forma aproximada mediante $1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4!} - \frac{t^3}{6!}$ en la integral $\int_0^1 \cos \sqrt{t}\, dt$.

En los ejercicios 25 a 28, determine un polinomio que aproxime $F(x)$ en todo el intervalo que se está considerando, con un error de magnitud menor que 10^{-3}.

25. $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t^2\, dt, \quad [0, 1]$

26. $F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2}\, dt, \quad [0, 1]$

27. $F(x) = \int_0^x \tan^{-1} t\, dt$, **a)** $[0, 0.5]$ **b)** $[0, 1]$

28. $F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1 + t)}{t}\, dt$, **a)** $[0, 0.5]$ **b)** $[0, 1]$

Formas indeterminadas

En los ejercicios 29 a 40, evalúe los límites por medio de series.

29. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - (1 + x)}{x^2}$ **30.** $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

31. $\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t - (t^2/2)}{t^4}$ **32.** $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta - \theta + (\theta^3/6)}{\theta^5}$

33. $\lim_{y \to 0} \frac{y - \tan^{-1} y}{y^3}$ **34.** $\lim_{y \to 0} \frac{\tan^{-1} y - \operatorname{sen} y}{y^3 \cos y}$

35. $\lim_{x \to \infty} x^2 (e^{-1/x^2} - 1)$ **36.** $\lim_{x \to \infty} (x + 1) \operatorname{sen} \frac{1}{x + 1}$

37. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{1 - \cos x}$ **38.** $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{\ln(x - 1)}$

39. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x^2}{1 - \cos 2x}$ **40.** $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x^3)}{x \cdot \operatorname{sen} x^2}$

Uso de la tabla 10.1

En los ejercicios 41 a 52, utilice la tabla 10.1 para determinar la suma de cada serie.

41. $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$

42. $\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^5 + \left(\frac{1}{4}\right)^6 + \cdots$

43. $1 - \frac{3^2}{4^2 \cdot 2!} + \frac{3^4}{4^4 \cdot 4!} - \frac{3^6}{4^6 \cdot 6!} + \cdots$

44. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \cdots$

45. $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi^3}{3^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{3^5 \cdot 5!} - \frac{\pi^7}{3^7 \cdot 7!} + \cdots$

46. $\frac{2}{3} - \frac{2^3}{3^3 \cdot 3} + \frac{2^5}{3^5 \cdot 5} - \frac{2^7}{3^7 \cdot 7} + \cdots$

47. $x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \cdots$

48. $1 - \frac{3^2 x^2}{2!} + \frac{3^4 x^4}{4!} - \frac{3^6 x^6}{6!} + \cdots$

49. $x^3 - x^5 + x^7 - x^9 + x^{11} - \cdots$

50. $x^2 - 2x^3 + \frac{2^2 x^4}{2!} - \frac{2^3 x^5}{3!} + \frac{2^4 x^6}{4!} - \cdots$

51. $-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + \cdots$

52. $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \cdots$

Teoría y ejemplos

53. Sustituya x por $-x$ en la serie de Taylor para $\ln(1 + x)$, con la finalidad de obtener una serie para $\ln(1 - x)$. Después, reste esto de la serie de Taylor para $\ln(1 + x)$ y demuestre que para $|x| < 1$,

$$\ln \frac{1 + x}{1 - x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

54. ¿Cuántos términos de la serie de Taylor para $\ln(1 + x)$ es necesario sumar para tener la seguridad de calcular $\ln(1.1)$ con un error de magnitud menor que 10^{-8}? Justifique su respuesta.

55. De acuerdo con el teorema de estimación de series alternantes, ¿cuántos términos de la serie de Taylor para $\tan^{-1} 1$ es necesario sumar para tener la seguridad de calcular $\pi/4$ con un error de magnitud menor que 10^{-3}? Justifique su respuesta.

56. Demuestre que la serie de Taylor para $f(x) = \tan^{-1} x$ diverge para $|x| > 1$.

T **57. Estimación de pi** ¿Aproximadamente cuántos términos de la serie de Taylor para $\tan^{-1} x$ tendría usted que usar para evaluar cada término del lado derecho de la ecuación

$$\pi = 48 \tan^{-1}\frac{1}{18} + 32 \tan^{-1}\frac{1}{57} - 20 \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

con un error de magnitud menor que 10^{-6}? En contraste, la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ en $\pi^2/6$ es tan lenta que ni siquiera con 50 términos se obtiene una precisión de dos decimales.

58. Siga los pasos descritos a continuación para demostrar que la serie binomial en la ecuación (1) converge a $(1+x)^m$.

a) Obtenga la derivada de la serie

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k$$

para demostrar que

$$f'(x) = \frac{mf(x)}{1+x}, \quad -1 < x < 1.$$

b) Defina $g(x) = (1+x)^{-m} f(x)$ y demuestre que $g'(x) = 0$.

c) Con base en el inciso *b*), demuestre que

$$f(x) = (1+x)^m.$$

59. ***a)*** Considere la serie binomial y el hecho de que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} x = (1-x^2)^{-1/2}$$

para generar los cuatro primeros términos distintos de cero de la serie de Taylor para $\operatorname{sen}^{-1} x$. ¿Cuál es el radio de convergencia?

b) **Serie para $\cos^{-1} x$** Utilice el resultado del inciso *a*) para determinar los cinco primeros términos distintos de cero de la serie de Taylor para $\cos^{-1} x$.

60. ***a)*** **Serie para $\operatorname{senh}^{-1} x$** Determine los cuatro primeros términos distintos de cero de la serie de Taylor para

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

T ***b)*** Use los *tres* primeros términos de la serie en el inciso *a*) para estimar $\operatorname{senh}^{-1} 0.25$. Establezca una cota superior para la magnitud del error introducido en la estimación.

61. Obtenga la serie de Taylor para $1/(1+x)^2$ a partir de la serie para $-1/(1+x)$.

62. Use la serie de Taylor para $1/(1-x^2)$ con la finalidad de obtener una serie para $2x/(1-x^2)^2$.

T **63. Estimación de pi** El matemático inglés Wallis descubrió la fórmula

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot \cdots}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot \cdots}.$$

Aplicando esta fórmula, calcule π hasta la segunda cifra decimal.

64. La integral elíptica completa de primera clase es la integral

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\theta}},$$

donde $0 < k < 1$ es constante.

a) Demuestre que los primeros cuatro términos de la serie binomial para $1/\sqrt{1-x}$ son

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots.$$

b) Con base en el inciso *a*) y en la fórmula 67 para reducción de integrales incluida al final del libro, demuestre que

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right].$$

65. Serie para $\operatorname{sen}^{-1} x$ Integre la serie binomial para $(1-x^2)^{-1/2}$ y demuestre que para $|x| < 1$,

$$\operatorname{sen}^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

66. Serie para $\tan^{-1} x$ con $|x| > 1$ Deduzca las series

$$\tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots, \quad x > 1$$

$$\tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots, \quad x < -1,$$

integrando la serie

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{1+(1/t^2)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^6} - \frac{1}{t^8} + \cdots$$

En el primer caso, considere desde x hasta ∞ y, en el segundo, desde $-\infty$ hasta x.

Identidad de Euler

67. Utilice la ecuación (4) para escribir las siguientes potencias de e en la forma $a + bi$.

a) $e^{-i\pi}$ ***b)*** $e^{i\pi/4}$ ***c)*** $e^{-i\pi/2}$

68. Con base en la ecuación (4), demuestre que

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

69. Establezca las ecuaciones en el ejercicio 68 mediante la combinación de las series formales para $e^{i\theta}$ y $e^{-i\theta}$.

70. Demuestre que

a) $\cosh i\theta = \cos\theta$, ***b)*** $\operatorname{senh} i\theta = i \operatorname{sen}\theta$.

71. Multiplicando las series de Taylor para e^x y sen x, encuentre los términos, hasta x^5, de la serie de Taylor para e^x sen x. Esta serie es la parte imaginaria de la serie para

$$e^x \cdot e^{ix} = e^{(1+i)x}.$$

Con base en este hecho, verifique su respuesta. ¿Para qué valores de x converge la serie para e^x sen x?

72. Cuando a y b son reales, definimos $e^{(a+ib)x}$ con la ecuación

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax}\cdot e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \operatorname{sen} bx).$$

Diferencie el lado derecho de esta ecuación, para demostrar que

$$\frac{d}{dx}e^{(a+ib)x} = (a + ib)e^{(a+ib)x}.$$

Así que la regla conocida $(d/dx)e^{kx} = ke^{kx}$ se cumple para k tanto cuando es número complejo como cuando es número real.

73. Utilice la definición de $e^{i\theta}$ para demostrar que para cualesquiera números reales θ, θ_1 y θ_2,

a) $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, ***b***) $e^{-i\theta} = 1/e^{i\theta}$.

74. Dos números complejos $a + bi$ y $c + id$ son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Con base en este hecho, evalúe

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx \quad \text{y} \quad \int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx$$

a partir de

$$\int e^{(a+ib)x}\,dx = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}e^{(a+ib)x} + C,$$

donde $C = C_1 + iC_2$ es una constante compleja de integración.

Capítulo 10 Preguntas de repaso

1. ¿Qué es una sucesión infinita? ¿Qué significa que una sucesión converja? ¿Qué significa que una sucesión diverja? Dé ejemplos.

2. ¿Qué es una sucesión monótona? ¿En qué circunstancias tienen límite tales sucesiones? Dé ejemplos.

3. ¿De qué teoremas disponemos para calcular límites de sucesiones? Dé ejemplos.

4. ¿Qué teorema nos permite usar, algunas veces, la regla de L'Hôpital para calcular el límite de una sucesión? Dé un ejemplo.

5. ¿Cuáles son los seis límites de sucesiones en el teorema 5 que se presentan comúnmente cuando trabajamos con sucesiones y series?

6. ¿Qué es una serie infinita? ¿Qué significa el hecho de que una serie de este tipo converja? ¿Y que diverja? Dé algunos ejemplos.

7. ¿Qué es una serie geométrica? ¿Cuándo converge una serie de ese tipo? ¿Cuándo diverge? Si converge, ¿cuál es su suma? Cite ejemplos.

8. Además de las series geométricas, ¿qué otras series convergentes y divergentes conoce?

9. ¿Cuál es el criterio del n-ésimo término para la divergencia? ¿En qué idea se basa?

10. ¿Qué se puede decir acerca de las sumas y las restas, término a término, de series convergentes? ¿Y acerca de los múltiplos constantes de series convergentes y divergentes?

11. ¿Qué pasa si usted suma un número finito de términos a una serie convergente? ¿Y a una serie divergente? ¿Qué ocurre si elimina un número finito de términos de una serie convergente? ¿Y de una divergente?

12. ¿Cómo se renumeran los índices de una serie? ¿Con qué propósito querría hacerlo?

13. ¿En qué circunstancias converge una serie infinita de términos no negativos? ¿En cuáles diverge? ¿Por qué estudiamos series de términos no negativos?

14. ¿Cuál es el criterio de la integral? ¿En qué razonamiento se basa? Dé un ejemplo de su uso.

15. ¿Cuándo convergen las p series? ¿Cuándo divergen? ¿Cómo lo determina? Dé ejemplos de p series convergentes y divergentes.

16. ¿Cuáles son el criterio de comparación directa y el criterio de comparación del límite? ¿En qué razonamientos se basan? Dé ejemplos de su uso.

17. ¿Cuáles son los criterios de la razón y de la raíz? ¿Le brindan siempre la información que necesita para determinar la convergencia o la divergencia? Dé algunos ejemplos.

18. ¿Qué es la convergencia absoluta? ¿Y la convergencia condicional? ¿Cómo se relacionan entre sí?

19. ¿Qué es una serie alternante? ¿Qué teorema nos permite determinar la convergencia de esas series?

20. ¿Cómo se estima el error introducido al aproximar el valor de la suma de una serie alternante con una de las sumas parciales de la serie? ¿En qué razonamiento se basa esa estimación?

21. ¿Qué sabe acerca del reordenamiento de los términos de una serie absolutamente convergente? ¿Y de una serie con convergencia condicional?

22. ¿Qué es una serie de potencias? ¿Cómo se pone a prueba la convergencia de una serie de potencias? ¿Cuáles son los posibles resultados?

23. ¿Cuáles son los hechos básicos con respecto a

a) sumas, diferencias y productos de series de potencias?

b) la sustitución de x por una función en una serie de potencias?

c) la diferenciación término a término de series de potencias?

d) la integración término a término de series de potencias?

Dé ejemplos.

24. ¿Qué es la serie de Taylor generada por una función $f(x)$ en un punto $x = a$? ¿Qué información necesita acerca de f para construir la serie? Dé un ejemplo.

25. ¿Qué es una serie de Maclaurin?

26. ¿Una serie de Taylor siempre converge a su función generadora? Explique.

27. ¿Qué son los polinomios de Taylor? ¿Cuáles son sus aplicaciones?

28. ¿Qué es una fórmula de Taylor? ¿Qué nos dice acerca de los errores introducidos al usar polinomios de Taylor para aproximar funciones? En particular, ¿qué dice la fórmula de Taylor acerca del error en la linealización? ¿Sobre la aproximación cuadrática?

29. ¿Qué es una serie binomial? ¿En qué intervalo converge? ¿Cómo se usa?

30. ¿Cómo se usan en ocasiones las series de potencias para estimar los valores de integrales definidas no elementales? ¿Y para encontrar límites?

31. ¿Cuáles son las series de Taylor para $1/(1 - x)$, $1/(1 + x)$, e^x, sen x, cos x, ln $(1 + x)$ y $\tan^{-1} x$? ¿Cómo estima usted los errores resultantes al sustituir estas series por sus sumas parciales?

Capítulo 10 Ejercicios de práctica

Determinación de convergencia de sucesiones

¿Cuáles de las sucesiones, cuyos n-ésimos términos aparecen en los ejercicios 1 a 18, convergen y cuáles divergen? Determine el límite de todas las sucesiones convergentes.

1. $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

2. $a_n = \dfrac{1 - (-1)^n}{\sqrt{n}}$

3. $a_n = \dfrac{1 - 2^n}{2^n}$

4. $a_n = 1 + (0.9)^n$

5. $a_n = \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{2}$

6. $a_n = \operatorname{sen} n\pi$

7. $a_n = \dfrac{\ln (n^2)}{n}$

8. $a_n = \dfrac{\ln (2n + 1)}{n}$

9. $a_n = \dfrac{n + \ln n}{n}$

10. $a_n = \dfrac{\ln (2n^3 + 1)}{n}$

11. $a_n = \left(\dfrac{n - 5}{n}\right)^n$

12. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$

13. $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n}}$

14. $a_n = \left(\dfrac{3}{n}\right)^{1/n}$

15. $a_n = n(2^{1/n} - 1)$

16. $a_n = \sqrt[n]{2n + 1}$

17. $a_n = \dfrac{(n + 1)!}{n!}$

18. $a_n = \dfrac{(-4)^n}{n!}$

Series convergentes

Determine las sumas de las series de los ejercicios 19 a 24.

19. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n - 3)(2n - 1)}$

20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2}{n(n + 1)}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{(3n - 1)(3n + 2)}$

22. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{-8}{(4n - 3)(4n + 1)}$

23. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{4^n}$

Determinación de la convergencia de series

¿Cuáles de las series de los ejercicios 25 a 40 convergen absolutamente, cuáles convergen condicionalmente y cuáles divergen? Justifique sus respuestas.

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-5}{n}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln (n + 1)}$

30. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

32. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{\ln (\ln n)}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2 + 1}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n^2}{n^3 + 1}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n!}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 + 1)}{2n^2 + n - 1}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n 3^n}{n^n}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n + 1)(n + 2)}}$

40. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2 - 1}}$

Series de potencias

En los ejercicios 41 a 50, ***a)*** determine el radio y el intervalo de convergencia de las series. Después, identifique los valores de x para los cuales la serie converge ***b)*** absolutamente y ***c)*** condicionalmente.

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x + 4)^n}{n3^n}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 1)^{2n-2}}{(2n - 1)!}$

43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(3x - 1)^n}{n^2}$

44. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n + 1)(2x + 1)^n}{(2n + 1)2^n}$

45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

46. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

47. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n + 1)x^{2n-1}}{3^n}$

48. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - 1)^{2n+1}}{2n + 1}$

49. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{csch} n)x^n$

50. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\coth n)x^n$

Series de Maclaurin

Cada una de las series de los ejercicios 51 a 56 es el valor de la serie de Taylor en $x = 0$ de una función $f(x)$ en un punto específico. ¿Cuál es la función y cuál es el punto? ¿Cuál es la suma de la serie?

51. $1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} - \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{4^n} + \cdots$

52. $\dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{18} + \dfrac{8}{81} - \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{2^n}{n3^n} + \cdots$

53. $\pi - \dfrac{\pi^3}{3!} + \dfrac{\pi^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{\pi^{2n+1}}{(2n + 1)!} + \cdots$

54. $1 - \dfrac{\pi^2}{9 \cdot 2!} + \dfrac{\pi^4}{81 \cdot 4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{\pi^{2n}}{3^{2n}(2n)!} + \cdots$

55. $1 + \ln 2 + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!} + \cdots + \dfrac{(\ln 2)^n}{n!} + \cdots$

56. $\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{9\sqrt{3}} + \dfrac{1}{45\sqrt{3}} - \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{1}{(2n - 1)\left(\sqrt{3}\right)^{2n-1}} + \cdots$

Determine la serie de Taylor en $x = 0$ para las funciones en los ejercicios 57 a 64.

57. $\dfrac{1}{1-2x}$ **58.** $\dfrac{1}{1+x^3}$

59. $\operatorname{sen} \pi x$ **60.** $\operatorname{sen} \dfrac{2x}{3}$

61. $\cos\left(x^{5/3}\right)$ **62.** $\cos \dfrac{x^3}{\sqrt{5}}$

63. $e^{(\pi x/2)}$ **64.** e^{-x^2}

Series de Taylor

En los ejercicios 65 a 68, determine los cuatro primeros términos distintos de cero de la serie de Taylor generada por f en $x = a$.

65. $f(x) = \sqrt{3+x^2}$ en $x = -1$

66. $f(x) = 1/(1-x)$ en $x = 2$

67. $f(x) = 1/(x+1)$ en $x = 3$

68. $f(x) = 1/x$ en $x = a > 0$

Integrales no elementales

Por medio de series, aproxime los valores de las integrales de los ejercicios 69 a 72 con un error de magnitud menor que 10^{-8}. (En la sección de respuestas están los valores de las integrales redondeados a 10 decimales).

69. $\displaystyle\int_0^{1/2} e^{-x^3}\,dx$ **70.** $\displaystyle\int_0^{1} x \operatorname{sen}\left(x^3\right) dx$

71. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\tan^{-1} x}{x}\,dx$ **72.** $\displaystyle\int_0^{1/64} \frac{\tan^{-1} x}{\sqrt{x}}\,dx$

Uso de series para determinar límites

En los ejercicios 73 a 78:

a) Utilice series de potencias para evaluar el límite.

T ***b)*** Después, emplee una graficadora para respaldar sus cálculos.

73. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{7 \operatorname{sen} x}{e^{2x}-1}$ **74.** $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}-2\theta}{\theta - \operatorname{sen}\theta}$

75. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2-2\cos t}-\frac{1}{t^2}\right)$ **76.** $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(\operatorname{sen} h)/h - \cos h}{h^2}$

77. $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos^2 z}{\ln(1-z)+\operatorname{sen} z}$ **78.** $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{y^2}{\cos y - \cosh y}$

Teoría y ejemplos

79. Represente sen $3x$ por medio de una serie y encuentre valores de r y s para los cuales

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{x^3}+\frac{r}{x^2}+s\right)=0.$$

T **80.** Evalúe la precisión de las aproximaciones sen $x \approx x$ y sen $x \approx 6x/(6+x^2)$, comparando las gráficas de $f(x) = \operatorname{sen} x - x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x - (6x/(6+x^2))$. Describa lo que encuentre.

81. Determine el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^n.$$

82. Determine el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{4\cdot 9\cdot 14\cdot\cdots\cdot(5n-1)}(x-1)^n.$$

83. Determine una fórmula, de forma cerrada, para calcular la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-(1/n^2)\right)$, y utilícela para determinar la convergencia o la divergencia de esa serie.

84. Evalúe $\sum_{k=2}^{\infty}(1/(k^2-1))$ calculando los **límite**s de la n-ésima suma parcial de la serie cuando $n \to \infty$.

85. ***a)*** Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$y = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \cdots + \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{(3n)!}x^{3n} + \cdots.$$

b) Demuestre que la función definida por la serie satisface una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^a y + b$$

y encuentre los valores de las constantes a y b.

86. ***a)*** Determine la serie de Maclaurin para la función $x^2/(1+x)$.

b) ¿La serie converge a $x = 1$? Explique.

87. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes de números no negativos, ¿qué se puede decir acerca de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$? Justifique su respuesta.

88. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series divergentes de números no negativos, ¿qué se puede decir acerca de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$? Justifique su respuesta.

89. Demuestre que tanto la sucesión $\{x_n\}$ como la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{k+1}-x_k)$ convergen, o bien, que ambas divergen.

90. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/(1+a_n))$ converge si $a_n > 0$ para toda n y si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

91. Suponga que $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son números positivos que satisfacen las siguientes condiciones:

i. $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$;

ii. la serie $a_2 + a_4 + a_8 + a_{16} + \cdots$ diverge.

Demuestre que la serie

$$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots$$

diverge.

92. Utilice el resultado del ejercicio 91 para demostrar que

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

diverge.

Capítulo 10 Ejercicios adicionales y avanzados

Determinación de convergencia de series

¿Cuáles de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definidas por las fórmulas en los ejercicios 1 a 4 convergen? ¿Cuáles divergen? Justifique sus respuestas.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)^{n+(1/2)}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tan^{-1} n)^2}{n^2+1}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tanh n$

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log_n (n!)}{n^3}$

¿Cuáles de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definidas por las fórmulas en los ejercicios 5 a 8 convergen? ¿Cuáles divergen? Justifique sus respuestas.

5. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)} a_n$

(*Sugerencia:* Escriba varios términos, vea cuáles factores se cancelan y, luego, generalice).

6. $a_1 = a_2 = 7, \quad a_{n+1} = \dfrac{n}{(n-1)(n+1)} a_n$, si $n \geq 2$.

7. $a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$, si $n \geq 2$.

8. $a_n = 1/3^n$, si n es impar, $a_n = n/3^n$, si n es par.

Elección de centros para las series de Taylor

La fórmula de Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

expresa el valor de f en x en términos de los valores de f y sus derivadas en $x = a$. Por lo tanto, en cálculos numéricos necesitamos que a sea un punto donde conozcamos los valores de f y sus derivadas. También requerimos que a sea suficientemente cercana a los valores de f que nos interesen, de manera que $(x-a)^{n+1}$ sea tan pequeño que podamos despreciar el residuo.

En los ejercicios 9 a 14, ¿qué serie de Taylor elegiría para representar la función cerca del valor dado de x? (Podría haber más de una respuesta correcta). Escriba los primeros cuatro términos distintos de cero de la serie que elija.

9. $\cos x$, cerca de $x = 1$.

10. $\operatorname{sen} x$, cerca de $x = 6.3$.

11. e^x, cerca de $x = 0.4$.

12. $\ln x$, cerca de $x = 1.3$.

13. $\cos x$, cerca de $x = 69$.

14. $\tan^{-1} x$, cerca de $x = 2$.

Teoría y ejemplos

15. Suponga que a y b son constantes con $0 < a < b$. ¿La sucesión $\{(a^n + b^n)^{1/n}\}$ converge? Si converge, ¿cuál es el límite?

16. Determine la suma de la serie infinita

$$1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \frac{2}{10^7} + \frac{3}{10^8} + \frac{7}{10^9} + \cdots.$$

17. Evalúe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

18. Determine todos los valores de x para los cuales

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n+1)(2x+1)^n}$$

tiene convergencia absoluta.

T **19.** ***a)*** **¿**Cree que el valor de

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\cos(a/n)}{n}\right)^n, \ a \text{ es constante,}$$

depende del valor de a? Si es así, ¿cómo?

b) ¿Cree que el valor de

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\cos(a/n)}{bn}\right)^n, \ a \text{ y } b \text{ son constantes, } b \neq 0,$$

depende del valor de b? Si es así, ¿cómo?

c) Para confirmar sus suposiciones de los incisos *a)* y *b)*, utilice cálculo.

20. Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\operatorname{sen}(a_n)}{2}\right)^n$$

converge.

21. Determine un valor para la constante b que hará que el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n x^n}{\ln n}$$

sea igual a 5.

22. ¿Cómo sabe que las funciones sen x, ln x y e^x no son polinomios? Justifique su respuesta.

23. Determine el valor de a para el cual el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen} x - x}{x^3}$$

es finito, y evalúe el límite.

24. Determine los valores de a y b para los cuales

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax) - b}{2x^2} = -1.$$

25. Criterio de Raabe (o de Gauss) El siguiente criterio, que enunciamos sin demostración, es una extensión del criterio de la razón.

Criterio de Raabe: Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es una serie de constantes positivas y existen constantes C, K y N tales que

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{C}{n} + \frac{f(n)}{n^2},$$

donde $|f(n)| < K$ para $n \geq N$, entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge si $C > 1$, y diverge si $C \leq 1$.

Demuestre que los resultados del criterio de Raabe coinciden con lo que sabe de las series $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$.

26. (*Continuación del ejercicio 25*). Suponga que los términos de $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se definen de manera recursiva por medio de las fórmulas

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{(2n-1)^2}{(2n)(2n+1)}u_n.$$

Aplique el criterio de Raabe para determinar si la serie converge.

27. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, y si $a_n \neq 1$ y $a_n > 0$ para toda n,

a) demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

b) ¿$\sum_{n=1}^{\infty} a_n/(1-a_n)$ converge? Explique.

28. (*Continuación del ejercicio 27*). Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, y si $1 > a_n > 0$ para toda n, demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1-a_n)$ converge. (*Sugerencia:* Primero demuestre que $|\ln(1-a_n)| \le a_n/(1-a_n)$.

29. Teorema de Nicole Oresme Demuestre el teorema de Nicole Oresme, el cual afirma que

$$1 + \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 3 + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} + \cdots = 4.$$

(*Sugerencia:* Diferencie ambos lados de la ecuación $1/(1-x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$).

30. ***a)*** Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{x^n} = \frac{2x^2}{(x-1)^3}$$

para $|x| > 1$ diferenciando dos veces la identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}.$$

Luego, multiplique el resultado por x y reemplace x por $1/x$.

b) Con base en el inciso *a*), determine la solución real mayor que 1 de la ecuación

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{x^n}.$$

31. Control de calidad

a) Diferencie la serie

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

con la finalidad de obtener una serie para $1/(1-x)^2$.

b) En un tiro de dos dados, la probabilidad de obtener un resultado de 7 es $p = 1/6$. Si tira los dados de manera repetida, la probabilidad de que 7 aparezca por primera vez en el n-ésimo tiro es $q^{n-1}p$, donde $q = 1-p = 5/6$. El número esperado de tiros hasta que aparezca el 7 por primera vez es $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}p$. Determine la suma de esta serie.

c) Como ingeniero que aplica control estadístico de calidad a una operación industrial, usted inspecciona artículos que toma al azar de la línea de ensamble. Debe clasificar cada artículo muestreado como "bueno" o "malo". Si la probabilidad de que un artículo sea bueno es p, y de que sea malo es $q = 1-p$, la probabilidad de que el n-ésimo artículo inspeccionado sea el primer artículo malo encontrado es $p^{n-1}q$. El número promedio de artículos inspeccionados hasta que aparezca el primero malo (e incluyendo a éste) es $\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1}q$. Evalúe esta suma; para ello, suponga que $0 < p < 1$.

32. Valor esperado Suponga que una variable aleatoria X puede tomar los valores 1, 2, 3, ..., con probabilidades $p_1, p_2, p_3, \ldots$, donde p_k es la probabilidad de que X sea igual a k ($k = 1, 2, 3, \ldots$). También suponga que $p_k \ge 0$ y que $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. El **valor esperado** de X, denotado con $E(X)$, es el número $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k$, siempre que la serie converja. En cada uno de los siguientes casos, demuestre que $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ y determine $E(X)$, si existe. (*Sugerencia:* Vea el ejercicio 31).

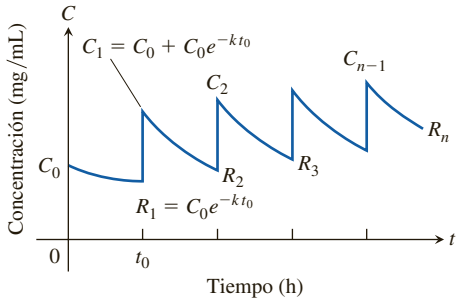
a) $p_k = 2^{-k}$ ***b)*** $p_k = \dfrac{5^{k-1}}{6^k}$

c) $p_k = \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

T **33. Dosis segura y eficaz** La concentración en la sangre que resulta de una sola dosis de un medicamento, normalmente, disminuye con el tiempo, conforme el fármaco se elimina del cuerpo. Por lo tanto, las dosis necesitan repetirse de manera periódica para evitar que la concentración descienda más allá de algún nivel particular. Un modelo del efecto de las dosis repetidas indica que la concentración residual justamente antes de la $(n+1)$-ésima dosis es

$$R_n = C_0e^{-kt_0} + C_0e^{-2kt_0} + \cdots + C_0e^{-nkt_0},$$

donde C_0 es el cambio en la concentración ocasionado por una sola dosis (mg/mL), k es la *constante de eliminación* (h^{-1}), y t_0 es tiempo entre las dosis (h). Observe la siguiente figura.



a) Escriba R_n en forma cerrada como una sola fracción y determine $R = \lim_{n\to\infty} R_n$.

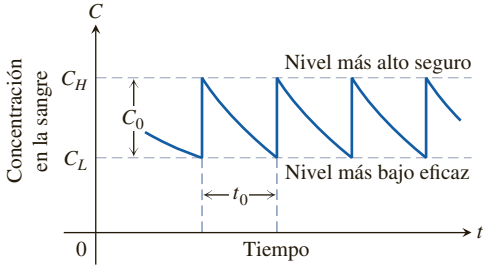
b) Calcule R_1 y R_{10} para $C_0 = 1$ mg/mL, $k = 0.1$ h^{-1}, y $t_0 = 10$ h. ¿Qué tan buena estimación de R es R_{10}?

c) Si $k = 0.01$ h^{-1} y $t_0 = 10$ h, determine la n más pequeña tal que $R_n > (1/2)R$. Considere $C_0 = 1$ mg/mL.

(*Fuente: Prescribing Safe and Effective Dosage*, B. Horelick y S. Koont, COMAP, Inc., Lexington, MA).

34. Tiempo entre dosis de medicamentos (*Continuación del ejercicio 33*). Si se sabe que un medicamento será ineficaz por debajo de una concentración C_L, y que resulta nocivo por arriba de una concentración más alta C_H, uno necesita determinar los valores de C_0 y t_0 que producirán una concentración que sea segura (no superior a C_H), pero eficaz (no inferior a C_L). Observe la siguiente figura. Así, necesita determinar los valores de C_0 y t_0 para los cuales

$$R = C_L \quad \text{y} \quad C_0 + R = C_H.$$



Por lo tanto, $C_0 = C_H - C_L$. Cuando estos valores se sustituyen en la ecuación para R, obtenida en el inciso *a*) del ejercicio 33, la ecuación resultante se simplifica a

$$t_0 = \frac{1}{k} \ln \frac{C_H}{C_L}.$$

Para alcanzar con rapidez un nivel eficaz, uno podría administrar una dosis "cargada" que produjera una concentración de C_H mg/mL. Esto podría realizarse cada t_0 horas mediante una dosis que eleve la concentración en $C_0 = C_H - C_L$ mg/mL.

a) Verifique la ecuación anterior para t_0.

b) Si $k = 0.05\ h^{-1}$ y la concentración más alta segura es e veces la concentración eficaz más baja, determine el intervalo de tiempo entre las dosis que garantizará concentraciones seguras y eficaces.

c) Dados $C_H = 2$ mg/mL, $C_L = 0.5$ mg/mL y $k = 0.02\ h^{-1}$, determine un esquema para la administración del medicamento.

d) Suponga que $k = 0.2\ h^{-1}$ y que la menor concentración eficaz es 0.03 mg/mL. Se administra una sola dosis que produce una concentración de 0.1 mg/mL. ¿Cuánto tiempo seguirá siendo eficaz el medicamento?

Capítulo 10 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulos Mathematica/Maple

Pelota que rebota
El modelo predice la altura de una pelota que rebota y el tiempo que transcurre hasta que deja de rebotar.

Aproximaciones del polinomio de Taylor para una función
Una animación gráfica muestra la convergencia de los polinomios de Taylor para funciones que tienen derivadas de todos los órdenes en un intervalo de sus dominios.

Apéndices

A.1 Números reales y recta de los reales

En esta sección haremos un repaso de los números reales, las desigualdades, los intervalos y los valores absolutos.

Números reales

Gran parte del cálculo se basa en las propiedades del sistema de los números reales. Los **números reales** son números que se pueden expresar como decimales, tales como

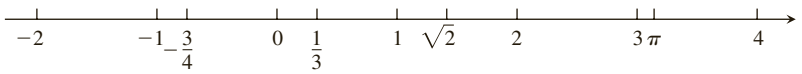
$$-\frac{3}{4} = -0.75000\ldots$$

$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots$$

$$\sqrt{2} = 1.4142\ldots$$

Los puntos suspensivos (. . .) indican, en cada caso, que la secuencia de dígitos decimales se prolonga sin fin. Cada expansión decimal concebible representa un número real, aunque algunos números tienen dos representaciones. Por ejemplo, los decimales infinitos .999. . . y 1.000. . . representan el mismo número real 1. Un enunciado similar también se cumple para una fila infinita de nueves.

Los números reales se pueden representar geométricamente como puntos en una recta numérica denominada la **recta real**.



El símbolo $\mathbb{R}$ representa indistintamente el sistema de números reales o la recta real.

Las propiedades del sistema de los números reales se dividen en tres categorías: algebraicas, de orden y de completitud. Las **propiedades algebraicas** nos dicen que los números reales se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (excepto entre 0), para producir más números reales de acuerdo con las reglas usuales de la aritmética. *Nunca se puede dividir entre* 0.

En el apéndice 6 se describen las **propiedades de orden** del sistema de números reales. Las reglas que aparecen en el margen izquierdo se pueden deducir a partir de ellas; el símbolo $\Rightarrow$ quiere decir "implica".

Observe las reglas de multiplicación de una desigualdad por un número. La multiplicación por un número positivo preserva la desigualdad; la multiplicación por un número negativo invierte la desigualdad. Además, la reciprocidad invierte la desigualdad para números del mismo signo. Por ejemplo, $2 < 5$, pero $-2 > -5$ y $1/2 > 1/5$.

La **propiedad de completitud** del sistema de números reales es más profunda y difícil de definir con exactitud. Sin embargo, la propiedad es esencial para la idea de límite (capí-

REGLAS DE LAS DESIGUALDADES

Si a, b y c son números reales, entonces:

1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
2. $a < b \Rightarrow a - c < b - c$
3. $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
4. $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow bc < ac$
   Caso especial:
   $a < b \Rightarrow -b < -a$
5. $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$
6. Si a y b son positivos, o bien, ambos son negativos, entonces,
   $a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

tulo 2). En términos generales, esta propiedad afirma que existen suficientes números reales para "completar" la recta de números reales, en el sentido de que no hay "huecos" o "espacios" en ella. Muchos teoremas del cálculo serían inválidos si el sistema de números reales no estuviera completo. El tema se trata con mayor profundidad en un curso más avanzado, pero el apéndice 6 sugiere lo que está implicado y cómo están construidos los números reales.

Se distinguen tres subconjuntos especiales de números reales.

1. Los **números naturales**, a saber, $1, 2, 3, 4, \ldots$
2. Los **números enteros**, $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$
3. Los **números racionales**, es decir, los números que se pueden expresar en forma de una fracción m/n, donde m y n son enteros y $n \neq 0$. Algunos ejemplos son

$$\frac{1}{3}, \quad -\frac{4}{9} = \frac{-4}{9} = \frac{4}{-9}, \quad \frac{200}{13} \qquad \text{y} \qquad 57 = \frac{57}{1}.$$

Los números racionales son exactamente los números reales con sucesiones decimales que pueden ser

a) terminales (ya que incluyen una cadena infinita de ceros), por ejemplo,

$$\frac{3}{4} = 0.75000\ldots = 0.75 \qquad \text{o bien,}$$

b) periódicos (terminan en un bloque de dígitos que se repiten una y otra vez), por ejemplo,

$$\frac{23}{11} = 2.090909\ldots = 2.\overline{09}$$

La barra indica el bloque de dígitos que se repite.

Una sucesión decimal terminal es un tipo especial de decimal periódico, ya que los ceros se repiten.

El conjunto de números racionales tiene todas las propiedades algebraicas y de orden de los números reales, pero carece de la propiedad de completitud. Por ejemplo, no existe un número racional cuyo cuadrado sea 2; hay un "hueco" en la recta racional donde debería estar $\sqrt{2}$.

Los números reales que no son racionales se conocen como **números irracionales**. Se caracterizan por no detenerse y por no repetir sucesiones decimales. Algunos ejemplos son π, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ y $\log_{10} 3$. Como todas las sucesiones decimales representan un número real, debe quedar claro que existe una infinidad de números irracionales. Tanto los números racionales como los irracionales se encuentran arbitrariamente cerca de cualquier punto en la recta real.

La notación de conjuntos es muy útil para especificar un subconjunto particular de los números reales. Un **conjunto** es una colección de objetos, y estos objetos son los **elementos** del conjunto. Si S es un conjunto, la notación $a \in S$ significa que a es un elemento de S, y la notación $a \notin S$ significa que a no es un elemento de S. Si S y T son conjuntos, entonces, $S \cup T$ es su **unión** y está formada con todos los elementos que pertenecen ya sea a S o a T (o a ambos, S y T). La **intersección** $S \cap T$ se forma con todos los elementos comunes de S y T. El **conjunto vacío** $\varnothing$ es el conjunto que no contiene elementos. Por ejemplo, la intersección de los números racionales y los números irracionales es el conjunto vacío.

Algunos conjuntos se pueden describir *listando* sus elementos entre llaves. Por ejemplo, el conjunto A formado por los números naturales (o enteros positivos) menores que 6 se expresa como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

El conjunto completo de enteros se escribe como

$$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}.$$

Otro modo de describir un conjunto es introducir en las llaves una regla que genera todos los elementos del conjunto. Por ejemplo, el conjunto

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero y } 0 < x < 6\}$$

es el conjunto de enteros positivos menores que 6.

Intervalos

Un subconjunto de la recta real se denomina **intervalo** si contiene al menos dos números e incluye todos los números reales que se encuentran entre dos de cualquiera de sus elementos. Por ejemplo, el conjunto de todos los números reales x tales que $x > 6$ es un intervalo, al igual que el conjunto de todas las x tales que $-2 \le x \le 5$. El conjunto de todos los números reales diferentes de cero no es un intervalo porque 0 está ausente, de manera que el conjunto no cumple con tener todos los números reales entre -1 y 1 (por ejemplo).

Geométricamente, los intervalos son rayos y segmentos de recta en la recta real, junto con la recta real misma. Los intervalos de números que corresponden a segmentos de rectas son **intervalos finitos**; los intervalos que corresponden a rayos y la recta real son **intervalos infinitos**.

Se dice que un intervalo finito es **cerrado** si contiene sus dos puntos extremos, es **semiabierto** si contiene solamente uno de sus extremos, y es **abierto** si no contiene ninguno de sus extremos. Los extremos también se denominan **puntos límite**, ya que constituyen el **límite** del intervalo. Los puntos restantes del intervalo son **puntos interiores** y, juntos, forman el **interior** del intervalo. Los intervalos infinitos son cerrados si contienen un punto extremo finito, y abiertos si no es así. La recta real completa $\mathbb{R}$ es un intervalo infinito que es tanto abierto como cerrado. La tabla A.1 resume los diferentes tipos de intervalos.

TABLA A.1 Tipos de intervalos

Notación	Descripción del conjunto	Tipo	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	Abierto	
$[a, b]$	$\{x \mid a \le x \le b\}$	Cerrado	
$[a, b)$	$\{x \mid a \le x < b\}$	Semiabierto	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \le b\}$	Semiabierto	
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	Abierto	
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \ge a\}$	Cerrado	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	Abierto	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \le b\}$	Cerrado	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	Tanto abierto como cerrado	

Resolución de desigualdades

El proceso de obtención del intervalo o de los intervalos de números que satisfacen una desigualdad en x se denomina **resolución** de la desigualdad.

EJEMPLO 1 Resuelva las siguientes desigualdades y muestre sus conjuntos solución en la recta real.

a) $2x - 1 < x + 3$ *b)* $-\frac{x}{3} < 2x + 1$ *c)* $\frac{6}{x - 1} \ge 5$

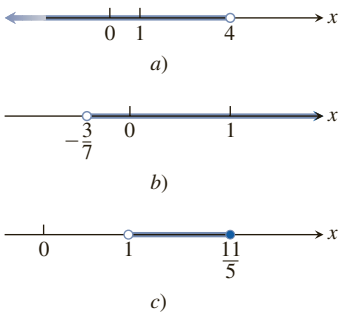


FIGURA A.1 Conjuntos solución de las desigualdades del ejemplo 1.

Solución

a)

$$\begin{aligned} 2x - 1 &< x + 3 \\ 2x &< x + 4 && \text{Se suma 1 en ambos lados.} \\ x &< 4 && \text{Se resta } x \text{ en ambos lados.} \end{aligned}$$

El conjunto solución es el intervalo abierto $(-\infty, 4)$ (figura A.1*a*).

b)

$$\begin{aligned} -\frac{x}{3} &< 2x + 1 \\ -x &< 6x + 3 && \text{Se multiplican ambos lados por 3.} \\ 0 &< 7x + 3 && \text{Se suma } x \text{ en ambos lados.} \\ -3 &< 7x && \text{Se resta 3 en ambos lados.} \\ -\frac{3}{7} &< x && \text{Se divide entre 7.} \end{aligned}$$

El conjunto solución es el intervalo abierto $(-3/7, \infty)$ (figura A.1*b*).

c) La desigualdad $6/(x-1) \geq 5$ se cumple sólo si $x > 1$, porque, de otra forma, $6/(x-1)$ no está definido o es negativo. Por lo tanto, $(x-1)$ es positivo y la desigualdad se conservará si multiplicamos ambos lados por $(x-1)$, y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{6}{x-1} &\geq 5 \\ 6 &\geq 5x - 5 && \text{Se multiplican ambos lados por } (x-1). \\ 11 &\geq 5x && \text{Se suma 5 en ambos lados.} \\ \frac{11}{5} &\geq x. && \text{O bien, } x \leq \frac{11}{5}. \end{aligned}$$

El conjunto solución es el intervalo semiabierto $(1, 11/15]$ (figura A.1*c*). ■

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número x, denotado con $|x|$, está definido por la fórmula

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

EJEMPLO 2 $|3| = 3, \quad |0| = 0, \quad |-5| = -(-5) = 5, \quad |-|a|| = |a|$ ■

Geométricamente, el valor absoluto de x es la distancia de x a 0 en la recta de números reales. Como las distancias siempre son positivas o 0, vemos que $|x| \geq 0$ para todo número real x, y $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$. Además,

$$|x - y| = \text{la distancia entre } x \text{ y } y$$

en la recta real (figura A.2).

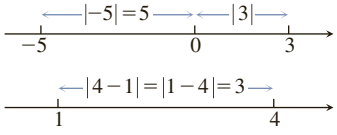


FIGURA A.2 Los valores absolutos indican distancias entre puntos de la recta numérica.

Como el símbolo $\sqrt{a}$ denota siempre la raíz cuadrada *no negativa* de a, una definición alternativa de $|x|$ es

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Es importante recordar que $\sqrt{a^2} = |a|$. No se escribe $\sqrt{a^2} = a$, a menos que usted ya sepa que $a \geq 0$.

El valor absoluto tiene las siguientes propiedades. (En los ejercicios se le pedirá demostrar estas propiedades).

Propiedades del valor absoluto

1.	$\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$	Un número y su inverso aditivo o negativo tienen el mismo valor absoluto.
2.	$\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert$	El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.
3.	$\left\lvert \frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$	El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.
4.	$\lvert a + b\rvert \le \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	La **desigualdad del triángulo**. El valor absoluto de la suma de dos números es menor o igual que la suma de sus valores absolutos.

Observe que $|-a| \neq -|a|$. Por ejemplo, $|-3| = 3$, mientras que $-|3| = -3$. Si a y b tienen signo diferente, entonces, $|a+b|$ es menor que $|a|+|b|$. En el resto de los casos, $|a+b|$ es igual a $|a|+|b|$. Las barras de valor absoluto en expresiones como $|-3+5|$ funcionan como paréntesis: la aritmética dentro de ellas se realiza *antes* de tomar el valor absoluto.

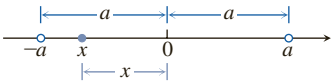


FIGURA A.3 $|x| < a$ significa que x se encuentra entre $-a$ y a.

EJEMPLO 3

$$|-3 + 5| = |2| = 2 < |-3| + |5| = 8$$
$$|3 + 5| = |8| = |3| + |5|$$
$$|-3 - 5| = |-8| = 8 = |-3| + |-5|$$

■

VALORES ABSOLUTOS E INTERVALOS

Si a es cualquier número positivo, entonces,

5. $|x| = a \iff x = \pm a$
6. $|x| < a \iff -a < x < a$
7. $|x| > a \iff x > a$ o $x < -a$
8. $|x| \le a \iff -a \le x \le a$
9. $|x| \ge a \iff x \ge a$ o $x \le -a$

La desigualdad $|x| < a$ indica que la distancia de x a 0 es menor que el número positivo a. Esto significa que x debe estar entre $-a$ y a, como se observa en la figura A.3.

Todos los enunciados de la tabla son consecuencia de la definición de valor absoluto y a menudo resultan de utilidad cuando se resuelven ecuaciones o desigualdades que involucran valores absolutos.

Los matemáticos suelen emplear el símbolo $\iff$ para denotar la relación lógica "si y sólo si". También significa "implica y es implicado por".

EJEMPLO 4 Resuelva la ecuación $|2x - 3| = 7$.

Solución Según la propiedad 5, $2x - 3 = \pm 7$, de modo que existen dos posibilidades:

$2x - 3 = 7$	$2x - 3 = -7$	Ecuaciones equivalentes sin valores absolutos
$2x = 10$	$2x = -4$	Se resuelven de la forma habitual.
$x = 5$	$x = -2$	

Las soluciones de $|2x - 3| = 7$ son $x = 5$ y $x = -2$. ■

EJEMPLO 5 Resuelva la desigualdad $\left|5 - \frac{2}{x}\right| < 1$.

Solución Tenemos que

$$\left|5 - \frac{2}{x}\right| < 1 \iff -1 < 5 - \frac{2}{x} < 1 \qquad \text{Propiedad 6}$$
$$\iff -6 < -\frac{2}{x} < -4 \qquad \text{Se resta 5.}$$
$$\iff 3 > \frac{1}{x} > 2 \qquad \text{Se multiplica por } -\tfrac{1}{2}.$$
$$\iff \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}. \qquad \text{Se toman los recíprocos.}$$

Observe cómo se usaron aquí las reglas de las desigualdades. La multiplicación por un número negativo invierte la desigualdad. Lo mismo sucede al tomar los recíprocos en una desigualdad en la que ambos lados son positivos. La desigualdad original se cumple si y sólo si $(1/3) < x < (1/2)$. El conjunto solución es el intervalo abierto $(1/3, 1/2)$. ■

Ejercicios A.1

1. Exprese $1/9$ como un decimal periódico, usando una barra para indicar los dígitos que se repiten. ¿Cuáles son las representaciones decimales de $2/9$, $3/9$, $8/9$ y $9/9$?

2. Si $2 < x < 6$, ¿cuáles de los siguientes enunciados acerca de x son necesariamente verdaderos, y cuáles no?

a) $0 < x < 4$ ***b)*** $0 < x - 2 < 4$

c) $1 < \frac{x}{2} < 3$ ***d)*** $\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

e) $1 < \frac{6}{x} < 3$ ***f)*** $|x - 4| < 2$

g) $-6 < -x < 2$ ***h)*** $-6 < -x < -2$

En los ejercicios 3 a 6, resuelva las desigualdades y muestre los conjuntos solución en la recta real.

3. $-2x > 4$ **4.** $5x - 3 \le 7 - 3x$

5. $2x - \frac{1}{2} \ge 7x + \frac{7}{6}$ **6.** $\frac{4}{5}(x - 2) < \frac{1}{3}(x - 6)$

En los ejercicios 7 a 9, resuelva las ecuaciones.

7. $|y| = 3$ **8.** $|2t + 5| = 4$ **9.** $|8 - 3s| = \frac{9}{2}$

Resuelva las desigualdades en los ejercicios 10 a 17, expresando los conjuntos solución como intervalos o uniones de intervalos. Además, muestre cada conjunto solución en la recta real.

10. $|x| < 2$ **11.** $|t - 1| \le 3$ **12.** $|3y - 7| < 4$

13. $\left|\frac{z}{5} - 1\right| \le 1$ **14.** $\left|3 - \frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}$ **15.** $|2s| \ge 4$

16. $|1 - x| > 1$ **17.** $\left|\frac{r + 1}{2}\right| \ge 1$

Resuelva las desigualdades en los ejercicios 18 a 21. Exprese los conjuntos solución como intervalos o uniones de intervalos y muéstrelos en la recta real. Use el resultado $\sqrt{a^2} = |a|$ cuando sea apropiado.

18. $x^2 < 2$ **19.** $4 < x^2 < 9$

20. $(x - 1)^2 < 4$ **21.** $x^2 - x < 0$

22. No caiga en la trampa de pensar que $|-a| = a$. ¿Para qué números reales a, es verdadera esta ecuación? ¿Para qué números reales es falsa?

23. Resuelva la ecuación $|x - 1| = 1 - x$.

24. Una demostración de la desigualdad del triángulo Enuncie un argumento que justifique cada uno de los pasos numerados en la siguiente demostración de la desigualdad del triángulo.

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= (a + b)^2 && (1)\\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\le a^2 + 2|a||b| + b^2 && (2)\\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 && (3)\\ &= (|a| + |b|)^2 \\ |a + b| &\le |a| + |b| && (4) \end{aligned}$$

25. Demuestre que $|ab| = |a||b|$ para números a y b cualesquiera.

26. Si $|x| \le 3$ y $x > -1/2$, ¿qué puede decir de x?

27. Grafique la desigualdad $|x| + |y| \le 1$.

28. Para cualquier número a, demuestre que $|-a| = |a|$.

29. Sea a cualquier número positivo. Demuestre que $|x| > a$ si y sólo si $x > a$ o $x < -a$.

30. ***a)*** Si b es cualquier número real diferente de cero, demuestre que $|1/b| = 1/|b|$.

b) Demuestre que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ para números a y b cualesquiera diferentes de cero.

A.2 Inducción matemática

Es posible demostrar que muchas fórmulas como

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2},$$

se cumplen para todos los enteros positivos n aplicando un axioma denominado *principio de inducción matemática*. Una demostración que utiliza este axioma se conoce como *demostración por inducción matemática* o simplemente *demostración por inducción*.

Los pasos para demostrar una fórmula por inducción son los siguientes:

1. Verifique que la fórmula se cumpla para $n = 1$.

2. Demuestre que si la fórmula es válida para cualquier entero positivo $n = k$, también lo es para el siguiente entero, $n = k + 1$.

El axioma de inducción afirma que una vez realizados estos pasos, la fórmula es válida para todos los enteros positivos n. De acuerdo con el paso 1, la fórmula se satisface para $n = 1$. De acuerdo con el paso 2, es válida para $n = 2$, y por lo tanto, según el paso 2, también se satisface para $n = 3$, para $n = 4$, y así sucesivamente. Si la primera ficha de dominó cae y la k-ésima ficha siempre cae sobre la $(k + 1)$-ésima ficha, entonces, todas las fichas caerán.

Desde otro punto de vista, suponga que tenemos una serie de enunciados $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, uno por cada número entero positivo. Suponga también que podemos demostrar que la validez de uno de los enunciados implica que el siguiente enunciado en la secuencia también es verdadero. Suponga asimismo que podemos demostrar que S_1 es verdadera. Entonces, podemos concluir que los enunciados son ciertos a partir de S_1.

EJEMPLO 1 Utilice inducción matemática para demostrar que para cada entero positivo n,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Solución Realizamos la demostración ejecutando los dos pasos anteriores.

1. La fórmula se cumple para $n = 1$ porque

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2}.$$

2. Si la fórmula se cumple para $n = k$, ¿también se cumple para $n = k + 1$? La respuesta es sí, como lo demostraremos ahora. Si

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k + 1)}{2},$$

entonces,

$$1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2}$$
$$= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} = \frac{(k + 1)((k + 1) + 1)}{2}.$$

La última expresión de esta cadena de igualdades es la expresión $n(n + 1)/2$ para $n = (k + 1)$.

El principio de inducción matemática nos garantiza que la fórmula original es válida para todos los enteros positivos n. ■

En el ejemplo 4 de la sección 5.2 se realizó otra demostración de la fórmula obteniendo la suma de los primeros n enteros. Sin embargo, la demostración por inducción matemática es más general. Se puede utilizar para obtener las sumas de los cuadrados y los cubos de los primeros n enteros (ejercicios 9 y 10). He aquí otro ejemplo.

EJEMPLO 2 Demuestre por inducción matemática que para todos los enteros positivos n,

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Solución Hacemos la demostración aplicando los pasos de inducción matemática.

1. La fórmula se cumple para $n = 1$ porque

$$\frac{1}{2^1} = 1 - \frac{1}{2^1}.$$

2. Si

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k},$$

entonces,

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1 \cdot 2}{2^k \cdot 2} + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Por lo tanto, la fórmula original se cumple para $n = (k + 1)$ siempre que se cumpla para $n = k$.

Una vez que se han verificado estos pasos, el principio de inducción matemática garantiza que la fórmula es válida para todo entero positivo n. ■

Otros enteros iniciales

En lugar de iniciar en $n = 1$, algunos argumentos inductivos parten de otro entero. Los pasos de estos argumentos son los siguientes:

1. Verifique que la fórmula se satisfaga para $n = n_1$ (el primer entero apropiado).

2. Demuestre que si la fórmula es válida para cualquier entero $n = k \geq n_1$, también lo es para $n = (k + 1)$.

Una vez realizados estos pasos, el principio de inducción matemática garantiza que la fórmula es válida para toda $n \geq n_1$.

EJEMPLO 3 Demuestre que $n! > 3^n$ si n es lo suficientemente grande.

Solución ¿Qué tan grande debe ser dicho valor? Experimentemos:

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040
3^n	3	9	27	81	243	729	2187

Parece que $n! > 3^n$ cuando $n \geq 7$. Para estar seguros, apliquemos la inducción matemática. Consideramos $n_1 = 7$ en el paso 1 y ejecutamos el paso 2.

Supongamos que $k! > 3^k$ para alguna $k \geq 7$. Entonces,

$$(k + 1)! = (k + 1)(k!) > (k + 1)3^k > 7 \cdot 3^k > 3^{k+1}.$$

Por lo tanto, para $k \geq 7$,

$$k! > 3^k \quad \text{implica} \quad (k + 1)! > 3^{k+1}.$$

El principio de inducción matemática garantiza ahora que $n! \geq 3^n$ para toda $n \geq 7$. ■

Demostración de la regla de la suma de la derivada para sumas de muchas funciones finitas

Demostramos el enunciado

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx}$$

por inducción matemática. El enunciado es verdadero para $n = 2$, como se demostró en la sección 3.3. Éste es el paso 1 de la prueba por inducción.

El paso 2 consiste en demostrar que si el enunciado es verdadero para cualquier entero positivo $n = k$, donde $k \geq n_0 = 2$, entonces, también es verdadero para $n = k + 1$. Entonces, se supone que

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_k}{dx}. \tag{1}$$

Por lo cual,

$$\frac{d}{dx}(\underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_k}_{\text{Llamamos } u \text{ a la función definida por esta suma.}} + \underbrace{u_{k+1}}_{\text{Llamamos } v \text{ a esta función.}})$$

$$= \frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) + \frac{du_{k+1}}{dx} \qquad \text{Regla de la suma para } \frac{d}{dx}(u + v)$$

$$= \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_k}{dx} + \frac{du_{k+1}}{dx}. \qquad \text{Ecuación (1)}$$

Con estos pasos verificados, el principio de inducción matemática garantiza ahora la regla de la suma para todo entero $n \geq 2$.

Ejercicios A.2

1. Suponiendo que la desigualdad del triángulo $|a+b| \leq |a| + |b|$ es válida para dos números cualesquiera a y b, demuestre que

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

para números n cualesquiera.

2. Demuestre que si $r \neq 1$, entonces,

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

para todo entero positivo n.

3. Use la regla del producto, $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$, y considere el hecho de que $\frac{d}{dx}(x) = 1$ con la finalidad de demostrar que $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ para todo entero positivo n.

4. Suponga que una función $f(x)$ tiene la propiedad de que $f(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ para dos números positivos x_1 y x_2 cualesquiera. Demuestre que

$$f(x_1x_2 \cdots x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$

para el producto de n números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cualesquiera.

5. Demuestre que

$$\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$$

para todo entero positivo n.

6. Demuestre que $n! > n^3$ si n es lo suficientemente grande.

7. Demuestre que $2^n > n^2$ si n es lo suficientemente grande.

8. Demuestre que $2^n \geq 1/8$ para $n \geq -3$.

9. Sumas de cuadrados Demuestre que la suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos es

$$\frac{n\left(n + \frac{1}{2}\right)(n + 1)}{3}.$$

10. Sumas de cubos Demuestre que la suma de los cubos de los primeros n enteros positivos es $(n(n+1)/2)^2$.

11. Reglas para sumas finitas Demuestre que las siguientes reglas para sumas finitas son válidas para todo entero positivo n. (Vea la sección 5.2).

a) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

b) $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

c) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$ (cualquier número c)

d) $\sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot c$ (si a_k tiene el valor constante c)

12. Demuestre que $|x^n| = |x|^n$ para todo número positivo n y todo número real x.

A.3 Rectas, circunferencias y parábolas

En esta sección se repasan los conceptos de coordenadas, rectas, distancia, circunferencias y parábolas en el plano. También se analiza la noción de incremento.

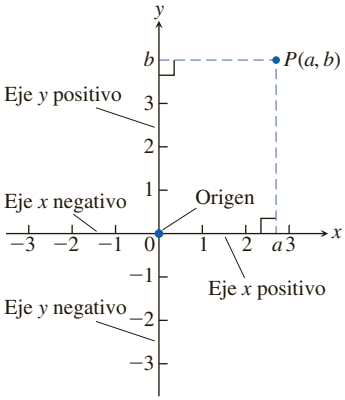


FIGURA A.4 Las coordenadas cartesianas en el plano se basan en dos ejes perpendiculares que se intersecan en el origen.

Coordenadas cartesianas en el plano

En el apéndice 1 identificamos los puntos de la recta con números reales, asignándoles coordenadas. Los puntos en el plano se pueden identificar con pares ordenados de números reales. Para empezar, dibujamos dos rectas coordenadas perpendiculares que se intersecan en el punto 0 de cada recta. Estas rectas se denominan **ejes de coordenadas** en el plano. En el eje horizontal, el eje x, los números se denotan como x y aumentan hacia la derecha. En el eje vertical, el eje y, los números se denotan como y y aumentan hacia arriba (figura A.4). Por lo tanto, "hacia arriba" y "a la derecha" son direcciones positivas, mientras que "hacia abajo" y "a la izquierda" son direcciones negativas. El **origen** O del sistema coordenado, también identificado como 0, es el punto del plano donde x y y son iguales a cero.

Si P es cualquier punto en el plano, se puede localizar con precisión con un solo par ordenado de números reales de la siguiente manera. Se dibujan rectas, que pasen por P, perpendiculares a los dos ejes de coordenadas. Estas rectas intersecan los ejes en los puntos con coordenadas a y b (figura A.4). El par ordenado (a, b) se asigna al punto P y se denomina su **par de coordenadas**. El primer número, a, es la **coordenada *x*** (o **abscisa**) de P; el segundo número, b, es la **coordenada *y*** (u **ordenada**) de P. La coordenada x de todos los puntos sobre el eje y es igual a 0. La coordenada y de todos los puntos sobre el eje x es igual a 0. El origen es el punto (0, 0).

Teniendo un par ordenado (a, b), se puede invertir el proceso y ubicar el correspondiente punto P en el plano. A menudo se identifica P con el par ordenado y se escribe $P(a, b)$. Algunas veces también nos referimos "al punto (a, b)", siempre y cuando quede claro a partir del contexto que (a, b) se refiere a un punto en el plano y no a un intervalo abierto en la recta de los números reales. En la figura A.5 se muestran varios puntos identificados con sus coordenadas.

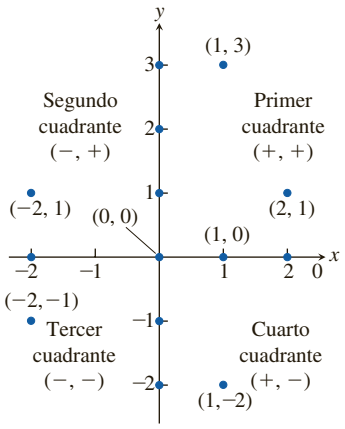


FIGURA A.5 Puntos identificados en el plano de coordenadas xy o cartesiano. Todos los puntos sobre los ejes de coordenadas tienen pares ordenados, pero normalmente se identifican con un solo número real [de modo que (1, 0) en el eje x se identifica como 1]. Observe los patrones de signos de las coordenadas en los diferentes cuadrantes.

Este sistema de coordenadas se denomina **sistema coordenado rectangular** o **sistema de coordenadas cartesianas** (en honor del matemático francés del siglo XVII, René Descartes). Los ejes de coordenadas de este plano de coordenadas o cartesiano dividen el plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**, numerados en sentido contrario al de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura A.5.

La **gráfica** de una ecuación o de una desigualdad en las variables x y y es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en el plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación o la desigualdad. Cuando representamos datos en el plano coordenado o graficamos fórmulas cuyas variables tienen diferentes unidades de medida, no necesitamos usar la misma escala en los dos ejes. Si dibujamos tiempo contra empuje del motor de un cohete, por ejemplo, no hay razón para colocar la marca correspondiente a 1 s en el eje del tiempo a la misma distancia del origen que se ubica la marca de 1 lb en el eje del empuje.

Por lo regular, cuando graficamos funciones cuyas variables no representan mediciones físicas y cuando dibujamos figuras en el plano coordenado para estudiar su geometría y trigonometría, tratamos de utilizar escalas idénticas en los ejes. Así, una unidad vertical de distancia se ve igual que una unidad horizontal. Como en el mapa de un topógrafo o una regla de dibujo, los segmentos de recta que se supone tienen la misma longitud se verán iguales, y los ángulos que se supone son congruentes se verán como tales.

En las pantallas de las computadoras y de las calculadoras, la situación es distinta. Las escalas horizontales y verticales en gráficas generadas por una máquina usualmente difieren, y existen distorsiones en distancias, pendientes y ángulos. Es probable que las circunferencias parezcan elipses, los rectángulos tengan aspecto de cuadrados, los ángulos rectos se vean como si fueran agudos u obtusos, etcétera. En la sección 1.4 analizamos con detalle estas pantallas y sus distorsiones.

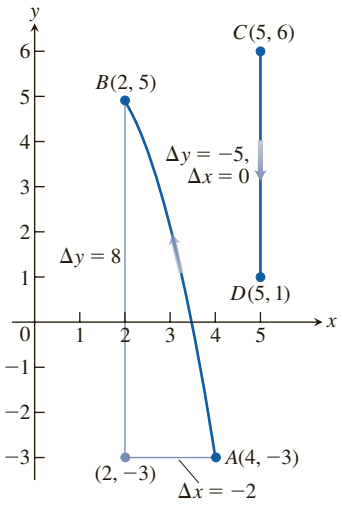


FIGURA A.6 Los incrementos de las coordenadas pueden ser positivos, negativos o cero (ejemplo 1).

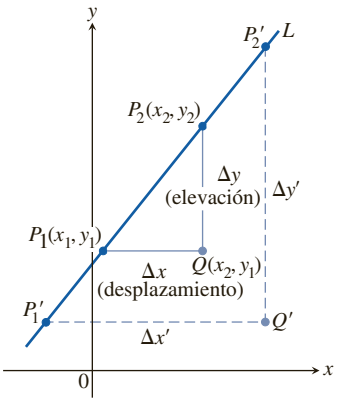


FIGURA A.7 Los triángulos P_1QP_2 y $P_1'Q'P_2'$ son semejantes, de modo que la razón de sus lados tiene el mismo valor para dos puntos cualesquiera de la recta. Este valor común es la pendiente de la recta.

Incrementos y líneas rectas

Cuando una partícula se mueve en el plano de un punto a otro, los cambios netos en sus coordenadas se denominan *incrementos*, y se calculan restando las coordenadas del punto inicial de las coordenadas del punto final. Si x cambia de x_1 a x_2, el **incremento** en x es

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

EJEMPLO 1 Al ir del punto $A(4, -3)$ al punto $B(2, 5)$, los incrementos en las coordenadas x y y son

$$\Delta x = 2 - 4 = -2, \qquad \Delta y = 5 - (-3) = 8.$$

De $C(5, 6)$ a $D(5, 1)$, los incrementos en las coordenadas son

$$\Delta x = 5 - 5 = 0, \qquad \Delta y = 1 - 6 = -5.$$

Observe la figura A.6. ■

Dados dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en el plano, llamamos a los incrementos $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$ el **desplazamiento** y la **elevación**, respectivamente, entre P_1 y P_2. Estos dos puntos siempre definen una línea recta única (por lo general, llamada simplemente recta) que pasa por ambos puntos. Y la recta se identifica como P_1P_2.

Cualquier recta que no es vertical en el plano tiene la propiedad de que la razón

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

tiene el mismo valor para cualquier elección de los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ de la recta (figura A.7). Esto se debe a que las razones de los lados correspondientes en triángulos semejantes son iguales.

DEFINICIÓN La razón constante

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

es la **pendiente** de la recta P_1P_2 que no es vertical.

La pendiente nos indica la dirección (hacia arriba o hacia abajo) y lo pronunciado de la inclinación de una recta. Una recta con pendiente positiva se eleva hacia la derecha; una con pendiente negativa desciende hacia la derecha (figura A.8). Cuanto mayor sea el valor absoluto de la pendiente, más rápido se eleva o desciende. La pendiente de una recta vertical *no está definida*. Como el desplazamiento Δx es cero en una recta vertical, no se puede formar la razón de inclinación m.

La dirección y el pronunciamiento de la inclinación de una recta también se pueden medir con un ángulo. El ángulo de inclinación de una recta que cruza el eje x es el ángulo más pequeño en sentido contrario al de las manecillas del reloj del eje x a la recta (figura A.9). La inclinación de una recta horizontal es de 0°. La inclinación de una recta vertical es de 90°. Si ϕ (la letra griega *fi*) representa la inclinación de una recta, entonces, $0 \le \phi < 180°$.

En la figura A.10 se muestra la relación entre la pendiente m de una recta que no es vertical y el ángulo de inclinación ϕ de la recta:

$$m = \tan \phi.$$

Las líneas rectas tienen ecuaciones relativamente sencillas. Todos los puntos de una *recta vertical* que pasa por el punto a en el eje x tienen una coordenada x igual a a. Por lo tanto, $x = a$ es la ecuación de una recta vertical. De manera análoga, $y = b$ es una ecuación de la *recta horizontal* que cruza el eje y en b. (Vea la figura A.11).

Se puede escribir una ecuación para la línea recta no vertical L si conocemos la pendiente m y las coordenadas de un punto $P_1(x_1, y_1)$ de ella. Si $P(x, y)$ es *cualquier* otro punto

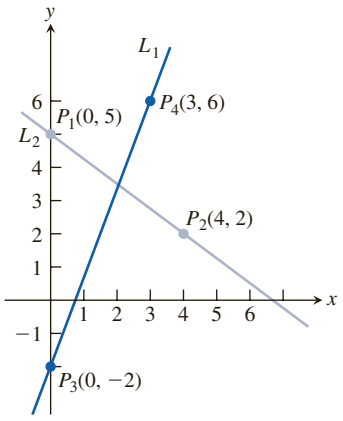


FIGURA A.8 La pendiente de L_1 es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - (-2)}{3 - 0} = \frac{8}{3}.$$

Es decir, y se incrementa 8 unidades cada vez que x se incrementa 3 unidades. La pendiente de L_2 es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 5}{4 - 0} = \frac{-3}{4}.$$

Es decir, y disminuye 3 unidades cada vez que x aumenta 4 unidades.

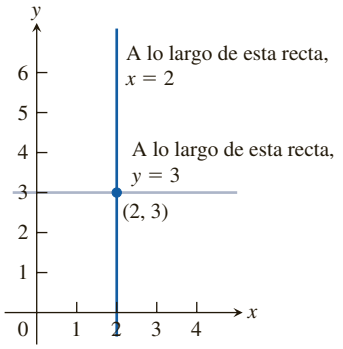


FIGURA A.11 La ecuación estándar de las rectas vertical y horizontal que pasan por (2, 3) son $x = 2$ y $y = 3$.

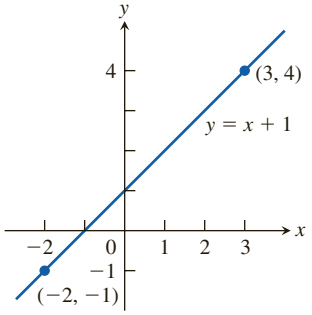


FIGURA A.12 Recta del ejemplo 3.

de L, entonces, se pueden usar los dos puntos P_1 y P para calcular la pendiente,

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

de manera que

$$y - y_1 = m(x - x_1), \qquad \text{o} \qquad y = y_1 + m(x - x_1).$$

La ecuación

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

es la **ecuación punto-pendiente** de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m.

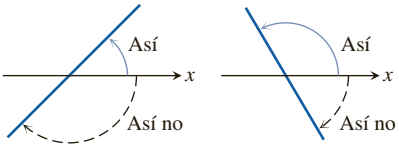


FIGURA A.9 Los ángulos de inclinación se miden en sentido contrario al de las manecillas del reloj, a partir del eje x.

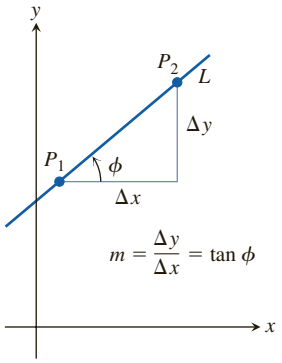


FIGURA A.10 La pendiente de una recta no vertical es la tangente de su ángulo de inclinación.

EJEMPLO 2 Escriba una ecuación para la recta que pasa por el punto (2, 3) y tiene pendiente de $-3/2$.

Solución Sustituimos $x_1 = 2$, $y_1 = 3$ y $m = -3/2$ en la ecuación punto-pendiente para obtener

$$y = 3 - \frac{3}{2}(x - 2), \qquad \text{o} \qquad y = -\frac{3}{2}x + 6.$$

Cuando $x = 0$, $y = 6$, así que la recta hace intersección con el eje y en $y = 6$. ■

EJEMPLO 3 Escriba una ecuación para la recta que pasa por los puntos $(-2, -1)$ y $(3, 4)$.

Solución La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-1 - 4}{-2 - 3} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Podemos usar esta pendiente con cualquiera de los dos puntos dados en la ecuación punto-pendiente:

Con $(x_1, y_1) = (-2, -1)$	**Con $(x_1, y_1) = (3, 4)$**
$y = -1 + 1 \cdot (x - (-2))$	$y = 4 + 1 \cdot (x - 3)$
$y = -1 + x + 2$	$y = 4 + x - 3$
$y = x + 1$	$y = x + 1$

El mismo resultado

De cualquier manera, $y = x + 1$ es una ecuación de la recta (figura A.12). ■

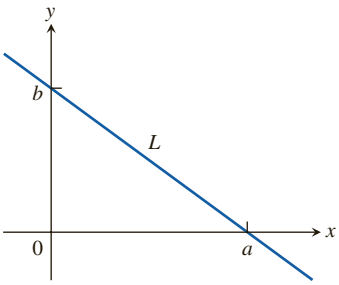


FIGURA A.13 La recta L tiene una intersección x en a y una intersección y en b.

La coordenada y del punto donde una recta no vertical interseca el eje y se denomina la **intersección y** de la recta. De manera similar, la **intersección x** de una recta no horizontal es la coordenada del punto donde cruza el eje x (figura A.13). Una recta con pendiente m e intersección y en b pasa por el punto $(0, b)$, así que tiene la ecuación

$$y = b + m(x - 0), \qquad \text{o simplemente,} \qquad y = mx + b.$$

La ecuación

$$y = mx + b$$

se denomina la **ecuación pendiente-intersección** de la recta con pendiente m e intersección y en b.

Las rectas con ecuaciones de la forma $y = mx$ tienen una intersección y igual a 0 y pasan por el origen. Las ecuaciones de las rectas se denominan ecuaciones **lineales**.

La ecuación

$$Ax + By = C \qquad (A \text{ y } B \text{ no son ambas iguales a } 0)$$

se denomina **ecuación lineal general** en x y y porque su gráfica siempre representa una recta, y todas las rectas tienen una ecuación de esta forma (incluyendo las rectas con pendiente indefinida).

Rectas paralelas y perpendiculares

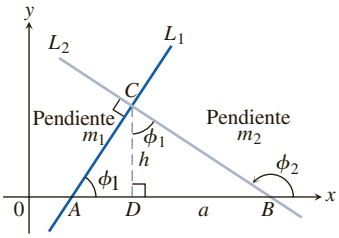


FIGURA A.14 El ΔADC es semejante al ΔCDB. Por lo tanto, ϕ_1 también es el ángulo superior en el ΔCDB. A partir de los lados del ΔCDB, obtenemos $\tan \phi_1 = a/h$.

Las rectas que son paralelas tienen ángulos de inclinación iguales, de modo que tienen la misma pendiente (si no son verticales). A la inversa, las rectas con pendientes iguales tienen ángulos de inclinación iguales y, por lo tanto, son paralelas.

Si dos rectas no verticales L_1 y L_2 son perpendiculares, sus pendientes m_1 y m_2 satisfacen el producto $m_1 m_2 = -1$, de modo que cada pendiente es el *recíproco negativo* de la otra:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \qquad m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

Para entender esto, examinemos los triángulos semejantes de la figura A.14; como se observa, $m_1 = a/h$, y $m_2 = -h/a$. Por lo tanto, $m_1 m_2 = (a/h)(-h/a) = -1$.

Distancia y circunferencia en el plano

La distancia entre puntos en el plano se calcula con una fórmula que proviene del teorema de Pitágoras (figura A.15).

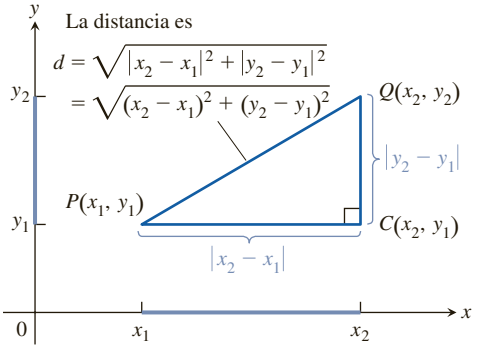


FIGURA A.15 Para calcular la distancia entre $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo PCQ.

Fórmula de la distancia entre dos puntos en el plano

La distancia entre $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

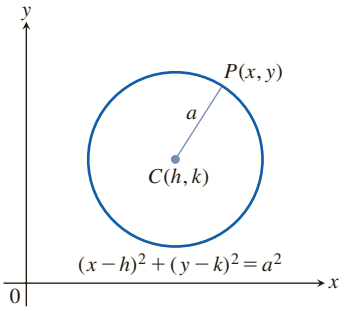


FIGURA A.16 Circunferencia de radio a en el plano xy, con centro en (h, k).

EJEMPLO 4

a) La distancia entre $P(-1, 2)$ y $Q(3, 4)$ es

$$\sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}.$$

b) La distancia del origen a $P(x, y)$ es

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$ ■

Por definición, una **circunferencia** de radio a es el conjunto de puntos $P(x, y)$ cuya distancia al centro $C(h, k)$ es igual a a (figura A.16). Según la fórmula de la distancia, P se encuentra sobre la circunferencia si y sólo si

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = a,$$

de manera que

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2. \tag{1}$$

La ecuación (1) es la **ecuación estándar** de una circunferencia con centro (h, k) y radio a. La circunferencia de radio $a = 1$ y centro en el origen es la **circunferencia unitaria** con ecuación

$$x^2 + y^2 = 1.$$

EJEMPLO 5

a) La ecuación estándar de la circunferencia de radio 2 con centro en (3, 4) es

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2 = 4.$$

b) La circunferencia

$$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 3$$

tiene $h = 1$, $k = -5$ y $a = \sqrt{3}$. El centro es el punto $(h, k) = (1, -5)$ y el radio es $a = \sqrt{3}$. ■

Si la ecuación de una circunferencia no está en forma estándar, se puede obtener el centro y el radio de la circunferencia convirtiendo primero la ecuación a su forma estándar. La técnica algebraica que se emplea para lograrlo es *completando el cuadrado*.

EJEMPLO 6

Obtenga el centro y el radio de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0.$$

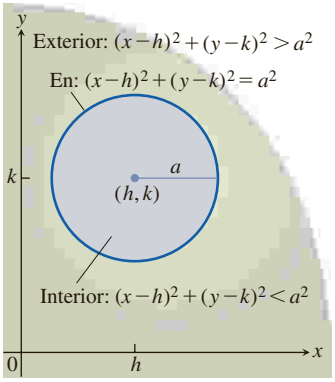


FIGURA A.17 Interior y exterior de la circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$.

Solución Convertimos la ecuación a la forma estándar completando los cuadrados en x y y.

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

Se inicia con la ecuación dada. Se agrupan los términos y se pasa la constante al lado derecho.

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) = 3$$

$$\left(x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 - 6y + \left(\frac{-6}{2}\right)^2\right) = 3 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{2}\right)^2$$

Se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x en cada lado de la ecuación. Se hace lo mismo para y. Las expresiones entre paréntesis del lado izquierdo son ahora cuadrados perfectos.

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 3 + 4 + 9$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

Se escribe cada expresión cuadrática como una expresión lineal al cuadrado.

El centro es $(-2, 3)$ y el radio es $a = 4$. ■

Los puntos (x, y) que satisfacen la desigualdad

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 < a^2$$

generan la región **interior** de la circunferencia con centro (h, k) y radio a (figura A.17). El **exterior** de la circunferencia consiste en los puntos (x, y) que satisfacen

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 > a^2.$$

Parábolas

La definición geométrica y las propiedades de las parábolas generales se repasan en el capítulo 11 (volumen 2). Aquí consideraremos a las parábolas como las gráficas de ecuaciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

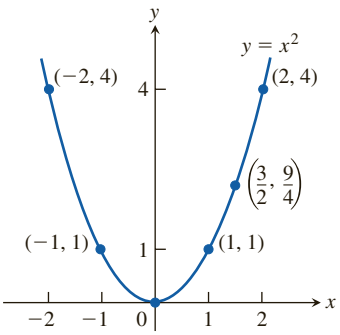


FIGURA A.18 La parábola $y = x^2$ (ejemplo 7).

EJEMPLO 7 Considere la ecuación $y = x^2$. Algunos puntos cuyas coordenadas satisfacen esta ecuación son $(0, 0)$, $(1, 1)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, $(-1, 1)$, $(2, 4)$ y $(-2, 4)$. Estos puntos (y todos los demás que satisfacen la ecuación) forman una curva suave denominada parábola (figura A.18). ■

La gráfica de una ecuación de la forma

$$y = ax^2$$

es una **parábola** cuyo **eje** (eje de simetría) es el eje y. El **vértice** de la parábola (el punto donde la parábola y el eje se cruzan) se encuentra en el origen. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$, y hacia abajo si $a < 0$. Cuanto más grande sea el valor de $|a|$, más angosta será la parábola (figura A.19).

Por lo general, la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una versión desplazada y a escala de la parábola $y = x^2$. En la sección 1.2 analizamos con más detalle el desplazamiento y los cambios de escala de gráficas.

La gráfica de $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

La gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, es una parábola. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$, y hacia abajo si $a < 0$. Su **eje** es la recta

$$x = -\frac{b}{2a}. \tag{2}$$

El **vértice** de la parábola es el punto donde el eje y la parábola se intersecan. Su coordenada x es $x = -b/2a$; su coordenada y se obtiene sustituyendo $x = -b/2a$ en la ecuación de la parábola.

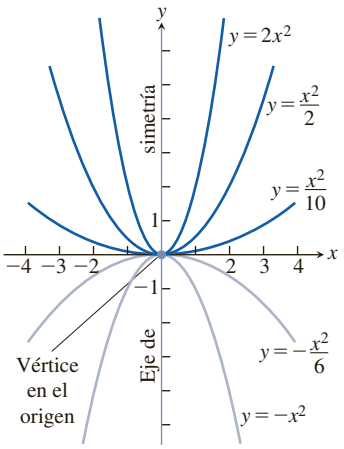


FIGURA A.19 Además de determinar en qué dirección se abre la parábola $y = ax^2$, el número a es un factor de escala. La parábola se ensancha cuando a se aproxima a cero y se hace más angosta cuando $|a|$ se vuelve más grande.

Observe que si $a = 0$, entonces, tenemos $y = bx + c$, que es la ecuación de una recta. El eje, dado por la ecuación (2), se obtiene completando el cuadrado.

EJEMPLO 8 Grafique la ecuación $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$.

Solución Al comparar la ecuación con $y = ax^2 + bx + c$, vemos que

$$a = -\frac{1}{2}, \qquad b = -1, \qquad c = 4.$$

Como $a < 0$, la parábola abre hacia abajo. Según la ecuación (2), el eje es la recta vertical

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2(-1/2)} = -1.$$

Cuando $x = -1$, tenemos

$$y = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) + 4 = \frac{9}{2}.$$

El vértice es $(-1, 9/2)$.

Las intersecciones con x están donde $y = 0$:

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0$$
$$x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$(x - 2)(x + 4) = 0$$
$$x = 2, \qquad x = -4$$

Graficamos algunos puntos, trazamos el eje y usamos la dirección de apertura para completar la gráfica de la figura A.20. ■

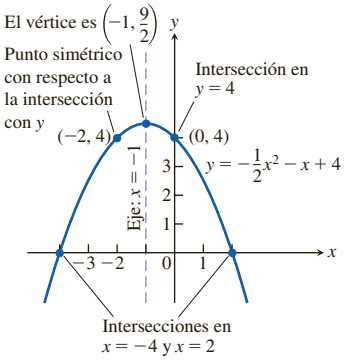
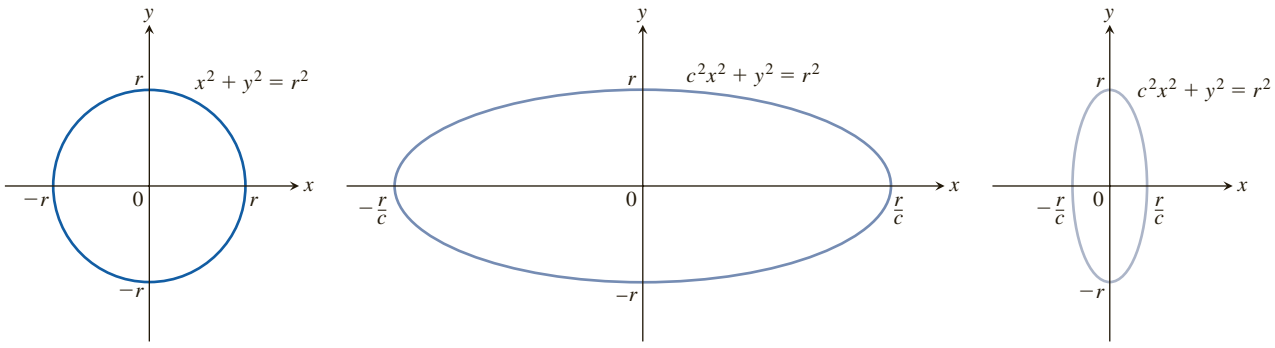


FIGURA A.20 La parábola del ejemplo 8.

Elipses

La definición geométrica y las propiedades de las elipses en general se revisan en el capítulo 11 (volumen 2). Aquí las relacionamos con las circunferencias. Aunque no son gráficas de funciones, las circunferencias se pueden alargar horizontal o verticalmente del mismo modo que las gráficas de funciones. La ecuación estándar de una circunferencia de radio r con centro en el origen es

$$x^2 + y^2 = r^2.$$



a) circunferencia *b*) elipse, $0 < c < 1$ *c*) elipse, $c > 1$

FIGURA A.21 El alargamiento y la compresión horizontales de una circunferencia generan gráficas de elipses.

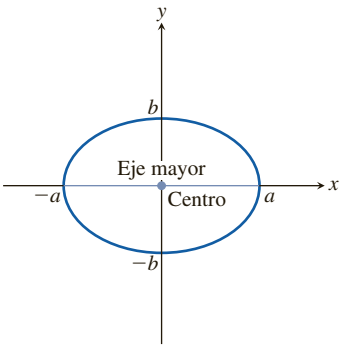


FIGURA A.22 Gráfica de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, donde el eje mayor es horizontal.

Al sustituir x por cx en la ecuación de una circunferencia (figura A.21), obtenemos

$$c^2x^2 + y^2 = r^2. \tag{3}$$

Si $0 < c < 1$, la gráfica de la ecuación (3) alarga horizontalmente la circunferencia; si $c > 1$, la circunferencia se comprime horizontalmente. En cualquier caso, la gráfica de la ecuación (3) es una elipse (figura A.21). Observe en la figura A.21 que las intersecciones y de las tres gráficas siempre se dan en $-r$ y r. En la figura A.21*b*), el segmento de recta que une los puntos $(\pm r/c, 0)$ se denomina **eje mayor** de la elipse; el **eje menor** es el segmento de recta que une $(0, \pm r)$. Los ejes de la elipse están invertidos en la figura A.21*c*): el eje mayor es el segmento de recta que une los puntos $(0, \pm r)$, y el eje menor es el segmento de recta que une los puntos $(\pm r/c, 0)$. En ambos casos, el segmento de recta más largo es el eje mayor.

Si se dividen ambos lados de la ecuación (3) entre r^2, se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

donde $a = r/c$ y $b = r$. Si $a > b$, el eje mayor es horizontal; si $a < b$, el eje mayor es vertical. El **centro** de la elipse dado por la ecuación (4) es el origen (figura A.22).

Sustituyendo x por $x - h$, y y por $y - k$ en la ecuación (4), tenemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

La ecuación (5) es la **ecuación estándar de una elipse** con centro en (h, k).

Ejercicios A.3

Distancias, pendientes y rectas

En los ejercicios 1 y 2, una partícula se mueve de A a B en el plano coordenado. Obtenga los incrementos Δx y Δy en las coordenadas de la partícula. Además, obtenga la distancia de A a B.

1. $A(-3, 2)$, $B(-1, -2)$ **2.** $A(-3.2, -2)$, $B(-8.1, -2)$

En los ejercicios 3 y 4, describa las gráficas de las ecuaciones.

3. $x^2 + y^2 = 1$ **4.** $x^2 + y^2 \le 3$

En los ejercicios 5 y 6, grafique los puntos y calcule la pendiente (si existe) de la recta que determinan. Además, obtenga la pendiente común (si existe) de las rectas perpendiculares a la recta AB.

5. $A(-1, 2)$, $B(-2, -1)$ **6.** $A(2, 3)$, $B(-1, 3)$

En los ejercicios 7 y 8, obtenga una ecuación para ***a)*** la recta vertical y ***b)*** la recta horizontal que pasan por el punto dado.

7. $(-1, 4/3)$ **8.** $\left(0, -\sqrt{2}\right)$

En los ejercicios 9 a 15, escriba una ecuación para cada recta que se describe.

9. Pasa por el punto $(-1, 1)$ y tiene pendiente igual a -1

10. Pasa por los puntos $(3, 4)$ y $(-2, 5)$

11. Tiene pendiente igual a $-5/4$ e intersección con y igual a 6

12. Pasa por el punto $(-12, -9)$ y tiene pendiente igual a 0

13. Tiene intersección $y = 4$ e intersección $x = -1$

14. Pasa por el punto $(5, -1)$ y es paralela a la recta $2x + 5y = 15$

15. Pasa por el punto $(4, 10)$ y es perpendicular a la recta $6x - 3y = 5$

En los ejercicios 16 y 17, obtenga las intersecciones x y y y use esta información para graficar la recta.

16. $3x + 4y = 12$ **17.** $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{6}$

18. ¿Hay una relación especial entre las rectas $Ax + By = C_1$ y $Bx - Ay = C_2$, considerando que $A \neq 0$, $B \neq 0$? Justifique su respuesta.

19. Una partícula inicia un movimiento en $A(-2, 3)$ y sus coordenadas cambian en incrementos $\Delta x = 5$ y $\Delta y = -6$. Obtenga su nueva posición.

20. Las coordenadas de una partícula cambian por $\Delta x = 5$ y $\Delta y = 6$ cuando se desplaza de $A(x, y)$ a $B(3, -3)$. Obtenga x y y.

Circunferencias

En los ejercicios 21 a 23, obtenga una ecuación de la circunferencia con el centro $C(h, k)$ dado y radio a. Después, dibuje la circunferencia en el plano xy. Incluya el centro de la circunferencia en su dibujo. Además, identifique las intersecciones x y y, si acaso existen, con sus pares de coordenadas.

21. $C(0, 2)$, $a = 2$ **22.** $C(-1, 5)$, $a = \sqrt{10}$

23. $C\left(-\sqrt{3}, -2\right)$, $a = 2$

Grafique las circunferencias cuyas ecuaciones se dan en los ejercicios 24 a 26. Identifique cada centro y las intersecciones (si existen) con sus pares de coordenadas.

24. $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$

25. $x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0$ **26.** $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$

Parábolas

En los ejercicios 27 a 30, grafique las parábolas. Identifique el vértice, el eje y las intersecciones en todos los casos.

27. $y = x^2 - 2x - 3$ **28.** $y = -x^2 + 4x$

29. $y = -x^2 - 6x - 5$ **30.** $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 4$

Desigualdades

En los ejercicios 31 a 34, describa las regiones definidas por las desigualdades y los pares de desigualdades.

31. $x^2 + y^2 > 7$ **32.** $(x - 1)^2 + y^2 \le 4$

33. $x^2 + y^2 > 1, \quad x^2 + y^2 < 4$

34. $x^2 + y^2 + 6y < 0, \quad y > -3$

35. Escriba una desigualdad que describa los puntos que se encuentran dentro de la circunferencia con centro en $(-2, 1)$ y radio $\sqrt{6}$.

36. Escriba un par de desigualdades que describan los puntos que se encuentran dentro de la circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio $\sqrt{2}$, y sobre o a la derecha de la recta vertical que pasa por $(1, 0)$.

Teoría y ejemplos

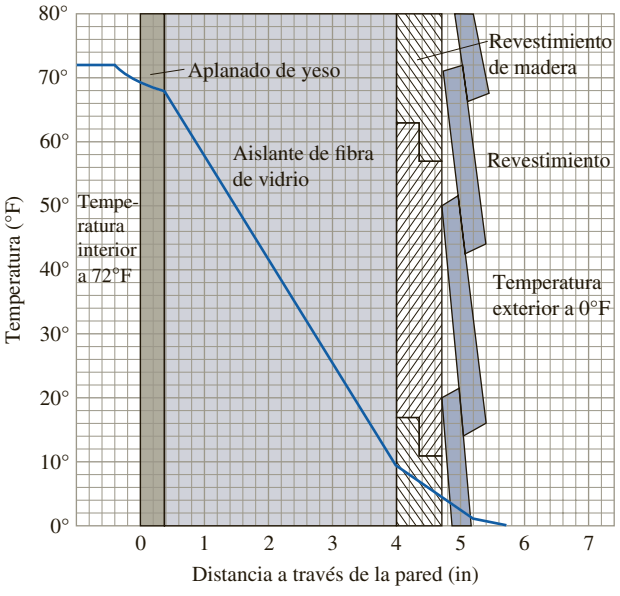
En los ejercicios 37 a 40, grafique las dos ecuaciones y obtenga los puntos en los cuales las gráficas se intersecan.

37. $y = 2x, \quad x^2 + y^2 = 1$ **38.** $y - x = 1, \quad y = x^2$

39. $y = -x^2, \quad y = 2x^2 - 1$

40. $x^2 + y^2 = 1, \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1$

41. Aislante Midiendo las pendientes en la figura, estime (en grados por pulgada) el cambio de temperatura en ***a)*** el aplanado de yeso; ***b)*** el aislante de fibra de vidrio; ***c)*** el revestimiento de madera.

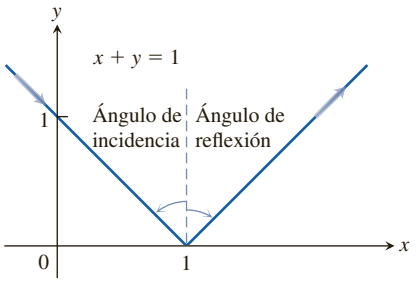


La temperatura cambia en la pared de los ejercicios 41 y 42.

42. Aislante De acuerdo con la figura del ejercicio 41, ¿cuál de los materiales es el mejor aislante? ¿Y el peor? Explique.

43. Presión bajo el agua La presión p que experimenta un buzo bajo el agua está relacionada con la profundidad d del buzo mediante una ecuación de la forma $p = kd + 1$ (k es una constante). En la superficie, la presión es de 1 atmósfera. La presión a 100 metros es de 10.94 atmósferas aproximadamente. Calcule la presión a 50 metros.

44. Luz reflejada Un rayo de luz viaja a lo largo de la recta $x + y = 1$ del segundo cuadrante y se refleja en el eje x (vea la figura). El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Escriba una ecuación de la recta a lo largo de la cual se aleja la luz.



La trayectoria del rayo de luz del ejercicio 44. Los ángulos de incidencia y de reflexión se miden a partir de la perpendicular.

45. Escala Fahrenheit contra escala Celsius En el plano FC, dibuje la gráfica de la ecuación

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

que vincula las temperaturas Fahrenheit y Celsius. En la misma gráfica, dibuje la recta $C = F$. ¿Hay una temperatura en la que un termómetro Celsius nos dé la misma lectura numérica de un termómetro Fahrenheit? Si es así, obténgala.

46. El tren al Monte Washington Los ingenieros civiles calcularon la pendiente del camino como la razón de la distancia que éste se eleva o desciende con respecto a la distancia recorrida horizontalmente. Llaman a esta razón el **grado** del camino, y usualmente se escribe como un porcentaje. A lo largo de la costa, los grados del camino del ferrocarril comercial normalmente son menores de 2%. En las montañas, pueden alcanzar el 4%. Los grados de una carretera usualmente son menores de 5 por ciento.

La parte más inclinada de la vía férrea que opera en el Monte Washington en New Hampshire tiene un grado excepcional del 37.1%. En esta parte del camino, los asientos del frente del vagón están a 14 ft por encima de los de atrás. ¿Aproximadamente a qué distancia están las filas de los asientos del frente con respecto a las de atrás?

47. Calculando las longitudes de sus lados, demuestre que el triángulo con vértices en los puntos $A(1, 2)$, $B(5, 5)$ y $C(4, -2)$ es isósceles y no equilátero.

48. Demuestre que el triángulo con vértices en los puntos $A(0, 0)$, $B(1, \sqrt{3})$ y $C(2, 0)$ es equilátero.

49. Demuestre que los puntos $A(2, -1)$, $B(1, 3)$ y $C(-3, 2)$ son los vértices de un cuadrado y obtenga el cuarto vértice.

50. Tres paralelogramos diferentes tienen vértices en $(-1, 1)$, $(2, 0)$ y $(2, 3)$. Dibújelos y obtenga las coordenadas del cuarto vértice de cada uno.

51. ¿Para qué valor de k la recta $2x + ky = 3$ es perpendicular a la recta $4x + y = 1$? ¿Para qué valor de k las rectas son paralelas?

52. Punto medio de un segmento Demuestre que el punto con coordenadas

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

es el punto medio del segmento de recta que une $P(x_1, y_1)$ con $Q(x_2, y_2)$.

A.4 Demostración de los teoremas de límites

En este apéndice se demuestran el teorema 1, partes 2 a 5, y el teorema 4 de la sección 2.2.

TEOREMA 1: Leyes de los límites Si L, M, c y k son números reales y

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} g(x) = M, \quad \text{entonces}$$

1. *Regla de la suma:* $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L + M$

2. *Regla de la diferencia:* $\lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = L - M$

3. *Regla del múltiplo constante:* $\lim_{x\to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot L$

4. *Regla del producto:* $\lim_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

5. *Regla del cociente:* $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$

6. *Regla de la potencia:* $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = L^n$, n es un entero positivo

7. *Regla de la raíz:* $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, n es un entero positivo

(Si n es par, se supone que $\lim_{x\to c} f(x) = L > 0$).

En la sección 2.3 demostramos la regla de la suma; en cuanto a las reglas de la potencia y de la raíz, su demostración se incluye en textos más avanzados. La regla de la diferencia se obtiene reemplazando $g(x)$ por $-g(x)$ y M por $-M$ en la regla de la suma. La regla del múltiplo constante, $g(x) = k$, es un caso especial de la regla del producto. Esto sólo nos deja pendientes las reglas del producto y del cociente.

Demostración de la regla del producto de límites Demostraremos que para cualquier $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que para toda x en la intersección D de los dominios de f y g,

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)g(x) - LM| < \epsilon\,.$$

Supongamos entonces que ϵ es un número positivo, y escribimos $f(x)$ y $g(x)$ como

$$f(x) = L + (f(x) - L), \qquad g(x) = M + (g(x) - M).$$

Multiplicamos estas expresiones y restamos LM:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) - LM &= (L + (f(x) - L))(M + (g(x) - M)) - LM \\ &= LM + L(g(x) - M) + M(f(x) - L) \\ &\quad + (f(x) - L)(g(x) - M) - LM \\ &= L(g(x) - M) + M(f(x) - L) + (f(x) - L)(g(x) - M). \end{aligned} \tag{1}$$

Como f y g tienen los límites L y M cuando $x \to c$, existen números positivos δ_1, δ_2, δ_3 y δ_4 tales que para toda x en D

$$\begin{aligned} 0 < |x - c| < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - L| < \sqrt{\epsilon/3} \\ 0 < |x - c| < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad |g(x) - M| < \sqrt{\epsilon/3} \\ 0 < |x - c| < \delta_3 \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon/(3(1 + |M|)) \\ 0 < |x - c| < \delta_4 \quad &\Rightarrow \quad |g(x) - M| < \epsilon/(3(1 + |L|)). \end{aligned} \tag{2}$$

Si tomamos a δ como el menor de los números δ_1 a δ_4, las desigualdades del lado derecho de las implicaciones (2) serán válidas simultáneamente para $0 < |x - c| < \delta$. Por lo tanto, para toda x en D, $0 < |x - c| < \delta$ implica

$$\begin{aligned}
&|f(x) \cdot g(x) - LM| && \text{Desigualdad del triángulo aplicada a la ecuación (1)}\\
&\le |L||g(x) - M| + |M||f(x) - L| + |f(x) - L||g(x) - M| \\
&\le (1 + |L|)|g(x) - M| + (1 + |M|)|f(x) - L| + |f(x) - L||g(x) - M| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}\sqrt{\frac{\epsilon}{3}} = \epsilon. && \text{Valores de (2).}
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de la regla del producto de límites. ■

Demostración de la regla del cociente de límites Demostraremos que $\lim_{x\to c} (1/g(x)) = 1/M$. Podemos decir que

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

según la regla del producto de límites.

Sea $\epsilon > 0$. Para demostrar que $\lim_{x\to c} (1/g(x)) = 1/M$, debemos comprobar que existe una $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \epsilon\,.$$

Como $|M| > 0$, existe un número positivo δ_1 tal que para toda x

$$0 < |x - c| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - M| < \frac{M}{2}. \tag{3}$$

Es posible demostrar que para números A y B cualesquiera, $|A| - |B| \le |A - B|$ y $|B| - |A| \le |A - B|$, a partir de lo cual se deduce que $||A| - |B|| \le |A - B|$. Con $A = g(x)$ y $B = M$, esto se convierte en

$$||g(x)| - |M|| \le |g(x) - M|,$$

lo cual, a la vez, se puede combinar con la desigualdad de la derecha en la implicación (3) para obtener

$$\begin{aligned}
|| g(x) | - | M || &< \frac{|M|}{2} \\
-\frac{|M|}{2} < |g(x)| - |M| &< \frac{|M|}{2} \\
\frac{|M|}{2} < |g(x)| &< \frac{3|M|}{2} \\
|M| < 2|g(x)| &< 3|M| \\
\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|} &< \frac{3}{|g(x)|}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Por lo tanto, $0 < |x - c| < \delta_1$ implica que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| &= \left|\frac{M - g(x)}{Mg(x)}\right| \le \frac{1}{|M|} \cdot \frac{1}{|g(x)|} \cdot |M - g(x)| \\
&< \frac{1}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} \cdot |M - g(x)|. && \text{Desigualdad (4)}
\end{aligned} \tag{5}$$

Como $(1/2)|M|^2\epsilon > 0$, existe un número $\delta_2 > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - c| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |M - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}|M|^2. \tag{6}$$

Si consideramos δ como el menor de los números δ_1 y δ_2, las conclusiones en (5) y (6) son válidas para toda x tal que $0 < |x - c| < \delta$. Al combinar estas conclusiones, se obtiene

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \epsilon.$$

Con esto concluye la demostración de la regla del cociente de límites. ■

TEOREMA 4: Teorema del sándwich Suponga que $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para toda x en algún intervalo abierto I que contiene a c, excepto posiblemente en la propia $x = c$. Suponga además que $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$. Entonces, $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

Demostración de límites por la derecha Supongamos que $\lim_{x\to c^+} g(x) = \lim_{x\to c^+} h(x) = L$. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que para toda x el intervalo $c < x < c + \delta$ está contenido en I, y la desigualdad implica

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \qquad \text{y} \qquad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.$$

Estas desigualdades se combinan con la desigualdad $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para obtener

$$\begin{aligned} L - \epsilon < g(x) \le f(x) \le h(x) < L + \epsilon, \\ L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon, \\ -\epsilon < f(x) - L < \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda x, la desigualdad $c < x < c + \delta$ implica que $|f(x) - L| < \epsilon$.

Demostración de límites por la izquierda Supongamos que $\lim_{x\to c^-} g(x) = \lim_{x\to c^-} h(x) = L$. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que para toda x el intervalo $c - \delta < x < c$ está contenido en I, y la desigualdad implica

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \qquad \text{y} \qquad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.$$

Concluimos como antes, que para toda x, $c - \delta < x < c$ implica que $|f(x) - L| < \epsilon$.

Demostración de límites bilaterales Si $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$, entonces, $g(x)$ y $h(x)$ se aproximan a L cuando $x \to c^+$ y cuando $x \to c^-$; así, $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$. Por lo tanto, $\lim_{x\to c} f(x)$ existe y es igual a L. ■

Ejercicios A.4

1. Suponga que las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$ tienen los límites L_1, L_2 y L_3, respectivamente, cuando $x \to c$. Demuestre que su suma tiene el límite $L_1 + L_2 + L_3$. Utilice la inducción matemática (apéndice 2) para generalizar este resultado como la suma de cualquier número finito de funciones.

2. Utilice inducción matemática y la regla del producto de límites que se analizó en el teorema 1 para demostrar que si las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ tienen los límites $L_1, L_2, \ldots, L_n$, cuando $x \to c$, entonces,

$$\lim_{x\to c} f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \cdots \cdot f_n(x) = L_1 \cdot L_2 \cdot \cdots \cdot L_n.$$

3. Considere el hecho de que $\lim_{x\to c} x = c$ y el resultado del ejercicio 2 para demostrar que $\lim_{x\to c} x^n = c^n$ para cualquier entero $n > 1$.

4. **Límites de polinomios** Considere los resultados de los ejercicios 1 y 3 junto con el hecho de que $\lim_{x\to c}(k) = k$ para cualquier número k, con la finalidad de demostrar que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ para cualquier función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

5. Límites de funciones racionales Utilice el teorema 1 y el resultado del ejercicio 4 para demostrar que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinomiales y $g(c) \neq 0$, entonces,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}.$$

6. Composición de funciones continuas La figura A.23 muestra un diagrama de una demostración de que la composición de dos funciones continuas también es continua. Reconstruya la demostración a partir del diagrama. El enunciado a demostrar es el siguiente: Si f es continua en $x = c$ y g es continua en $f(c)$, entonces, $g \circ f$ es continua en c.

Suponga que c es un punto interior del dominio de f, y que $f(c)$ es un punto interior del dominio de g. Esto hace que los límites implicados sean límites bilaterales. (Los argumentos para los casos de límites unilaterales son similares).

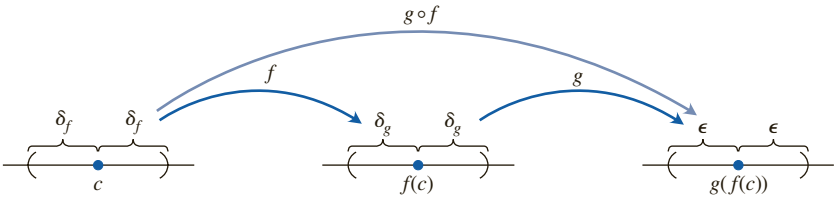


FIGURA A.23 Diagrama de la demostración de que la composición de dos funciones continuas es continua.

A.5 Límites que se presentan comúnmente

En este apéndice se comprueban los límites (4) a (6) del teorema 5 de la sección 10.1.

Límite 4: Si $|x| < 1$, $\lim_{n \to \infty} x^n = 0$ Necesitamos demostrar que para cada $\epsilon > 0$ existe un entero correspondiente N tan grande que $|x^n| < \epsilon$ para toda n mayor que N. Como $\epsilon^{1/n} \to 1$, cuando $|x| < 1$, existe un entero N para el que $\epsilon^{1/N} > |x|$. En otras palabras,

$$|x^N| = |x|^N < \epsilon. \tag{1}$$

Éste es el entero que buscamos, ya que si $|x| < 1$, entonces,

$$|x^n| < |x^N| \quad \text{para toda } n > N. \tag{2}$$

Al combinar (1) y (2), se obtiene $|x^n| < \epsilon$ para toda $n > N$, con lo que concluye la demostración. ■

Límite 5: Para cualquier número x, $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ Sea

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Entonces,

$$\ln a_n = \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \to x,$$

como podemos ver mediante la siguiente aplicación de la regla de L'Hôpital, en la cual derivamos con respecto a n:

$$\lim_{n \to \infty} n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(1 + x/n)}{1/n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{1}{1 + x/n}\right) \cdot \left(-\frac{x}{n^2}\right)}{-1/n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{x}{1 + x/n} = x.$$

Se aplica el teorema 3, de la sección 10.1, con $f(x) = e^x$ para concluir que

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = a_n = e^{\ln a_n} \to e^x.$$

■

Límite 6: Para cualquier número x, $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ Como

$$-\frac{|x|^n}{n!} \le \frac{x^n}{n!} \le \frac{|x|^n}{n!},$$

basta demostrar que $|x|^n/n! \to 0$. Luego, podemos aplicar el teorema del sándwich para sucesiones (teorema 2 de la sección 10.1) para concluir que $x^n/n! \to 0$.

El primer paso para demostrar que $|x|^n/n! \to 0$ es elegir un entero $M > |x|$, de manera que $(|x|/M) < 1$. Usando el límite 4 recién demostrado, tenemos que $(|x|/M)^n \to 0$. Luego, restringimos nuestra atención a los valores de $n > M$. Para estos valores de n, podemos escribir

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^n}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot \underbrace{M \cdot (M+1) \cdot (M+2) \cdot \cdots \cdot n}_{(n-M)\text{ factores}}}$$

$$\le \frac{|x|^n}{M!M^{n-M}} = \frac{|x|^n M^M}{M!M^n} = \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n.$$

Por lo tanto,

$$0 \le \frac{|x|^n}{n!} \le \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n.$$

Ahora bien, la constante $M^M/M!$ no cambia al aumentar n. Así, el teorema del sándwich nos dice que $|x|^n/n! \to 0$, pues $(|x|/M)^n \to 0$. ■

A.6 Teoría de los números reales

Un desarrollo riguroso del cálculo se basa en las propiedades de los números reales. Muchos resultados de funciones, derivadas e integrales serían falsos si se les enunciara para funciones definidas sólo por los números racionales. En este apéndice examinamos brevemente algunos conceptos básicos de la teoría de los números reales que indican lo que debería aprenderse en un estudio teórico más profundo del cálculo.

Tres tipos de propiedades hacen de los números reales lo que son. Se trata de las propiedades **algebraicas**, de **orden** y de **completitud**. Las propiedades algebraicas implican la suma y el producto, la resta y la división, y se aplican a números racionales, complejos y reales.

La estructura de los números se construye alrededor de un conjunto con operaciones de suma y multiplicación. Las operaciones de suma y multiplicación deben cumplir con las siguientes propiedades.

S1 $a + (b + c) = (a + b) + c$ para toda a, b, c.
S2 $a + b = b + a$ para toda a, b.
S3 Existe un número llamado "0" tal que $a + 0 = a$ para toda a.
S4 Para cada número a, existe un número b tal que $a + b = 0$.
M1 $a(bc) = (ab)c$ para toda a, b, c.
M2 $ab = ba$ para toda a, b.
M3 Existe un número llamado "1", tal que $a \cdot 1 = a$ para toda a.
M4 Para cada a diferente de cero, existe una b tal que $ab = 1$.
D $a(b + c) = ab + ac$ para toda a, b, c.

S1 y M1 son *leyes asociativas*; S2 y M2 son *leyes conmutativas*; S3 y M3 son *leyes de identidad*, y D es la *ley distributiva*. Los conjuntos que tienen estas propiedades algebraicas

son ejemplos de **campos** y se estudian con profundidad en el área de la matemática teórica llamada álgebra abstracta.

Las propiedades de **orden** nos permiten comparar el tamaño de dos números cualesquiera. Las propiedades de orden son

O1 Para cualquier a y b, $a \le b$ o $b \le a$ o ambos.

O2 Si $a \le b$ y $b \le a$, entonces, $a = b$.

O3 Si $a \le b$ y $b \le c$, entonces, $a \le c$.

O4 Si $a \le b$, entonces, $a + c \le b + c$.

O5 Si $a \le b$ y $0 \le c$, entonces, $ac \le bc$.

O3 es la *ley de transitividad*, mientras que O4 y O5 se relacionan con la suma y la multiplicación.

Podemos ordenar los números reales, los enteros y los racionales, pero no los números complejos. No hay una manera razonable de saber si un número como $i = \sqrt{-1}$ es mayor o menor que cero. Un campo donde se puede comparar el tamaño de dos elementos cualesquiera, como se acaba de mencionar, se denomina **campo ordenado**. Tanto los números racionales como los números reales son campos ordenados, y hay muchos otros.

Geométricamente, podemos visualizar los números reales alineados como puntos sobre una recta. La propiedad de **completitud** dice que los números reales corresponden a todos los puntos en la recta, sin "huecos" ni "espacios" entre ellos. En contraste, los racionales omiten puntos como $\sqrt{2}$ y π, y los enteros dejan fuera fracciones como $1/2$. Los reales, al tener la propiedad de completitud, no omiten puntos.

¿Qué queremos decir exactamente con esta idea de los "huecos"? Para responder esto, debemos dar una definición más precisa de completitud. Un número M es una **cota superior** de un conjunto de números si todos los números en el conjunto son menores o iguales que M. M es una **mínima cota superior** si es la cota superior más pequeña. Por ejemplo, $M = 2$ es una cota superior para los números negativos. También lo es $M = 1$, lo que demuestra que $M = 2$ no es una mínima cota superior. La mínima cota superior para el conjunto de números negativos es $M = 0$. Definimos un campo ordenado **completo** como aquel donde todo conjunto no vacío, acotado por arriba, tiene una mínima cota superior.

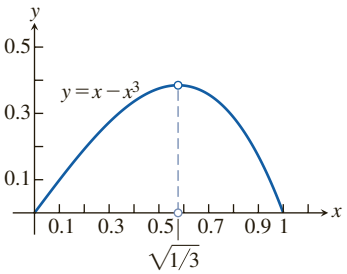


FIGURA A.24 El valor máximo de $y = x - x^3$ en $[0, 1]$ se presenta en el número irracional $x = \sqrt{1/3}$.

Si trabajamos sólo con los números racionales, el conjunto de números menores que $\sqrt{2}$ está acotado, pero no tiene una mínima cota superior racional, ya que cualquier cota superior racional M puede reemplazarse con un número racional ligeramente menor, que siga siendo mayor que $\sqrt{2}$. Así, los racionales no son completos. En los números reales, un conjunto que está acotado por arriba siempre tiene una mínima cota superior. Los reales son un campo ordenado completo.

La propiedad de completitud es la base de muchos resultados que se obtienen en cálculo. Un ejemplo se da al buscar el valor máximo de una función en un intervalo cerrado $[a, b]$, como se hizo en la sección 4.1. La función $x - x^3$ tiene un valor máximo en $[0, 1]$ en el punto x que satisface $1 - 3x^2 = 0$, o $x = \sqrt{1/3}$. Si limitáramos nuestra atención a las funciones definidas sólo con números racionales, tendríamos que concluir que la función no tiene máximo, pues $\sqrt{1/3}$ es irracional (figura A.24). El teorema del valor extremo (sección 4.1), el cual implica que las funciones continuas en intervalos cerrados $[a, b]$ tienen un valor máximo, no es válido para funciones definidas sólo con los racionales.

El teorema del valor intermedio implica que una función continua f en un intervalo $[a, b]$ con $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ debe ser cero en algún punto de $[a, b]$. Los valores de la función no pueden pasar de negativos a positivos sin que haya algún punto x en $[a, b]$ donde $f(x) = 0$. El teorema del valor intermedio también se basa en la completitud de los números reales, y es falso para funciones continuas definidas sólo con los racionales. La función $f(x) = 3x^2 - 1$ cumple $f(0) = -1$ y $f(1) = 2$, pero si consideramos a f sólo en los números racionales, su valor nunca será igual a cero. El único valor de x para el que $f(x) = 0$ es $x = \sqrt{1/3}$, un número irracional.

Hemos enunciado las propiedades necesarias de los números reales al decir que éstos constituyen un campo ordenado completo. Pero aún no hemos terminado. Los matemáticos griegos de la escuela de Pitágoras trataron de imponer otra propiedad a los números de la

recta real: la condición de que todos los números fueran cocientes de enteros. Se dieron cuenta de que su esfuerzo estaba destinado al fracaso cuando descubrieron números irracionales como $\sqrt{2}$. ¿Cómo saber que nuestros esfuerzos por especificar los números reales no serán también infructuosos debido a una razón imprevista? Escher, el artista, dibujó ilusiones ópticas con escaleras espirales que subían y subían hasta encontrarse consigo mismas en la parte inferior. Si un ingeniero tratara de construir tal escalera, se daría cuenta de la imposibilidad de concretar en una estructura los planos basados en tales ilusiones ópticas. ¿Podría ocurrir que nuestro diseño de los números reales tuviera una contradicción sutil que nos impidiera construir tal sistema numérico?

Resolveremos este asunto dando una descripción específica de los números reales, y verificando que las propiedades algebraicas, de orden y de completitud se satisfacen en este modelo. Esto se conoce como la **construcción** de los números reales, y tal como las escaleras se construyen con madera, piedra o acero, existen muchas formas de construir los números reales. Una de ellas considera a los números reales como todos los decimales infinitos,

$$a.d_1d_2d_3d_4\ldots$$

Desde este punto de vista, un número real es un entero a seguido por una sucesión de dígitos decimales $d_1, d_2, d_3, \ldots,$ cada uno entre 0 y 9. Esta sucesión puede detenerse, repetirse con un patrón periódico, o continuar indefinidamente sin patrón alguno. De esta forma, $2.00, 0.3333333\ldots$ y $3.1415926535898\ldots$ representan números reales conocidos. Explicar el verdadero resultado de los puntos "…" después de estos dígitos requiere un desarrollo de la teoría de sucesiones y series, como en el capítulo 10. Cada número real se construye como el límite de una sucesión de números racionales, dados por sus aproximaciones decimales finitas. Un decimal infinito es entonces lo mismo que una serie

$$a + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \cdots.$$

Esta construcción decimal de los números reales no es tan directa. Es fácil comprobar que proporciona números que satisfacen las propiedades de completitud y orden, pero la verificación de las propiedades algebraicas es más compleja. Incluso la suma o multiplicación de dos números requiere una cantidad infinita de operaciones. Dar sentido a la división requiere de un argumento cuidadoso que implica límites de aproximaciones racionales a los decimales infinitos.

El matemático alemán Richard Dedekind (1831-1916) adoptó un enfoque distinto, logrando la primera construcción rigurosa de los números reales en 1872. Dado cualquier número real x, podemos separar los números racionales en dos conjuntos: los menores o iguales que x, y los mayores que x. Ingeniosamente, Dedekind invirtió este razonamiento y definió un número real como una división de los números racionales en dos conjuntos de este tipo. Esto parecería un enfoque extraño, pero tales métodos indirectos de construcción de nuevas estructuras a partir de otras anteriores son comunes en las matemáticas teóricas.

Se pueden usar este y otros enfoques para construir un sistema de números con las propiedades algebraicas, de orden y de completitud deseadas. Un último aspecto a considerar es si todas estas construcciones dan el mismo resultado. ¿Es posible que las distintas construcciones produzcan diferentes sistemas numéricos que satisfagan todas las propiedades requeridas? Si es así, ¿cuál de estos sistemas es el de los números reales? Por fortuna, la respuesta a la primera pregunta es no. Los números reales constituyen el único sistema numérico que satisface las propiedades algebraicas, de orden y de completitud.

La confusión en torno a la naturaleza de los números y los límites causó una gran controversia durante las primeras etapas de desarrollo del cálculo. Al tratar de averiguar qué ocurre con el cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

cuando tanto Δy como Δx tienden a cero, los pioneros del cálculo, como Leibniz, Newton y sus sucesores, hablaban de la derivada resultante como si fuera un cociente entre dos cantidades infinitamente pequeñas. Estos "infinitésimos", que se escriben como dx y dy, se con-

sideraban como números de un nuevo tipo, menores que cualquier número fijo, pero distintos de cero. De manera similar, se imaginaba que una integral definida era la suma de una cantidad infinita de infinitésimos

$$f(x) \cdot dx$$

conforme x variaba en un intervalo cerrado. Antes de que la aproximación del cociente de diferencias $\Delta y/\Delta x$ se entendiera tanto como ahora, se pensaba que era el cociente de cantidades infinitesimales, y no un límite, el que captaba el significado de la derivada. Esta manera de pensar condujo a dificultades lógicas, ya que los intentos de definición y el manejo de los infinitésimos dieron lugar a contradicciones e inconsistencias. Los cocientes de diferencias más concretos y cuantificables no provocaron tales problemas, pero sólo se les consideraba una herramienta útil para realizar los cálculos. Los cocientes de diferencias se utilizaron para obtener el valor numérico de la derivada y para deducir fórmulas generales para los cálculos, pero no se les consideraba la parte medular para responder qué era realmente una derivada. En la actualidad nos damos cuenta de que los problemas lógicos asociados a los infinitésimos pueden evitarse *definiendo* la derivada como el límite de su aproximación a los cocientes de diferencias. Las ambigüedades del antiguo enfoque ya no existen, y en la teoría estándar del cálculo los infinitésimos no se necesitan ni se utilizan.

A.7 Números complejos

Los números complejos se expresan en la forma $a + ib$, o $a + bi$, donde a y b son números reales e i es el símbolo de $\sqrt{-1}$. Por desgracia, la palabra "real" e "imaginario" tienen connotaciones que de alguna manera colocan a $\sqrt{-1}$ en una posición menos favorable en nuestras mentes que a $\sqrt{2}$. De hecho, se requirió de una gran imaginación, en el sentido de *inventiva*, para construir el sistema de números *reales*, que es la base del cálculo (vea el apéndice 6). En este apéndice revisaremos las diversas etapas de esta invención, para luego presentar el desarrollo posterior del sistema de números complejos.

El desarrollo de los números reales

La primera etapa del desarrollo de los números fue el reconocimiento de los **números para contar**, 1, 2, 3,…, que ahora llamamos **números naturales** o **enteros positivos**. Es posible realizar algunas operaciones aritméticas sencillas con estos números, como sumas y multiplicaciones, sin salir del sistema. Con esto queremos decir que si m y n son enteros positivos cualesquiera, entonces,

$$m + n = p \qquad \text{y} \qquad mn = q \tag{1}$$

también son enteros positivos. Dados los dos enteros positivos del lado izquierdo de cualquiera de las ecuaciones (1), podemos obtener el entero positivo correspondiente del lado derecho. Además, algunas veces podemos especificar enteros positivos m y p y obtener un entero positivo n tal que $m + n = p$. Por ejemplo, $3 + n = 7$ se puede resolver cuando los únicos números que conocemos son los enteros positivos. Pero la ecuación $7 + n = 3$ no puede resolverse, a menos que se amplíe el sistema numérico.

El cero y los números enteros negativos se inventaron para resolver ecuaciones como $7 + n = 3$. En una civilización que reconoce todos los **enteros**

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

las personas con instrucción siempre serán capaces de obtener el entero faltante que resuelva la ecuación $m + n = p$ cuando se conozcan dos enteros de la ecuación.

Suponga que estas personas también saben cómo multiplicar dos enteros cualesquiera de la lista (2). Si en las ecuaciones (1) se conocen m y q, se darán cuenta de que en algunas ocasiones se puede obtener n y otras no. Usando la imaginación, podrían inspirarse para inventar más números e introducir las fracciones, que no son sino pares ordenados m/n de enteros m y n. El número cero tiene propiedades especiales que podrían causar un poco de

molestia, pero en última instancia se descubrirá que es bueno tener todos los cocientes de enteros m/n, excluyendo sólo aquellos con cero en el denominador. Este sistema, llamado el conjunto de **números racionales**, será lo suficientemente rico para realizar las **operaciones racionales** de la aritmética:

1. ***a***) suma
b) resta

2. ***a***) multiplicación
b) división

con dos números cualesquiera del sistema, *excepto que no es posible dividir entre cero*, pues esto carece de sentido.

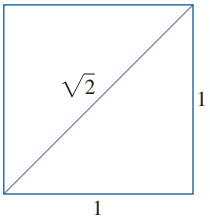


FIGURA A.25 Con regla y compás, es posible construir un segmento de longitud irracional.

La geometría del cuadrado unitario (figura A.25) y el teorema de Pitágoras demostraron que es posible construir un segmento de recta que, en términos de alguna unidad de longitud básica, tiene una longitud igual a $\sqrt{2}$. Por lo tanto, pudieron resolver la ecuación

$$x^2 = 2$$

con una construcción geométrica. Pero después descubrieron que el segmento de recta que representa a $\sqrt{2}$ es una cantidad inconmensurable. Esto significa que $\sqrt{2}$ no puede expresarse como la razón de dos múltiplos *enteros* de cierta unidad de longitud. Es decir, la gente instruida era incapaz de obtener una solución numérica racional de la ecuación $x^2 = 2$.

No existe un número racional cuyo cuadrado sea igual a 2. Para entender por qué, supongamos que sí existe tal número racional, de manera que podríamos obtener enteros p y q sin factores comunes diferentes de 1, tales que

$$p^2 = 2q^2. \tag{3}$$

Como p y q son enteros, p debe ser par, ya que, de otra forma, al multiplicarlo por sí mismo daría por resultado un número impar. En símbolos, $p = 2p_1$, donde p_1 es un entero. Esto nos lleva a $2p_1^2 = q^2$, lo que quiere decir que q debe ser par, digamos $q = 2q_1$, donde q_1 es un entero. Esto hace que 2 sea un factor de p y q, contrario a nuestra opción de enteros sin factores comunes diferentes de 1. Por lo tanto, no hay un número racional cuyo cuadrado sea 2.

Aunque las personas de las que hemos hablado no podrían obtener una solución racional para la ecuación $x^2 = 2$, sí serían capaces de obtener una sucesión de números racionales

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{41}{29}, \quad \frac{239}{169}, \quad \cdots, \tag{4}$$

cuyos cuadrados forman una sucesión

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{49}{25}, \quad \frac{1681}{841}, \quad \frac{57\,121}{28\,561}, \quad \cdots, \tag{5}$$

que converge en 2 como su límite. Esta vez, la imaginación sugería la necesidad del concepto de límite de una sucesión de números racionales. Si aceptamos el hecho de que una sucesión creciente acotada por arriba siempre se aproxima a un límite (teorema 6 de la sección 10.1) y observamos que la sucesión (4) tiene estas propiedades, desearíamos que tuviera un límite L. Esto también significa, según (5), que $L^2 = 2$ y, por lo tanto, que L *no* es uno de nuestros números racionales. Si agregamos a los números racionales los límites de todas las sucesiones de números racionales crecientes y acotadas, llegamos al sistema de todos los números "reales". Escribimos la palabra *real* entre comillas porque ninguna característica de este sistema lo hace "más real" o "menos real" que cualquier otro sistema matemático.

Los números complejos

Durante el desarrollo del sistema de números reales se recurrió muchas veces a la imaginación. De hecho, fue necesario hacer alarde de inventiva al menos en tres momentos durante la construcción del sistema que hemos analizado hasta el momento:

1. En la *invención del primer* sistema: el conjunto de *todos los enteros*, construido a partir de los números para contar.

2. En la *invención del segundo* sistema: el conjunto de los números racionales m/n, construido a partir de los enteros.

3. En la *invención del tercer* sistema: el conjunto de todos los *números reales* x, construido a partir de los números racionales.

Estos sistemas, producto de la inventiva, forman una jerarquía en la que cada sistema contiene al anterior. Cada sistema es también más rico que su predecesor, en el sentido de que permite realizar operaciones adicionales sin necesidad de recurrir a otros:

1. El sistema de todos los enteros nos permite resolver todas las ecuaciones de la forma

$$x + a = 0, \tag{6}$$

donde a puede ser cualquier entero.

2. El sistema de todos los números racionales nos permite resolver todas las ecuaciones de la forma

$$Ax + b = 0, \tag{7}$$

siempre y cuando a y b sean números racionales y $a \neq 0$.

3. El sistema de todos los números reales nos permite resolver todas las ecuaciones de los tipos (6) y (7) y, además, todas las ecuaciones cuadráticas

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a \neq 0 \text{ y } b^2 - 4ac \geq 0. \tag{8}$$

Es probable que usted conozca la fórmula que da las soluciones de la ecuación (8), a saber,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{9}$$

y que también esté al tanto de que, cuando el discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo, las soluciones de la ecuación (9) *no* pertenecen a los sistemas que hemos analizado. De hecho, la sencillísima ecuación cuadrática

$$x^2 + 1 = 0$$

es imposible de resolver si los únicos sistemas numéricos que pueden utilizarse son los tres mencionados hasta ahora.

Así, hemos llegado al *cuarto sistema inventado*: el conjunto de *todos los números complejos* $a + ib$. Podríamos omitir el símbolo i y usar la notación de pares ordenados (a, b). Como desde el punto de vista de las operaciones algebraicas los números a y b se tratan de manera un tanto diferente, es esencial mantener el *orden*. Por lo tanto, decimos que el **sistema de números complejos** consta del conjunto de todos los pares ordenados de números reales (a, b), junto con las reglas que rigen su igualdad, suma, multiplicación, etcétera, que se presentan más adelante. Usaremos las notaciones (a, b) y $a + ib$ en el siguiente análisis. Llamaremos a a la **parte real**, y b a la **parte imaginaria** del número complejo (a, b).

Tenemos las siguientes definiciones.

Igualdad	
$a + ib = c + id$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.	Dos números complejos (a, b) y (c, d) son *iguales* si y sólo si $a = c$ y $b = d$.
Suma	
$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$	La *suma* de dos números complejos (a, b) y (c, d) es el número complejo $(a + c, b + d)$.
Multiplicación	
$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$	El *producto* de dos números complejos (a, b) y (c, d) es el número complejo $(ac - bd, ad + bc)$.
$c(a + ib) = ac + i(bc)$	El producto de un número real c por un número complejo (a, b) es el número complejo (ac, bc).

El conjunto de todos los números complejos (a, b), donde el segundo número b es igual a cero, tiene todas las propiedades del conjunto de números reales a. Por ejemplo, la suma y la multiplicación de $(a, 0)$ y $(c, 0)$ da

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0),$$
$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0),$$

que son números del mismo tipo, con su parte imaginaria igual a cero. Además, si multiplicamos un "número real" $(a, 0)$ por el número complejo (c, d), obtenemos

$$(a, 0) \cdot (c, d) = (ac, ad) = a(c, d).$$

En particular, el número complejo (0, 0) desempeña el papel del *cero* en el sistema de números complejos, y el número complejo (1, 0) el de la *unidad* o *uno*.

El par de números (0, 1), con parte real igual a 0 y parte imaginaria igual a 1, tiene la propiedad de que su cuadrado,

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0),$$

tiene una parte real igual a -1 y una parte imaginaria igual a 0. Por lo tanto, en el sistema de números complejos (a, b), existe un número $x = (0, 1)$ cuyo cuadrado puede sumarse a la unidad (1, 0) para producir el cero (0, 0); es decir,

$$(0, 1)^2 + (1, 0) = (0, 0).$$

Por lo tanto, la ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

tiene una solución $x = (0, 1)$ en el nuevo sistema numérico.

Quizás usted esté más familiarizado con la notación $a + ib$ que con la notación (a, b). Y como las leyes algebraicas para los pares ordenados nos permiten escribir

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1),$$

mientras (1, 0) se comporte como la unidad y (0, 1) como la raíz cuadrada de -1, no debemos dudar en escribir $a + ib$ en lugar de (a, b). Asociada a b, la i es como un trazador que señala la parte imaginaria de $a + ib$. Podemos pasar a voluntad del ámbito de los pares ordenados (a, b) al de las expresiones $a + ib$, y viceversa. Pero una vez que se han aprendido las leyes algebraicas para el sistema de números complejos como pares ordenados (a, b), el símbolo $(0, 1) = i$ no es menos "real" que el símbolo $(1, 0) = 1$.

Para reducir cualquier combinación racional de números complejos a un número complejo único, aplicamos las leyes del álgebra elemental, reemplazando i^2 por -1 siempre que aparezca. Desde luego, no podemos dividir entre el número complejo $(0, 0) = 0 + i0$. Pero si $a + ib \neq 0$, podemos realizar una división como sigue:

$$\frac{c + id}{a + ib} = \frac{(c + id)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{(ac + bd) + i(ad - bc)}{a^2 + b^2}.$$

El resultado es un número complejo $x + iy$ con

$$x = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}$$

y $a^2 + b^2 \neq 0$, ya que $a + ib = (a, b) \neq (0, 0)$.

El número $a - ib$ que se utiliza como factor para eliminar i del denominador es el **conjugado complejo** de $a + ib$. Se acostumbra utilizar $\bar{z}$ para denotar el conjugado complejo de z; por lo tanto,

$$z = a + ib, \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Al multiplicar el numerador y el denominador de la fracción $(c + id)/(a + ib)$ por el conjugado complejo del denominador, éste se reemplaza siempre por un número real.

EJEMPLO 1 A continuación damos algunos ejemplos de operaciones aritméticas con números complejos.

a) $(2 + 3i) + (6 - 2i) = (2 + 6) + (3 - 2)i = 8 + i$

b) $(2 + 3i) - (6 - 2i) = (2 - 6) + (3 - (-2))i = -4 + 5i$

c) $(2 + 3i)(6 - 2i) = (2)(6) + (2)(-2i) + (3i)(6) + (3i)(-2i)$
$= 12 - 4i + 18i - 6i^2 = 12 + 14i + 6 = 18 + 14i$

d) $\dfrac{2 + 3i}{6 - 2i} = \dfrac{2 + 3i}{6 - 2i}\dfrac{6 + 2i}{6 + 2i}$
$= \dfrac{12 + 4i + 18i + 6i^2}{36 + 12i - 12i - 4i^2}$
$= \dfrac{6 + 22i}{40} = \dfrac{3}{20} + \dfrac{11}{20}i$ ■

Diagramas de Argand

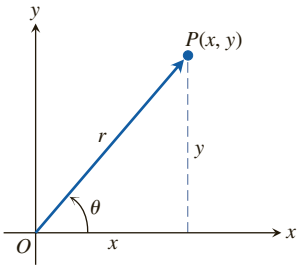


FIGURA A.26 Este diagrama de Argand representa a $z = x + iy$ como un punto $P(x, y)$ y como un vector $\overrightarrow{OP}$.

El número complejo $z = x + iy$ tiene dos representaciones geométricas:

1. como el punto $P(x, y)$ en el plano xy y
2. como el vector $\overrightarrow{OP}$, que va del origen a P.

En cada representación, el eje x se llama **eje real**, y el eje y es el **eje imaginario**. Ambas representaciones son **diagramas de Argand** para $x + iy$ (figura A.26).

En términos de las coordenadas polares de x y y, tenemos

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

y

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta). \tag{10}$$

Definimos el **valor absoluto** de un número complejo $x + iy$ como la longitud r de un vector $\overrightarrow{OP}$, que va del origen a $P(x, y)$. Denotamos el valor absoluto con barras verticales; por consiguiente,

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si siempre elegimos las coordenadas polares r y θ, de modo que r sea no negativo, entonces,

$$r = |x + iy|.$$

El ángulo polar θ es el **argumento** de z y se escribe como $\theta = \arg z$. Desde luego, se puede sumar cualquier múltiplo entero de 2π a θ para producir otro ángulo adecuado.

La siguiente ecuación nos da una fórmula útil que relaciona un número complejo z, su conjugado $\bar{z}$, y su valor absoluto $|z|$, a saber,

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

Fórmula de Euler

La identidad

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta,$$

llamada **fórmula de Euler**, nos permite escribir la ecuación (10) como

$$z = re^{i\theta}.$$

La notación $\exp(A)$ también sirve para e^A.

Esta fórmula, a la vez, nos lleva a las siguientes reglas para el cálculo de productos, cocientes, potencias y raíces de números complejos. También nos conduce a los diagramas de Argand para $e^{i\theta}$. Como $\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ es lo que obtenemos de la ecuación (10) al considerar $r = 1$, podemos decir que $e^{i\theta}$ se representa como un vector unitario que forma un ángulo θ con el eje x positivo, como muestra la figura A.27.

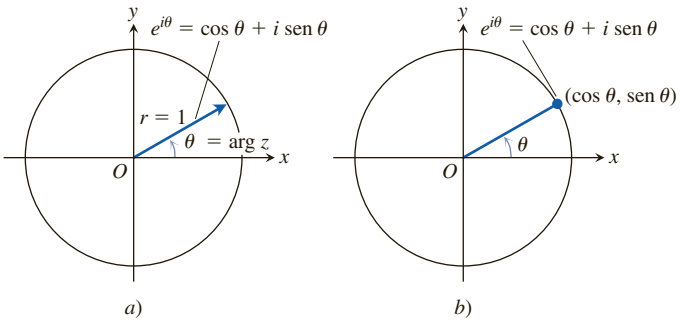


FIGURA A.27 Diagramas de Argand para $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ *a*) como un vector y *b*) como un punto.

Productos

Para multiplicar dos números complejos, multiplicamos sus valores absolutos y sumamos sus ángulos. Sean

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}, \tag{11}$$

de modo que

$$|z_1| = r_1, \qquad \arg z_1 = \theta_1; \qquad |z_2| = r_2, \qquad \arg z_2 = \theta_2.$$

Entonces,

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2| \\ \arg(z_1 z_2) &= \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2. \end{aligned} \tag{12}$$

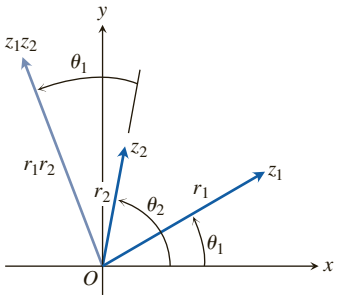


FIGURA A.28 Al multiplicar z_1 y z_2, $|z_1 z_2| = r_1 \cdot r_2$ y $\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$.

De esta forma, el producto de dos números complejos se representa con un vector cuya longitud es el producto de las longitudes de los dos factores, y cuyo argumento es la suma de sus argumentos (figura A.28). En particular, según la ecuación (12), vemos que un vector puede girar en sentido contrario al de las manecillas del reloj un ángulo θ al multiplicarlo por $e^{i\theta}$. La multiplicación por i provoca un giro de 90°, por -1 provoca un giro de 180°, por $-i$ uno de 270°, etcétera.

EJEMPLO 2 Sea $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$. Graficamos estos números complejos en un diagrama de Argand (figura A.29), de donde obtenemos las representaciones polares

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i\pi/4}, \qquad z_2 = 2e^{-i\pi/6}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{i\pi}{4} - \frac{i\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{i\pi}{12}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right) \approx 2.73 + 0.73i. \end{aligned}$$

■

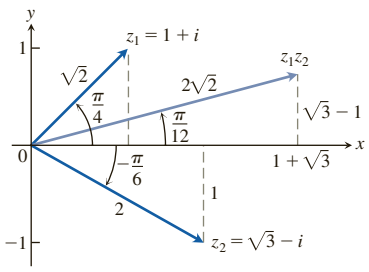


FIGURA A.29 Para multiplicar dos números complejos, multiplicamos sus valores absolutos y sumamos sus argumentos.

Cocientes

Supongamos que $r_2 \neq 0$ en la ecuación (11). Entonces,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Por lo tanto,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{y} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Es decir, dividimos las longitudes y restamos los ángulos para obtener el cociente de números complejos.

EJEMPLO 3 Sean $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = \sqrt{3} - i$, como en el ejemplo 2. Entonces,

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi i/12} \approx 0.707\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{12}\right)$$
$$\approx 0.183 + 0.683i. \qquad \blacksquare$$

Potencias

Si n es un entero positivo, podemos aplicar las fórmulas del producto en la ecuación (12) para obtener

$$z^n = z \cdot z \cdot \cdots \cdot z. \qquad n \text{ factores}$$

Con $z = re^{i\theta}$, obtenemos

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{i(\theta+\theta+\cdots+\theta)} \qquad n \text{ sumandos}$$
$$= r^n e^{in\theta}. \tag{13}$$

La longitud $r = |z|$ se eleva a la n-ésima potencia, y el ángulo $\theta = \arg z$ se multiplica por n.

Si consideramos $r = 1$ en la ecuación (13), obtenemos el teorema de De Moivre.

Teorema de De Moivre

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta. \tag{14}$$

Si desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación de De Moivre según el teorema del binomio y lo reducimos a la forma $a + ib$, obtenemos fórmulas para cos $n\theta$ y sen $n\theta$ como polinomios de grado n en cos θ y sen θ.

EJEMPLO 4 Si $n = 3$ en la ecuación (14), tenemos

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^3 = \cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta.$$

El lado izquierdo de esta ecuación se desarrolla como

$$\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta - i\,\text{sen}^3\theta.$$

La parte real de la expresión anterior debe ser igual a cos 3θ, y la parte imaginaria debe ser igual a sen 3θ. Por lo tanto,

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta,$$
$$\text{sen}\,3\theta = 3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta. \qquad \blacksquare$$

Raíces

Si $z = re^{i\theta}$ es un número complejo diferente de cero y n es un número entero positivo, existen exactamente n números complejos diferentes $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$, que son raíces n-ésimas de z. Para comprender por qué, sea $w = \theta e^{i\theta}$ una raíz n-ésima de $z = re^{i\theta}$, de modo que

$$w^n = z$$

o

$$\rho^n e^{in\alpha} = re^{i\theta}.$$

Entonces,

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

es la n-ésima raíz real positiva de r. En cuanto al argumento, aunque no podemos decir que $n\alpha$ y θ deben ser iguales, sí es posible afirmar que sólo difieren en un múltiplo entero de 2π. Es decir,

$$n\alpha = \theta + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Por lo tanto,

$$\alpha = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}.$$

Así, todas las raíces n-ésimas de $z = re^{i\theta}$ están dadas por

$$\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r} \exp i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{15}$$

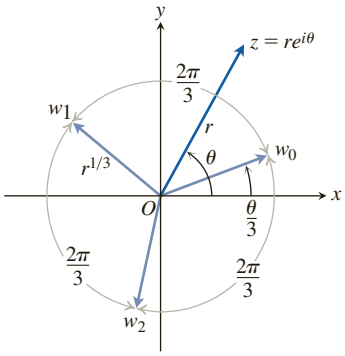


FIGURA A.30 Las tres raíces cúbicas de $z = re^{i\theta}$.

Parecería que hay una infinidad de respuestas diferentes correspondientes a la infinidad de valores posibles de k, pero $k = n + m$ nos da la misma respuesta que $k = m$ en la ecuación (15). Así, sólo necesitamos considerar n valores consecutivos de k para obtener todas las n-ésimas raíces diferentes de z. Por conveniencia, consideramos

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Todas las raíces n-ésimas de $re^{i\theta}$ están en una circunferencia con centro en el origen, con radio igual a la n-ésima raíz real positiva de r. Una de ellas tiene argumento $\alpha = \theta/n$; las demás se distribuyen de manera uniforme en la circunferencia, cada una separada de sus vecinas por un ángulo igual a $2\pi/n$. La figura A.30 ilustra la distribución de las tres raíces cúbicas, w_0, w_1, w_2, del número complejo $z = re^{i\theta}$.

EJEMPLO 5 Obtenga las cuatro raíces cuartas de -16.

Solución Como primer paso, localizamos el número -16 en un diagrama de Argand (figura A.31) y determinamos su representación polar $re^{i\theta}$. En este caso, $z = -16$, $r = +16$ y $\theta = \pi$. Una de las raíces cuartas de $16e^{i\pi}$ es $2e^{i\pi/4}$. Obtenemos las demás con sumas sucesivas de $2\pi/4 = \pi/2$ al argumento de esta primera raíz. Por lo tanto,

$$\sqrt[4]{16 \exp i\pi} = 2 \exp i\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right),$$

y las cuatro raíces son

$$w_0 = 2\left[\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(1 + i)$$

$$w_1 = 2\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(-1 + i)$$

$$w_2 = 2\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(-1 - i)$$

$$w_3 = 2\left[\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(1 - i).$$

■

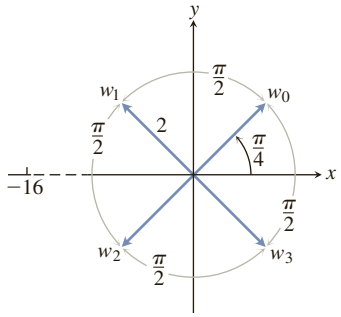


FIGURA A.31 Las cuatro raíces cuartas de -16.

El teorema fundamental del álgebra

Alguien podría decir que la invención de $\sqrt{-1}$ está muy bien, y que conduce a un sistema numérico más rico que el de los números reales, pero ¿en qué momento se detendrá este proceso? ¿Tendremos que inventar más sistemas para obtener $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[6]{-1}$, y así sucesivamente? Resulta que esto no es necesario. Tales números pueden expresarse ya en términos del sistema de números complejos $a + ib$. De hecho, el teorema fundamental del álgebra afirma que con la introducción de los números complejos se tienen los números suficientes para factorizar cualquier polinomio como un producto de factores lineales y, por lo tanto, los números suficientes para resolver cualquier ecuación polinomial posible.

Teorema fundamental del álgebra

Toda ecuación polinomial de la forma

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0,$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números complejos cualesquiera, cuyo grado n es mayor o igual que 1, y cuyo coeficiente principal a_n no es cero, tiene exactamente n raíces en el sistema de números complejos, siempre y cuando cada raíz múltiple con multiplicidad m se cuente como m raíces.

En casi todos los textos sobre la teoría de funciones de una variable compleja aparece una demostración de este teorema.

Ejercicios A.7

Operaciones con números complejos

1. ¿Cómo multiplican números complejos las computadoras? Obtenga $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

a) $(2, 3) \cdot (4, -2)$ ***b)*** $(2, -1) \cdot (-2, 3)$

c) $(-1, -2) \cdot (2, 1)$

(Ésta es la forma en que las computadoras multiplican números complejos).

2. Resuelva las siguientes ecuaciones en términos de los números reales x y y.

a) $(3 + 4i)^2 - 2(x - iy) = x + iy$

b) $\left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^2 + \dfrac{1}{x + iy} = 1 + i$

c) $(3 - 2i)(x + iy) = 2(x - 2iy) + 2i - 1$

Graficación y geometría

3. ¿Cómo se pueden obtener geométricamente los siguientes números complejos a partir de $z = x + iy$? Grafique.

a) $\bar{z}$ ***b)*** $\overline{(-z)}$

c) $-z$ ***d)*** $1/z$

4. Demuestre que la distancia entre los dos puntos z_1 y z_2 en un diagrama de Argand es $|z_1 - z_2|$.

En los ejercicios 5 a 10, grafique los puntos $z = x + iy$ que satisfacen las condiciones dadas.

5. ***a)*** $|z| = 2$ ***b)*** $|z| < 2$ ***c)*** $|z| > 2$

6. $|z - 1| = 2$ **7.** $|z + 1| = 1$

8. $|z + 1| = |z - 1|$ **9.** $|z + i| = |z - 1|$

10. $|z + 1| \geq |z|$

En los ejercicios 11 a 14, exprese los números complejos en la forma $re^{i\theta}$, con $r \geq 0$ y $-\pi < \theta \leq \pi$. Dibuje un diagrama de Argand para cada cálculo.

11. $\left(1 + \sqrt{-3}\right)^2$ **12.** $\dfrac{1 + i}{1 - i}$

13. $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$ **14.** $(2 + 3i)(1 - 2i)$

Potencias y raíces

Utilice el teorema de De Moivre para expresar las funciones trigonométricas de los ejercicios 15 y 16 en términos de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.

15. $\cos 4\theta$ **16.** $\operatorname{sen} 4\theta$

17. Obtenga las tres raíces cúbicas de 1.

18. Obtenga las dos raíces cuadradas de i.

19. Obtenga las tres raíces cúbicas de $-8i$.

20. Obtenga las seis raíces sextas de 64.

21. Obtenga las cuatro soluciones de la ecuación $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$.

22. Obtenga las seis soluciones de la ecuación $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$.

23. Obtenga todas las soluciones de la ecuación $x^4 + 4x^2 + 16 = 0$.

24. Resuelva la ecuación $x^4 + 1 = 0$.

Teoría y ejemplos

25. Números complejos y vectores en el plano Use un diagrama de Argand para demostrar que la ley para la suma de números complejos es la misma que la ley del paralelogramo para la suma de vectores.

26. Aritmética compleja con conjugados Demuestre que el conjugado de la suma (el producto o el cociente) de dos números complejos z_1 y z_2 es igual a la suma (el producto o el cociente) de sus conjugados.

27. Las raíces complejas de polinomios con cocientes reales vienen en pares de números complejos-conjugados

a) Amplíe los resultados del ejercicio 26 para demostrar que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ si

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

es un polinomio con coeficientes reales $a_0, \ldots, a_n$.

b) Si z es una raíz de la ecuación $f(z) = 0$, donde $f(z)$ es un polinomio con coeficientes reales como en el inciso *a*), demuestre que el conjugado $\bar{z}$ también es una raíz de la ecuación. [*Sugerencia:* Sea $f(z) = u + iv = 0$; entonces, u y v son iguales a cero. Considere el hecho de que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} = u - iv$].

28. Valor absoluto de un conjugado Demuestre que $|\bar{z}| = |z|$.

29. Cuando $z = \bar{z}$ Si z y $\bar{z}$ son iguales, ¿qué se puede decir acerca de la ubicación del punto z en el plano complejo?

30. Partes real e imaginaria Sean $\mathrm{Re}(z)$ la parte real de z e $\mathrm{Im}(z)$ la parte imaginaria. Demuestre que las siguientes relaciones se cumplen para números complejos z, z_1 y z_2 cualesquiera.

a) $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$

b) $z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$

c) $|\mathrm{Re}(z)| \le |z|$

d) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$

e) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

A.8 Ley distributiva para el producto cruz de vectores

En este apéndice demostraremos la ley distributiva

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w},$$

que es la propiedad 2 de la sección 12.4.

Demostración Para deducir la ley distributiva, construimos $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ de una nueva manera. Trazamos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ desde el punto común O y construimos un plano M perpendicular a $\mathbf{u}$ en O (figura A.32). Luego, proyectamos $\mathbf{v}$ de manera ortogonal hacia M, obteniendo un vector $\mathbf{v}'$ con longitud $|\mathbf{v}|$ sen θ. Giramos $\mathbf{v}'$ 90° en sentido positivo alrededor de $\mathbf{u}$ para obtener un vector $\mathbf{v}''$. Por último, multiplicamos $\mathbf{v}''$ por la longitud de $\mathbf{u}$. El vector resultante $|\mathbf{u}|\mathbf{v}''$ es igual a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, pues $\mathbf{v}''$ tiene la misma dirección que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ debido a su construcción (figura A.32) y

$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}''| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}'| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\mathrm{sen}\,\theta = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|.$$

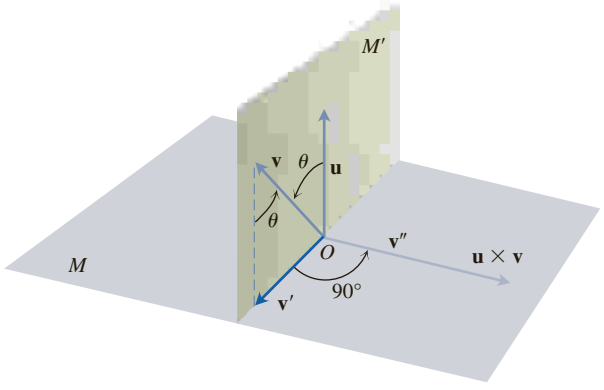


FIGURA A.32 Como se explica en el texto, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\mathbf{v}''$. (Las comillas son exclusivamente símbolos de notación y no representan derivadas).

Ahora bien, cada una de estas operaciones, a saber,

1. la proyección sobre M
2. la rotación de 90° alrededor de $\mathbf{u}$
3. la multiplicación por el escalar $|\mathbf{u}|$

produce un nuevo triángulo cuando se aplica a un triángulo cuyo plano no es paralelo a **u**. Si partimos del triángulo con lados **v**, **w** y **v** + **w** (figura A.33) y aplicamos estos tres pasos, obtendremos lo siguiente:

1. Un triángulo cuyos lados son $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ y $(\mathbf{v}+\mathbf{w})'$ que satisfacen la ecuación vectorial
$$\mathbf{v}' + \mathbf{w}' = (\mathbf{v} + \mathbf{w})'$$
2. Un triángulo cuyos lados son $\mathbf{v}''$, $\mathbf{w}''$ y $(\mathbf{v}+\mathbf{w})''$, que satisfacen la ecuación vectorial
$$\mathbf{v}'' + \mathbf{w}'' = (\mathbf{v} + \mathbf{w})''$$
(Las comillas de cada vector tienen el mismo significado que en la figura A.32).

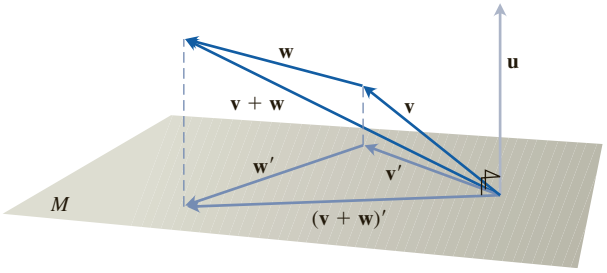


FIGURA A.33 Los vectores **v**, **w**, **v** + **w** y sus proyecciones sobre un plano perpendicular a **u**.

3. Un triángulo cuyos lados son $|\mathbf{u}|\mathbf{v}''$, $|\mathbf{u}|\mathbf{w}''$ y $|\mathbf{u}|(\mathbf{v}+\mathbf{w})''$, que satisfacen la ecuación vectorial
$$|\mathbf{u}|\mathbf{v}'' + |\mathbf{u}|\mathbf{w}'' = |\mathbf{u}|(\mathbf{v} + \mathbf{w})''.$$

Al sustituir en esta ecuación $|\mathbf{u}|\mathbf{v}'' = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $|\mathbf{u}|\mathbf{w}'' = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ y $|\mathbf{u}|(\mathbf{v}+\mathbf{w})'' = \mathbf{u} \times (\mathbf{v}+\mathbf{w})$ de acuerdo con nuestro análisis anterior, obtenemos

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}),$$

que es la ley que queríamos establecer. ■

A.9 El teorema de la derivada mixta y el teorema del incremento

Este apéndice presenta una deducción del teorema de la derivada mixta (teorema 2, sección 14.3) y del teorema del incremento para funciones de dos variables (teorema 3, sección 14.3). Euler publicó por primera vez el teorema de la derivada mixta en 1734, en una serie de artículos que escribió sobre hidrodinámica.

TEOREMA 2: Teorema de la derivada mixta Si $f(x, y)$ y sus derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} están definidas en una región abierta que contiene un punto (a, b) y todas son continuas en (a, b), entonces,
$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

Demostración La igualdad de $f_{xy}(a, b)$ y $f_{yx}(a, b)$ se puede establecer mediante cuatro aplicaciones del teorema del valor medio (teorema 4, sección 4.2). Por hipótesis, el punto (a, b) está en el interior de un rectángulo R en el plano xy donde f, f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} están defini-

das. Sean h y k números tales que el punto $(a + h, b + k)$ también está en R, y consideramos la diferencia

$$\Delta = F(a + h) - F(a), \tag{1}$$

donde

$$F(x) = f(x, b + k) - f(x, b). \tag{2}$$

Aplicamos el teorema del valor medio a F, que es continua por ser diferenciable. Entonces, la ecuación (1) se convierte en

$$\Delta = hF'(c_1), \tag{3}$$

donde c_1 se encuentra entre a y $a + h$. Según la ecuación (2),

$$F'(x) = f_x(x, b + k) - f_x(x, b),$$

de modo que la ecuación (3) se convierte en

$$\Delta = h[f_x(c_1, b + k) - f_x(c_1, b)]. \tag{4}$$

Ahora aplicamos el teorema del valor medio a la función $g(y) = f_x(c_1, y)$, y tenemos

$$g(b + k) - g(b) = kg'(d_1),$$

o bien,

$$f_x(c_1, b + k) - f_x(c_1, b) = kf_{xy}(c_1, d_1)$$

para alguna d_1 entre b y $b + k$. Al sustituir esto en la ecuación (4), tenemos

$$\Delta = hkf_{xy}(c_1, d_1) \tag{5}$$

para algún punto (c_1, d_1) en el rectángulo R' cuyos vértices son los cuatro puntos (a, b), $(a + h, b)$, $(a + h, b + k)$ y $(a, b + k)$. (Vea la figura A.34).

Sustituyendo la ecuación (2) en la ecuación (1), también podemos escribir

$$\begin{aligned}\Delta &= f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)\\ &= [f(a + h, b + k) - f(a, b + k)] - [f(a + h, b) - f(a, b)]\\ &= \phi(b + k) - \phi(b),\end{aligned} \tag{6}$$

donde

$$\phi(y) = f(a + h, y) - f(a, y). \tag{7}$$

El teorema del valor medio aplicado a la ecuación (6) nos da ahora

$$\Delta = k\phi'(d_2) \tag{8}$$

para alguna d_2 entre b y $b + k$. Según la ecuación (7),

$$\phi'(y) = f_y(a + h, y) - f_y(a, y). \tag{9}$$

Al sustituir la ecuación (9) en la ecuación (8), se obtiene

$$\Delta = k[f_y(a + h, d_2) - f_y(a, d_2)].$$

Por último, aplicamos el teorema del valor medio a la expresión entre corchetes para obtener

$$\Delta = khf_{yx}(c_2, d_2) \tag{10}$$

para alguna c_2 entre a y $a + h$.

Juntas, las ecuaciones (5) y (10) demuestran que

$$f_{xy}(c_1, d_1) = f_{yx}(c_2, d_2), \tag{11}$$

donde (c_1, d_1) y (c_2, d_2) están en el rectángulo R' (figura A.34). La ecuación (11) no es precisamente el resultado que buscamos, pues sólo nos dice que f_{xy} tiene el mismo valor en (c_1, d_1) que f_{yx} en (c_2, d_2). Sin embargo, los números h y k pueden hacerse tan pequeños

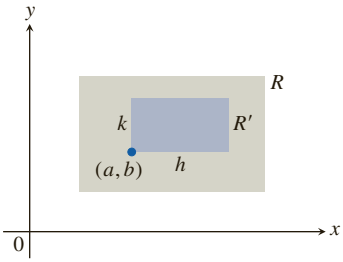


FIGURA A.34 La clave para demostrar que $f_{xy}(a, b)$ y $f_{yx}(a, b)$ es que sin importar lo pequeño que sea R', f_{xy} y f_{yx} asumen los mismos valores en algún punto dentro de R' (aunque no necesariamente en el mismo punto).

como se desee. La hipótesis de que f_{xy} y f_{yx} son continuas en (a, b) significa que $f_{xy}(c_1, d_1) = f_{xy}(a, b) + \epsilon_1$ y $f_{yx}(c_2, d_2) = f_{yx}(a, b) + \epsilon_2$, donde $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ cuando $h, k \to 0$. Por lo tanto, si h y k tienden a cero, tenemos que $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$. ■

La igualdad entre $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ puede demostrarse con hipótesis más débiles que las planteadas. Por ejemplo, basta que f, f_x y f_y existan en R y que f_{xy} sea continua en (a, b). Entonces, f_{yx} existe en (a, b) y es igual a f_{xy} en ese punto.

TEOREMA 3: Teorema del incremento para funciones de dos variables

Suponga que las primeras derivadas parciales de $f(x, y)$ están definidas en una región abierta R que contiene al punto (x_0, y_0), y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0). Entonces, el cambio

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, x_0)$$

en el valor de f que resulta de moverse de (x_0, y_0) a otro punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ en R satisface una ecuación de la forma

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

en la que $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x, \Delta y \to 0$.

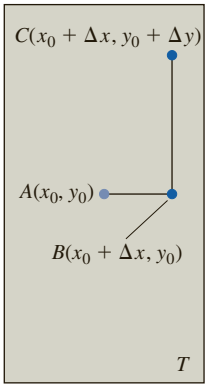


FIGURA A.35 Región rectangular T en la demostración del teorema del incremento. La figura se dibuja para Δx y Δy positivas, pero los incrementos pueden ser cero o negativos.

Demostración Trabajamos dentro de un rectángulo T con centro en $A(x_0, y_0)$, que está dentro de R, y suponemos que Δx y Δy ya son lo bastante pequeños como para que el segmento de recta que une A con $B(x_0 + \Delta x, y_0)$ y el segmento de recta que une B con $C(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ estén en el interior de T (figura A.35).

Podemos visualizar Δz como la suma de $\Delta z_1 + \Delta z_2$ de dos incrementos, donde

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

es el cambio en el valor de f de A a B y

$$\Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

es el cambio en el valor de f de B a C (figura A.36).

En el intervalo cerrado de valores de x que va de x_0 a $x_0 + \Delta x$, la función $F(x) = f(x, y_0)$ es una función diferenciable (y por lo tanto continua) de x, con derivada

$$F'(x) = f_x(x, y_0).$$

Según el teorema del valor medio (teorema 4, sección 4.2), existe un valor c de x entre x_0 y $x_0 + \Delta x$ en el que

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = F'(c)\,\Delta x$$

o

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = f_x(c, y_0)\,\Delta x$$

o

$$\Delta z_1 = f_x(c, y_0)\,\Delta x. \tag{12}$$

De manera similar, $G(y) = f(x_0 + \Delta x, y)$ es una función diferenciable (y por lo tanto continua) de y en el intervalo cerrado en y que va de y_0 a $y_0 + \Delta y$ con derivada

$$G'(y) = f_y(x_0 + \Delta x, y).$$

Por lo tanto, existe un valor d de y entre y_0 y $y_0 + \Delta y$ donde

$$G(y_0 + \Delta y) - G(y_0) = G'(d)\,\Delta y$$

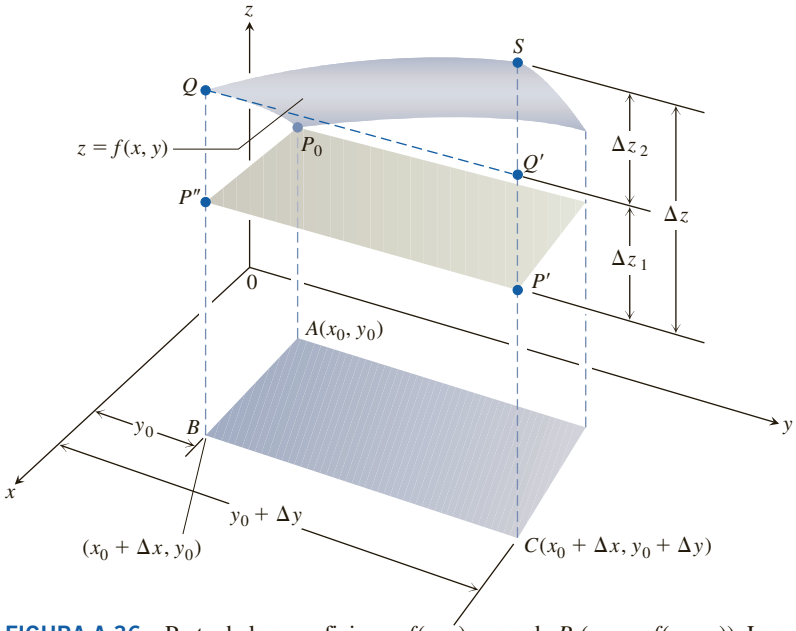


FIGURA A.36 Parte de la superficie $z = f(x, y)$ cerca de $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Los puntos P_0, P' y P'' tienen la misma altura $z_0 = f(x_0, y_0)$ sobre el plano xy. El cambio en z es $\Delta z = P'S$. El cambio

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

mostrado como $P''Q = P'Q'$, es causado al variar x de x_0 a $x_0 + \Delta x$, manteniendo a y igual a y_0. Luego, manteniendo x igual a $x_0 + \Delta x$,

$$\Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

es el cambio en z al variar y de y_0 a $y_0 + \Delta y$, lo que se representa como $Q'S$. El cambio total en z es la suma de Δz_1 y Δz_2,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y) = f_y(x_0 + \Delta x, d)\,\Delta y$$

o

$$\Delta z_2 = f_y(x_0 + \Delta x, d)\,\Delta y. \tag{13}$$

Ahora bien, cuando Δx y Δy tienden a cero, sabemos que $c \to x_0$ y $d \to y_0$. Por lo tanto, como f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0), las cantidades

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= f_x(c, y_0) - f_x(x_0, y_0), \\ \epsilon_2 &= f_y(x_0 + \Delta x, d) - f_y(x_0, y_0) \end{aligned} \tag{14}$$

tienden a cero cuando Δx y $\Delta y \to 0$.

Por último,

$$\begin{aligned} \Delta z &= \Delta z_1 + \Delta z_2 \\ &= f_x(c, y_0)\Delta x + f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y && \text{Según las ecuaciones (12) y (13)} \\ &= [\,f_x(x_0, y_0) + \epsilon_1\,]\Delta x + [\,f_y(x_0, y_0) + \epsilon_2\,]\Delta y && \text{Según la ecuación (14)} \\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y, \end{aligned}$$

donde ϵ_1 y $\epsilon_2 \to 0$ cuando Δx y $\Delta y \to 0$, que era lo que teníamos que demostrar. ■

Resultados análogos son válidos para funciones con cualquier número finito de variables independientes. Suponga que las primeras derivadas parciales de $w = f(x, y, z)$ se definen en toda una región abierta que contiene el punto (x_0, y_0, z_0), y que f_x, f_y y f_z son continuas en (x_0, y_0, z_0). Entonces,

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \\ &= f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y + \epsilon_3 \Delta z, \end{aligned} \tag{15}$$

donde $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \to 0$ cuando $\Delta x, \Delta y$ y $\Delta z \to 0$.

Las derivadas parciales f_x, f_y y f_z de la ecuación (15) deben evaluarse en el punto (x_0, y_0, z_0).

La ecuación (15) puede demostrarse considerando Δw como la suma de tres incrementos,

$$\Delta w_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) \tag{16}$$

$$\Delta w_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) \tag{17}$$

$$\Delta w_3 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0), \tag{18}$$

y aplicando el teorema del valor medio a cada uno por separado. Dos coordenadas permanecen constantes y sólo una varía en cada uno de estos incrementos parciales Δw_1, Δw_2 y Δw_3. En la ecuación (17), por ejemplo, sólo varía y, pues x se mantiene igual a $x_0 + \Delta x$, y z se mantiene igual a z_0. Como $f(x_0 + \Delta x, y, z_0)$ es una función continua de y con una derivada f_y, se encuentra sujeta al teorema del valor medio; así, tenemos

$$\Delta w_2 = f_y(x_0 + \Delta x, y_1, z_0)\, \Delta y$$

para alguna y_1 entre y_0 y $y_0 + \Delta y$.

Respuestas a los ejercicios con número impar

Capítulo 1

Sección 1.1, páginas 11 a 13

1. D: $(-\infty, \infty)$, R: $[1, \infty)$ **3.** D: $[-2, \infty)$, R: $[0, \infty)$

5. D: $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$, R: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

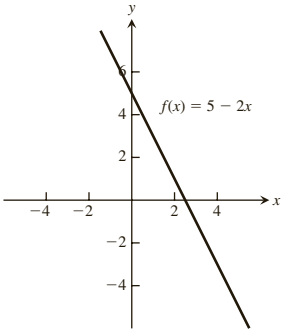
7. ***a)*** No es una función de x, porque a algunos valores de x corresponden dos valores de y

b) Es una función de x porque a cada x sólo corresponde una y

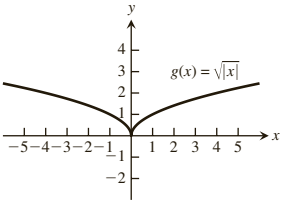
9. $A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$, $p = 3x$ **11.** $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$, $A = 2d^2$, $V = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$

13. $L = \frac{\sqrt{20x^2 - 20x + 25}}{4}$

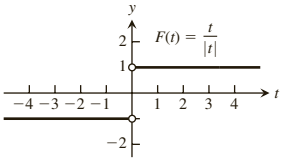
15. $(-\infty, \infty)$



17. $(-\infty, \infty)$

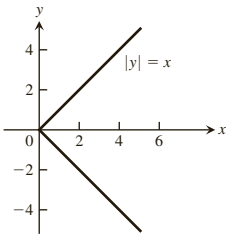


19. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

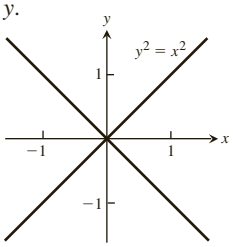


21. $(-\infty, -5) \cup (-5, -3] \cup [3, 5) \cup (5, \infty)$

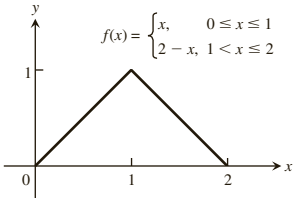
23. ***a)*** Para cada valor positivo de x, existen dos valores de y.



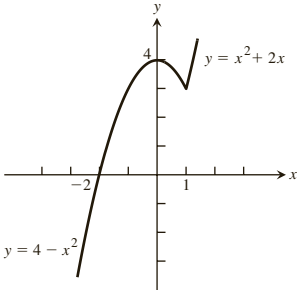
b) Para cada valor positivo de $x \neq 0$, existen dos valores de y.



25.



27.



29. ***a)*** $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ -x + 2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

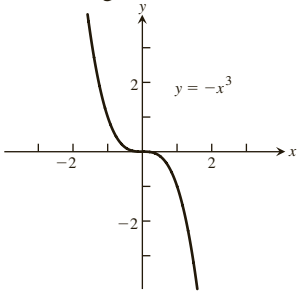
b) $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x < 2 \\ 2, & 2 \le x < 3 \\ 0, & 3 \le x \le 4 \end{cases}$

31. ***a)*** $f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, & 1 < x < 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & -2 \le x \le 0 \\ -2x + 2, & 0 < x \le 1 \\ -1, & 1 < x \le 3 \end{cases}$

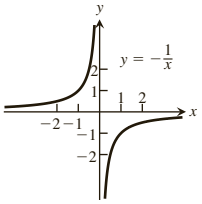
33. ***a)*** $0 \le x < 1$ ***b)*** $-1 < x \le 0$ **35.** Sí.

37. Simétrica con respecto al origen



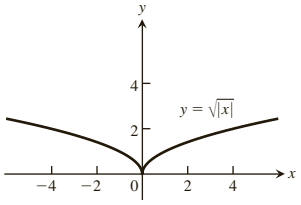
Decrece en $-\infty < x < \infty$

39. Simétrica con respecto al origen



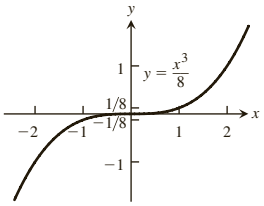
Crece en $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$

41. Simétrica con respecto al eje y



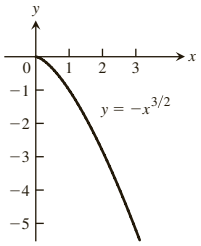
Decrece en $-\infty < x \le 0$; Crece en $0 \le x < \infty$

43. Simétrica con respecto al origen



Crece en $-\infty < x < \infty$

45. No hay simetría



Decrece en $0 \le x < \infty$

47. Par **49.** Par **51.** Impar **53.** Par

55. Ninguna **57.** Ninguna **59.** $t = 180$ **61.** $s = 2.4$

63. $V = x(14 - 2x)(22 - 2x)$

65. ***a)*** h ***b)*** f **c)** g **67.** ***a)*** $(-2, 0) \cup (4, \infty)$

71. $C = 5(2 + \sqrt{2})h$

Sección 1.2, páginas 18 a 21

1. $D_f: -\infty < x < \infty$, $D_g: x \geq 1$, $R_f: -\infty < y < \infty$, $R_g: y \geq 0$, $D_{f+g} = D_{f \cdot g} = D_g$, $R_{f+g}: y \geq 1$, $R_{f \cdot g}: y \geq 0$

3. $D_f: -\infty < x < \infty$, $D_g: -\infty < x < \infty$, $R_f: y = 2$, $R_g: y \geq 1$, $D_{f/g}: -\infty < x < \infty$, $R_{f/g}: 0 < y \leq 2$, $D_{g/f}: -\infty < x < \infty$, $R_{g/f}: y \geq 1/2$

5. ***a)*** 2 ***b)*** 22 ***c)*** $x^2 + 2$ ***d)*** $x^2 + 10x + 22$ ***e)*** 5 ***f)*** -2 ***g)*** $x + 10$ ***h)*** $x^4 - 6x^2 + 6$

7. $13 - 3x$ **9.** $\sqrt{\dfrac{5x+1}{4x+1}}$

11. ***a)*** $f(g(x))$ ***b)*** $j(g(x))$ ***c)*** $g(g(x))$ ***d)*** $j(j(x))$ ***e)*** $g(h(f(x)))$ ***f)*** $h(j(f(x)))$

13.

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
a)	$x - 7$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x-7}$
b)	$x + 2$	$3x$	$3x + 6$
c)	x^2	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
d)	$\dfrac{x}{x-1}$	$\dfrac{x}{x-1}$	x
e)	$\dfrac{1}{x-1}$	$1 + \dfrac{1}{x}$	x
f)	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x}$	x

15. ***a)*** 1 ***b)*** 2 ***c)*** -2 ***d)*** 0 ***e)*** -1 ***f)*** 0

17. ***a)*** $f(g(x)) = \sqrt{\dfrac{1}{x} + 1}$, $g(f(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

b) $D_{f \circ g} = (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$, $D_{g \circ f} = (-1, \infty)$

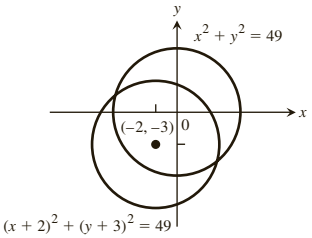
c) $R_{f \circ g} = [0, 1) \cup (1, \infty)$, $R_{g \circ f} = (0, \infty)$

19. $g(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

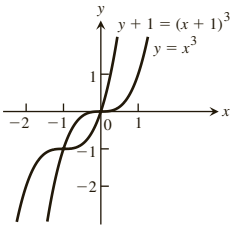
21. ***a)*** $y = -(x+7)^2$ ***b)*** $y = -(x-4)^2$

23. ***a)*** Posición 4 ***b)*** Posición 1 ***c)*** Posición 2 ***d)*** Posición 3

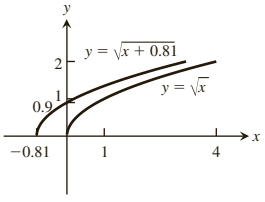
25. $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 49$



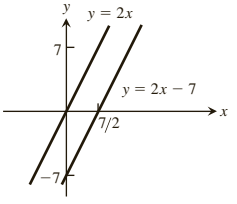
27. $y + 1 = (x+1)^3$



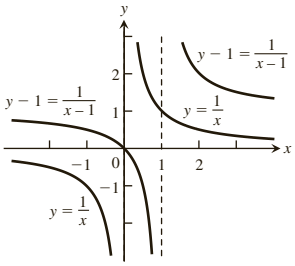
29. $y = \sqrt{x + 0.81}$



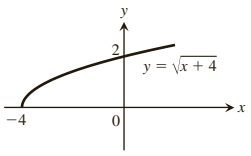
31. $y = 2x$



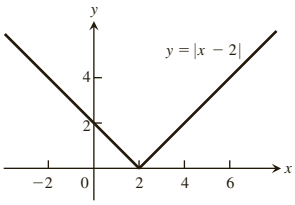
33. $y - 1 = \dfrac{1}{x-1}$



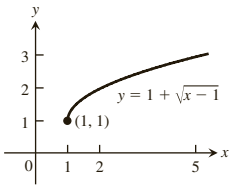
35.



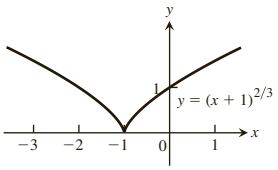
37.



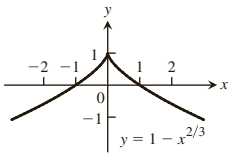
39.



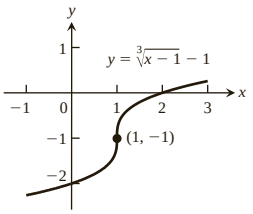
41.



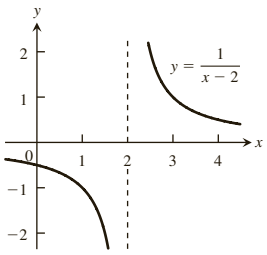
43.



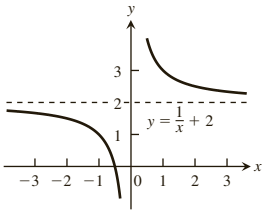
45.



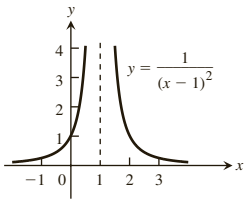
47.



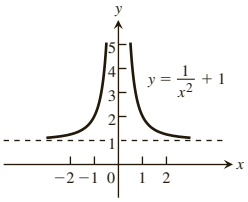
49.



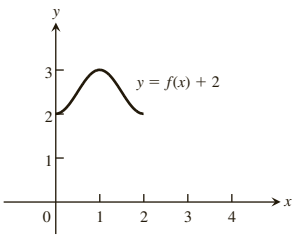
51.



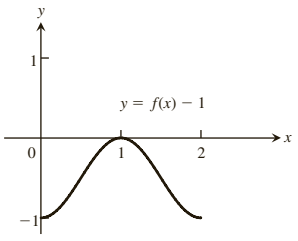
53.



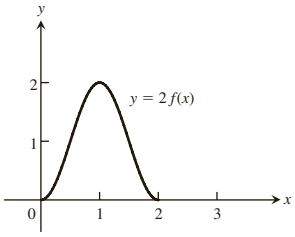
55. ***a)*** $D: [0, 2]$, $R: [2, 3]$

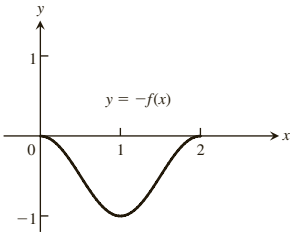


b) $D: [0, 2]$, $R: [-1, 0]$

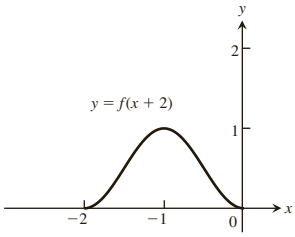


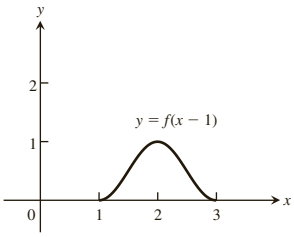
c) $D: [0, 2]$, $R: [0, 2]$ ***d)*** $D: [0, 2]$, $R: [-1, 0]$



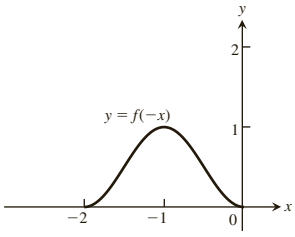


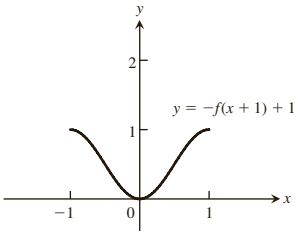
e) $D: [-2, 0]$, $R: [0, 1]$ ***f)*** $D: [1, 3]$, $R: [0, 1]$





g) $D: [-2, 0]$, $R: [0, 1]$ ***h)*** $D: [-1, 1]$, $R: [0, 1]$

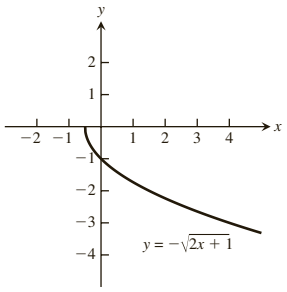




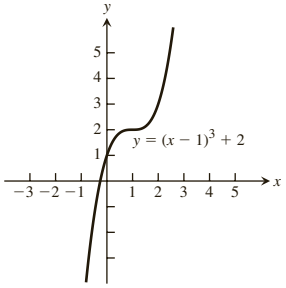
57. $y = 3x^2 - 3$ **59.** $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2x^2}$ **61.** $y = \sqrt{4x + 1}$

63. $y = \sqrt{4 - \dfrac{x^2}{4}}$ **65.** $y = 1 - 27x^3$

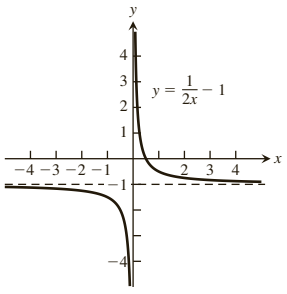
67.



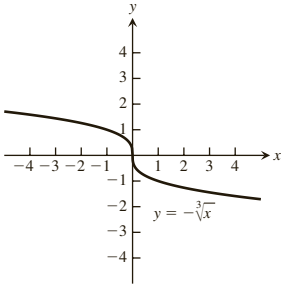
69.



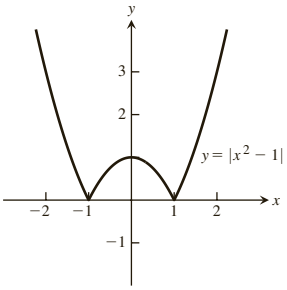
71.



73.



75.



77. ***a)*** impar ***b)*** impar ***c)*** impar ***d)*** par ***e)*** par ***f)*** par ***g)*** par ***h)*** par ***i)*** impar

Sección 1.3, páginas 27 a 29

1. ***a)*** 8π m ***b)*** $\dfrac{55\pi}{9}$ m **3.** 8.4 in

5.

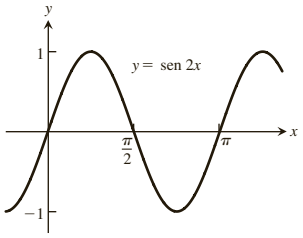
θ	$-\pi$	$-2\pi/3$	0	$\pi/2$	$3\pi/4$
sen θ	0	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
cos θ	-1	$-\dfrac{1}{2}$	1	0	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
tan θ	0	$\sqrt{3}$	0	IND	-1
cot θ	IND	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	IND	0	-1
sec θ	-1	-2	1	IND	$-\sqrt{2}$
csc θ	IND	$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	IND	1	$\sqrt{2}$

7. $\cos x = -4/5, \tan x = -3/4$

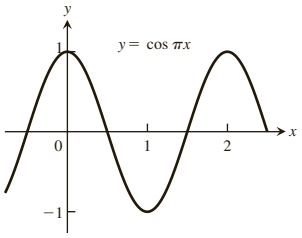
9. $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{8}}{3}, \tan x = -\sqrt{8}$

11. $\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \cos x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

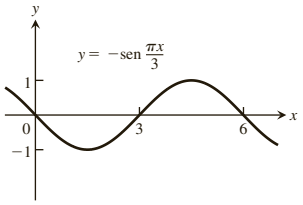
13. Periodo π



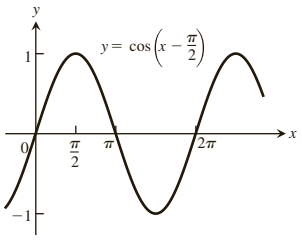
15. Periodo 2



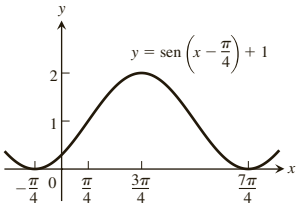
17. Periodo 6



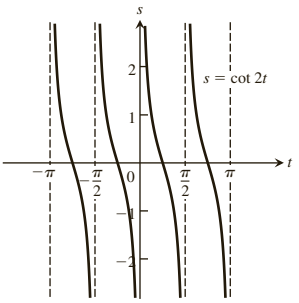
19. Periodo 2π



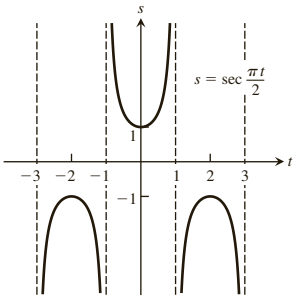
21. Periodo 2π



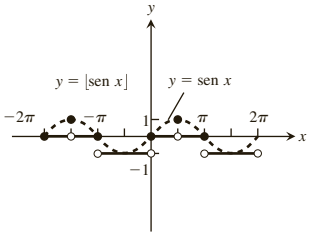
23. Periodo $\pi/2$, simétrica con respecto al origen



25. Periodo 4, simétrica con respecto al eje y



29. $D: (-\infty, \infty)$, $R: y = -1, 0, 1$

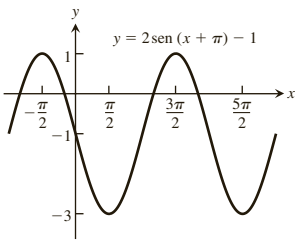


39. $-\cos x$ **41.** $-\cos x$ **43.** $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **45.** $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

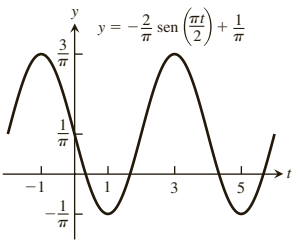
47. $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ **49.** $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$ **51.** $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$

53. $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}$ **59.** $\sqrt{7} \approx 2.65$ **63.** $a = 1.464$

65. $A = 2, B = 2\pi$, $C = -\pi, D = -1$



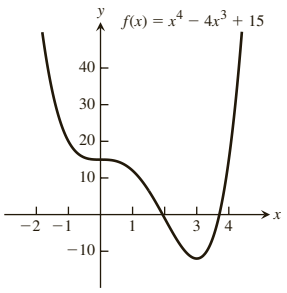
67. $A = -\dfrac{2}{\pi}, B = 4$, $C = 0, D = \dfrac{1}{\pi}$



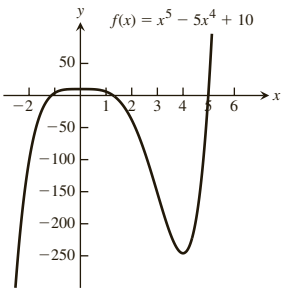
Sección 1.4, páginas 34 a 36

1. d **3.** d

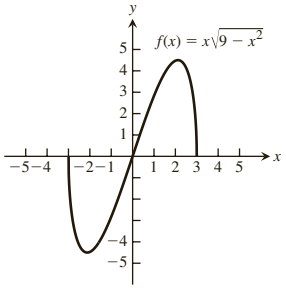
5. $[-3, 5]$ por $[-15, 40]$



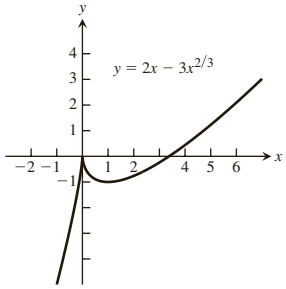
7. $[-3, 6]$ por $[-250, 50]$



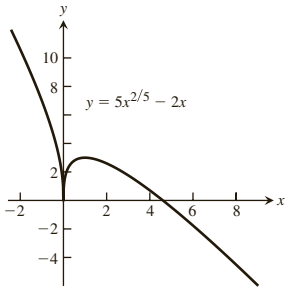
9. $[-5, 5]$ por $[-6, 6]$



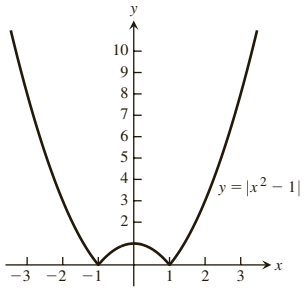
11. $[-2, 6]$ por $[-5, 4]$



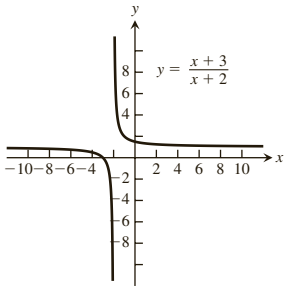
13. $[-2, 8]$ por $[-5, 10]$



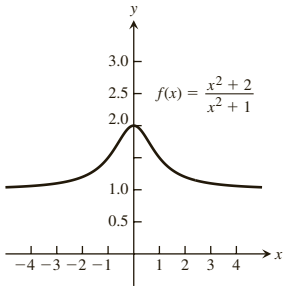
15. $[-3, 3]$ por $[0, 10]$



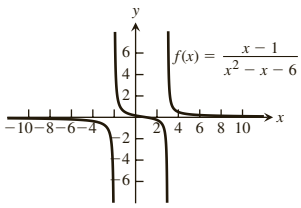
17. $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$



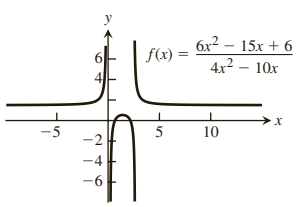
19. $[-4, 4]$ por $[0, 3]$



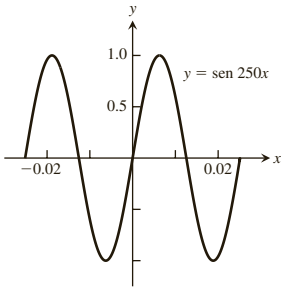
21. $[-10, 10]$ por $[-6, 6]$



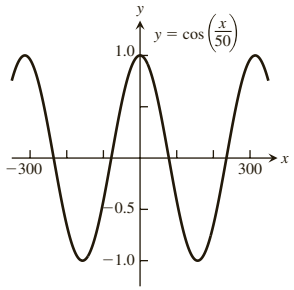
23. $[-6, 10]$ por $[-6, 6]$



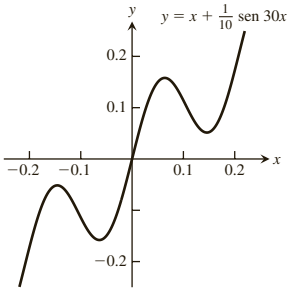
25. $\left[-\dfrac{\pi}{125}, \dfrac{\pi}{125}\right]$ por $[-1.25, 1.25]$

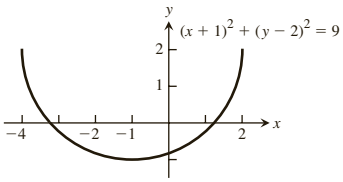


27. $[-100\pi, 100\pi]$ por $[-1.25, 1.25]$

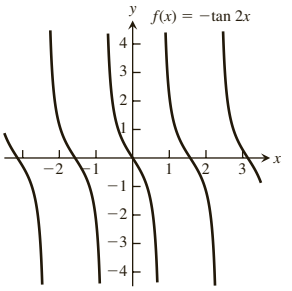


29. $\left[-\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{15}\right]$ por $[-0.25, 0.25]$ **31.**

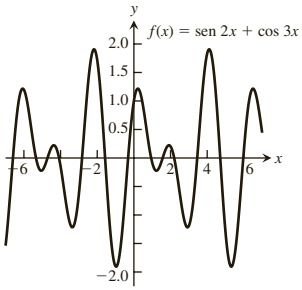




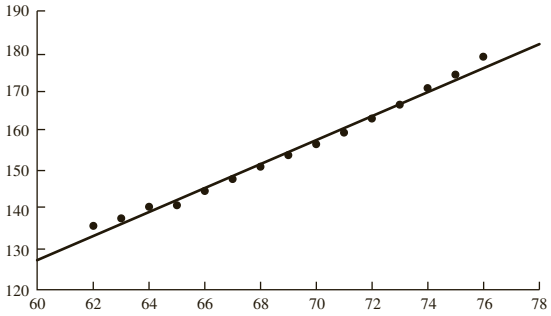
33.



35.

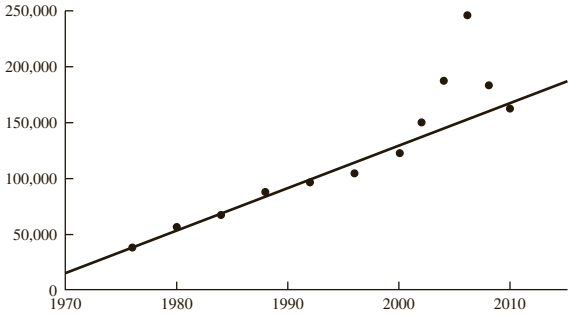


37. ***a*)** y ***b*)** $y = 3.0625x - 56.213$



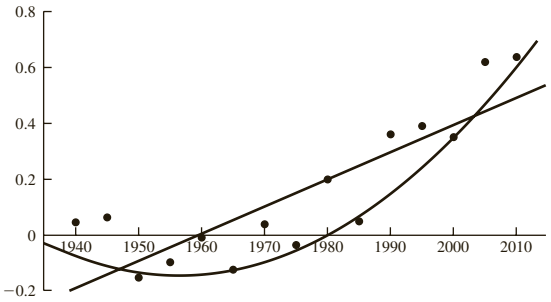
***c*)** Sí, $y(79) = 185.7$ lb.

39. ***a*)** y ***b*)** $y = 3814x - 7.4988 \cdot 10^6$



***c*)** El precio de una casa dentro de la "burbuja" se infló, en el sentido de que excedió la tendencia histórica.

41. ***a*)** y ***b*)** $y = 9.7571 \cdot 10^{-3}x - 19.118$



***c*)** $y = 2.6076 \cdot 10^{-4}x^2 - 1.0203x + 997.90$

Ejercicios de práctica, páginas 36 a 38

1. $A = \pi r^2, C = 2\pi r, A = \frac{C^2}{4\pi}$ **3.** $x = \tan\theta, y = \tan^2\theta$

5. Origen **7.** Ninguna **9.** Par **11.** Par
13. Impar **15.** Ninguna
17. ***a*)** Par ***b*)** Impar ***c*)** Impar ***d*)** Par ***e*)** Par
19. ***a*)** Dominio: todos los reales ***b*)** Rango: $[-2, \infty)$
21. ***a*)** Dominio: $[-4, 4]$ ***b*)** Rango: $[0, 4]$
23. ***a*)** Dominio: todos los reales ***b*)** Rango: $(-3, \infty)$
25. ***a*)** Dominio: todos los reales ***b*)** Rango: $[-3, 1]$
27. ***a*)** Dominio: $(3, \infty)$ ***b*)** Rango: todos los reales
29. ***a*)** Creciente ***b*)** Ninguna ***c*)** Decreciente ***d*)** Creciente
31. ***a*)** Dominio: $[-4, 4]$ ***b*)** Rango: $[0, 2]$

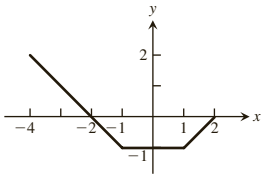
33. $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

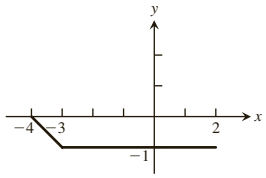
35. ***a*)** 1 ***b*)** $\frac{1}{\sqrt{2.5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$ ***c*)** $x, x \neq 0$

***d*)** $\frac{1}{\sqrt{1/\sqrt{x+2}+2}}$

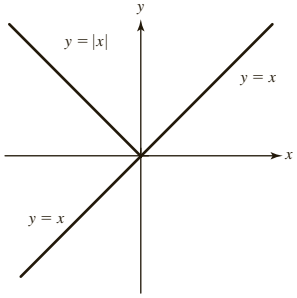
37. ***a*)** $(f \circ g)(x) = -x, x \ge -2, (g \circ f)(x) = \sqrt{4 - x^2}$
***b*)** Dominio $(f \circ g)$: $[-2, \infty)$, dominio $(g \circ f)$: $[-2, 2]$
***c*)** Rango $(f \circ g)$: $(-\infty, 2]$, rango $(g \circ f)$: $[0, 2]$

39.





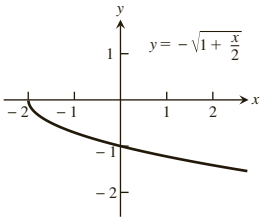
41. Sustituya la porción para $x < 0$ con la imagen especular de la porción para $x > 0$ para hacer que la nueva gráfica sea simétrica con respecto al eje y.



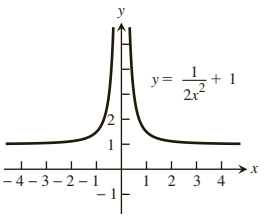
43. Refleja la porción para $y < 0$ con respecto al eje x
45. Refleja la porción para $y < 0$ con respecto al eje x
47. Agrega la imagen especular de la porción para $x > 0$, para hacer que la nueva gráfica sea simétrica con respecto al eje y

49. ***a)*** $y = g(x - 3) + \frac{1}{2}$ ***b)*** $y = g\left(x + \frac{2}{3}\right) - 2$
c) $y = g(-x)$ ***d)*** $y = -g(x)$ ***e)*** $y = 5g(x)$
f) $y = g(5x)$

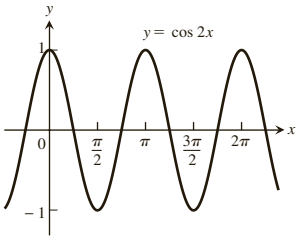
51.



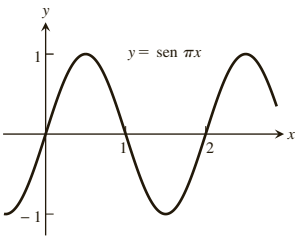
53.



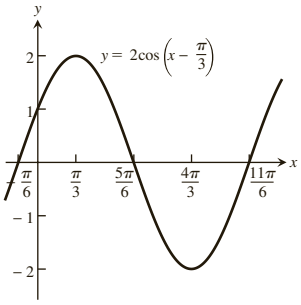
55. Periodo π



57. Periodo 2



59.



61. ***a)*** $a = 1 \quad b = \sqrt{3}$ ***b)*** $a = 2\sqrt{3}/3 \quad c = 4\sqrt{3}/3$

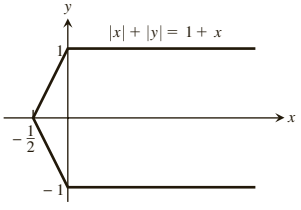
63. ***a)*** $a = \dfrac{b}{\tan B}$ ***b)*** $c = \dfrac{a}{\text{sen } A}$

65. ≈16.98 m **67. *b)*** 4π

Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 38 a 39

1. Sí. Por ejemplo: $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 1/x$, o $f(x) = 2x$ y $g(x) = x/2$, o $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$.
3. Si $f(x)$ es impar, entonces, $g(x) = f(x) - 2$ no es impar. Tampoco $g(x)$ es par, a menos que $f(x) = 0$ para toda x. Si f es par, entonces, $g(x) = f(x) - 2$ también es par.

5.



Capítulo 2

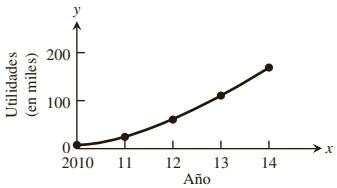
Sección 2.1, páginas 46 a 49

1. ***a)*** 19 ***b)*** 1
3. ***a)*** $-\frac{4}{\pi}$ ***b)*** $-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ **5.** 1
7. ***a)*** 4 ***b)*** $y = 4x - 9$
9. ***a)*** 2 ***b)*** $y = 2x - 7$
11. ***a)*** 12 ***b)*** $y = 12x - 16$
13. ***a)*** −9 ***b)*** $y = -9x - 2$
15. Sus estimaciones podrían no estar totalmente de acuerdo con esto.
a)

PQ_1	PQ_2	PQ_3	PQ_4
43	46	49	50

Las unidades apropiadas son m/s.
b) ≈ 50 m/s o 180 km/h

17. ***a)***



b) ≈ $56,000/año
c) ≈ $42,000/año

19. ***a)*** 0.414213, 0.449489, $\left(\sqrt{1 + h} - 1\right)/h$ ***b)*** $g(x) = \sqrt{x}$

$1 + h$	1.1	1.01	1.001	1.0001
$\sqrt{1 + h}$	1.04880	1.004987	1.0004998	1.0000499
$\left(\sqrt{1 + h} - 1\right)/h$	0.4880	0.4987	0.4998	0.499

1.00001	1.000001
1.000005	1.0000005
0.5	0.5

c) 0.5 ***d)*** 0.5

21. ***a)*** 15 mph, 3.3 mph, 10 mph ***b)*** 10 mph, 0 mph, 4 mph
c) 20 mph cuando $t = 3.5$ h

Sección 2.2, páginas 56 a 59

1. ***a)*** No existe. Cuando x se aproxima a 1 por la derecha, $g(x)$ se aproxima a 0. Cuando x se aproxima a 1 por la izquierda, $g(x)$ se aproxima a 1. No hay un número único L para el que todos los valores de $g(x)$ estén arbitrariamente cerca cuando $x \to 1$.
b) 1 ***c)*** 0 ***d)*** 1/2
3. ***a)*** Verdadero ***b)*** Verdadero ***c)*** Falso ***d)*** Falso
e) Falso ***f)*** Verdadero ***g)*** Verdadero
5. Cuando x se aproxima a 0 por la izquierda, $x/|x|$ se aproxima a -1. Cuando x se aproxima a 0 por la derecha, $x/|x|$ se aproxima a 1. No hay un número único L para el que todos los valores de la función estén arbitrariamente cerca cuando $x \to 0$.
7. No se puede decir nada. **9.** No; no; no **11.** −4 **13.** −8
15. 3 **17.** $-25/2$ **19.** 16 **21.** $3/2$ **23.** $1/10$
25. −7 **27.** $3/2$ **29.** $-1/2$ **31.** −1 **33.** $4/3$
35. $1/6$ **37.** 4 **39.** $1/2$ **41.** $3/2$ **43.** −1 **45.** 1
47. $1/3$ **49.** $\sqrt{4 - \pi}$
51. ***a)*** Regla del cociente ***b)*** Reglas de la diferencia y de la potencia
c) Reglas de la suma y del múltiplo constante
53. ***a)*** −10 ***b)*** −20 ***c)*** −1 ***d)*** 5/7
55. ***a)*** 4 ***b)*** −21 ***c)*** −12 ***d)*** $-7/3$

57. 2 **59.** 3 **61.** $1/(2\sqrt{7})$ **63.** $\sqrt{5}$

65. ***a)*** El límite es 1.

67. ***a)*** $f(x) = (x^2 - 9)/(x + 3)$

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0001	-3.00001	-3.000001
$f(x)$	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001

x	-2.9	-2.99	-2.999	-2.9999	-2.99999	-2.999999
$f(x)$	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999	-5.99999	-5.999999

c) $\lim_{x \to -3} f(x) = -6$

69. ***a)*** $G(x) = (x + 6)/(x^2 + 4x - 12)$

x	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999
$G(x)$	$-.126582$	$-.1251564$	$-.1250156$	$-.1250015$

-5.99999	-5.999999
$-.1250001$	$-.1250000$

x	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001
$G(x)$	$-.123456$	$-.124843$	$-.124984$	$-.124998$

-6.00001	-6.000001
$-.124999$	$-.124999$

c) $\lim_{x \to -6} G(x) = -1/8 = -0.125$

71. ***a)*** $f(x) = (x^2 - 1)/(|x| - 1)$

x	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	-1.00001	-1.000001
$f(x)$	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	2.000001

x	$-.9$	$-.99$	$-.999$	$-.9999$	$-.99999$	$-.999999$
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	1.999999

c) $\lim_{x \to -1} f(x) = 2$

73. ***a)*** $g(\theta) = (\operatorname{sen} \theta)/\theta$

θ	.1	.01	.001	.0001	.00001	.000001
$g(\theta)$	.998334	.999983	.999999	.999999	.999999	.999999

θ	$-.1$	$-.01$	$-.001$	$-.0001$	$-.00001$	$-.000001$
$g(\theta)$	.998334	.999983	.999999	.999999	.999999	.999999

$\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = 1$

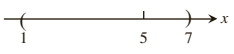
75. $c = 0, 1, -1$; el límite es 0 en $c = 0$, y 1 en $c = 1, -1$.

77. 7 **79.** ***a)*** 5 ***b)*** 5

81. ***a)*** 0 ***b)*** 0

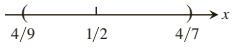
Sección 2.3, páginas 65 a 68

1. $\delta = 2$



3. $\delta = 1/2$

5. $\delta = 1/18$



7. $\delta = 0.1$ **9.** $\delta = 7/16$ **11.** $\delta = \sqrt{5} - 2$

13. $\delta = 0.36$ **15.** $(3.99, 4.01)$, $\delta = 0.01$

17. $(-0.19, 0.21)$, $\delta = 0.19$ **19.** $(3, 15)$, $\delta = 5$

21. $(10/3, 5)$, $\delta = 2/3$

23. $\left(-\sqrt{4.5}, -\sqrt{3.5}\right)$, $\delta = \sqrt{4.5} - 2 \approx 0.12$

25. $\left(\sqrt{15}, \sqrt{17}\right)$, $\delta = \sqrt{17} - 4 \approx 0.12$

27. $\left(2 - \dfrac{0.03}{m}, 2 + \dfrac{0.03}{m}\right)$, $\delta = \dfrac{0.03}{m}$

29. $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{c}{m}, \dfrac{c}{m} + \dfrac{1}{2}\right)$, $\delta = \dfrac{c}{m}$ **31.** $L = -3$, $\delta = 0.01$

33. $L = 4$, $\delta = 0.05$ **35.** $L = 4$, $\delta = 0.75$

55. $[3.384, 3.387]$. Para asegurar la respuesta, el extremo izquierdo se redondeó hacia arriba, y el extremo derecho hacia abajo.

59. El límite no existe cuando x se aproxima a 3.

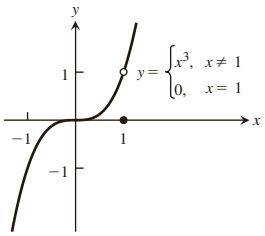
Sección 2.4, páginas 73 a 75

1. ***a)*** Verdadero ***b)*** Verdadero ***c)*** Falso ***d)*** Verdadero ***e)*** Verdadero ***f)*** Verdadero ***g)*** Falso ***h)*** Falso ***i)*** Falso ***j)*** Falso ***k)*** Verdadero ***l)*** Falso

3. ***a)*** 2, 1 ***b)*** No, $\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$ ***c)*** 3, 3 ***d)*** Sí, 3

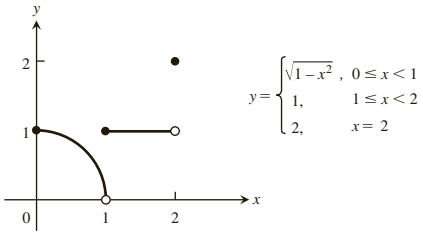
5. ***a)*** No ***b)*** Sí, 0 ***c)*** No

7. ***a)***



b) 1, 1 ***c)*** Sí, 1

9. ***a)*** $D: 0 \leq x \leq 2, R: 0 < y \leq 1$ y $y = 2$ ***b)*** $(0, 1) \cup (1, 2)$ ***c)*** $x = 2$ ***d)*** $x = 0$



11. $\sqrt{3}$ **13.** 1 **15.** $2/\sqrt{5}$ **17.** ***a)*** 1 ***b)*** -1

19. ***a)*** 1 ***b)*** $2/3$ **21.** 1 **23.** $3/4$ **25.** 2 **27.** $1/2$

29. 2 **31.** 0 **33.** 1 **35.** $1/2$ **37.** 0 **39.** $3/8$

41. 3 **47.** $\delta = \epsilon^2$, $\lim_{x \to 5^+} \sqrt{x - 5} = 0$

51. ***a)*** 400 ***b)*** 399 ***c)*** El límite no existe.

Sección 2.5, páginas 84 a 86

1. No; discontinua en $x = 2$; no definida en $x = 2$

3. Continua **5.** ***a)*** Sí ***b)*** Sí ***c)*** Sí ***d)*** Sí

7. ***a)*** No ***b)*** No **9.** 0

11. 1, no se puede eliminar; 0, se puede eliminar

13. Toda x, excepto $x = 2$ **15.** Toda x, excepto $x = 3, x = 1$

17. Toda x **19.** Toda x, excepto $x = 0$

21. Toda x, excepto $n\pi/2$, n es cualquier entero

23. Toda x, excepto $n\pi/2$, n es un entero impar

25. Toda $x \geq -3/2$ **27.** Toda x **29.** Toda x

31. 0; continua en $x = \pi$ **33.** 1; continua en $y = 1$

35. $\sqrt{2}/2$; continua en $t = 0$ **37.** 0; continua en $x = 0$

39. $g(3) = 6$ **41.** $f(1) = 3/2$ **43.** $a = 4/3$ **45.** $a = -2, 3$

47. $a = 5/2, b = -1/2$ **71.** $x \approx 1.8794, -1.5321, -0.3473$

73. $x \approx 1.7549$ **75.** $x \approx 3.5156$ **77.** $x \approx 0.7391$

Sección 2.6, páginas 97 a 99

1. *a*) 0 *b*) -2 *c*) 2 *d*) No existe *e*) -1 *f*) ∞ *g*) No existe *h*) 1 *i*) 0

3. *a*) -3 *b*) -3 **5.** *a*) $1/2$ *b*) $1/2$ **7.** *a*) $-5/3$ *b*) $-5/3$ **9.** 0 **11.** -1 **13.** *a*) $2/5$ *b*) $2/5$

15. *a*) 0 *b*) 0 **17.** *a*) 7 *b*) 7 **19.** *a*) 0 *b*) 0

21. *a*) ∞ *b*) ∞ **23.** 2 **25.** ∞ **27.** 0

29. 1 **31.** ∞ **33.** 1 **35.** $1/2$ **37.** ∞ **39.** $-\infty$

41. $-\infty$ **43.** ∞ **45.** *a*) ∞ *b*) $-\infty$ **47.** ∞

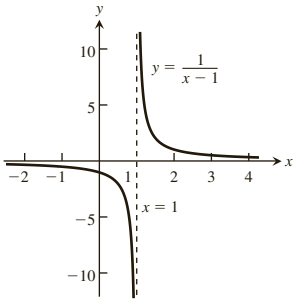
49. ∞ **51.** $-\infty$ **53.** *a*) ∞ *b*) $-\infty$ *c*) $-\infty$ *d*) ∞

55. *a*) $-\infty$ *b*) ∞ *c*) 0 *d*) $3/2$

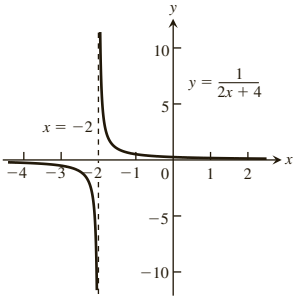
57. *a*) $-\infty$ *b*) $1/4$ *c*) $1/4$ *d*) $1/4$ *e*) Será $-\infty$

59. *a*) $-\infty$ *b*) ∞ **61.** *a*) ∞ *b*) ∞ *c*) ∞ *d*) ∞

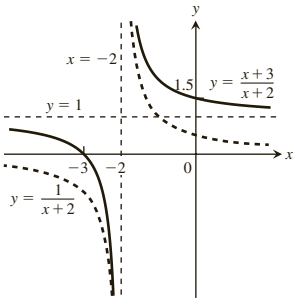
63.



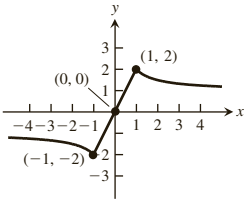
65.



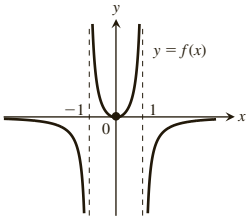
67.



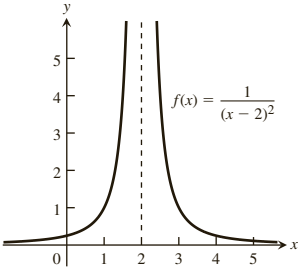
69. Ésta es una posibilidad



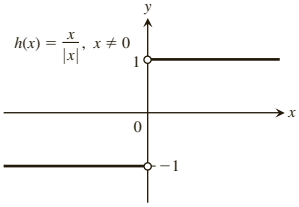
71. Ésta es una posibilidad



73. Ésta es una posibilidad



75. Ésta es una posibilidad



79. Una cuando mucho

81. 0 **83.** $-3/4$ **85.** $5/2$

93. *a*) Para todo número real positivo B, existe un número correspondiente $\delta > 0$ tal que para toda x

$$c - \delta < x < c \quad \Rightarrow \quad f(x) > B.$$

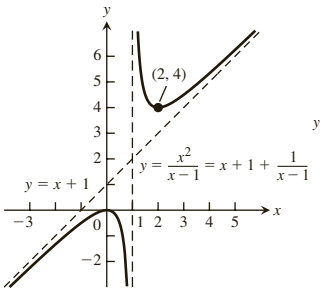
b) Para todo número real negativo $-B$, existe un número correspondiente $\delta > 0$ tal que para toda x

$$c < x < c + \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < -B.$$

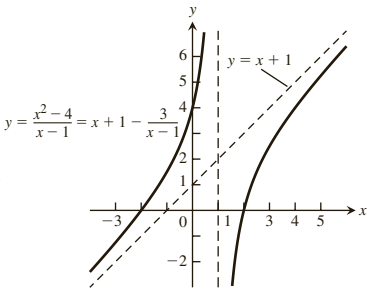
c) Para todo número real negativo $-B$, existe un número correspondiente $\delta > 0$ tal que para toda x

$$c - \delta < x < c \quad \Rightarrow \quad f(x) < -B.$$

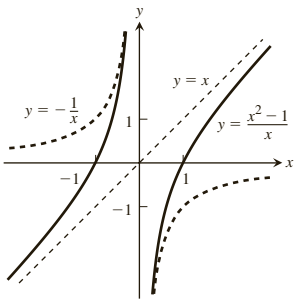
99.



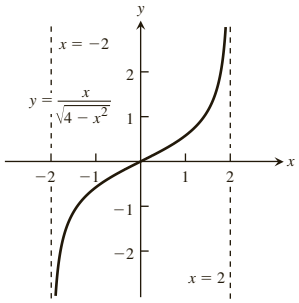
101.



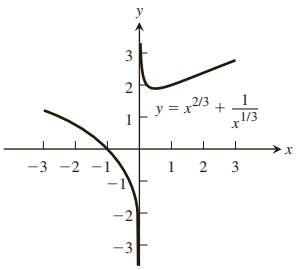
103.



105.



107.



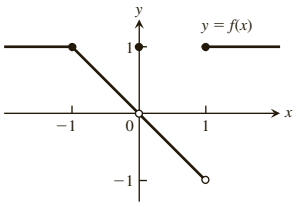
109. En ∞: ∞, en $-\infty$: 0

Ejercicios de práctica, páginas 100 a 101

1. En $x = -1$: $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$, entonces, $\lim_{x \to -1} f(x) = 1 = f(-1)$; continua en $x = -1$

En $x = 0$: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, entonces, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Sin embargo, $f(0) \neq 0$, de modo que f es discontinua en $x = 0$. La discontinuidad se puede eliminar redefiniendo $f(0)$ como 0.

En $x = 1$: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$, entonces, $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe. La función es discontinua en $x = 1$, y la discontinuidad no se puede eliminar.



3. *a*) -21 *b*) 49 *c*) 0 *d*) 1 *e*) 1 *f*) 7 *g*) -7 *h*) $-\frac{1}{7}$ **5.** 4

7. *a*) $(-\infty, +\infty)$ *b*) $[0, \infty)$ *c*) $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ *d*) $(0, \infty)$

9. *a*) No existe *b*) 0 **11.** $\frac{1}{2}$ **13.** $2x$ **15.** $-\frac{1}{4}$

17. $2/3$ **19.** $2/\pi$ **21.** 1 **23.** 4

25. 2 **27.** 0

31. La respuesta es no en ambos casos, ya que $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe, y $\lim_{x \to -1} f(x)$ no existe.

33. Sí, f tiene una extensión continua, para $a = 1$ con $f(1) = 4/3$.

35. No **37.** $2/5$ **39.** 0 **41.** $-\infty$ **43.** 0 **45.** 1

47. *a*) $x = 3$ *b*) $x = 1$ *c*) $x = -4$

Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 102 a 104

3. 0; el límite izquierdo es necesario porque la función no está definida para $v > c$.

5. $65 < t < 75$; la temperatura debe alterarse cuando mucho 5°F

13. *a*) *B* *b*) *A* *c*) *A* *d*) *A*

21. *a*) $\lim_{a \to 0} r_+(a) = 0.5$, $\lim_{a \to -1^+} r_+(a) = 1$

b) $\lim_{a \to 0} r_-(a)$ no existe, $\lim_{a \to -1^+} r_-(a) = 1$

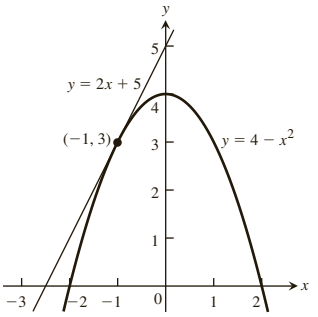
25. 0 **27.** 1 **29.** 4 **31.** $y = 2x$ **33.** $y = x, y = -x$

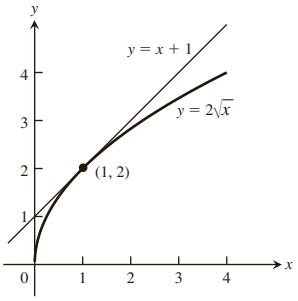
Capítulo 3

Sección 3.1, páginas 108 a 109

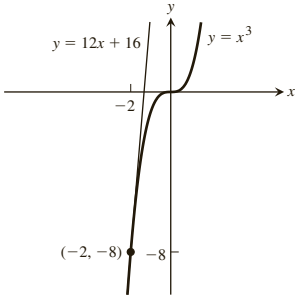
1. P_1: $m_1 = 1$, P_2: $m_2 = 5$ **3.** P_1: $m_1 = 5/2$, P_2: $m_2 = -1/2$

5. $y = 2x + 5$ **7.** $y = x + 1$





9. $y = 12x + 16$



11. $m = 4$, $y - 5 = 4(x - 2)$

13. $m = -2$, $y - 3 = -2(x - 3)$

15. $m = 12$, $y - 8 = 12(t - 2)$

17. $m = \frac{1}{4}$, $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$

19. $m = -1$ **21.** $m = -1/4$

23. *a*) Es la razón de cambio del número de células cuando $t = 5$. Las unidades son el número de células por hora.

b) $P'(3)$ porque la pendiente de la curva es mayor ahí.

c) 51.72 ≈ 52 células/hr

25. $(-2, -5)$ **27.** $y = -(x + 1)$, $y = -(x - 3)$

29. 19.6 m/s **31.** 6π **35.** Sí **37.** Sí

39. *a*) En ninguna parte **41.** *a*) En $x = 0$

43. *a*) En ninguna parte **45.** *a*) En $x = 1$ **47.** *a*) En $x = 0$

Sección 3.2, páginas 115 a 118

1. $-2x, 6, 0, -2$ **3.** $-\frac{2}{t^3}, 2, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

5. $\frac{3}{2\sqrt{3\theta}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2\sqrt{2}}$ **7.** $6x^2$ **9.** $\frac{1}{(2t + 1)^2}$

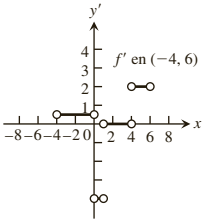
11. $\frac{3}{2}q^{1/2}$ **13.** $1 - \frac{9}{x^2}, 0$ **15.** $3t^2 - 2t, 5$

17. $\frac{-4}{(x - 2)\sqrt{x - 2}}$, $y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 6)$ **19.** 6

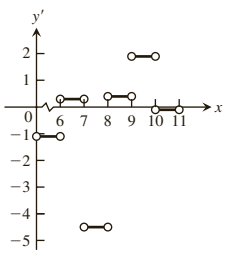
21. $1/8$ **23.** $\frac{-1}{(x + 2)^2}$ **25.** $\frac{-1}{(x - 1)^2}$ **27.** *b*) **29.** *d*)

31. *a*) $x = 0, 1, 4$

b)



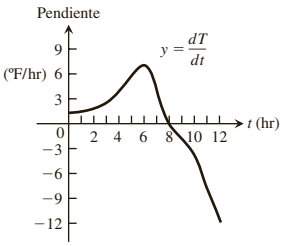
33.



35. *a*) **i.** 1.5 °F/hr **ii.** 2.9 °F/hr **iii.** 0 °F/hr **iv.** −3.7 °F/hr

b) 7.3 °F/hr en 12 P.M., −11 °F/hr en 6 P.M.

c)



37. Como $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = 1$ mientras que $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = 0$, $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$ no existe y $f(x)$ no es diferenciable en $x = 0$.

39. Como $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = 2$ mientras que $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{1}{2}$, $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$ no existe y $f(x)$ no es diferenciable en $x = 1$.

41. Como $f(x)$ no es continua en $x = 0$, no es diferenciable en $x = 0$.
43. *a*) $-3 \le x \le 2$ *b*) Ninguna *c*) Ninguna
45. *a*) $-3 \le x < 0, 0 < x \le 3$ *b*) Ninguna *c*) $x = 0$
47. *a*) $-1 \le x < 0, 0 < x \le 2$ *b*) $x = 0$ *c*) Ninguna

Sección 3.3, páginas 125 a 127

1. $\frac{dy}{dx} = -2x, \frac{d^2y}{dx^2} = -2$

3. $\frac{ds}{dt} = 15t^2 - 15t^4, \frac{d^2s}{dt^2} = 30t - 60t^3$

5. $\frac{dy}{dx} = 4x^2 - 1, \frac{d^2y}{dx^2} = 8x$

7. $\frac{dw}{dz} = -\frac{6}{z^3} + \frac{1}{z^2}, \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{18}{z^4} - \frac{2}{z^3}$

9. $\frac{dy}{dx} = 12x - 10 + 10x^{-3}, \frac{d^2y}{dx^2} = 12 - 30x^{-4}$

11. $\frac{dr}{ds} = \frac{-2}{3s^3} + \frac{5}{2s^2}, \frac{d^2r}{ds^2} = \frac{2}{s^4} - \frac{5}{s^3}$

13. $y' = -5x^4 + 12x^2 - 2x - 3$

15. $y' = 3x^2 + 10x + 2 - \frac{1}{x^2}$ **17.** $y' = \frac{-19}{(3x - 2)^2}$

19. $g'(x) = \frac{x^2 + x + 4}{(x + 0.5)^2}$ **21.** $\frac{dv}{dt} = \frac{t^2 - 2t - 1}{(1 + t^2)^2}$

23. $f'(s) = \frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + 1)^2}$ **25.** $v' = -\frac{1}{x^2} + 2x^{-3/2}$

27. $y' = \frac{-4x^3 - 3x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2(x^2 + x + 1)^2}$

29. $y' = 2x^3 - 3x - 1, y'' = 6x^2 - 3, y''' = 12x, y^{(4)} = 12, y^{(n)} = 0$ para $n \ge 5$

31. $y' = 3x^2 + 8x + 1, y'' = 6x + 8, y''' = 6, y^{(n)} = 0$ para $n \ge 4$

33. $y' = 2x - 7x^{-2}, y'' = 2 + 14x^{-3}$

35. $\frac{dr}{d\theta} = 3\theta^{-4}, \frac{d^2r}{d\theta^2} = -12\theta^{-5}$ **37.** $\frac{dw}{dz} = -z^{-2} - 1, \frac{d^2w}{dz^2} = 2z^{-3}$

39. $\frac{dp}{dq} = \frac{1}{6}q + \frac{1}{6}q^{-3} + q^{-5}, \frac{d^2p}{dq^2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}q^{-4} - 5q^{-6}$

41. *a*) 13 *b*) -7 *c*) $7/25$ *d*) 20

43. *a*) $y = -\frac{x}{8} + \frac{5}{4}$ *b*) $m = -4$ en $(0, 1)$
c) $y = 8x - 15, y = 8x + 17$

45. $y = 4x, y = 2$ **47.** $a = 1, b = 1, c = 0$

49. $(2, 4)$ **51.** $(0, 0), (4, 2)$ **53.** *a*) $y = 2x + 2$ *c*) $(2, 6)$

55. 50 **57.** $a = -3$

59. $P'(x) = na_nx^{n-1} + (n - 1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1$

61. La regla del producto es entonces la regla del múltiplo constante, de manera que esta última es un caso especial de la regla del producto.

63. *a*) $\frac{d}{dx}(uvw) = uvw' + uv'w + u'vw$

b) $\frac{d}{dx}(u_1u_2u_3u_4) = u_1u_2u_3u_4' + u_1u_2u_3'u_4 + u_1u_2'u_3u_4 + u_1'u_2u_3u_4$

c) $\frac{d}{dx}(u_1 \cdots u_n) = u_1u_2 \cdots u_{n-1}u_n' + u_1u_2 \cdots u_{n-2}u_{n-1}'u_n + \cdots + u_1'u_2 \cdots u_n$

65. $\frac{dP}{dV} = -\frac{nRT}{(V - nb)^2} + \frac{2an^2}{V^3}$

Sección 3.4, páginas 133 a 137

1. *a*) -2 m, -1 m/s
b) 3 m/s, 1 m/s; 2 m/s^2, 2 m/s^2
c) Cambia de dirección en $t = 3/2$ s

3. *a*) -9 m, -3 m/s
b) 3 m/s, 12 m/s; 6 m/s^2, -12 m/s^2
c) No cambia de dirección

5. *a*) -20 m, -5 m/s
b) 45 m/s, $(1/5)$ m/s; 140 m/s^2, $(4/25)$ m/s^2
c) No cambia de dirección

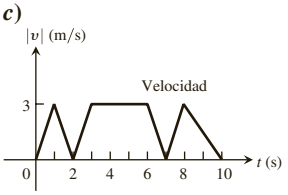
7. *a*) $a(1) = -6$ m/s^2, $a(3) = 6$ m/s^2
b) $v(2) = 3$ m/s *c*) 6 m

9. Marte: ≈ 7.5 s, Júpiter: ≈ 1.2 s

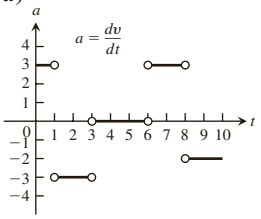
11. $g_s = 0.75$ m/s^2

13. *a*) $v = -32t$, $|v| = 32t$ ft/seg, $a = -32$ ft/s^2
b) $t \approx 3.3$ s
c) $v \approx -107.0$ ft/s

15. *a*) $t = 2, t = 7$ *b*) $3 \le t \le 6$
c)



d)



17. *a*) 190 ft/s *b*) 2 s *c*) 8 s, 0 ft/s
d) 10.8 s, 90 ft/s *e*) 2.8 s
f) La aceleración máxima se presenta 2 sundos después del lanzamiento
g) La aceleración es constante entre los 2 y 10.8 s, -32 ft/s^2

19. *a*) $\frac{4}{7}$seg, 280 cm/s *b*) 560 cm/s, 980 cm/s^2
c) 29.75 disparos/s

21. C = posición, A = velocidad, B = aceleración

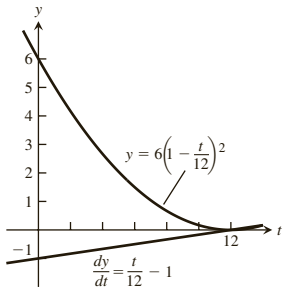
23. *a*) \$110/lavadora *b*) \$80 *c*) \$79.90

25. *a*) $b'(0) = 10^4$ bacterias/hr *b*) $b'(5) = 0$ bacterias/hr
c) $b'(10) = -10^4$ bacterias/hr

27. *a*) $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{12} - 1$

b) El mayor valor de $\frac{dy}{dt}$ es 0 m/hr cuando $t = 12$ y el menor valor de $\frac{dy}{dt}$ es -1 m/hr cuando $t = 0$.

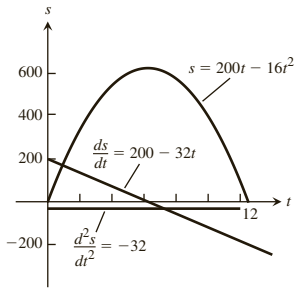
c)



29. 4.88 ft, 8.66 ft, ft adicionales para detener el automóvil para un incremento de 1 mph

31. $t = 25$ s, $D = \frac{6250}{9}$m

33.



a) $v = 0$ cuando $t = 6.25$ s

b) $v > 0$ cuando $0 \le t < 6.25 \Rightarrow$ el cuerpo se mueve hacia arriba; $v < 0$ cuando $6.25 < t \le 12.5 \Rightarrow$ el objeto se mueve hacia abajo.

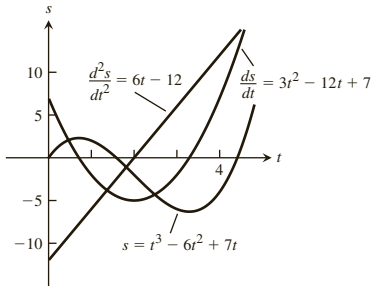
c) El objeto cambia de dirección en $t = 6.25$ s.

d) El objeto acelera en $(6.25, 12.5]$ y desacelera en $[0, 6.25)$.

e) El objeto se mueve más rápido en los extremos $t = 0$ y $t = 12.5$ cuando viaja a 200 ft/s. Se mueve más lento cuando en $t = 6.25$ cuando la velocidad es igual a 0.

f) Cuando $t = 6.25$, el cuerpo está a $s = 625$ m del origen, en la posición más lejana con respecto de éste.

35.



a) $v = 0$ cuando $t = \dfrac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ s

b) $v < 0$ cuando $\dfrac{6 - \sqrt{15}}{3} < t < \dfrac{6 + \sqrt{15}}{3} \Rightarrow$ el cuerpo se mueve hacia la izquierda $v > 0$ cuando $0 \le t < \dfrac{6 - \sqrt{15}}{3}$ o $\dfrac{6 + \sqrt{15}}{3} < t \le 4 \Rightarrow$ el cuerpo se mueve hacia la derecha.

c) El cuerpo cambia de dirección en $t = \dfrac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ s.

d) El objeto acelera en $\left(\dfrac{6 - \sqrt{15}}{3}, 2\right) \cup \left(\dfrac{6 + \sqrt{15}}{3}, 4\right]$ y desacelera en $\left[0, \dfrac{6 - \sqrt{15}}{3}\right) \cup \left(2, \dfrac{6 + \sqrt{15}}{3}\right)$.

e) El objeto se mueve más rápido en $t = 0$ y $t = 4$ cuando se mueve a 7 unidades/s, y se mueve más lento en $t = \dfrac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ s.

f) Cuando $t = \dfrac{6 + \sqrt{15}}{3}$ el cuerpo está en la posición $s \approx -6.303$ unidades, en el punto más lejano con respecto al origen.

Sección 3.5, páginas 141 a 143

1. $-10 - 3 \operatorname{sen} x$ **3.** $2x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x$

5. $-\csc x \cot x - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ **7.** $\operatorname{sen} x \sec^2 x + \operatorname{sen} x$

9. $x \tan^2 x + \sec x - \dfrac{1}{x^2}$ **11.** $\dfrac{-\csc^2 x}{(1 + \cot x)^2}$

13. $4 \tan x \sec x - \csc^2 x$ **15.** 0

17. $3x^2 \operatorname{sen} x \cos x + x^3 \cos^2 x - x^3 \operatorname{sen}^2 x$

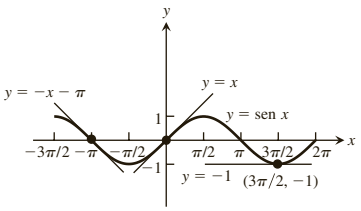
19. $\sec^2 t - 1$ **21.** $\dfrac{-2 \csc t \cot t}{(1 - \csc t)^2}$ **23.** $-\theta(\theta \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta)$

25. $\sec \theta \csc \theta (\tan \theta - \cot \theta) = \sec^2 \theta - \csc^2 \theta$ **27.** $\sec^2 q$

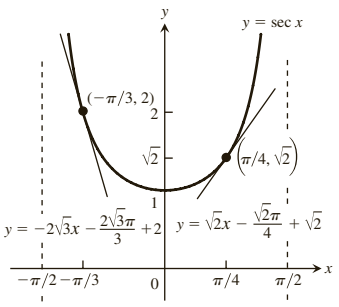
29. $\sec^2 q$ **31.** $\dfrac{q^3 \cos q - q^2 \operatorname{sen} q - q \cos q - \operatorname{sen} q}{(q^2 - 1)^2}$

33. ***a)*** $2 \csc^3 x - \csc x$ ***b)*** $2 \sec^3 x - \sec x$

35.

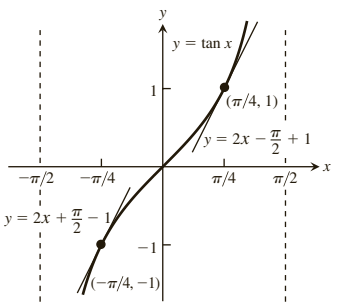


37.



39. Sí, en $x = \pi$ **41.** No

43. $\left(-\dfrac{\pi}{4}, -1\right); \left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$



45. ***a)*** $y = -x + \pi/2 + 2$ ***b)*** $y = 4 - \sqrt{3}$

47. 0 **49.** $\sqrt{3}/2$ **51.** -1 **53.** 0

55. $-\sqrt{2}$ m/s, $\sqrt{2}$ m/s, $\sqrt{2}$ m/s^2, $\sqrt{2}$ m/s^3

57. $c = 9$ **59.** $\operatorname{sen} x$

61. ***a)*** **i.** 10 cm **ii.** 5 cm **iii.** $-5\sqrt{2} \approx -7.1$ cm

b) **i.** 0 cm/s **ii.** $-5\sqrt{3} \approx -8.7$ cm/s **iii.** $-5\sqrt{2} \approx -7.1$ cm/s

Sección 3.6, páginas 148 a 151

1. $12x^3$ **3.** $3 \cos(3x + 1)$ **5.** $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

7. $2\pi x \sec^2(\pi x^2)$

9. Con $u = (2x + 1)$, $y = u^5$: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = 5u^4 \cdot 2 = 10(2x + 1)^4$

11. Con $u = (1 - (x/7))$, $y = u^{-7}$: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = -7u^{-8} \cdot \left(-\dfrac{1}{7}\right) = \left(1 - \dfrac{x}{7}\right)^{-8}$

13. Con $u = ((x^2/8) + x - (1/x))$, $y = u^4$: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = 4u^3 \cdot \left(\dfrac{x}{4} + 1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 4\left(\dfrac{x^2}{8} + x - \dfrac{1}{x}\right)^3\left(\dfrac{x}{4} + 1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

15. Con $u = \tan x$, $y = \sec u$: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = (\sec u \tan u)(\sec^2 x) = \sec(\tan x)\tan(\tan x)\sec^2 x$

17. Con $u = \tan x$, $y = u^3$: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = 3u^2\sec^2 x = 3\tan^2 x(\sec^2 x)$

19. $-\dfrac{1}{2\sqrt{3 - t}}$ **21.** $\dfrac{4}{\pi}(\cos 3t - \operatorname{sen} 5t)$ **23.** $\dfrac{\csc\theta}{\cot\theta + \csc\theta}$

25. $2x\operatorname{sen}^4 x + 4x^2\operatorname{sen}^3 x\cos x + \cos^{-2} x + 2x\cos^{-3} x\operatorname{sen} x$

27. $(3x - 2)^5 - \dfrac{1}{x^3\left(4 - \dfrac{1}{2x^2}\right)^2}$ **29.** $\dfrac{(4x + 3)^3(4x + 7)}{(x + 1)^4}$

31. $\sqrt{x}\sec^2\left(2\sqrt{x}\right) + \tan\left(2\sqrt{x}\right)$ **33.** $\dfrac{x\sec x\tan x + \sec x}{2\sqrt{7 + x\sec x}}$

35. $\dfrac{2\operatorname{sen}\theta}{(1 + \cos\theta)^2}$ **37.** $-2\operatorname{sen}(\theta^2)\operatorname{sen} 2\theta + 2\theta\cos(2\theta)\cos(\theta^2)$

39. $\left(\dfrac{t + 2}{2(t + 1)^{3/2}}\right)\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{t + 1}}\right)$

41. $2\pi\operatorname{sen}(\pi t - 2)\cos(\pi t - 2)$ **43.** $\dfrac{8\operatorname{sen}(2t)}{(1 + \cos 2t)^5}$

45. $10t^{10}\tan^9 t\sec^2 t + 10t^9\tan^{10} t$

47. $\dfrac{-3t^6(t^2 + 4)}{(t^3 - 4t)^4}$ **49.** $-2\cos(\cos(2t - 5))(\operatorname{sen}(2t - 5))$

51. $\left(1 + \tan^4\left(\dfrac{t}{12}\right)\right)^2\left(\tan^3\left(\dfrac{t}{12}\right)\sec^2\left(\dfrac{t}{12}\right)\right)$

53. $-\dfrac{t\operatorname{sen}(t^2)}{\sqrt{1 + \cos(t^2)}}$ **55.** $6\tan(\operatorname{sen}^3 t)\sec^2(\operatorname{sen}^3 t)\operatorname{sen}^2 t\cos t$

57. $3(2t^2 - 5)^3(18t^2 - 5)$ **59.** $\dfrac{6}{x^3}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)$

61. $2\csc^2(3x - 1)\cot(3x - 1)$ **63.** $16(2x + 1)^2(5x + 1)$

65. $5/2$ **67.** $-\pi/4$ **69.** 0 **71.** -5

73. ***a)*** $2/3$ ***b)*** $2\pi + 5$ ***c)*** $15 - 8\pi$ ***d)*** $37/6$ ***e)*** -1 ***f)*** $\sqrt{2}/24$ ***g)*** $5/32$ ***h)*** $-5/\left(3\sqrt{17}\right)$ **75.** 5

77. ***a)*** 1 ***b)*** 1 **79.** $y = 1 - 4x$

81. ***a)*** $y = \pi x + 2 - \pi$ ***b)*** $\pi/2$

83. La velocidad, la aceleración y la sacudida se multiplican por 2, 4 y 8 respectivamente.

85. $v(6) = \dfrac{2}{5}\text{m/s}$, $a(6) = -\dfrac{4}{125}\text{m/s}^2$

Sección 3.7, páginas 155 a 156

1. $\dfrac{-2xy - y^2}{x^2 + 2xy}$ **3.** $\dfrac{1 - 2y}{2x + 2y - 1}$

5. $\dfrac{-2x^3 + 3x^2y - xy^2 + x}{x^2y - x^3 + y}$ **7.** $\dfrac{1}{y(x + 1)^2}$ **9.** $\cos y\cot y$

11. $\dfrac{-\cos^2(xy) - y}{x}$ **13.** $\dfrac{-y^2}{y\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{y}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{y}\right) + xy}$

15. $-\dfrac{\sqrt{r}}{\sqrt{\theta}}$ **17.** $\dfrac{-r}{\theta}$

19. $y' = -\dfrac{x}{y}$, $y'' = \dfrac{-y^2 - x^2}{y^3}$

21. $y' = \dfrac{x + 1}{y}$, $y'' = \dfrac{y^2 - (x + 1)^2}{y^3}$

23. $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y} + 1}$, $y'' = \dfrac{1}{2\left(\sqrt{y} + 1\right)^3}$

25. -2 **27.** $(-2, 1) : m = -1, (-2, -1) : m = 1$

29. ***a)*** $y = \dfrac{7}{4}x - \dfrac{1}{2}$ ***b)*** $y = -\dfrac{4}{7}x + \dfrac{29}{7}$

31. ***a)*** $y = 3x + 6$ ***b)*** $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3}$

33. ***a)*** $y = \dfrac{6}{7}x + \dfrac{6}{7}$ ***b)*** $y = -\dfrac{7}{6}x - \dfrac{7}{6}$

35. ***a)*** $y = -\dfrac{\pi}{2}x + \pi$ ***b)*** $y = \dfrac{2}{\pi}x - \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{\pi}{2}$

37. ***a)*** $y = 2\pi x - 2\pi$ ***b)*** $y = -\dfrac{x}{2\pi} + \dfrac{1}{2\pi}$

39. Puntos: $\left(-\sqrt{7}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{7}, 0\right)$, Pendiente: -2

41. $m = -1$ en $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $m = \sqrt{3}$ en $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$

43. $(-3, 2) : m = -\dfrac{27}{8}$; $(-3, -2) : m = \dfrac{27}{8}$; $(3, 2) : m = \dfrac{27}{8}$; $(3, -2) : m = -\dfrac{27}{8}$

45. $(3, -1)$

51. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y^3 + 2xy}{x^2 + 3xy^2}$, $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{x^2 + 3xy^2}{y^3 + 2xy}$, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{dy/dx}$

Sección 3.8, páginas 161 a 165

1. $\dfrac{dA}{dt} = 2\pi r\dfrac{dr}{dt}$ **3.** 10 **5.** -6 **7.** $-3/2$

9. $31/13$ **11.** ***a)*** $-180\ \text{m}^2/\text{min}$ ***b)*** $-135\ \text{m}^3/\text{min}$

13. ***a)*** $\dfrac{dV}{dt} = \pi r^2\dfrac{dh}{dt}$ ***b)*** $\dfrac{dV}{dt} = 2\pi hr\dfrac{dr}{dt}$

c) $\dfrac{dV}{dt} = \pi r^2\dfrac{dh}{dt} + 2\pi hr\dfrac{dr}{dt}$

15. ***a)*** 1 volt/s ***b)*** $-\dfrac{1}{3}$ amp/s

c) $\dfrac{dR}{dt} = \dfrac{1}{I}\left(\dfrac{dV}{dt} - \dfrac{V}{I}\dfrac{dI}{dt}\right)$

d) $3/2$ ohms/s, R se incrementa.

17. ***a)*** $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\dfrac{dx}{dt}$

b) $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\dfrac{dy}{dt}$ ***c)*** $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dt}$

19. ***a)*** $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}ab\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}$

b) $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}ab\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{1}{2}b\operatorname{sen}\theta\dfrac{da}{dt}$

c) $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}ab\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{1}{2}b\operatorname{sen}\theta\dfrac{da}{dt} + \dfrac{1}{2}a\operatorname{sen}\theta\dfrac{db}{dt}$

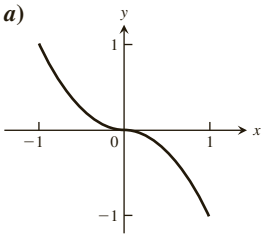
21. ***a)*** $14\ \text{cm}^2/\text{s}$, creciente ***b)*** $0\ \text{cm}/\text{s}$, constante ***c)*** $-14/13\ \text{cm}/\text{s}$, decreciente
23. ***a)*** $-12\ \text{ft}/\text{s}$ ***b)*** $-59.5\ \text{ft}^2/\text{s}$ ***c)*** $-1\ \text{rad}/\text{s}$
25. $20\ \text{ft}/\text{s}$
27. ***a)*** $\frac{dh}{dt} = 11.19\ \text{cm}/\text{min}$ ***b)*** $\frac{dr}{dt} = 14.92\ \text{cm}/\text{min}$
29. ***a)*** $\frac{-1}{24\pi}\ \text{m}/\text{min}$ ***b)*** $r = \sqrt{26y - y^2}\ \text{m}$
c) $\frac{dr}{dt} = -\frac{5}{288\pi}\ \text{m}/\text{min}$
31. $1\ \text{ft}/\text{min}$, $40\pi\ \text{ft}^2/\text{min}$ **33.** $11\ \text{ft}/\text{s}$
35. Creciente en $466/1681\ L/\text{min}^2$
37. $-5\ \text{m}/\text{s}$ **39.** $-1500\ \text{ft}/\text{s}$
41. $\frac{5}{72\pi}\ \text{in}/\text{min}$, $\frac{10}{3}\ \text{in}^2/\text{min}$
43. ***a)*** $-32/\sqrt{13} \approx -8.875\ \text{ft}/\text{s}$
b) $d\theta_1/dt = 8/65\ \text{rad}/\text{s}$, $d\theta_2/dt = -8/65\ \text{rad}/\text{s}$
c) $d\theta_1/dt = 1/6\ \text{rad}/\text{s}$, $d\theta_2/dt = -1/6\ \text{rad}/\text{s}$
45. -5.5 grados/min

Sección 3.9, páginas 174 a 176

1. $L(x) = 10x - 13$ **3.** $L(x) = 2$ **5.** $L(x) = x - \pi$
7. $2x$ **9.** $-x - 5$ **11.** $\frac{1}{12}x + \frac{4}{3}$
13. $f(0) = 1$. Además, $f'(x) = k(1 + x)^{k-1}$, de manera que $f'(0) = k$. Esto significa que la linealización en $x = 0$ es $L(x) = 1 + kx$.
15. ***a)*** 1.01 ***b)*** 1.003
17. $\left(3x^2 - \frac{3}{2\sqrt{x}}\right)dx$ **19.** $\frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}\,dx$
21. $\frac{1 - y}{3\sqrt{y} + x}\,dx$ **23.** $\frac{5}{2\sqrt{x}}\cos\left(5\sqrt{x}\right)dx$
25. $(4x^2)\sec^2\left(\frac{x^3}{3}\right)dx$
27. $\frac{3}{\sqrt{x}}\left(\csc\left(1 - 2\sqrt{x}\right)\cot\left(1 - 2\sqrt{x}\right)\right)dx$
29. ***a)*** 0.41 ***b)*** 0.4 ***c)*** 0.01
31. ***a)*** 0.231 ***b)*** 0.2 ***c)*** 0.031
33. ***a)*** $-1/3$ ***b)*** $-2/5$ ***c)*** $1/15$
35. $dV = 4\pi r_0^2\,dr$ **37.** $dS = 12x_0\,dx$ **39.** $dV = 2\pi r_0 h\,dr$
41. ***a)*** $0.08\pi\ \text{m}^2$ ***b)*** 2% **43.** $dV \approx 565.5\ \text{in}^3$
45. ***a)*** 2% ***b)*** 4% **47.** $\frac{1}{3}\%$ **49.** 3%
51. La razón es igual a 37.87, de manera que un cambio en la aceleración de la gravedad en la Luna equivale a aproximadamente 38 veces un cambio de la misma magnitud en la Tierra.
53. Aumenta $V \approx 40\%$
55. ***a)*** **i.** $b_0 = f(a)$ **ii.** $b_1 = f'(a)$ **iii.** $b_2 = \frac{f''(a)}{2}$
b) $Q(x) = 1 + x + x^2$ ***d)*** $Q(x) = 1 - (x - 1) + (x - 1)^2$
e) $Q(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$
f) La linealización de cualquier función diferenciable $u(x)$ en $x = a$ es $L(x) = u(a) + u'(a)(x - a) = b_0 + b_1(x - a)$, donde b_0 y b_1 son los coeficientes de la constante y los términos lineales de la aproximación cuadrática. Por lo tanto, la linealización de $f(x)$ en $x = 0$ es $1 + x$; la linealización para $g(x)$ en $x = 1$ es $1 - (x - 1)$ o $2 - x$; y la linealización para $h(x)$ en $x = 0$ es $1 + \frac{x}{2}$.

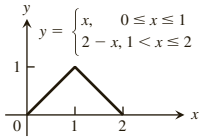
Ejercicios de práctica, páginas 177 a 182

1. $5x^4 - 0.25x + 0.25$ **3.** $3x(x - 2)$
5. $2(x + 1)(2x^2 + 4x + 1)$
7. $3(\theta^2 + \sec\theta + 1)^2(2\theta + \sec\theta\tan\theta)$
9. $\frac{1}{2\sqrt{t}(1 + \sqrt{t})^2}$ **11.** $2\sec^2 x\tan x$
13. $8\cos^3(1 - 2t)\,\text{sen}\,(1 - 2t)$ **15.** $5(\sec t)(\sec t + \tan t)^5$
17. $\frac{\theta\cos\theta + \text{sen}\,\theta}{\sqrt{2\theta\,\text{sen}\,\theta}}$ **19.** $\frac{\cos\sqrt{2\theta}}{\sqrt{2\theta}}$
21. $x\csc\left(\frac{2}{x}\right) + \csc\left(\frac{2}{x}\right)\cot\left(\frac{2}{x}\right)$
23. $\frac{1}{2}x^{1/2}\sec(2x)^2\left[16\tan(2x)^2 - x^{-2}\right]$
25. $-10x\csc^2(x^2)$ **27.** $8x^3\,\text{sen}(2x^2)\cos(2x^2) + 2x\,\text{sen}^2(2x^2)$
29. $\frac{-(t + 1)}{8t^3}$ **31.** $\frac{1 - x}{(x + 1)^3}$ **33.** $\frac{-1}{2x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/2}}$
35. $\frac{-2\,\text{sen}\,\theta}{(\cos\theta - 1)^2}$ **37.** $3\sqrt{2x + 1}$ **39.** $-9\left[\frac{5x + \cos 2x}{(5x^2 + \text{sen}\,2x)^{5/2}}\right]$
41. $-\frac{y + 2}{x + 3}$ **43.** $\frac{-3x^2 - 4y + 2}{4x - 4y^{1/3}}$ **45.** $-\frac{y}{x}$
47. $\frac{1}{2y(x + 1)^2}$ **49.** $\frac{dp}{dq} = \frac{6q - 4p}{3p^2 + 4q}$
51. $\frac{dr}{ds} = (2r - 1)(\tan 2s)$
53. ***a)*** $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2xy^3 - 2x^4}{y^5}$ ***b)*** $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2xy^2 - 1}{x^4y^3}$
55. ***a)*** 7 ***b)*** -2 ***c)*** 5/12 ***d)*** 1/4 ***e)*** 12 ***f)*** 9/2 ***g)*** 3/4
57. 0 **59.** $\sqrt{3}$ **61.** $-\frac{1}{2}$ **63.** $\frac{-2}{(2t + 1)^2}$
65. ***a)***

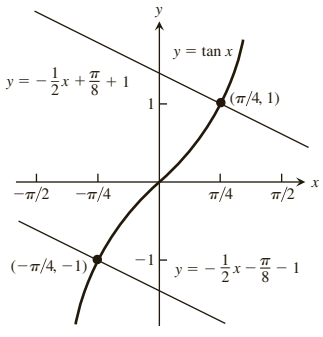


$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x < 0 \\ -x^2, & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

b) Sí ***c)*** Y es
67. ***a)***



b) Sí ***c)*** No
69. $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ **71.** $(-1, 27)$ y $(2, 0)$
73. ***a)*** $(-2, 16)$, $(3, 11)$ ***b)*** $(0, 20)$, $(1, 7)$
75.



77. $\frac{1}{4}$ **79.** 4

81. Tangente: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$, normal: $y = 4x - 2$

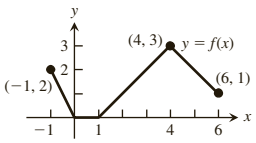
83. Tangente: $y = 2x - 4$, normal: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

85. Tangente: $y = -\frac{5}{4}x + 6$, normal: $y = \frac{4}{5}x - \frac{11}{5}$

87. $(1, 1)$: $m = -\frac{1}{2}$; $(1, -1)$: m no está definida

89. B = gráfica de f, A = gráfica de f'

91.



93. *a*) 0, 0 *b*) 1700 conejos, ≈1400 conejos

95. -1 **97.** $1/2$ **99.** 4 **101.** 1

103. Para hacer continua a g en el origen, se define $g(0) = 1$.

105. *a*) $\frac{dS}{dt} = (4\pi r + 2\pi h)\frac{dr}{dt}$ *b*) $\frac{dS}{dt} = 2\pi r\frac{dh}{dt}$

c) $\frac{dS}{dt} = (4\pi r + 2\pi h)\frac{dr}{dt} + 2\pi r\frac{dh}{dt}$

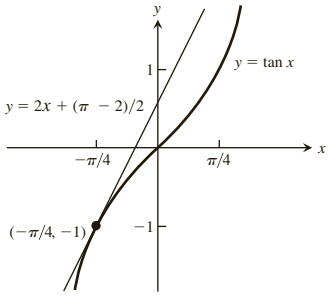
d) $\frac{dr}{dt} = -\frac{r}{2r + h}\frac{dh}{dt}$

107. $-40\ \text{m}^2/\text{s}$ **109.** 0.02 ohm/s **111.** 2 m/s

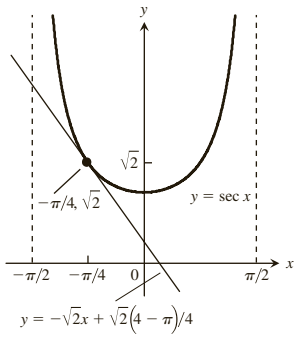
113. *a*) $r = \frac{2}{5}h$ *b*) $-\frac{125}{144\pi}$ ft/min

115. *a*) $\frac{3}{5}$ km/s o 600 m/s *b*) $\frac{18}{\pi}$ rpm

117. *a*) $L(x) = 2x + \frac{\pi - 2}{2}$



b) $L(x) = -\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}(4 - \pi)}{4}$



119. $L(x) = 1.5x + 0.5$ **121.** $dS = \frac{\pi r h_0}{\sqrt{r^2 + h_0^2}}\,dh$

123. *a*) 4% *b*) 8% *c*) 12%

Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 182 a 184

1. *a*) $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$; $2\cos 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta(-\operatorname{sen}\theta) + \cos\theta(2\cos\theta)$; $2\cos 2\theta = -2\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos^2\theta$; $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

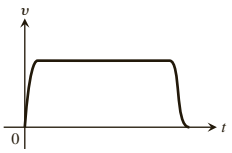
b) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$; $-2\operatorname{sen} 2\theta = 2\cos\theta(-\operatorname{sen}\theta) - 2\operatorname{sen}\theta(\cos\theta)$; $\operatorname{sen} 2\theta = \cos\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta$; $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

3. *a*) $a = 1, b = 0, c = -\frac{1}{2}$ *b*) $b = \cos a, c = \operatorname{sen} a$

5. $h = -4, k = \frac{9}{2}, a = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

7. *a*) $0.09y$ *b*) Crece 1% anual

9. Las respuestas pueden variar. Ésta es una posibilidad.



11. *a*) 2 s, 64 ft/s *b*) 12.31 s, 393.85 ft

15. *a*) $m = -\frac{b}{\pi}$ *b*) $m = -1, b = \pi$

17. *a*) $a = \frac{3}{4}, b = \frac{9}{4}$ **19.** f impar $\Rightarrow f'$ es par

23. h' está definida, pero no es continua en $x = 0$; k' está definida y es continua en $x = 0$.

27. *a*) 0.8156 ft *b*) 0.00613 s

c) Perderá alrededor de 8.83 min/día.

Capítulo 4

Sección 4.1, páginas 190 a 193

1. Mínimo absoluto en $x = c_2$; máximo absoluto en $x = b$

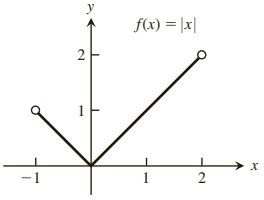
3. Mínimo absoluto en $x = c$; no tiene mínimo absoluto

5. Mínimo absoluto en $x = a$; máximo absoluto en $x = c$

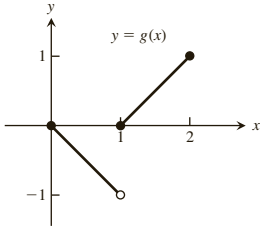
7. No tiene mínimo absoluto; no tiene máximo absoluto

9. Máximo absoluto en $(0, 5)$ **11.** *c*) **13.** *d*)

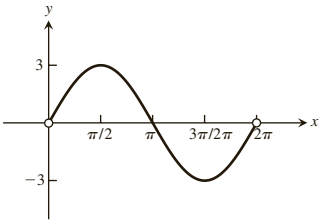
15. Mínimo absoluto en $x = 0$; no tiene máximo absoluto



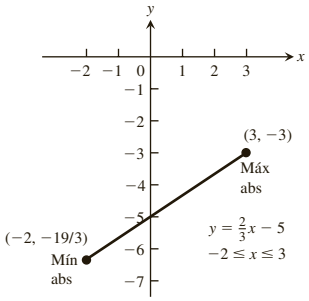
17. Máximo absoluto en $x = 2$; no tiene mínimo absoluto



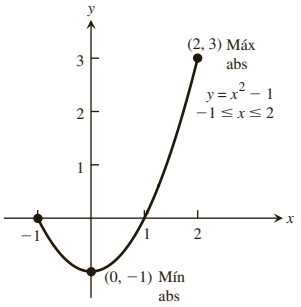
19. Máximo absoluto en $x = \pi/2$; mínimo absoluto en $x = 3\pi/2$



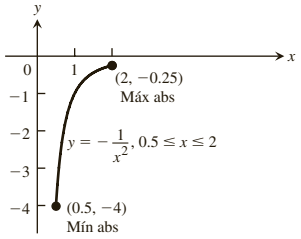
21. Máximo absoluto: -3; mínimo absoluto: $-19/3$



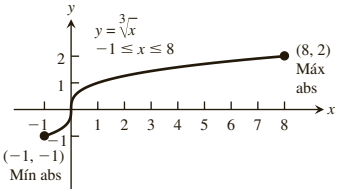
23. Máximo absoluto: 3; mínimo absoluto: -1



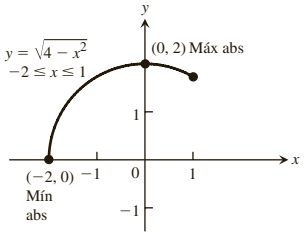
25. Máximo absoluto: -0.25; mínimo absoluto: -4



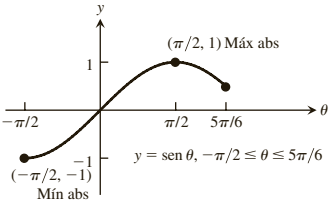
27. Máximo absoluto: 2; mínimo absoluto: -1



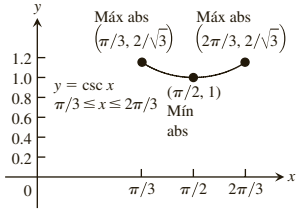
29. Máximo absoluto: 2; mínimo absoluto: 0



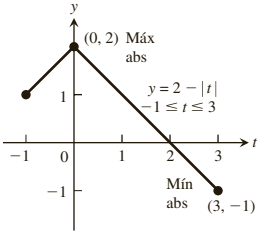
31. Máximo absoluto: 1; mínimo absoluto: -1



33. Máximo absoluto: $2/\sqrt{3}$; mínimo absoluto: 1



35. Máximo absoluto: 2; mínimo absoluto: -1



37. Crece en $(0, 8)$, decrece en $(-1, 0)$; máximo absoluto: 16 en $x = 8$; mínimo absoluto: 0 en $x = 0$

39. Crece en $(-32, 1)$; máximo absoluto: 1 en $\theta = 1$; mínimo absoluto: -8 en $\theta = -32$

41. $x = 3$

43. $x = 1, x = 4$

45. $x = 1$

47. $x = 0$ y $x = 4$

49. El valor mínimo es 1 en $x = 2$.

51. Máximo local en $(-2, 17)$; mínimo local en $\left(\frac{4}{3}, -\frac{41}{27}\right)$

53. El valor mínimo es 0 en $x = -1$ y $x = 1$.

55. Hay un mínimo local en $(0, 1)$.

57. El valor máximo es $\frac{1}{2}$ en $x = 1$; el valor mínimo es $-\frac{1}{2}$ en $x = -1$.

59.

Punto crítico	Derivada	Extremos	Valor
$x = -\frac{4}{5}$	0	Máx local	$\frac{12}{25}10^{1/3} \approx 1.034$
$x = 0$	Indefinido	Mín local	0

61.

Punto crítico	Derivada	Extremos	Valor
$x = -2$	Indefinido	Máx local	0
$x = -\sqrt{2}$	0	Mínimo	–2
$x = \sqrt{2}$	0	Máximo	2
$x = 2$	Indefinido	Mín local	0

63.

Punto crítico	Derivada	Extremos	Valor
$x = 1$	Indefinido	Mínimo	2

65.

Punto crítico	Derivada	Extremos	Valor
$x = -1$	0	Máximo	5
$x = 1$	Indefinido	Mín local	1
$x = 3$	0	Máximo	5

67. ***a***) No

b) La derivada está definida y es diferente de cero para $x \neq 2$. Además, $f(2) = 0$ y $f(x) > 0$ para toda $x \neq 2$.

c) No, porque $(-\infty, \infty)$ no es un intervalo cerrado.

d) Las respuestas son las mismas de los incisos ***a***) y ***b***), reemplazando 2 por a.

69. Sí.

71. g alcanza un máximo local en $-c$.

73. ***a***) El valor máximo es 144 en $x = 2$.

b) El volumen más grande de la caja es igual a 144 unidades cúbicas, y se presenta cuando $x = 2$.

75. $\frac{v_0^2}{2g} + s_0$

77. El valor máximo es 11 en $x = 5$; el valor mínimo es 5 en el intervalo $[-3, 2]$; máximo local en $(-5, 9)$.

79. El valor máximo es 5 en el intervalo $[3, \infty)$; el valor mínimo es -5 en el intervalo $(-\infty, -2]$.

Sección 4.2, páginas 197 a 199

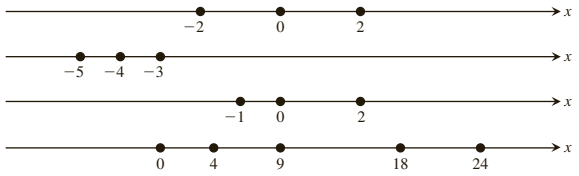
1. $1/2$ **3.** 1

5. $\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{7}\right) \approx 1.22, \frac{1}{3}\left(1-\sqrt{7}\right) \approx -0.549$

7. No la satisface; f no es diferenciable en el punto $x=0$ en el interior del dominio.

9. La satisface **11.** No la satisface; f no es diferenciable en $x=-1$

15. ***a***)



27. Sí **29.** ***a***) 4 ***b***) 3 ***c***) 3

31. ***a***) $\frac{x^2}{2}+C$ ***b***) $\frac{x^3}{3}+C$ ***c***) $\frac{x^4}{4}+C$

33. ***a***) $\frac{1}{x}+C$ ***b***) $x+\frac{1}{x}+C$ ***c***) $5x-\frac{1}{x}+C$

35. ***a***) $-\frac{1}{2}\cos 2t+C$ ***b***) $2\operatorname{sen}\frac{t}{2}+C$

c) $-\frac{1}{2}\cos 2t+2\operatorname{sen}\frac{t}{2}+C$

37. $f(x)=x^2-x$ **39.** $r(\theta)=8\theta+\cot\theta-2\pi-1$

41. $s=4.9t^2+5t+10$ **43.** $s=\dfrac{1-\cos(\pi t)}{\pi}$

45. $16t^2+20t+5$ **47.** $s=\operatorname{sen}(2t)-3$

49. Si $T(t)$ es la temperatura del termómetro en el tiempo t, entonces, $T(0)=-19$°C y $T(14)=100$°C. Según el teorema del valor medio, existe un $0<t_0<14$ tal que $\dfrac{T(14)-T(0)}{14-0}$ $=8.5$°C/s $=T'(t_0)$, la tasa a la que la temperatura estaba cambiando en $t=t_0$ al medir la elevación del mercurio en el termómetro.

51. Porque su rapidez promedio era de 7.667 nudos aproximadamente, y según el teorema del valor medio, tendría que haber ido a esa rapidez al menos una vez durante el recorrido.

55. La conclusión del teorema del valor medio da como resultado

$$\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a}=-\frac{1}{c^2}\Rightarrow c^2\left(\frac{a-b}{ab}\right)=a-b\Rightarrow c=\sqrt{ab}.$$

59. Según el teorema del valor intermedio, $f(x)$ debe ser cero al menos una vez entre a y b. Ahora suponga que $f(x)$ es cero dos veces entre a y b. Entonces, según el teorema del valor medio, $f'(x)$ tendría que ser cero al menos una vez entre esos dos ceros de $f(x)$, pero esto no puede ser verdad, ya que se estableció que $f'(x)\neq 0$ en este intervalo. Por lo tanto, $f(x)$ es cero una y sólo una vez entre a y b.

69. $1.09999 \le f(0.1) \le 1.1$

Sección 4.3, páginas 203 a 204

1. ***a***) 0, 1

b) Es creciente en $(-\infty, 0)$ y $(1, \infty)$; y decreciente en $(0, 1)$

c) Máximo local en $x=0$; mínimo local en $x=1$

3. ***a***) -2, 1

b) Es creciente en $(-2, 1)$ y $(1, \infty)$; y decreciente en $(-\infty, -2)$

c) No tiene máximo local; mínimo local en $x=-2$

5. ***a***) -2, 1, 3 ***b***) Es creciente en $(-2, 1)$ y $(3, \infty)$, y decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(1, 3)$ ***c***) Máximo local en $x=1$, mínimo local en $x=-2, 3$

7. ***a***) 0, 1

b) Es creciente en $(-\infty, -2)$ y $(1, \infty)$; y decreciente en $(-2, 0)$ y $(0, 1)$

c) Mínimo local en $x=1$

9. ***a***) -2, 2

b) Es creciente en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$; y decreciente en $(-2, 0)$ y $(0, 2)$

c) Máximo local en $x=-2$; mínimo local en $x=2$

11. ***a***) -2, 0

b) Es creciente en $(-\infty, -2)$ y $(0, \infty)$; y decreciente en $(-2, 0)$

c) Máximo local en $x=-2$; mínimo local en $x=0$

13. ***a***) $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

b) Es creciente en $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$; decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$, y $\left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right)$

c) Máximo local en $x=0$ y $x=\frac{4\pi}{3}$; mínimo local en $x=\frac{2\pi}{3}$ y $x=2\pi$

15. ***a***) Es creciente en $(-2, 0)$ y $(2, 4)$; y decreciente en $(-4, -2)$ y $(0, 2)$

b) Máximo absoluto en $x=(-4, 2)$; máximo local en $(0, 1)$ y $(4, -1)$; mínimo absoluto en $(2, -3)$; mínimo local en $(-2, 0)$

17. ***a***) Es creciente en $(-4, -1)$, $(1/2, 2)$ y $(2, 4)$; y decreciente en $(-1, 1/2)$

b) Máximo absoluto en $(4, 3)$; máximo local en $(-1, 2)$ y $(2, 1)$; no tiene mínimo absoluto; mínimo local en $(-4, -1)$ y $(1/2, -1)$

19. ***a***) Es creciente en $(-\infty, -1.5)$; decreciente en $(-1.5, \infty)$

b) Máximo local: 5.25 en $t=-1.5$; máximo absoluto: 5.25 en $t=-1.5$

21. ***a***) Es decreciente en $(-\infty, 0)$, creciente en $(0, 4/3)$; decreciente en $(4/3, \infty)$

b) Mínimo local en $x=0$ $(0, 0)$; máximo local en $x=4/3$ $(4/3, 32/27)$; no tiene extremos absolutos

23. ***a***) Es decreciente en $(-\infty, 0)$, creciente en $(0, 1/2)$; decreciente en $(1/2, \infty)$

b) Mínimo local en $\theta=0(0, 0)$; máximo local en $\theta=1/2(1/2, 1/4)$; no tiene extremos absolutos

25. ***a***) Es creciente en $(-\infty, \infty)$; nunca es decreciente

b) No tiene extremos locales; no tiene extremos absolutos

27. ***a***) Es creciente en $(-2, 0)$ y $(2, \infty)$; decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(0, 2)$

b) Máximo local: 16 en $x=0$; mínimo local: 0 en $x=\pm 2$; no tiene máximos absolutos; mínimo absoluto: 0 en $x=\pm 2$

29. ***a***) Es creciente en $(-\infty, -1)$, decreciente en $(-1, 0)$; creciente en $(0, 1)$; decreciente en $(1, \infty)$

b) Máximo local: 0.5 en $x=\pm 1$; mínimo local: 0 en $x=0$; máximo absoluto: $1/2$ en $x=\pm 1$; no tiene mínimo absoluto

31. ***a***) Es creciente en $(10, \infty)$, decreciente en $(1, 10)$

b) Máximo local: 1 en $x=1$; mínimo local: -8 en $x=10$; mínimo absoluto: -8 en $x=10$

33. ***a***) Es decreciente en $\left(-2\sqrt{2}, -2\right)$, creciente en $(-2, 2)$; decreciente en $\left(2, 2\sqrt{2}\right)$

b) Mínimo local: $g(-2)=-4$, $g\left(2\sqrt{2}\right)=0$; máximos locales: $g\left(-2\sqrt{2}\right)=0$, $g(2)=4$; máximo absoluto: 4 en $x=2$; mínimo absoluto: -4 en $x=-2$

35. ***a***) Es creciente en $(-\infty, 1)$, decreciente cuando $1 < x < 2$, decreciente cuando $2 < x < 3$; discontinua en $x = 2$; creciente en $(3, \infty)$

b) Mínimo local en $x = 3(3, 6)$; máximo local en $x = 1(1, 2)$; no tiene extremos absolutos

37. ***a***) Es creciente en $(-2, 0)$ y $(0, \infty)$; decreciente en $(-\infty, -2)$

b) Mínimo local: $-6\sqrt[3]{2}$ en $x = -2$; no tiene máximo absoluto; mínimo absoluto: $-6\sqrt[3]{2}$ en $x = -2$

39. ***a***) Es creciente en $\left(-\infty, -2/\sqrt{7}\right)$ y $\left(2/\sqrt{7}, \infty\right)$; decreciente en $\left(-2/\sqrt{7}, 0\right)$ y $\left(0, 2/\sqrt{7}\right)$

b) Máximo local: $24\sqrt[3]{2}/7^{7/6} \approx 3.12$ en $x = -2/\sqrt{7}$; mínimo local: $-24\sqrt[3]{2}/7^{7/6} \approx -3.12$ en $x = 2/\sqrt{7}$; no tiene extremos absolutos

41. ***a***) Máximo local: 1 en $x = 1$; mínimo local: 0 en $x = 2$

b) Máximo absoluto: 1 en $x = 1$; no tiene mínimo absoluto

43. ***a***) Máximo local: 1 en $x = 1$; mínimo local: 0 en $x = 2$

b) No tiene máximo absoluto; mínimo absoluto: 0 en $x = 2$

45. ***a***) Máximos locales: -9 en $t = -3$ y 16 en $t = 2$; mínimo local: -16 en $t = -2$

b) Máximo absoluto: 16 en $t = 2$; no tiene mínimo absoluto

47. ***a***) Mínimo local: 0 en $x = 0$

b) No tiene máximo absoluto; mínimo absoluto: 0 en $x = 0$

49. ***a***) Máximo local: 5 en $x = 0$; mínimo local: 0 en $x = -5$ y $x = 5$

b) Máximo absoluto: 5 en $x = 0$; mínimo absoluto: 0 en $x = -5$ y $x = 5$

51. ***a***) Máximo local: 2 en $x = 0$; mínimo local $\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3} - 6}$ en $x = 2 - \sqrt{3}$

b) No tiene máximo absoluto; mínimo absoluto en $x = 2 - \sqrt{3}$.

53. ***a***) Máximo local: 1 en $x = \pi/4$;
máximo local: 0 en $x = \pi$;
mínimo local: 0 en $x = 0$;
mínimo local: -1 en $x = 3\pi/4$

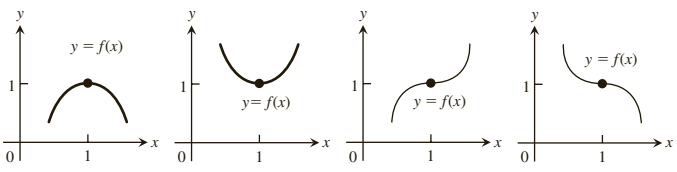
55. Máximo local: 2 en $x = \pi/6$;
máximo local: $\sqrt{3}$ en $x = 2\pi$;
mínimo local: -2 en $x = 7\pi/6$;
mínimo local: $\sqrt{3}$ en $x = 0$

57. ***a***) Mínimo local: $(\pi/3) - \sqrt{3}$ en $x = 2\pi/3$;
máximo local: 0 en $x = 0$;
máximo local: π en $x = 2\pi$

59. ***a***) Mínimo local: 0 en $x = \pi/4$

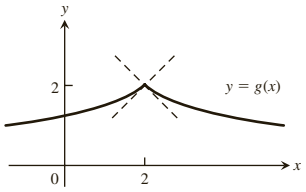
61. Máximo local: 3 en $\theta = 0$;
mínimo local: -3 en $\theta = 2\pi$

63.

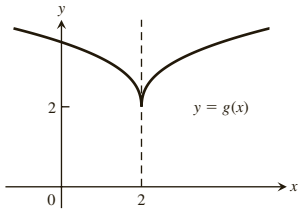


a) ***b***) ***c***) ***d***)

65. ***a***)



b)



69. $a = -2, b = 4$

Sección 4.4, páginas 212 a 215

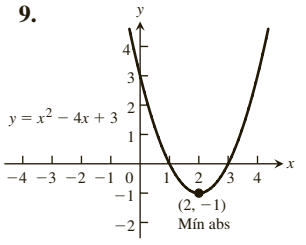
1. Máximo local: $3/2$ en $x = -1$; mínimo local: -3 en $x = 2$; punto de inflexión en $(1/2, -3/4)$; se eleva en $(-\infty, -1)$ y $(2, \infty)$; cae en $(-1, 2)$; cóncava hacia arriba en $(1/2, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1/2)$

3. Máximo local: $3/4$ en $x = 0$; mínimo local: 0 en $x = \pm 1$; puntos de inflexión en $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt[3]{4}}{4}\right)$ y $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt[3]{4}}{4}\right)$; se eleva en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$; cae en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$; cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ y $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$; cóncava hacia abajo en $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$

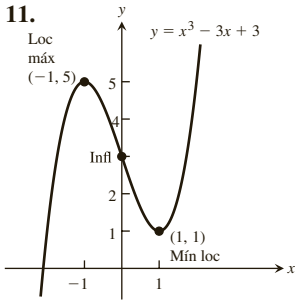
5. Máximos locales: $\dfrac{-2\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ en $x = -2\pi/3$, $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ en $x = \pi/3$; mínimos locales: $-\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ en $x = -\pi/3$, $\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ en $x = 2\pi/3$; puntos de inflexión en $(-\pi/2, -\pi/2)$, $(0, 0)$ y $(\pi/2, \pi/2)$; se eleva en $(-\pi/3, \pi/3)$; cae en $(-2\pi/3, -\pi/3)$ y $(\pi/3, 2\pi/3)$; cóncava hacia arriba en $(-\pi/2, 0)$ y $(\pi/2, 2\pi/3)$; cóncava hacia abajo en $(-2\pi/3, -\pi/2)$ y $(0, \pi/2)$

7. Máximos locales: 1 en $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$, 0 en $x = -2\pi$ y $x = 2\pi$; mínimos locales: -1 en $x = -3\pi/2$ y $x = 3\pi/2$, 0 en $x = 0$; puntos de inflexión en $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$; se eleva en $(-3\pi/2, -\pi/2)$, $(0, \pi/2$ y $(3\pi/2, 2\pi)$; cae en $(-2\pi, -3\pi/2)$, $(-\pi/2, 0)$ y $(\pi/2, 3\pi/2)$; cóncava hacia arriba en $(-2\pi, -\pi)$ y $(\pi, 2\pi)$; cóncava hacia abajo en $(-\pi, 0)$ y $(0, \pi)$

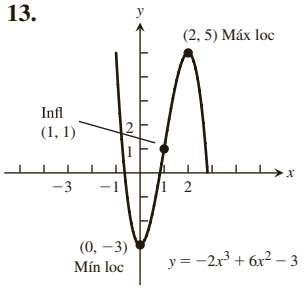
9.



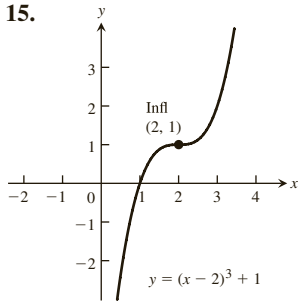
11.



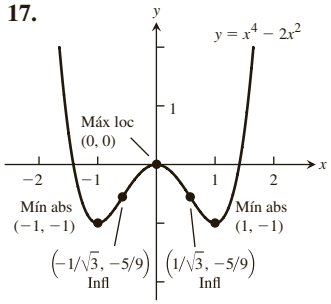
13.



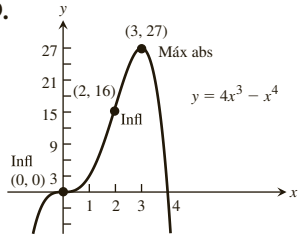
15.



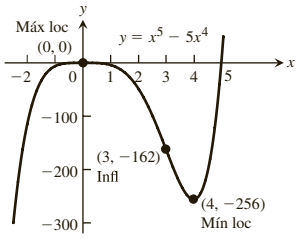
17.



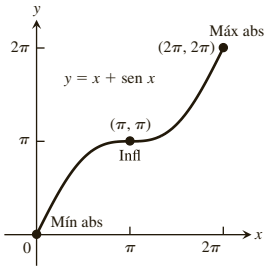
19.



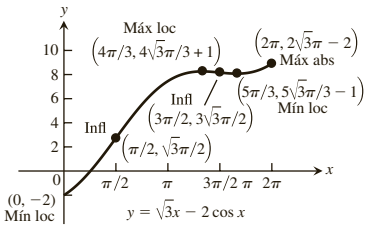
21.



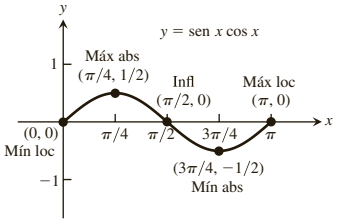
23.



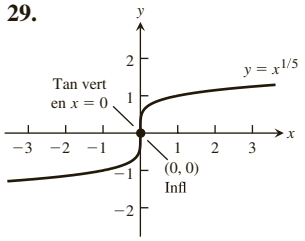
25.



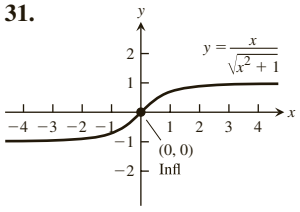
27.



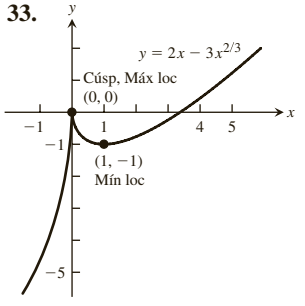
29.



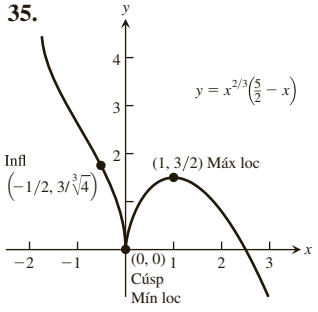
31.



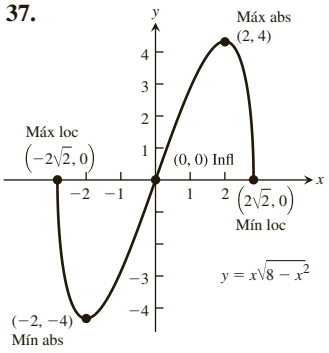
33.



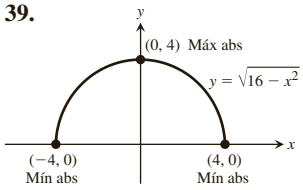
35.



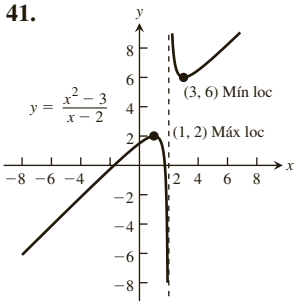
37.



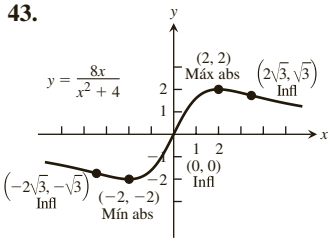
39.



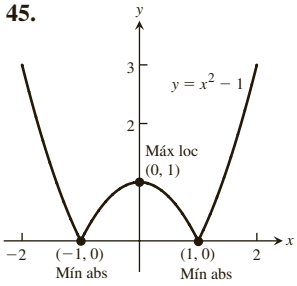
41.



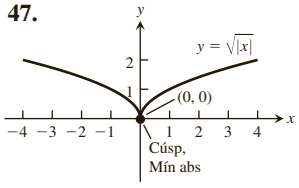
43.



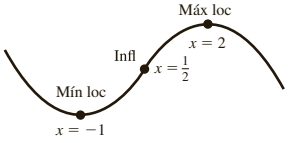
45.



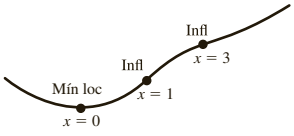
47.



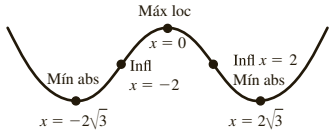
49. $y'' = 1 - 2x$



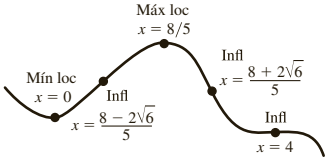
51. $y'' = 3(x - 3)(x - 1)$



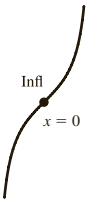
53. $y'' = 3(x - 2)(x + 2)$



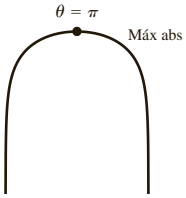
55. $y'' = 4(4 - x)(5x^2 - 16x + 8)$



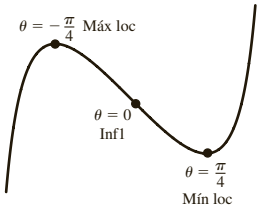
57. $y'' = 2\sec^2 x \tan x$



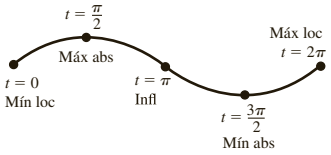
59. $y'' = -\frac{1}{2}\csc^2\frac{\theta}{2}$, $0 < \theta < 2\pi$



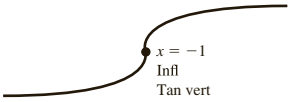
61. $y'' = 2\tan\theta\sec^2\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$



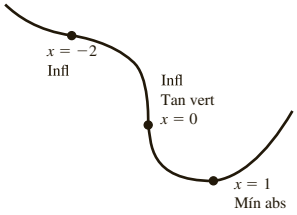
63. $y'' = -\text{sen}\, t$, $0 \le t \le 2\pi$



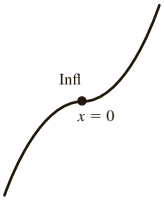
65. $y'' = -\frac{2}{3}(x+1)^{-5/3}$



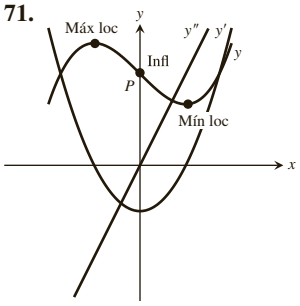
67. $y'' = \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{2}{3}x^{-5/3}$



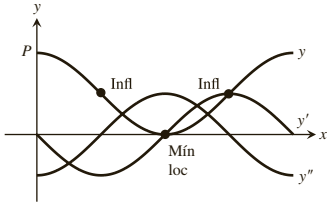
69. $y'' = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$



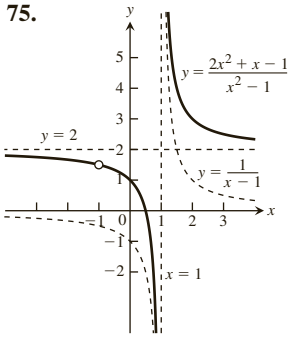
71.



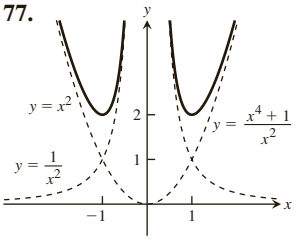
73.



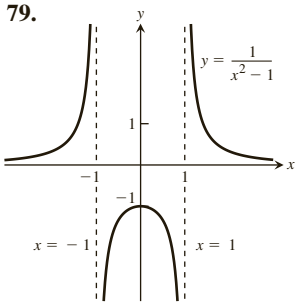
75.



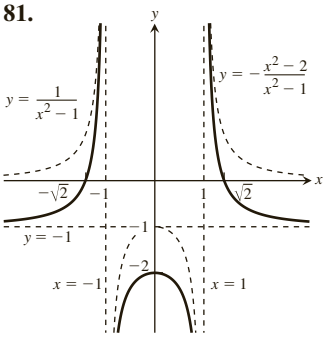
77.



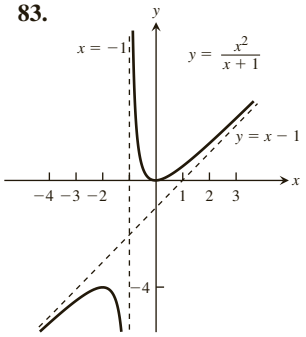
79.



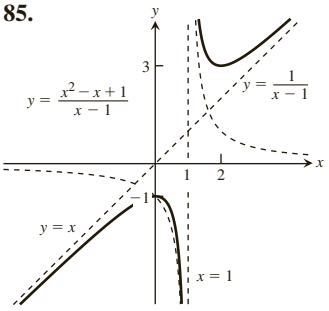
81.



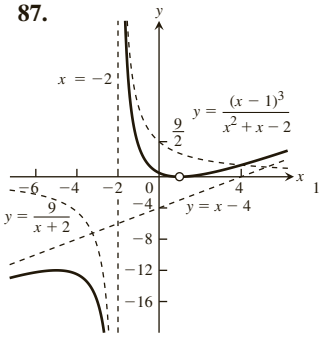
83.



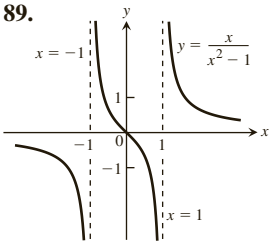
85.



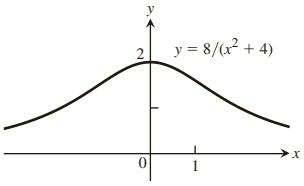
87.



89.



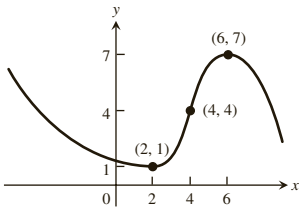
91.



93.

Punto	y'	y''
P	$-$	$+$
Q	$+$	0
R	$+$	$-$
S	0	$-$
T	$-$	$-$

95.



97. ***a***) Hacia el origen: $0 \le t < 2$ y $6 \le t \le 10$; alejándose del origen: $2 \le t \le 6$ y $10 \le t \le 15$

b) $t = 2, t = 6, t = 10$

c) $t = 5, t = 7, t = 13$

d) Positiva: $5 \le t \le 7$, $13 \le t \le 15$; negativa: $0 \le t \le 5$, $7 \le t \le 13$

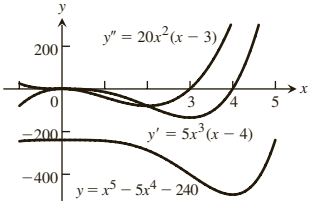
99. $\approx$ 60 mil unidades

101. Mínimo local en $x = 2$; puntos de inflexión en $x = 1$ y $x = 5/3$

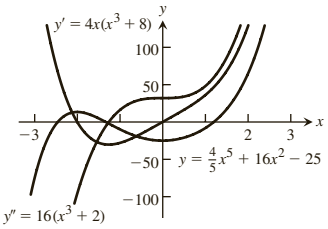
105. $b = -3$ **109.** $-1, 2$

111. $a = 1, b = 3, c = 9$

113. Los ceros de $y' = 0$ y $y'' = 0$ son extremos y puntos de inflexión, respectivamente. Inflexión en $x = 3$ máximo local en $x = 0$, mínimo local en $x = 4$.



115. Los ceros de $y' = 0$ y $y'' = 0$ son extremos y puntos de inflexión, respectivamente. Inflexión en $x = -\sqrt[3]{2}$; máximo local en $x = -2$; mínimo local en $x = 0$.



Sección 4.5, páginas 221 a 227

1. 16 in, 4 in por 4 in

3. ***a***) $(x, 1 - x)$ ***b***) $A(x) = 2x(1 - x)$

c) $\frac{1}{2}$ unidades cuadradas, 1 por $\frac{1}{2}$

5. $\frac{14}{3} \times \frac{35}{3} \times \frac{5}{3}$ in, $\frac{2450}{27}$ in^3

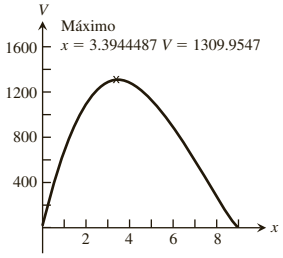
7. 80,000 m^2; 400 m por 200 m

9. ***a***) Las dimensiones óptimas del tanque son 10 ft en los lados de la base y 5 ft de profundidad.

b) Minimizando el área de la superficie del tanque, su peso se minimiza para un espesor dado de la pared. El espesor de las paredes de acero probablemente estaría determinado por otras consideraciones, tales como los requerimientos estructurales.

11. 9×18 in **13.** $\frac{\pi}{2}$ **15.** $h : r = 8 : \pi$

17. ***a***) $V(x) = 2x(24 - 2x)(18 - 2x)$ ***b***) Dominio: $(0, 9)$



c) Volumen máximo $\approx$ 1309.95 in^3 cuando $x \approx 3.39$ in

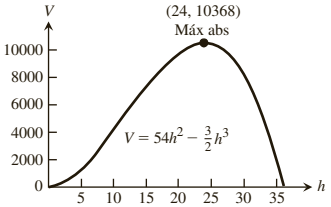
d) $V'(x) = 24x^2 - 336x + 864$, de modo que el punto crítico está en $x = 7 - \sqrt{13}$, lo que confirma el resultado del inciso ***c***)

e) $x = 2$ in o $x = 5$ in

19. $\approx$ 2418.40 cm^3

21. ***a***) $h = 24, w = 18$

b)



23. Si r es el radio del hemisferio, h la altura del cilindro y V el volumen, entonces, $r = \left(\frac{3V}{8\pi}\right)^{1/3}$ y $h = \left(\frac{3V}{\pi}\right)^{1/3}$.

25. ***b***) $x = \frac{51}{8}$ ***c***) $L \approx 11$ in

27. Radio $= \sqrt{2}$ m, altura $= 1$ m, volumen $= \frac{2\pi}{3}$ m^3

29. 1 **31.** $\frac{9b}{9 + \sqrt{3}\pi}$ m, triángulo; $\frac{b\sqrt{3}\pi}{9 + \sqrt{3}\pi}$ m, círculo

33. $\frac{3}{2} \times 2$

35. ***a***) 16 *b*) -1

37. ***a***) $v(0) = 96$ ft/s

b) 256 ft en $t = 3$ s

c) La velocidad cuando $s = 0$ es $v(7) = -128$ ft/s.

39. $\approx$ 46.87 ft **41.** ***a***) $6 \times 6\sqrt{3}$ in

43. ***a***) $4\sqrt{3} \times 4\sqrt{6}$ in

45. ***a***) $10\pi \approx 31.42$ cm/s; cuando $t = 0.5$ s, 1.5 s, 2.5 s, 3.5 s; $s = 0$, la aceleración es 0.

b) 10 cm desde la posición de reposo; la rapidez es 0.

47. ***a***) $s = ((12 - 12t)^2 + 64t^2)^{1/2}$

b) -12 nudos, 8 nudos

c) No

d) $4\sqrt{13}$. Este límite es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las rapideces individuales.

49. $x = \frac{a}{2}, v = \frac{ka^2}{4}$

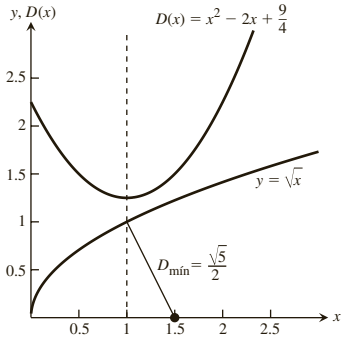
51. $\frac{c}{2} + 50$

53. ***a***) $\sqrt{\frac{2km}{h}}$ ***b***) $\sqrt{\frac{2km}{h}}$

57. $4 \times 4 \times 3$ ft, \$288 **59.** $M = \frac{C}{2}$ **65.** ***a***) $y = -1$

67. ***a)*** La distancia mínima es $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

b) La distancia mínima es del punto $(3/2, 0)$ al punto $(1, 1)$ en la gráfica de $y = \sqrt{x}$, y se alcanza en el valor $x = 1$, donde $D(x)$, la distancia al cuadrado, tiene su valor mínimo.

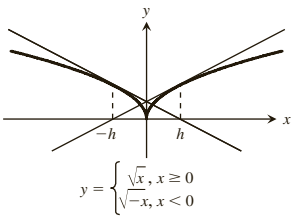


Sección 4.6, páginas 230 a 232

1. $x_2 = -\frac{5}{3}, \frac{13}{21}$ **3.** $x_2 = -\frac{51}{31}, \frac{5763}{4945}$ **5.** $x_2 = \frac{2387}{2000}$

7. x_1 y todas las últimas aproximaciones serán iguales a x_0.

9.



11. Los puntos de intersección de $y = x^3$ y $y = 3x + 1$ o $y = x^3 - 3x$ y $y = 1$ tienen los mismos valores x que las raíces del inciso (i) o las soluciones del inciso (iv). **13.** 1.165561185

15. ***a)*** Dos ***b)*** 0.35003501505249 y −1.0261731615301

17. ± 1.3065629648764, ± 0.5411961001462 **19.** $x \approx 0.45$

21. 0.8192 **23.** La raíz es 1.17951.

25. ***a)*** Para $x_0 = -2$ o $x_0 = -0.8$, $x_i \to -1$ cuando i crece.

b) Para $x_0 = -0.5$ o $x_0 = 0.25$, $x_i \to 0$ cuando i crece.

c) Para $x_0 = 0.8$ o $x_0 = 2$, $x_i \to 1$ cuando i crece.

d) Para $x_0 = -\sqrt{21}/7$ o $x_0 = \sqrt{21}/7$, el método de Newton no converge. Los valores de x_i alternan entre $-\sqrt{21}/7$ y $\sqrt{21}/7$ cuando i crece.

27. Las respuestas variarán con la rapidez de la máquina.

Sección 4.7, páginas 238 a 242

1. ***a)*** x^2 ***b)*** $\frac{x^3}{3}$ ***c)*** $\frac{x^3}{3} - x^2 + x$

3. ***a)*** x^{-3} ***b)*** $-\frac{1}{3}x^{-3}$ ***c)*** $-\frac{1}{3}x^{-3} + x^2 + 3x$

5. ***a)*** $-\frac{1}{x}$ ***b)*** $-\frac{5}{x}$ ***c)*** $2x + \frac{5}{x}$

7. ***a)*** $\sqrt{x^3}$ ***b)*** $\sqrt{x}$ ***c)*** $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x}$

9. ***a)*** $x^{2/3}$ ***b)*** $x^{1/3}$ ***c)*** $x^{-1/3}$

11. ***a)*** $\cos(\pi x)$ ***b)*** $-3\cos x$ ***c)*** $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + \cos(3x)$

13. ***a)*** $\frac{1}{2}\tan x$ ***b)*** $2\tan\left(\frac{x}{3}\right)$ ***c)*** $-\frac{2}{3}\tan\left(\frac{3x}{2}\right)$

15. ***a)*** $-\csc x$ ***b)*** $\frac{1}{5}\csc(5x)$ ***c)*** $2\csc\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

17. $\frac{x^2}{2} + x + C$ **19.** $t^3 + \frac{t^2}{4} + C$ **21.** $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C$

23. $-\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$ **25.** $\frac{3}{2}x^{2/3} + C$

27. $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{4}x^{4/3} + C$ **29.** $4y^2 - \frac{8}{3}y^{3/4} + C$

31. $x^2 + \frac{2}{x} + C$ **33.** $2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C$ **35.** $-2\operatorname{sen} t + C$

37. $-21\cos\frac{\theta}{3} + C$ **39.** $3\cot x + C$ **41.** $-\frac{1}{2}\csc\theta + C$

43. $4\sec x - 2\tan x + C$ **45.** $-\frac{1}{2}\cos 2x + \cot x + C$

47. $\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 4t}{8} + C$ **49.** $\frac{3x^{(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt{3}+1} + C$ **51.** $\tan\theta + C$

53. $-\cot x - x + C$ **55.** $-\cos\theta + \theta + C$

63. ***a)*** Incorrecto: $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\operatorname{sen} x + C\right) = \frac{2x}{2}\operatorname{sen} x + \frac{x^2}{2}\cos x = x\operatorname{sen} x + \frac{x^2}{2}\cos x$

b) Incorrecto: $\frac{d}{dx}(-x\cos x + C) = -\cos x + x\operatorname{sen} x$

c) Correcto: $\frac{d}{dx}(-x\cos x + \operatorname{sen} x + C) = -\cos x + x\operatorname{sen} x + \cos x = x\operatorname{sen} x$

65. ***a)*** Incorrecto: $\frac{d}{dx}\left(\frac{(2x+1)^3}{3} + C\right) = \frac{3(2x+1)^2(2)}{3} = 2(2x+1)^2$

b) Incorrecto: $\frac{d}{dx}((2x+1)^3 + C) = 3(2x+1)^2(2) = 6(2x+1)^2$

c) Correcto: $\frac{d}{dx}((2x+1)^3 + C) = 6(2x+1)^2$

67. Correcto **69.** ***b)*** **71.** $y = x^2 - 7x + 10$

73. $y = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$ **75.** $y = 9x^{1/3} + 4$

77. $s = t + \operatorname{sen} t + 4$ **79.** $r = \cos(\pi\theta) - 1$

81. $v = \frac{1}{2}\sec t + \frac{1}{2}$ **83.** $y = x^2 - x^3 + 4x + 1$

85. $r = \frac{1}{t} + 2t - 2$ **87.** $y = x^3 - 4x^2 + 5$

89. $y = -\operatorname{sen} t + \cos t + t^3 - 1$ **91.** $y = 2x^{3/2} - 50$

93. $y = x - x^{4/3} + \frac{1}{2}$ **95.** $y = -\operatorname{sen} x - \cos x - 2$

97. ***a)*** **i.** 33.2 unidades, **ii.** 33.2 unidades, **iii.** 33.2 unidades

b) Verdadero

99. $t = 88/k, k = 16$

101. ***a)*** $v = 10t^{3/2} - 6t^{1/2}$ ***b)*** $s = 4t^{5/2} - 4t^{3/2}$

105. ***a)*** $-\sqrt{x} + C$ ***b)*** $x + C$ ***c)*** $\sqrt{x} + C$

d) $-x + C$ ***e)*** $x - \sqrt{x} + C$ ***f)*** $-x - \sqrt{x} + C$

Ejercicios de práctica, páginas 243 a 245

1. No **3.** No hay mínimo; máximo absoluto: $f(1) = 16$; puntos críticos: $x = 1$ y $11/3$

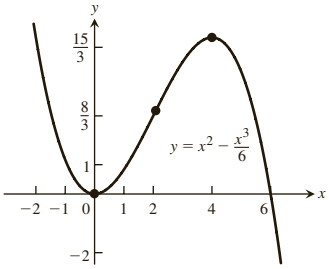
5. Sí, excepto en $x = 0$ **7.** No **11.** ***b)*** Uno

13. ***b)*** 0.8555 99677 2

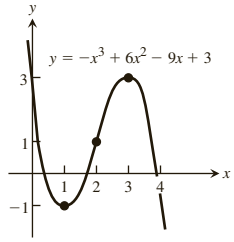
19. Valor mínimo global de $\frac{1}{2}$ en $x = 2$

21. ***a***) $t = 0, 6, 12$ ***b***) $t = 3, 9$ ***c***) $6 < t < 12$
d) $0 < t < 6, 12 < t < 14$

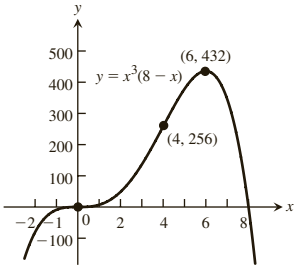
23.



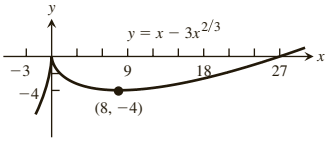
25.



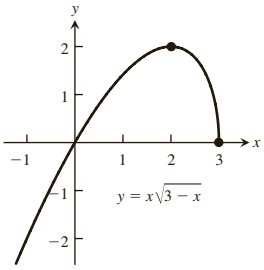
27.



29.

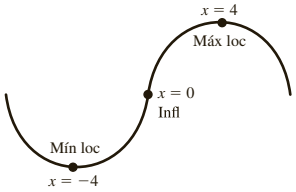


31.



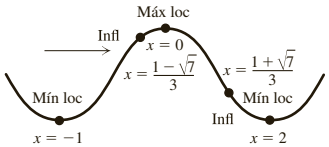
33. ***a***) Máximo local en $x = 4$, mínimo local en $x = -4$, punto de inflexión en $x = 0$

b)



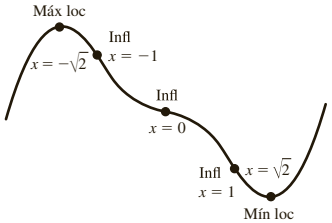
35. ***a***) Máximo local en $x = 0$, mínimos locales en $x = -1$ y $x = 2$, puntos de inflexión en $x = \left(1 \pm \sqrt{7}\right)/3$

b)

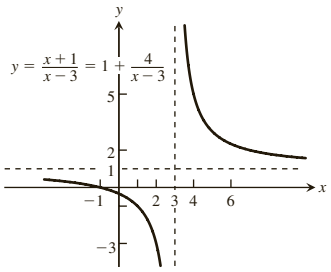


37. ***a***) Máximo local en $x = -\sqrt{2}$, mínimo local en $x = \sqrt{2}$, puntos de inflexión en $x = \pm 1$ y 0

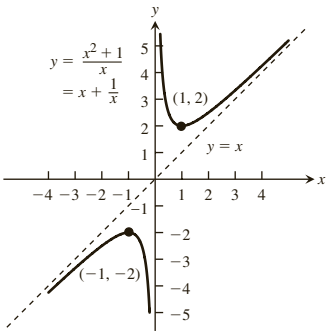
b)



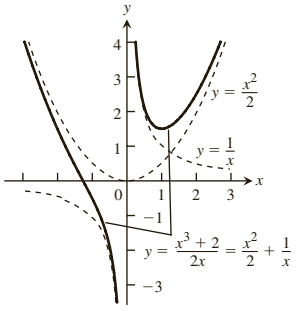
43.



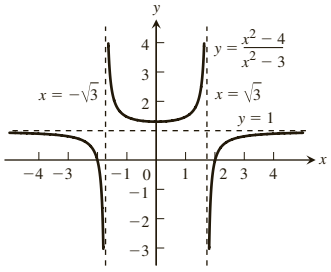
45.



47.



49.



51. ***a***) 0, 36 ***b***) 18, 18 **53.** 54 unidades cuadradas

55. altura $= 2$, radio $= \sqrt{2}$

57. $x = 5 - \sqrt{5}$ cientos $\approx$ 276 neumáticos
$y = 2\left(5 - \sqrt{5}\right)$ cientos $\approx$ 55 neumáticos

59. Dimensiones: la base mide 6 por 12 pulgadas, altura = 2 pulgadas; volumen máximo = 144 in^3

61. $x_5 = 2.1958\ 23345$ **63.** $\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{5}{2}x^2 - 7x + C$

65. $2t^{3/2} - \dfrac{4}{t} + C$ **67.** $-\dfrac{1}{r+5} + C$ **69.** $(\theta^2 + 1)^{3/2} + C$

71. $\dfrac{1}{3}(1 + x^4)^{3/4} + C$ **73.** $10 \tan \dfrac{s}{10} + C$

75. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \csc \sqrt{2}\theta + C$ **77.** $\dfrac{1}{2}x - \operatorname{sen}\dfrac{x}{2} + C$

79. $y = x - \dfrac{1}{x} - 1$ **81.** $r = 4t^{5/2} + 4t^{3/2} - 8t$

Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 245 a 247

1. La función es constante en el intervalo.

3. Los puntos extremos no estarán en los extremos de un intervalo abierto.

5. ***a***) Un mínimo local en $x = -1$, puntos de inflexión en $x = 0$ y $x = 2$

b) Un máximo local en $x = 0$ y mínimos locales en $x = -1$ y $x = 2$, puntos de inflexión en $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$

9. No **11.** $a = 1, b = 0, c = 1$ **13.** Sí

15. El mejor lugar para taladrar el orificio es en $y = h/2$.

17. $r = \dfrac{RH}{2(H - R)}$ para $H > 2R$, $r = R$ si $H \leq 2R$

19. ***a***) $\dfrac{c - b}{2e}$ ***b***) $\dfrac{c + b}{2}$ ***c***) $\dfrac{b^2 - 2bc + c^2 + 4ae}{4e}$

d) $\dfrac{c + b + t}{2}$

21. $m_0 = 1 - \dfrac{1}{q}, m_1 = \dfrac{1}{q}$

23. ***a***) $k = -38.72$ ***b***) 25 ft

25. Sí, $y = x + C$ **27.** $v_0 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} b^{3/4}$

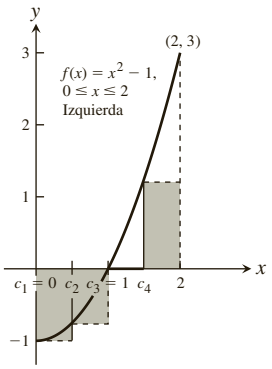
Capítulo 5

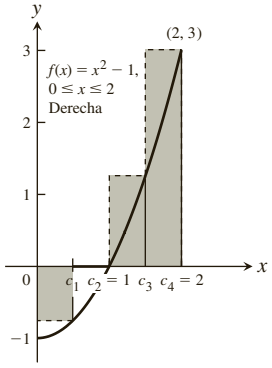
Sección 5.1, páginas 257 a 259

1. ***a)*** 0.125 ***b)*** 0.21875 ***c)*** 0.625 ***d)*** 0.46875
3. ***a)*** 1.066667 ***b)*** 1.283333 ***c)*** 2.666667 ***d)*** 2.083333
5. 0.3125, 0.328125 **7.** 1.5, 1.574603
9. ***a)*** 87 in ***b)*** 87 in **11.** ***a)*** 3490 ft ***b)*** 3840 ft
13. ***a)*** 74.65 ft/s ***b)*** 45.28 ft/s ***c)*** 146.59 ft
15. $\frac{31}{16}$ **17.** 1
19. ***a)*** Superior = 758 galones, inferior = 543 galones
b) Superior = 2363 galones, inferior = 1693 galones
c) $\approx$ 31.4 h, $\approx$ 32.4 h
21. ***a)*** 2 ***b)*** $2\sqrt{2} \approx 2.828$
c) $8 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 3.061$
d) Todas las áreas son menores que el área π del círculo. Cuando n aumenta, el área del polígono se aproxima a π.

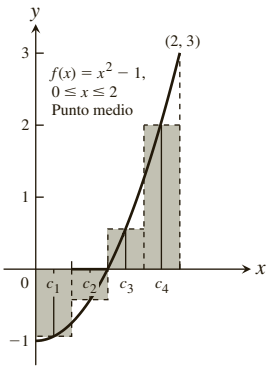
Sección 5.2, páginas 265 a 266

1. $\frac{6(1)}{1+1} + \frac{6(2)}{2+1} = 7$
3. $\cos(1)\pi + \cos(2)\pi + \cos(3)\pi + \cos(4)\pi = 0$
5. $\operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}-2}{2}$ **7.** Todas ellas **9.** b
11. $\sum_{k=1}^{6} k$ **13.** $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{2^k}$ **15.** $\sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$
17. ***a)*** -15 ***b)*** 1 ***c)*** 1 ***d)*** -11 ***e)*** 16
19. ***a)*** 55 ***b)*** 385 ***c)*** 3025
21. -56 **23.** -73 **25.** 240 **27.** 3376
29. ***a)*** 21 ***b)*** 3500 ***c)*** 2620
31. ***a)*** $4n$ ***b)*** cn ***c)*** $(n^2 - n)/2$
33. ***a)*** ***b)***

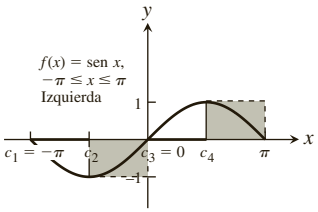


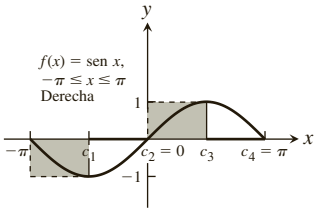


c)

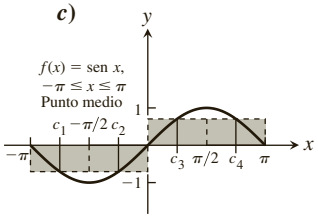


35. ***a)*** ***b)***





c)



37. 1.2
39. $\frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}, \quad \frac{2}{3}$
41. $12 + \frac{27n+9}{2n^2}, \quad 12$
43. $\frac{5}{6} + \frac{6n+1}{6n^2}, \quad \frac{5}{6}$
45. $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}, \quad \frac{1}{2}$

Sección 5.3, páginas 274 a 278

1. $\int_0^2 x^2\,dx$ **3.** $\int_{-7}^{5} (x^2 - 3x)\,dx$ **5.** $\int_2^3 \frac{1}{1-x}\,dx$
7. $\int_{-\pi/4}^{0} \sec x\,dx$
9. ***a)*** 0 ***b)*** -8 ***c)*** -12 ***d)*** 10 ***e)*** -2 ***f)*** 16
11. ***a)*** 5 ***b)*** $5\sqrt{3}$ ***c)*** -5 ***d)*** -5
13. ***a)*** 4 ***b)*** -4 **15.** Área = 21 unidades cuadradas
17. Área = $9\pi/2$ unidades cuadradas
19. Área = 2.5 unidades cuadradas
21. Área = 3 unidades cuadradas **23.** $b^2/4$ **25.** $b^2 - a^2$
27. ***a)*** 2π ***b)*** π **29.** 1/2 **31.** $3\pi^2/2$ **33.** 7/3
35. 1/24 **37.** $3a^2/2$ **39.** $b/3$ **41.** -14
43. -2 **45.** $-7/4$ **47.** 7 **49.** 0
51. Usando n subintervalos de longitud $\Delta x = b/n$ y los valores del extremo derecho:

$$\text{Área} = \int_0^b 3x^2\,dx = b^3$$

53. Usando n subintervalos de longitud $\Delta x = b/n$ y los valores del extremo derecho:

$$\text{Área} = \int_0^b 2x\,dx = b^2$$

55. prom $(f) = 0$ **57.** prom $(f) = -2$ **59.** prom $(f) = 1$
61. ***a)*** prom $(g) = -1/2$ ***b)*** prom $(g) = 1$ ***c)*** prom $(g) = 1/4$
63. $c(b - a)$ **65.** $b^3/3 - a^3/3$ **67.** 9
69. $b^4/4 - a^4/4$ **71.** $a = 0$ y $b = 1$ maximiza la integral.
73. Cota superior = 1, cota inferior = 1/2
75. Por ejemplo, $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx \le \int_0^1 dx = 1$
77. $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b 0\,dx = 0$ **79.** Cota superior = 1/2

Sección 5.4, páginas 286 a 289

1. $-10/3$ **3.** 124/125 **5.** 753/16 **7.** 1 **9.** $2\sqrt{3}$
11. 0 **13.** $-\pi/4$ **15.** $1 - \frac{\pi}{4}$ **17.** $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ **19.** $-8/3$

21. $-3/4$ **23.** $\sqrt{2} - \sqrt[4]{8} + 1$ **25.** -1 **27.** 16

29. $\frac{1}{2}$ **31.** $\sqrt{26} - \sqrt{5}$ **33.** $(\cos\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ **35.** $4t^5$

37. 3 **39.** $\sqrt{1 + x^2}$ **41.** $-\frac{1}{2}x^{-1/2}\operatorname{sen} x$ **43.** 0

45. 1 **47.** $28/3$ **49.** $1/2$ **51.** π **53.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

55. d, puesto que $y' = \frac{1}{x}$ y $y(\pi) = \int_{\pi}^{\pi} \frac{1}{t}dt - 3 = -3$

57. b, puesto que $y' = \sec x$ y $y(0) = \int_{0}^{0} \sec t\, dt + 4 = 4$

59. $y = \int_{2}^{x} \sec t\, dt + 3$ **61.** $\frac{2}{3}bh$ **63.** \$9.00

65. ***a)*** $T(0) = 70°\text{F}$, $T(16) = 76°\text{F}$, $T(25) = 85°\text{F}$
b) $\text{prom}\,(T) = 75°\text{F}$

67. $2x - 2$ **69.** $-3x + 5$

71. ***a)*** Verdadero. Como f es continua, g es diferenciable, según la parte 1 del teorema fundamental del cálculo.
b) Verdadero: g es continua porque es diferenciable.
c) Verdadero, porque $g'(1) = f(1) = 0$.
d) Falso, porque $g''(1) = f'(1) > 0$.
e) Verdadero, porque $g'(1) = 0$ y $g''(1) = f'(1) > 0$.
f) Falso: $g''(x) = f'(x) > 0$, de modo que g'' jamás cambia de signo.
g) Verdadero, porque $g'(1) = f(1) = 0$ y $g'(x) = f(x)$ es una función creciente de x (porque $f'(x) > 0$).

73. ***a)*** $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{0}^{t} f(x)\,dx = f(t) \Rightarrow v(5) = f(5) = 2\ \text{m/s}$

b) $a = df/dt$ es negativa, porque la pendiente de la recta tangente en $t = 5$ es negativa.

c) $s = \int_{0}^{3} f(x)\,dx = \frac{1}{2}(3)(3) = \frac{9}{2}\text{m}$, ya que la integral es el área del triángulo formado por $y = f(x)$, el eje x y $x = 3$.

d) $t = 6$, ya que después, entre $t = 6$ y $t = 9$, la región está debajo del eje x.

e) En $t = 4$ y $t = 7$, ya que ahí hay tangentes horizontales.

f) Hacia el origen, entre $t = 6$ y $t = 9$, ya que la velocidad es negativa en este intervalo. Se aleja del origen, entre $t = 0$ y $t = 6$, ya que la velocidad es positiva ahí.

g) Lado derecho o positivo, porque la integral de f de 0 a 9 es positiva, por lo que hay más área arriba del eje x que debajo.

Sección 5.5, páginas 294 a 296

1. $\frac{1}{6}(2x + 4)^6 + C$ **3.** $-\frac{1}{3}(x^2 + 5)^{-3} + C$

5. $\frac{1}{10}(3x^2 + 4x)^5 + C$ **7.** $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$

9. $\frac{1}{2}\sec 2t + C$ **11.** $-6(1 - r^3)^{1/2} + C$

13. $\frac{1}{3}(x^{3/2} - 1) - \frac{1}{6}\operatorname{sen}(2x^{3/2} - 2) + C$

15. *a)* $-\frac{1}{4}(\cot^2 2\theta) + C$ *b)* $-\frac{1}{4}(\csc^2 2\theta) + C$

17. $-\frac{1}{3}(3 - 2s)^{3/2} + C$ **19.** $-\frac{2}{5}(1 - \theta^2)^{5/4} + C$

21. $\left(-2/\left(1 + \sqrt{x}\right)\right) + C$ **23.** $\frac{1}{3}\tan(3x + 2) + C$

25. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^6\left(\frac{x}{3}\right) + C$ **27.** $\left(\frac{r^3}{18} - 1\right)^6 + C$

29. $-\frac{2}{3}\cos(x^{3/2} + 1) + C$ **31.** $\frac{1}{2\cos(2t + 1)} + C$

33. $-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t} - 1\right) + C$ **35.** $-\frac{\operatorname{sen}^2(1/\theta)}{2} + C$

37. $\frac{2}{3}(1 + x)^{3/2} - 2(1 + x)^{1/2} + C$ **39.** $\frac{2}{3}\left(2 - \frac{1}{x}\right)^{3/2} + C$

41. $\frac{2}{27}\left(1 - \frac{3}{x^3}\right)^{3/2} + C$ **43.** $\frac{1}{12}(x - 1)^{12} + \frac{1}{11}(x - 1)^{11} + C$

45. $-\frac{1}{8}(1 - x)^8 + \frac{4}{7}(1 - x)^7 - \frac{2}{3}(1 - x)^6 + C$

47. $\frac{1}{5}(x^2 + 1)^{5/2} - \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$ **49.** $\frac{-1}{4(x^2 - 4)^2} + C$

51. ***a)*** $-\frac{6}{2 + \tan^3 x} + C$ ***b)*** $-\frac{6}{2 + \tan^3 x} + C$
c) $-\frac{6}{2 + \tan^3 x} + C$

53. $\frac{1}{6}\operatorname{sen}\sqrt{3(2r - 1)^2 + 6} + C$ **55.** $s = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)^4 - 5$

57. $s = 4t - 2\operatorname{sen}\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) + 9$

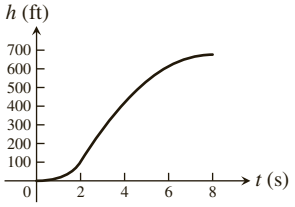
59. $s = \operatorname{sen}\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) + 100t + 1$ **61.** 6 m

Sección 5.6, páginas 303 a 306

1. ***a)*** $14/3$ ***b)*** $2/3$ **3.** ***a)*** $1/2$ ***b)*** $-1/2$
5. ***a)*** $15/16$ ***b)*** 0 **7.** ***a)*** 0 ***b)*** $1/8$ **9.** ***a)*** 4 *b)* 0
11. ***a)*** $506/375$ *b)* $86{,}744/375$ **13.** ***a)*** 0 ***b)*** 0
15. $2\sqrt{3}$ **17.** $3/4$ **19.** $3^{5/2} - 1$ **21.** 3 **23.** $\pi/3$
25. $16/3$ **27.** $2^{5/2}$ **29.** $\pi/2$ **31.** $128/15$
33. $4/3$ **35.** $5/6$ **37.** $38/3$ **39.** $49/6$
41. $32/3$ **43.** $48/5$ **45.** $8/3$ **47.** 8
49. $5/3$ (Hay tres puntos de intersección). **51.** 18
53. $243/8$ **55.** $8/3$ **57.** 2 **59.** $104/15$ **61.** $56/15$
63. 4 **65.** $\frac{4}{3} - \frac{4}{\pi}$ **67.** $\pi/2$ **69.** 2 **71.** $1/2$
73. 1 **75.** ***a)*** $\left(\pm\sqrt{c}, c\right)$ ***b)*** $c = 4^{2/3}$ ***c)*** $c = 4^{2/3}$
77. $11/3$ **79.** $3/4$ **81.** Ninguna **83.** $F(6) - F(2)$
85. ***a)*** -3 ***b)*** 3 **87.** $I = a/2$

Ejercicios de práctica, páginas 307 a 309

1. ***a)*** Aproximadamente 680 ft ***b)*** h (ft)



3. ***a)*** $-1/2$ ***b)*** 31 ***c)*** 13 ***d)*** 0

5. $\int_1^5 (2x-1)^{-1/2}\,dx = 2$ **7.** $\int_{-\pi}^{0} \cos\frac{x}{2}\,dx = 2$

9. *a*) 4 *b*) 2 *c*) -2 *d*) -2π *e*) $8/5$

11. $8/3$ **13.** 62 **15.** 1 **17.** $1/6$ **19.** 18 **21.** $9/8$

23. $\frac{\pi^2}{32} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ **25.** 4 **27.** $\frac{8\sqrt{2}-7}{6}$

29. Mín: -4, máx: 0, área: $27/4$ **31.** $6/5$

35. $y = \int_5^x \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) dt - 3$ **37.** $-4(\cos x)^{1/2} + C$

39. $\theta^2 + \theta + \operatorname{sen}(2\theta + 1) + C$ **41.** $\frac{t^3}{3} + \frac{4}{t} + C$

43. $-\frac{1}{3}\cos(2t^{3/2}) + C$ **45.** 16 **47.** 2 **49.** 1 **51.** 8

53. $27\sqrt{3}/160$ **55.** $\pi/2$ **57.** $\sqrt{3}$ **59.** $6\sqrt{3} - 2\pi$

61. -1 **63.** 2 **65.** 1 **67.** *a*) *b* *b*) *b*

71. 25°F **73.** $\sqrt{2 + \cos^3 x}$ **75.** $\frac{-6}{3 + x^4}$

77. Sí **79.** $-\sqrt{1 + x^2}$

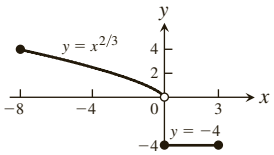
81. Costo $\approx$ \$10,899 usando una estimación con suma inferior

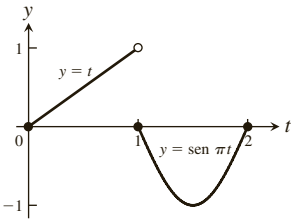
Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 310 a 312

1. *a*) Sí *b*) No **5.** *a*) $1/4$ *b*) $\sqrt[3]{12}$

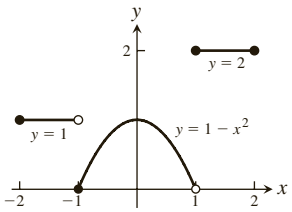
7. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **9.** $y = x^3 + 2x - 4$

11. $36/5$ **13.** $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}$





15. $13/3$



17. $1/2$ **19.** $1/6$ **21.** $\int_0^1 f(x)\,dx$ **23.** *b*) πr^2

25. *a*) 0 *b*) -1 *c*) $-\pi$ *d*) $x = 1$
e) $y = 2x + 2 - \pi$ *f*) $x = -1, x = 2$
g) $[-2\pi, 0]$

27. $2/x$ **29.** $\frac{\operatorname{sen} 4y}{\sqrt{y}} - \frac{\operatorname{sen} y}{2\sqrt{y}}$

Capítulo 6

Sección 6.1, páginas 321 a 324

1. 16 **3.** $16/3$ **5.** *a*) $2\sqrt{3}$ *b*) 8 **7.** *a*) 60 *a*) 36

9. 8π **11.** 10 **13.** *a*) s^2h *b*) s^2h **15.** $\frac{2\pi}{3}$

17. $4 - \pi$ **19.** $\frac{32\pi}{5}$ **21.** 36π **23.** π

25. $\pi\left(\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2} - \frac{11}{3}\right)$ **27.** 2π **29.** 2π **31.** $\frac{16\pi}{35}$

33. $\pi^2 - 2\pi$ **35.** $\frac{2\pi}{3}$ **37.** $\frac{117\pi}{5}$ **39.** $\pi(\pi - 2)$

41. $\frac{4\pi}{3}$ **43.** 8π **45.** $\frac{7\pi}{6}$

47. *a*) 8π *b*) $\frac{32\pi}{5}$ *c*) $\frac{8\pi}{3}$ *d*) $\frac{224\pi}{15}$

49. *a*) $\frac{16\pi}{15}$ *b*) $\frac{56\pi}{15}$ *c*) $\frac{64\pi}{15}$ **51.** $V = 2a^2b\pi^2$

53. *a*) $V = \frac{\pi h^2(3a - h)}{3}$ *b*) $\frac{1}{120\pi}$ m/s

57. $V = 3308\ \text{cm}^3$ **59.** $\frac{4 - b + a}{2}$

Sección 6.2, páginas 329 a 331

1. 6π **3.** 2π **5.** $14\pi/3$ **7.** 8π **9.** $5\pi/6$

11. $\frac{7\pi}{15}$ **13.** *b*) 4π **15.** $\frac{16\pi}{15}\left(3\sqrt{2} + 5\right)$

17. $\frac{8\pi}{3}$ **19.** $\frac{4\pi}{3}$ **21.** $\frac{16\pi}{3}$

23. *a*) 16π *b*) 32π *c*) 28π
d) 24π *e*) 60π *f*) 48π

25. *a*) $\frac{27\pi}{2}$ *b*) $\frac{27\pi}{2}$ *c*) $\frac{72\pi}{5}$ *d*) $\frac{108\pi}{5}$

27. *a*) $\frac{6\pi}{5}$ *b*) $\frac{4\pi}{5}$ *c*) 2π *d*) 2π

29. *a*) Alrededor del eje x: $V = \frac{2\pi}{15}$; alrededor del eje y: $V = \frac{\pi}{6}$
b) Alrededor del eje x: $V = \frac{2\pi}{15}$; alrededor del eje y: $V = \frac{\pi}{6}$

31. *a*) $\frac{5\pi}{3}$ *b*) $\frac{4\pi}{3}$ *c*) 2π *d*) $\frac{2\pi}{3}$

33. *a*) $\frac{4\pi}{15}$ *b*) $\frac{7\pi}{30}$

35. *a*) $\frac{24\pi}{5}$ *b*) $\frac{48\pi}{5}$

37. *a*) $\frac{9\pi}{16}$ *b*) $\frac{9\pi}{16}$

39. Discos: 2 integrales; arandelas: 2 integrales; casquillos: 1 integral.

41. *a*) $\frac{256\pi}{3}$ *b*) $\frac{244\pi}{3}$

Sección 6.3, páginas 335 a 337

1. 12 **3.** $\frac{53}{6}$ **5.** $\frac{123}{32}$ **7.** $\frac{99}{8}$ **9.** $\frac{53}{6}$ **11.** 2

13. *a*) $\int_{-1}^{2} \sqrt{1 + 4x^2}\,dx$ *c*) ≈ 6.13

15. *a*) $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 y}\,dy$ *c*) ≈ 3.82

17. *a*) $\int_{-1}^{3} \sqrt{1 + (y+1)^2}\,dy$ *c*) ≈ 9.29

19. *a*) $\int_0^{\pi/6} \sec x\,dx$ *c*) ≈ 0.55

21. *a*) $y = \sqrt{x}$ de (1, 1) a (4, 2)
b) Sólo una. Conocemos la derivada de la función y el valor de la función en un valor de x.

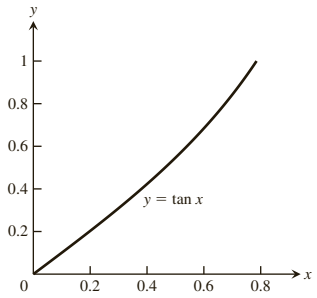
23. 1 **25.** Si $f(x) = \pm x + C$, donde C es cualquier número real.

33. $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1 + 9t}\,dt, \frac{2}{27}(10^{3/2} - 1)$

Sección 6.4, páginas 340 a 342

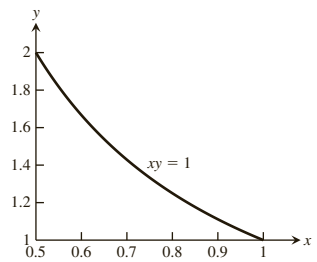
1. ***a)*** $\displaystyle 2\pi\int_0^{\pi/4} (\tan x)\sqrt{1 + s^4 x}\,dx$ ***c)*** $S \approx 3.84$

b)



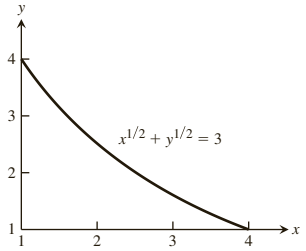
3. ***a)*** $\displaystyle 2\pi\int_1^2 \frac{1}{y}\sqrt{1 + y^{-4}}\,dy$ ***c)*** $S \approx 5.02$

b)



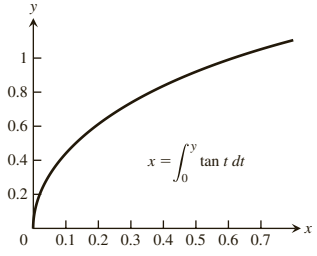
5. ***a)*** $\displaystyle 2\pi\int_1^4 (3 - x^{1/2})^2\sqrt{1 + (1 - 3x^{-1/2})^2}\,dx$ ***c)*** $S \approx 63.37$

b)



7. ***a)*** $\displaystyle 2\pi\int_0^{\pi/3}\left(\int_0^y \tan t\,dt\right)\sec y\,dy$ ***c)*** $S \approx 2.08$

b)



9. $4\pi\sqrt{5}$ **11.** $3\pi\sqrt{5}$ **13.** $98\pi/81$ **15.** 2π

17. $\pi\left(\sqrt{8} - 1\right)/9$ **19.** $35\pi\sqrt{5}/3$

21. $(2\pi/3)\left(2\sqrt{2} - 1\right)$ **23.** $253\pi/20$

27. Ordenar 226.2 litros de cada color.

Sección 6.5, páginas 347 a 351

1. 400 N/m **3.** 4 cm, 0.08 J

5. ***a)*** 7238 lb/in ***b)*** 905 in-lb, 2714 in-lb

7. 780 J **9.** 72,900 ft-lb **11.** 160 ft-lb

13. ***a)*** 1,497,600 ft-lb ***b)*** 1 hr, 40 min

d) En 62.26 lb/ft^3: ***a)*** 1,494,240 ft-lb ***b)*** 1 h, 40 min
En 62.59 lb/ft^3: ***a)*** 1,502,160 ft-lb ***b)*** 1 h, 40.1 min

15. 37,306 ft-lb **17.** 7,238,299.47 ft-lb

19. 2446.25 ft-lb **21.** 15,073,099.75 J

25. 85.1 ft-lb **27.** 98.35 ft-lb **29.** 91.32 in-oz

31. 5.144×10^{10} J **33.** 1684.8 lb

35. ***a)*** 6364.8 lb ***b)*** 5990.4 lb **37.** 1164.8 lb **39.** 1309 lb

41. ***a)*** 12,480 lb ***b)*** 8580 lb ***c)*** 9722.3 lb

43. ***a)*** 93.33 lb ***b)*** 3 ft **45.** $\dfrac{wb}{2}$

47. No. El líquido del tanque se derramará porque el extremo móvil se habrá movido sólo $3\frac{1}{3}$ ft en el momento en que el tanque se llena.

Sección 6.6, páginas 360 a 362

1. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 12/5$ **3.** $\bar{x} = 1, \bar{y} = -3/5$

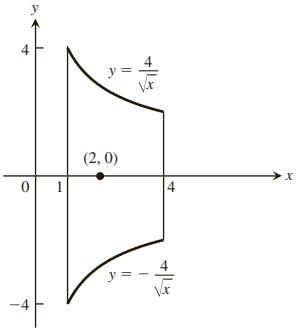
5. $\bar{x} = 16/105, \bar{y} = 8/15$ **7.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \pi/8$

9. $\bar{x} = 1, \bar{y} = -2.5$

11. $\bar{x} = \bar{y} = 2/(4 - \pi)$ **13.** $\bar{x} = 3/2, \bar{y} = 1/2$

15. ***a)*** $\dfrac{224\pi}{3}$ ***b)*** $\bar{x} = 2, \bar{y} = 0$

c)



17. $\bar{x} = \bar{y} = 1/3$ **19.** $\bar{x} = a/3, \bar{y} = b/3$ **21.** $13\delta/6$

23. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \dfrac{a\pi}{4}$ **25.** $\bar{x} = 1/2, \bar{y} = 4$

27. $\bar{x} = 6/5, \bar{y} = 8/7$ **33.** $V = 32\pi, S = 32\sqrt{2}\pi$ **35.** $4\pi^2$

37. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \dfrac{2a}{\pi}$ **39.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \dfrac{4b}{3\pi}$

41. $\sqrt{2}\pi a^3(4 + 3\pi)/6$ **43.** $\bar{x} = \dfrac{a}{3}, \bar{y} = \dfrac{b}{3}$

Ejercicios de práctica, páginas 362 a 364

1. $\dfrac{9\pi}{280}$ **3.** π^2 **5.** $\dfrac{72\pi}{35}$

7. ***a)*** 2π ***b)*** π ***c)*** $12\pi/5$ ***d)*** $26\pi/5$

9. ***a)*** 8π ***b)*** $1088\pi/15$ ***c)*** $512\pi/15$

11. $\pi\left(3\sqrt{3} - \pi\right)/3$

13. ***a)*** $16\pi/15$ ***b)*** $8\pi/5$ ***c)*** $8\pi/3$ ***d)*** $32\pi/5$

15. $\dfrac{28\pi}{3}$ ft^3 **17.** $\dfrac{10}{3}$ **19.** $\dfrac{285}{8}$ **21.** $28\pi\sqrt{2}/3$

23. 4π **25.** 4640 J **27.** $\dfrac{w}{2}(2ar - a^2)$

29. 418,208.81 libras-pie **31.** $22{,}500\pi$ libras-pie, 257 s

33. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 8/5$ **35.** $\bar{x} = 3/2, \bar{y} = 12/5$

37. $\bar{x} = 9/5, \bar{y} = 11/10$ **39.** 332.8 lb **41.** 2196.48 lb

Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 364 a 365

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x - a}{\pi}}$ **3.** $f(x) = \sqrt{C^2 - 1}\,x + a$, donde $C \geq 1$

5. $\dfrac{\pi}{30\sqrt{2}}$ **7.** $28/3$ **9.** $\dfrac{4h\sqrt{3mh}}{3}$

11. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \dfrac{n}{2n + 1}, (0, 1/2)$

15. ***a)*** $\bar{x} = \bar{y} = 4(a^2 + ab + b^2)/(3\pi(a + b))$

b) $(2a/\pi, 2a/\pi)$

17. $\approx$ 2329.6 lb

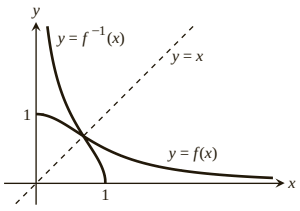
Capítulo 7

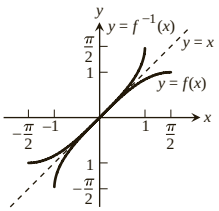
Sección 7.1, páginas 372 a 374

1. Inyectiva **3.** No inyectiva **5.** Inyectiva

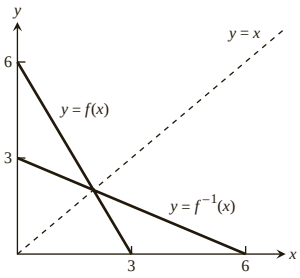
7. No inyectiva **9.** Inyectiva

11. D: $(0, 1]$ R: $[0, \infty)$ **13.** D: $[-1, 1]$ R: $[-\pi/2, \pi/2]$

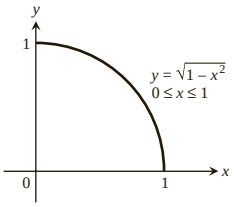




15. D: $[0, 6]$ R: $[0, 3]$



17. ***a)*** Simétrica con respecto a la recta $y = x$



19. $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$ **21.** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

23. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$

25. $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$; dominio: $-\infty < x < \infty$; rango: $-\infty < y < \infty$

27. $f^{-1}(x) = 5\sqrt{x - 1}$; dominio: $-\infty < x < \infty$; rango: $-\infty < y < \infty$

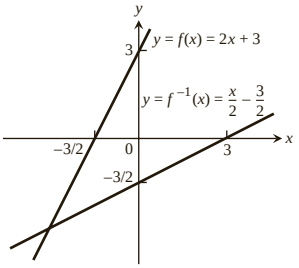
29. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; dominio: $x > 0$; rango: $y > 0$

31. $f^{-1}(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$; dominio: $-\infty < x < \infty, x \neq 1$; rango: $-\infty < y < \infty, y \neq 2$

33. $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x + 1}$; dominio: $-1 \leq x < \infty$; rango: $-\infty < y \leq 1$

35. ***a)*** $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2}$

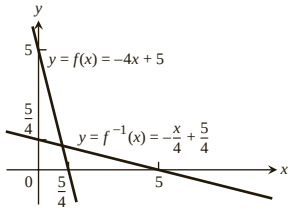
b)



c) $2, 1/2$

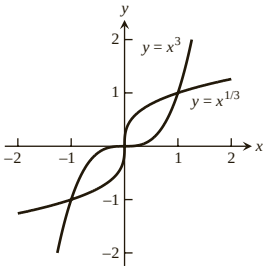
37. ***a)*** $f^{-1}(x) = -\dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{4}$

b)



c) $-4, -1/4$

39. ***b)***



c) Pendiente de f en (1, 1): 3; pendiente de g en (1, 1): $1/3$; pendiente de f en $(-1, -1)$: 3; pendiente de g en $(-1, -1)$: $1/3$

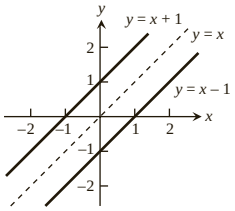
d) $y = 0$ es tangente a $y = x^3$ en $x = 0$; $x = 0$ es tangente a $y = \sqrt[3]{x}$ en $x = 0$.

41. $1/9$ **43.** 3

45. ***a)*** $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{m}x$

b) La gráfica de f^{-1}es la recta, con pendiente $1/m$ que pasa por el origen.

47. ***a)*** $f^{-1}(x) = x - 1$



b) $f^{-1}(x) = x - b$. La gráfica de f^{-1} es la recta paralela a la gráfica de f. Las gráficas de f y f^{-1} se encuentran en lados opuestos de la recta $y = x$ y son equidistantes de esa recta.

c) Sus gráficas serán paralelas una de la otra, y están en lados opuestos de la recta $y = x$, y son equidistantes de esa recta.

51. Creciente y, por lo tanto, inyectiva; $df^{-1}/dx = \dfrac{1}{9}x^{-2/3}$

53. Decreciente y, por lo tanto, inyectiva; $df^{-1}/dx = -\dfrac{1}{3}x^{-2/3}$

Sección 7.2, páginas 381 a 382

1. ***a)*** $\ln 3 - 2\ln 2$ ***b)*** $2(\ln 2 - \ln 3)$ ***c)*** $-\ln 2$

d) $\dfrac{2}{3}\ln 3$ ***e)*** $\ln 3 + \dfrac{1}{2}\ln 2$ ***f)*** $\dfrac{1}{2}(3\ln 3 - \ln 2)$

3. ***a)*** $\ln 5$ ***b)*** $\ln(x - 3)$ ***c)*** $\ln(t^2)$

5. $1/x$ **7.** $2/t$ **9.** $-1/x$ **11.** $\dfrac{1}{\theta + 1}$ **13.** $3/x$

15. $2(\ln t) + (\ln t)^2$ **17.** $x^3 \ln x$ **19.** $\dfrac{1 - \ln t}{t^2}$

21. $\dfrac{1}{x(1 + \ln x)^2}$ **23.** $\dfrac{1}{x \ln x}$ **25.** $2\cos(\ln\theta)$

27. $-\dfrac{3x + 2}{2x(x + 1)}$ **29.** $\dfrac{2}{t(1 - \ln t)^2}$ **31.** $\dfrac{\tan(\ln\theta)}{\theta}$

33. $\dfrac{10x}{x^2 + 1} + \dfrac{1}{2(1 - x)}$ **35.** $2x \ln|x| - x \ln\dfrac{|x|}{\sqrt{2}}$

37. $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$ **39.** $\ln|y^2 - 25| + C$ **41.** $\ln 3$

43. $(\ln 2)^2$ **45.** $\dfrac{1}{\ln 4}$ **47.** $\ln|6 + 3\tan t| + C$

49. $\ln 2$ **51.** $\ln 27$ **53.** $\ln(1 + \sqrt{x}) + C$

55. $\left(\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{x(x + 1)}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1}\right) = \dfrac{2x + 1}{2\sqrt{x(x + 1)}}$

57. $\left(\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{\dfrac{t}{t + 1}}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t + 1}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}(t + 1)^{3/2}}$

59. $\sqrt{\theta + 3}(\operatorname{sen}\theta)\left(\dfrac{1}{2(\theta + 3)} + \cot\theta\right)$

61. $t(t + 1)(t + 2)\left[\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t + 1} + \dfrac{1}{t + 2}\right] = 3t^2 + 6t + 2$

63. $\dfrac{\theta + 5}{\theta\cos\theta}\left[\dfrac{1}{\theta + 5} - \dfrac{1}{\theta} + \tan\theta\right]$

65. $\dfrac{x\sqrt{x^2 + 1}}{(x + 1)^{2/3}}\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x^2 + 1} - \dfrac{2}{3(x + 1)}\right]$

67. $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x(x - 2)}{x^2 + 1}}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{2x}{x^2 + 1}\right)$

69. ***a)*** Máx $= 0$ en $x = 0$, mín $= -\ln 2$ en $x = \pi/3$

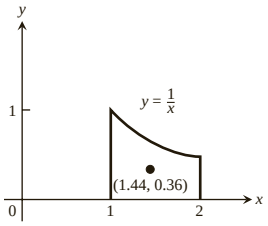
b) Máx $= 1$ en $x = 1$, mín $= \cos(\ln 2)$ en $x = 1/2$ y $x = 2$

71. $\ln 16$ **73.** $4\pi \ln 4$ **75.** $\pi \ln 16$

77. ***a)*** $6 + \ln 2$ ***b)*** $8 + \ln 9$

79. ***a)*** $\bar{x} \approx 1.44, \bar{y} \approx 0.36$

b)



83. $y = x + \ln|x| + 2$ **85.** ***b)*** 0.00469

Sección 7.3, páginas 390 a 393

1. ***a)*** $t = -10\ln 3$ ***b)*** $t = -\dfrac{\ln 2}{k}$ ***c)*** $t = \dfrac{\ln .4}{\ln .2}$

3. $4(\ln x)^2$ **5.** $-5e^{-5x}$ **7.** $-7e^{(5-7x)}$ **9.** xe^x

11. x^2e^x **13.** $2e^\theta\cos\theta$ **15.** $2\theta e^{-\theta^2}\operatorname{sen}(e^{-\theta^2})$

17. $\dfrac{1 - t}{t}$ **19.** $1/(1 + e^\theta)$ **21.** $e^{\cos t}(1 - t\operatorname{sen} t)$

23. $(\operatorname{sen} x)/x$ **25.** $\dfrac{ye^y\cos x}{1 - ye^y\operatorname{sen} x}$ **27.** $\dfrac{2e^{2x} - \cos(x + 3y)}{3\cos(x + 3y)}$

29. $\dfrac{1}{3}e^{3x} - 5e^{-x} + C$ **31.** 1 **33.** $8e^{(x+1)} + C$ **35.** 2

37. $2e^{\sqrt{r}} + C$ **39.** $-e^{-t^2} + C$ **41.** $-e^{1/x} + C$ **43.** e

45. $\dfrac{1}{\pi}e^{\sec\pi t} + C$ **47.** 1 **49.** $\ln(1 + e^r) + C$

51. $y = 1 - \cos(e^t - 2)$ **53.** $y = 2(e^{-x} + x) - 1$ **55.** $2^x \ln 2$

57. $\left(\dfrac{\ln 5}{2\sqrt{s}}\right)5^{\sqrt{s}}$ **59.** $\pi x^{(\pi-1)}$ **61.** $-\sqrt{2}\cos\theta^{(\sqrt{2}-1)}\operatorname{sen}\theta$

63. $7^{\sec\theta}(\ln 7)^2(\sec\theta\tan\theta)$ **65.** $(3\cos 3t)(2^{\operatorname{sen} 3t})\ln 2$

67. $\dfrac{1}{\theta\ln 2}$ **69.** $\dfrac{3}{x\ln 4}$ **71.** $\dfrac{x^2}{\ln 10} + 3x^2\log_{10} x$

73. $\dfrac{-2}{(x + 1)(x - 1)}$ **75.** $\operatorname{sen}(\log_7\theta) + \dfrac{1}{\ln 7}\cos(\log_7\theta)$

77. $\dfrac{1}{\ln 10}$ **79.** $\dfrac{1}{t}(\log_2 3)3^{\log_2 t}$ **81.** $\dfrac{1}{t}$

83. $\dfrac{5^x}{\ln 5} + C$ **85.** $\dfrac{1}{2\ln 2}$ **87.** $\dfrac{1}{\ln 2}$ **89.** $\dfrac{6}{\ln 7}$

91. 32,760 **93.** $\dfrac{3x^{(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt{3} + 1} + C$ **95.** $3^{\sqrt{2}+1}$

97. $\dfrac{1}{\ln 10}\left(\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right) + C$ **99.** $2(\ln 2)^2$ **101.** $\dfrac{3\ln 2}{2}$

103. $\ln 10$ **105.** $(\ln 10)\ln|\ln x| + C$

107. $\ln(\ln x), x > 1$ **109.** $-\ln x$

111. $(x + 1)^x\left(\dfrac{x}{x + 1} + \ln(x + 1)\right)$ **113.** $(\sqrt{t})^t\left(\dfrac{\ln t}{2} + \dfrac{1}{2}\right)$

115. $(\operatorname{sen} x)^x(\ln\operatorname{sen} x + x\cot x)$ **117.** $\cos x^x \cdot x^x(1 + \ln x)$

119. Máximo: 1 en $x = 0$, mínimo: $2 - 2\ln 2$ en $x = \ln 2$

121. ***a)*** Máx abs: $\dfrac{1}{e}$ en $x = 1$ ***b)*** $\left(2, \dfrac{2}{e^2}\right)$

123. Máx abs en $1/(2e)$ se alcanza en $x = 1/\sqrt{e}$ **125.** 2

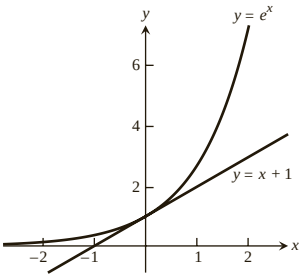
127. $y = e^{x/2} - 1$ **129.** $\dfrac{e^2 - 1}{2e}$ **131.** $\ln(\sqrt{2} + 1)$

133. ***a)*** $\dfrac{d}{dx}(x\ln x - x + C) = x\cdot\dfrac{1}{x} + \ln x - 1 + 0 = \ln x$

b) $\dfrac{1}{e - 1}$

135. ***a)*** $|\text{error}| \approx 0.02140$

c) $L(x) = x + 1$ nunca sobrestima el valor de e^x.



137. $2\ln 5$ **139.** $x \approx -0.76666$

141. ***a)*** $L(x) = 1 + (\ln 2)x \approx 0.69x + 1$

Sección 7.4, páginas 400 a 402

9. $\dfrac{2}{3}y^{3/2} - x^{1/2} = C$ **11.** $e^y - e^x = C$

13. $-x + 2\tan\sqrt{y} = C$ **15.** $e^{-y} + 2e^{\sqrt{x}} = C$

17. $y = \operatorname{sen}(x^2 + C)$ **19.** $\dfrac{1}{3}\ln|y^3 - 2| = x^3 + C$

21. $4\ln\left(\sqrt{y} + 2\right) = e^{x^2} + C$

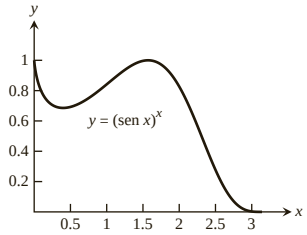
23. ***a)*** -0.00001 ***b)*** 10,536 años ***c)*** 82%

25. 54.88 g **27.** 59.8 ft **29.** 2.8147498×10^{14}

31. ***a)*** 8 años ***b)*** 32.02 años **33.** Sí, $y(20) < 1$
35. 15.28 años **37.** 56,562 años
41. ***a)*** 17.5 min ***b)*** 13.26 min
43. $-3°C$ **45.** Aproximadamente 6693 años **47.** 54.62%
49. $\approx 15{,}683$ años

Sección 7.5, páginas 409 a 411

1. $-1/4$ **3.** $5/7$ **5.** $1/2$ **7.** $1/4$ **9.** $-23/7$
11. $5/7$ **13.** 0 **15.** -16 **17.** -2 **19.** $1/4$
21. 2 **23.** 3 **25.** -1 **27.** $\ln 3$ **29.** $\dfrac{1}{\ln 2}$ **31.** $\ln 2$
33. 1 **35.** $1/2$ **37.** $\ln 2$ **39.** $-\infty$ **41.** $-1/2$
43. -1 **45.** 1 **47.** 0 **49.** 2 **51.** $1/e$ **53.** 1
55. $1/e$ **57.** $e^{1/2}$ **59.** 1 **61.** e^3 **63.** 0 **65.** $+1$
67. 3 **69.** 1 **71.** 0 **73.** ∞ **75.** ***b)*** es correcto.
77. ***d)*** es correcto. **79.** $c = \dfrac{27}{10}$ **81.** ***b)*** $\dfrac{-1}{2}$ **83.** -1
87. ***a)*** $y = 1$ ***b)*** $y = 0, y = \dfrac{3}{2}$
89. ***a)*** Se debe asignar el valor de 1 a $f(x) = (\operatorname{sen} x)^x$ para hacerla continua en $x = 0$.

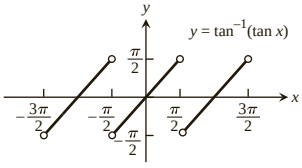


c) El valor máximo de $f(x)$ está cerca de 1, próximo al punto $x \approx 1.55$ (vea la gráfica del inciso ***a***).

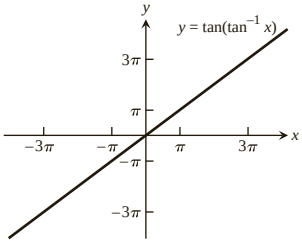
Sección 7.6, páginas 420 a 423

1. ***a)*** $\pi/4$ ***b)*** $-\pi/3$ ***c)*** $\pi/6$
3. ***a)*** $-\pi/6$ ***b)*** $\pi/4$ ***c)*** $-\pi/3$
5. ***a)*** $\pi/3$ ***b)*** $3\pi/4$ ***c)*** $\pi/6$
7. ***a)*** $3\pi/4$ ***b)*** $\pi/6$ ***c)*** $2\pi/3$
9. $1/\sqrt{2}$ **11.** $-1/\sqrt{3}$ **13.** $\pi/2$ **15.** $\pi/2$ **17.** $\pi/2$
19. 0 **21.** $\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$ **23.** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t^2}}$
25. $\dfrac{1}{|2s+1|\sqrt{s^2+s}}$ **27.** $\dfrac{-2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+2x^2}}$
29. $\dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$ **31.** $\dfrac{-1}{2\sqrt{t}(1+t)}$ **33.** $\dfrac{1}{(\tan^{-1}x)(1+x^2)}$
35. $\dfrac{-e^t}{|e^t|\sqrt{(e^t)^2-1}} = \dfrac{-1}{\sqrt{e^{2t}-1}}$ **37.** $\dfrac{-2s^n}{\sqrt{1-s^2}}$ **39.** 0
41. $\operatorname{sen}^{-1}x$ **43.** $\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{3} + C$ **45.** $\dfrac{1}{\sqrt{17}}\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{17}} + C$
47. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sec^{-1}\left|\dfrac{5x}{\sqrt{2}}\right| + C$ **49.** $2\pi/3$ **51.** $\pi/16$
53. $-\pi/12$ **55.** $\dfrac{3}{2}\operatorname{sen}^{-1}2(r-1) + C$
57. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C$ **59.** $\dfrac{1}{4}\sec^{-1}\left|\dfrac{2x-1}{2}\right| + C$
61. π **63.** $\pi/12$ **65.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}y^2 + C$
67. $\operatorname{sen}^{-1}(x-2) + C$ **69.** π **71.** $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{y-1}{2}\right) + C$
73. 2π **75.** $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+4) + 2\tan^{-1}\dfrac{x}{2} + C$
77. $x + \ln(x^2+9) - \dfrac{10}{3}\tan^{-1}\dfrac{x}{3} + C$
79. $\sec^{-1}|x+1| + C$ **81.** $e^{\operatorname{sen}^{-1}x} + C$
83. $\dfrac{1}{3}(\operatorname{sen}^{-1}x)^3 + C$ **85.** $\ln|\tan^{-1}y| + C$ **87.** $\sqrt{3} - 1$
89. $\dfrac{2}{3}\tan^{-1}\left(\dfrac{\tan^{-1}\sqrt{x}}{3}\right) + C$ **91.** 5 **93.** 2 **95.** 1
97. 1 **103.** $y = \operatorname{sen}^{-1}x$ **105.** $y = \sec^{-1}x + \dfrac{2\pi}{3}, x > 1$
107. ***b)*** $x = 3\sqrt{5}$ **109.** $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54.7°$
121. $\pi^2/2$ **123.** ***a)*** $\pi^2/2$ ***c)*** 2π
125. ***a)*** 0.84107 ***b)*** -0.72973 ***c)*** 0.46365
127. ***a)*** Dominio: todos los números reales, excepto los que tienen la forma $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, donde k es un entero

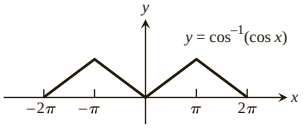
Rango: $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$



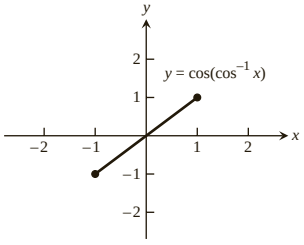
b) Dominio: $-\infty < x < \infty$; Rango: $-\infty < y < \infty$



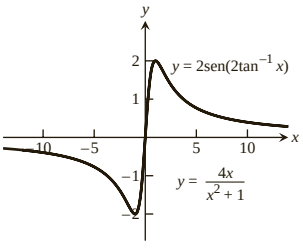
129. ***a)*** Dominio: $-\infty < x < \infty$; Rango: $0 \le y \le \pi$

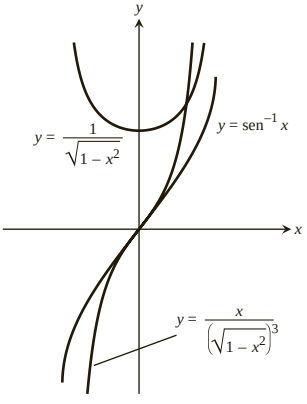


b) Dominio: $-1 \le x \le 1$; Rango: $-1 \le y \le 1$



131. Las gráficas son idénticas. **133.**





Sección 7.7, páginas 430 a 432

1. $\cosh x = 5/4$, $\tanh x = -3/5$, $\coth x = -5/3$, $\operatorname{sech} x = 4/5$, $\operatorname{csch} x = -4/3$

3. $\operatorname{senh} x = 8/15$, $\tanh x = 8/17$, $\coth x = 17/8$, $\operatorname{sech} x = 15/17$, $\operatorname{csch} x = 15/8$

5. $x + \frac{1}{x}$ **7.** e^{5x} **9.** e^{4x} **13.** $2\cosh\frac{x}{3}$

15. $\operatorname{sech}^2\sqrt{t} + \dfrac{\tanh\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ **17.** $\coth z$

19. $(\ln \operatorname{sech}\theta)(\operatorname{sech}\theta\tanh\theta)$ **21.** $\tanh^3 v$ **23.** 2

25. $\dfrac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}$ **27.** $\dfrac{1}{1+\theta} - \tanh^{-1}\theta$

29. $\dfrac{1}{2\sqrt{t}} - \coth^{-1}\sqrt{t}$ **31.** $-\operatorname{sech}^{-1}x$ **33.** $\dfrac{\ln 2}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2\theta}}}$

35. $|\sec x|$ **41.** $\dfrac{\cosh 2x}{2} + C$

43. $12\operatorname{senh}\left(\dfrac{x}{2} - \ln 3\right) + C$ **45.** $7\ln\left|e^{x/7} + e^{-x/7}\right| + C$

47. $\tanh\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + C$ **49.** $-2\operatorname{sech}\sqrt{t} + C$ **51.** $\ln\dfrac{5}{2}$

53. $\dfrac{3}{32} + \ln 2$ **55.** $e - e^{-1}$ **57.** $3/4$ **59.** $\dfrac{3}{8} + \ln\sqrt{2}$

61. $\ln(2/3)$ **63.** $\dfrac{-\ln 3}{2}$ **65.** $\ln 3$

67. ***a)*** $\operatorname{senh}^{-1}(\sqrt{3})$ ***b)*** $\ln(\sqrt{3}+2)$

69. ***a)*** $\coth^{-1}(2) - \coth^{-1}(5/4)$ ***b)*** $\left(\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$

71. ***a)*** $-\operatorname{sech}^{-1}\left(\dfrac{12}{13}\right) + \operatorname{sech}^{-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)$

b) $-\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-(12/13)^2}}{(12/13)}\right) + \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-(4/5)^2}}{(4/5)}\right)$

$= -\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) + \ln(2) = \ln(4/3)$

73. ***a)*** 0 ***b)*** 0

77. ***b)*** $\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$ ***c)*** $80\sqrt{5} \approx 178.89$ ft/s **79.** 2π **81.** $\dfrac{6}{5}$

Sección 7.8, páginas 437 a 438

1. ***a)*** Más lentamente ***b)*** Más lentamente ***c)*** Más lentamente ***d)*** Más rápidamente ***e)*** Más lentamente ***f)*** Más lentamente ***g)*** A la misma razón ***h)*** Más lentamente

3. ***a)*** A la misma razón ***b)*** Más rápidamente ***c)*** A la misma razón ***d)*** A la misma razón ***e)*** Más lentamente ***f)*** Más rápidamente ***g)*** Más lentamente ***h)*** A la misma razón

5. ***a)*** A la misma razón ***b)*** A la misma razón ***c)*** A la misma razón ***d)*** Más rápidamente ***e)*** Más rápidamente ***f)*** A la misma razón ***g)*** Más lentamente ***h)*** Más rápidamente

7. d, a, c, b

9. ***a)*** Falso ***b)*** Falso ***c)*** Verdadero ***d)*** Verdadero ***e)*** Verdadero ***f)*** Verdadero ***g)*** Falso ***h)*** Verdadero

13. Cuando el grado de f es menor o igual que 1 grado de g.

15. 1, 1

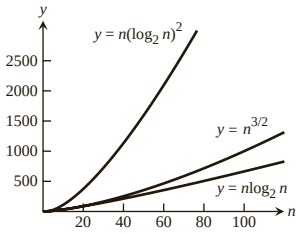
21. ***b)*** $\ln(e^{17000000}) = 17{,}000{,}000 < (e^{17\times 10^6})^{1/10^6} = e^{17} \approx 24{,}154{,}952.75$

c) $x \approx 3.4306311 \times 10^{15}$

d) Se cruzan en $x \approx 3.4306311 \times 10^{15}$.

23. ***a)*** El algoritmo realiza $O(n\log_2 n)$ pasos

b)



25. En una búsqueda secuencial, podría necesitarse un millón de pasos; en una búsqueda binaria, se requerirían cuando mucho 20 pasos.

Ejercicios de práctica, páginas 439 a 441

1. $-2e^{-x/5}$ **3.** xe^{4x} **5.** $\dfrac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = 2\cot\theta$ **7.** $\dfrac{2}{(\ln 2)x}$

9. $-8^{-t}(\ln 8)$ **11.** $18x^{2.6}$

13. $(x+2)^{x+2}(\ln(x+2)+1)$ **15.** $-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

17. $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}\cos^{-1}x}$ **19.** $\tan^{-1}(t) + \dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{1}{2t}$

21. $\dfrac{1-z}{\sqrt{z^2-1}} + \sec^{-1}z$ **23.** -1

25. $\dfrac{2(x^2+1)}{\sqrt{\cos 2x}}\left[\dfrac{2x}{x^2+1} + \tan 2x\right]$

27. $5\left[\dfrac{(t+1)(t-1)}{(t-2)(t+3)}\right]^5\left[\dfrac{1}{t+1} + \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t-2} - \dfrac{1}{t+3}\right]$

29. $\dfrac{1}{\sqrt{\theta}}(\operatorname{sen}\theta)^{\sqrt{\theta}}\left(\dfrac{\ln\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}{2} + \theta\cot\theta\right)$ **31.** $-\cos e^x + C$

33. $\tan(e^x - 7) + C$ **35.** $e^{\tan x} + C$ **37.** $\dfrac{-\ln 7}{3}$

39. $\ln 8$ **41.** $\ln(9/25)$ **43.** $-[\ln|\cos(\ln v)|] + C$

45. $-\frac{1}{2}(\ln x)^{-2} + C$ **47.** $-\cot(1+\ln r) + C$

49. $\dfrac{1}{2\ln 3}\left(3^{x^2}\right) + C$ **51.** $3\ln 7$ **53.** $15/16 + \ln 2$

55. $e - 1$ **57.** $1/6$ **59.** $9/14$

61. $\frac{1}{3}[(\ln 4)^3 - (\ln 2)^3]$ o $\frac{7}{3}(\ln 2)^3$ **63.** $\dfrac{9\ln 2}{4}$ **65.** π

67. $\pi/\sqrt{3}$ **69.** $\sec^{-1}|2y| + C$ **71.** $\pi/12$

73. $\operatorname{sen}^{-1}(x+1) + C$ **75.** $\pi/2$ **77.** $\dfrac{1}{3}\sec^{-1}\left(\dfrac{t+1}{3}\right) + C$

79. $y = \dfrac{\ln 2}{\ln(3/2)}$ **81.** $y = \ln x - \ln 3$ **83.** $y = \dfrac{1}{1-e^x}$

85. 5 **87.** 0 **89.** 1 **91.** $3/7$ **93.** 0 **95.** 1

97. $\ln 10$ **99.** $\ln 2$ **101.** 5 **103.** $-\infty$ **105.** 1

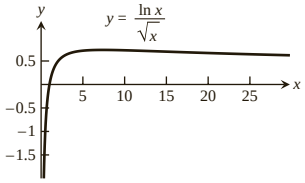
107. 1 **109.** ***a)*** A la misma razón ***b)*** A la misma razón ***c)*** Más rápido ***d)*** Más rápido ***e)*** A la misma razón ***f)*** A la misma razón

111. ***a)*** Verdadero ***b)*** Falso ***c)*** Falso ***d)*** Verdadero ***e)*** Verdadero ***f)*** Verdadero **113.** $1/3$

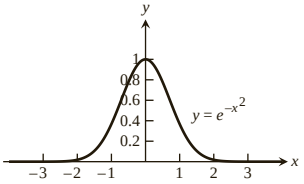
115. Máximo absoluto $= 0$ en $x = e/2$, mínimo absoluto $= -0.5$ en $x = 0.5$ **117.** 1 **119.** $(1/e)$ m/s

121. $1/\sqrt{2}$ unidades de longitud por $1/\sqrt{e}$ unidades de altura, $A = 1/\sqrt{2e} \approx 0.43$ unidades^2

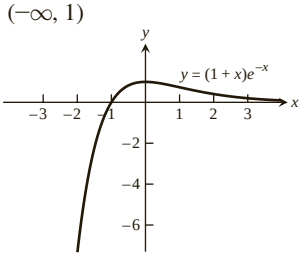
123. ***a)*** Máximo absoluto de $2/e$ en $x = e^2$, punto de inflexión $(e^{8/3}, (8/3)e^{-4/3})$; cóncava hacia arriba en $(e^{8/3}, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(0, e^{8/3})$



b) Máximo absoluto de 1 en $x = 0$; puntos de inflexión en $(\pm 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{e})$; cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$



c) Máximo absoluto de 1 en $x = 0$; punto de inflexión $(1, 2/e)$; cóncava hacia arriba en $(1, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$



125. $y = \left(\tan^{-1}\left(\dfrac{x + C}{2}\right)\right)^2$ **127.** $y^2 = \operatorname{sen}^{-1}(2\tan x + C)$

129. $y = -2 + \ln(2 - e^{-x})$ **131.** $y = 4x - 4\sqrt{x} + 1$

133. 18,935 años **135.** $20(5 - \sqrt{17})$ m

Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 442 a 443

1. $\pi/2$ **3.** $1/\sqrt{e}$ **5.** $\ln 2$ **7.** ***a)*** 1 ***b)*** $\pi/2$ ***c)*** π

9. $\dfrac{1}{\ln 2}, \dfrac{1}{2\ln 2}$, 2 : 1 **11.** $x = 2$ **13.** $2/17$

17. $\bar{x} = \dfrac{\ln 4}{\pi}$, $\bar{y} = 0$ **19.** ***b)*** 61°

Capítulo 8

Sección 8.1, páginas 448 a 449

1. $\ln 5$ **3.** $2\tan x - 2\sec x - x + C$

5. $\operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + C$ **7.** $e^{-\cot z} + C$

9. $\tan^{-1}(e^z) + C$ **11.** π **13.** $t + \cot t + \csc t + C$

15. $\sqrt{2}$ **17.** $\dfrac{1}{8}\ln(1 + 4\ln^2 y) + C$

19. $\ln|1 + \operatorname{sen}\theta| + C$ **21.** $2t^2 - t + 2\tan^{-1}\left(\dfrac{t}{2}\right) + C$

23. $2\left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 0.82843$ **25.** $\sec^{-1}(e^y) + C$

27. $\operatorname{sen}^{-1}(2\ln x) + C$ **29.** $\ln|\operatorname{sen} x| + \ln|\cos x| + C$

31. $7 + \ln 8$ **33.** $\left(\operatorname{sen}^{-1} y - \sqrt{1 - y^2}\right]_{-1}^{0} = \dfrac{\pi}{2} - 1$

35. $\sec^{-1}\left|\dfrac{x - 1}{7}\right| + C$ **37.** $\dfrac{\theta^3}{3} - \dfrac{\theta^2}{2} + \theta + \dfrac{5}{2}\ln|2\theta - 5| + C$

39. $x - \ln(1 + e^x) + C$ **41.** $2\sqrt{2} - \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$

43. $\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$ **45.** $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \dfrac{1}{\ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)}$

47. $xe^{x^3} + C$ **49.** $\dfrac{1}{30}(x^4 + 1)^{3/2}(3x^4 - 2) + C$

Sección 8.2, páginas 455 a 457

1. $-2x\cos(x/2) + 4\operatorname{sen}(x/2) + C$

3. $t^2\operatorname{sen} t + 2t\cos t - 2\operatorname{sen} t + C$

5. $\ln 4 - \dfrac{3}{4}$ **7.** $xe^x - e^x + C$

9. $-(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C$

11. $y\tan^{-1}(y) - \ln\sqrt{1 + y^2} + C$

13. $x\tan x + \ln|\cos x| + C$

15. $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$ **17.** $(x^2 - 7x + 7)e^x + C$

19. $(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)e^x + C$

21. $\dfrac{1}{2}(-e^\theta\cos\theta + e^\theta\operatorname{sen}\theta) + C$

23. $\dfrac{e^{2x}}{13}(3\operatorname{sen} 3x + 2\cos 3x) + C$

25. $\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{3s + 9}\,e^{\sqrt{3s+9}} - e^{\sqrt{3s+9}}\right) + C$

27. $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln(2) - \dfrac{\pi^2}{18}$

29. $\dfrac{1}{2}[-x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x)] + C$

31. $\dfrac{1}{2}\ln|\sec x^2 + \tan x^2| + C$

33. $\dfrac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \dfrac{1}{2}x^2\ln x + \dfrac{1}{4}x^2 + C$

35. $-\dfrac{1}{x}\ln x - \dfrac{1}{x} + C$ **37.** $\dfrac{1}{4}e^{x^4} + C$

39. $\dfrac{1}{3}x^2(x^2 + 1)^{3/2} - \dfrac{2}{15}(x^2 + 1)^{5/2} + C$

41. $-\dfrac{2}{5}\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} 2x - \dfrac{3}{5}\cos 3x\cos 2x + C$

43. $\dfrac{2}{9}x^{3/2}(3\ln x - 2) + C$

45. $2\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$

47. $\dfrac{\pi^2 - 4}{8}$ **49.** $\dfrac{5\pi - 3\sqrt{3}}{9}$

51. $\dfrac{1}{2}(x^2 + 1)\tan^{-1} x - \dfrac{x}{2} + C$

53. ***a)*** π ***b)*** 3π ***c)*** 5π ***d)*** $(2n + 1)\pi$

55. $2\pi(1 - \ln 2)$ **57.** ***a)*** $\pi(\pi - 2)$ ***b)*** 2π

59. ***a)*** 1 ***b)*** $(e - 2)\pi$ ***c)*** $\dfrac{\pi}{2}(e^2 + 9)$

d) $\bar{x} = \dfrac{1}{4}(e^2 + 1)$, $\bar{y} = \dfrac{1}{2}(e - 2)$

61. $\dfrac{1}{2\pi}(1 - e^{-2\pi})$ **63.** $u = x^n$, $dv = \cos x\,dx$

65. $u = x^n$, $dv = e^{ax}\,dx$ **71.** $x\operatorname{sen}^{-1} x + \cos(\operatorname{sen}^{-1} x) + C$

73. $x\sec^{-1} x - \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$ **75.** Sí

77. ***a)*** $x\operatorname{senh}^{-1} x - \cosh(\operatorname{senh}^{-1} x) + C$

b) $x\operatorname{senh}^{-1} x - (1 + x^2)^{1/2} + C$

Sección 8.3, páginas 462–463

1. $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C$ **3.** $-\dfrac{1}{4}\cos^4 x + C$

5. $\dfrac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

7. $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$

9. $\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$ **11.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x + C$

13. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$ **15.** $16/35$ **17.** 3π

19. $-4 \operatorname{sen} x \cos^3 x + 2 \cos x \operatorname{sen} x + 2x + C$

21. $-\cos^4 2\theta + C$ **23.** 4 **25.** 2

27. $\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}$ **29.** $\frac{4}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{5/2} - \frac{18}{35} - \frac{2}{7}\left(\frac{3}{2}\right)^{7/2}$ **31.** $\sqrt{2}$

33. $\frac{1}{2}\tan^2 x + C$ **35.** $\frac{1}{3}\sec^3 x + C$ **37.** $\frac{1}{3}\tan^3 x + C$

39. $2\sqrt{3} + \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$ **41.** $\frac{2}{3}\tan\theta + \frac{1}{3}\sec^2\theta\tan\theta + C$

43. $4/3$ **45.** $2\tan^2 x - 2\ln\left(1 + \tan^2 x\right) + C$

47. $\frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\sec x| + C$ **49.** $\frac{4}{3} - \ln\sqrt{3}$

51. $-\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C$ **53.** π

55. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{14}\operatorname{sen} 7x + C$

57. $\frac{1}{6}\operatorname{sen} 3\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{20}\operatorname{sen} 5\theta + C$

59. $-\frac{2}{5}\cos^5\theta + C$ **61.** $\frac{1}{4}\cos\theta - \frac{1}{20}\cos 5\theta + C$

63. $\sec x - \ln|\csc x + \cot x| + C$ **65.** $\cos x + \sec x + C$

67. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$ **69.** $\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$

71. $\pi^2/2$ **73.** $\bar{x} = \frac{4\pi}{3}, \bar{y} = \frac{8\pi^2 + 3}{12\pi}$

Sección 8.4, páginas 467 a 468

1. $\ln\left|\sqrt{9 + x^2} + x\right| + C$ **3.** $\pi/4$ **5.** $\pi/6$

7. $\frac{25}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{t}{5}\right) + \frac{t\sqrt{25 - t^2}}{2} + C$

9. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x}{7} + \frac{\sqrt{4x^2 - 49}}{7}\right| + C$

11. $7\left[\frac{\sqrt{y^2 - 49}}{7} - \sec^{-1}\left(\frac{y}{7}\right)\right] + C$ **13.** $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C$

15. $-\sqrt{9 - x^2} + C$ **17.** $\frac{1}{3}(x^2 + 4)^{3/2} - 4\sqrt{x^2 + 4} + C$

19. $\frac{-2\sqrt{4 - w^2}}{w} + C$ **21.** $\operatorname{sen}^{-1} x - \sqrt{1 - x^2} + C$

23. $4\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$ **25.** $-\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + C$

27. $-\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right)^5 + C$ **29.** $2\tan^{-1} 2x + \frac{4x}{(4x^2 + 1)} + C$

31. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + C$ **33.** $\frac{1}{3}\left(\frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}\right)^3 + C$

35. $\ln 9 - \ln\left(1 + \sqrt{10}\right)$ **37.** $\pi/6$ **39.** $\sec^{-1}|x| + C$

41. $\sqrt{x^2 - 1} + C$ **43.** $\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1 + x^4} + x^2\right| + C$

45. $4\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x}\sqrt{4 - x} + C$

47. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{4}\sqrt{x}\sqrt{1 - x}(1 - 2x) + C$

49. $y = 2\left[\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} - \sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]$

51. $y = \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3\pi}{8}$ **53.** $3\pi/4$

55. *a*) $\frac{1}{12}(\pi + 6\sqrt{3} - 12)$

b) $\bar{x} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{4\left(\pi + 6\sqrt{3} - 12\right)}, \bar{y} = \frac{\pi^2 + 12\sqrt{3}\pi - 72}{12\left(\pi + 6\sqrt{3} - 12\right)}$

57. *a*) $-\frac{1}{3}x^2(1 - x^2)^{3/2} - \frac{2}{15}(1 - x^2)^{5/2} + C$

b) $-\frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} + \frac{1}{5}(1 - x^2)^{5/2} + C$

c) $\frac{1}{5}(1 - x^2)^{5/2} - \frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} + C$

Sección 8.5, páginas 475 a 476

1. $\frac{2}{x - 3} + \frac{3}{x - 2}$ **3.** $\frac{1}{x + 1} + \frac{3}{(x + 1)^2}$

5. $\frac{-2}{z} + \frac{-1}{z^2} + \frac{2}{z - 1}$ **7.** $1 + \frac{17}{t - 3} + \frac{-12}{t - 2}$

9. $\frac{1}{2}[\ln|1 + x| - \ln|1 - x|] + C$

11. $\frac{1}{7}\ln|(x + 6)^2(x - 1)^5| + C$ **13.** $(\ln 15)/2$

15. $-\frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{6}\ln|t + 2| + \frac{1}{3}\ln|t - 1| + C$ **17.** $3\ln 2 - 2$

19. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x + 1}{x - 1}\right| - \frac{x}{2(x^2 - 1)} + C$ **21.** $(\pi + 2\ln 2)/8$

23. $\tan^{-1} y - \frac{1}{y^2 + 1} + C$

25. $-(s - 1)^{-2} + (s - 1)^{-1} + \tan^{-1} s + C$

27. $\frac{2}{3}\ln|x - 1| + \frac{1}{6}\ln|x^2 + x + 1| - \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + C$

29. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C$

31. $\frac{-1}{\theta^2 + 2\theta + 2} + \ln(\theta^2 + 2\theta + 2) - \tan^{-1}(\theta + 1) + C$

33. $x^2 + \ln\left|\frac{x - 1}{x}\right| + C$

35. $9x + 2\ln|x| + \frac{1}{x} + 7\ln|x - 1| + C$

37. $\frac{y^2}{2} - \ln|y| + \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) + C$ **39.** $\ln\left(\frac{e^t + 1}{e^t + 2}\right) + C$

41. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{sen} y - 2}{\operatorname{sen} y + 3}\right| + C$

43. $\frac{(\tan^{-1} 2x)^2}{4} - 3\ln|x - 2| + \frac{6}{x - 2} + C$

45. $\ln\left|\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}\right| + C$

47. $2\sqrt{1 + x} + \ln\left|\frac{\sqrt{x + 1} - 1}{\sqrt{x + 1} + 1}\right| + C$

49. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^4}{x^4 + 1}\right| + C$ **51.** $x = \ln|t - 2| - \ln|t - 1| + \ln 2$

53. $x = \dfrac{6t}{t+2} - 1$ **55.** $3\pi \ln 25$ **57.** 1.10

59. ***a)*** $x = \dfrac{1000e^{4t}}{499 + e^{4t}}$ ***b)*** 1.55 días

Sección 8.6, páginas 481 a 482

1. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x-3}{3}}\right) + C$

3. $\sqrt{x-2}\left(\dfrac{2(x-2)}{3} + 4\right) + C$ **5.** $\dfrac{(2x-3)^{3/2}(x+1)}{5} + C$

7. $\dfrac{-\sqrt{9-4x}}{x} - \dfrac{2}{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt{9-4x}-3}{\sqrt{9-4x}+3}\right| + C$

9. $\dfrac{(x+2)(2x-6)\sqrt{4x-x^2}}{6} + 4\,\text{sen}^{-1}\left(\dfrac{x-2}{2}\right) + C$

11. $-\dfrac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{7+x^2}}{x}\right| + C$

13. $\sqrt{4-x^2} - 2\ln\left|\dfrac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + C$

15. $\dfrac{e^{2t}}{13}(2\cos 3t + 3\,\text{sen}\,3t) + C$

17. $\dfrac{x^2}{2}\cos^{-1}x + \dfrac{1}{4}\text{sen}^{-1}x - \dfrac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$

19. $\dfrac{x^3}{3}\tan^{-1}x - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{1}{6}\ln(1+x^2) + C$

21. $-\dfrac{\cos 5x}{10} - \dfrac{\cos x}{2} + C$

23. $8\left[\dfrac{\text{sen}\,(7t/2)}{7} - \dfrac{\text{sen}\,(9t/2)}{9}\right] + C$

25. $6\,\text{sen}\,(\theta/12) + \dfrac{6}{7}\,\text{sen}\,(7\theta/12) + C$

27. $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \dfrac{x}{2(1+x^2)} + \dfrac{1}{2}\tan^{-1}x + C$

29. $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\text{sen}^{-1}\sqrt{x} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x-x^2} + C$

31. $\text{sen}^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + C$

33. $\sqrt{1-\text{sen}^2 t} - \ln\left|\dfrac{1+\sqrt{1-\text{sen}^2 t}}{\text{sen}\,t}\right| + C$

35. $\ln\left|\ln y + \sqrt{3+(\ln y)^2}\right| + C$

37. $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C$

39. $\dfrac{x+2}{2}\sqrt{5-4x-x^2} + \dfrac{9}{2}\text{sen}^{-1}\left(\dfrac{x+2}{3}\right) + C$

41. $-\dfrac{\text{sen}^4 2x\cos 2x}{10} - \dfrac{2\,\text{sen}^2 2x\cos 2x}{15} - \dfrac{4\cos 2x}{15} + C$

43. $\dfrac{\text{sen}^3 2\theta\cos^2 2\theta}{10} + \dfrac{\text{sen}^3 2\theta}{15} + C$

45. $\tan^2 2x - 2\ln|\sec 2x| + C$

47. $\dfrac{(\sec \pi x)(\tan \pi x)}{\pi} + \dfrac{1}{\pi}\ln|\sec \pi x + \tan \pi x| + C$

49. $\dfrac{-\csc^3 x\cot x}{4} - \dfrac{3\csc x\cot x}{8} - \dfrac{3}{8}\ln|\csc x + \cot x| + C$

51. $\dfrac{1}{2}[\sec(e^t-1)\tan(e^t-1) + \ln|\sec(e^t-1) + \tan(e^t-1)|] + C$

53. $\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ **55.** $\pi/3$

57. $2\pi\sqrt{3} + \pi\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ **59.** $\bar{x} = 4/3, \bar{y} = \ln\sqrt{2}$

61. 7.62 **63.** $\pi/8$ **67.** $\pi/4$

Sección 8.7, páginas 489 a 492

1. I: ***a)*** 1.5, 0 ***b)*** 1.5, 0 ***c)*** 0%
II: ***a)*** 1.5, 0 ***b)*** 1.5, 0 ***c)*** 0%

3. I: ***a)*** 2.75, 0.08 ***b)*** 2.67, 0.08 ***c)*** 0.0312 ≈ 3%
II: ***a)*** 2.67, 0 ***b)*** 2.67, 0 ***c)*** 0%

5. I: ***a)*** 6.25, 0.5 ***b)*** 6, 0.25 ***c)*** 0.0417 ≈ 4,
II: ***a)*** 6, 0 *b)* 6, 0 ***c)*** 0%

7. I: ***a)*** 0.509, 0.03125 ***b)*** 0.5, 0.009 ***c)*** 0.018 ≈ 2,
II: ***a)*** 0.5, 0.002604 ***b)*** 0.5, 0.4794 ***c)*** 0%

9. I: ***a)*** 1.8961, 0.161 ***b)*** 2, 0.1039 ***c)*** 0.052 ≈ 5,
II: ***a)*** 2.0045, 0.0066 ***b)*** 2, 0.00454 ***c)*** 0.2%

11. ***a)*** 1 ***b)*** 2 **13.** ***a)*** 116 ***b)*** 2

15. ***a)*** 283 ***b)*** 2 **17.** ***a)*** 71 ***b)*** 10

19. ***a)*** 76 ***b)*** 12 **21.** ***a)*** 82 ***b)*** 8

23. 15,990 pies^3 **25.** ≈10.63 pies

27. ***a)*** ≈0.00021 ***b)*** ≈1.37079 ***c)*** ≈0.015%

31. ***a)*** ≈5.870 ***b)*** $|E_T| \le 0.0032$ **33.** 21.07 pulg **35.** 14.4

39. ≈28.7 mg

Sección 8.8, páginas 501 a 503

1. $\pi/2$ **3.** 2 **5.** 6 **7.** $\pi/2$ **9.** ln 3 **11.** ln 4

13. 0 **15.** $\sqrt{3}$ **17.** π **19.** $\ln\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)$

21. -1 **23.** 1 **25.** $-1/4$ **27.** $\pi/2$ **29.** $\pi/3$

31. 6 **33.** ln 2 **35.** Diverge **37.** Diverge

39. Converge **41.** Converge **43.** Diverge

45. Converge **47.** Converge **49.** Diverge

51. Converge **53.** Converge **55.** Diverge

57. Converge **59.** Diverge **61.** Converge

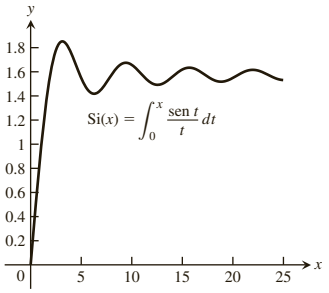
63. Converge

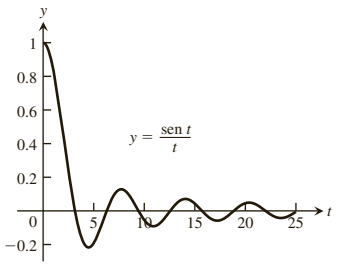
65. ***a)*** Converge cuando $p < 1$ ***b)*** Converge cuando $p > 1$

67. 1 **69.** 2π **71.** ln 2

73. ***a)*** $\pi/2$ ***b)*** π **75.** ***b)*** ≈0.88621

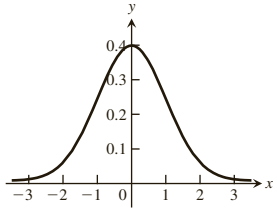
77. ***a)***





b) $\pi/2$

79. ***a)***



b) ≈0.683, ≈0.954, ≈0.997

85. ≈0.16462

Sección 8.9, páginas 514 a 516

1. No **3.** Sí **5.** Sí **7.** Sí **11.** ≈ 0.537

13. ≈ 0.688 **15.** ≈ 0.0502 **17.** $\sqrt{21}$ **19.** $\frac{1}{2}\ln 2$

21. $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\left(\tan^{-1}2 - \frac{\pi}{4}\right) \approx 0.10242$

25. media $= \frac{8}{3} \approx 2.67$, mediana $= \sqrt{8} \approx 2.83$

27. media $= 2$, mediana $= \sqrt{2} \approx 1.41$

29. $P\left(X < \frac{1}{2}\right) \approx 0.3935$

31. ***a)*** ≈ 0.57, de modo que aproximadamente 57 de cada 100 bombillas fallan. ***b)*** ≈ 832 h

33. ≈ 60 hidras **35.** ***a)*** ≈ 0.393 ***b)*** ≈ 0.135 ***c)*** 0
d) La probabilidad de que un cliente espere más de 3 minutos es $1 - (0.997521)^{200} \approx 0.391 < 1/2$. Por lo tanto, el resultado más probable es que todos serán atendidos en un periodo no mayor a 3 minutos.

37. \$10,256 **39.** ≈ 323 ≈ 262 **41.** ≈ 0.89435

43. ***a)*** $\approx 16\%$ ***b)*** ≈ 0.23832 **45.** ≈ 618 mujeres

47. ≈ 61 adultos **49.** ≈ 289 ejes

51. ***a)*** ≈ 0.977 ***b)*** ≈ 0.159 ***c)*** ≈ 0.838

55. ***a)*** {LLL, LLD, LDL, DLL, LLU, LUL, ULL, LDD, LDU, LUD, LUU, DLD, DLU, ULD, ULU, DDL, DUL, UDL, UUL, DDD, DDU, DUD, UDD, DUU, UDU, UUD, UUU}
c) $7/27 \approx 0.26$ ***d)*** $20/27 \approx 0.74$

Ejercicios de práctica, páginas 517 a 519

1. $(x+1)(\ln(x+1)) - (x+1) + C$

3. $x\tan^{-1}(3x) - \frac{1}{6}\ln(1+9x^2) + C$

5. $(x+1)^2e^x - 2(x+1)e^x + 2e^x + C$

7. $\frac{2e^x \operatorname{sen} 2x}{5} + \frac{e^x \cos 2x}{5} + C$

9. $2\ln|x-2| - \ln|x-1| + C$

11. $\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$

13. $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta + 2}\right| + C$

15. $4\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 4\tan^{-1}x + C$

17. $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{(v-2)^5(v+2)}{v^6}\right| + C$

19. $\frac{1}{2}\tan^{-1}t - \frac{\sqrt{3}}{6}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{3}} + C$

21. $\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}\ln|x+2| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + C$

23. $\frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}\ln|x+3| + \frac{3}{2}\ln|x+1| + C$

25. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C$ **27.** $\ln|1 - e^{-s}| + C$

29. $-\sqrt{16 - y^2} + C$ **31.** $-\frac{1}{2}\ln|4 - x^2| + C$

33. $\ln\frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + C$ **35.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right| + C$

37. $-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$ **39.** $\frac{\tan^5 x}{5} + C$

41. $\frac{\cos\theta}{2} - \frac{\cos 11\theta}{22} + C$ **43.** $4\sqrt{1 - \cos(t/2)} + C$

45. Al menos 16 **47.** $T = \pi, S = \pi$ **49.** 25°F

51. *a)* ≈ 2.42 gal *b)* ≈ 24.83 mi/gal

53. $\pi/2$ **55.** 6 **57.** $\ln 3$ **59.** 2 **61.** $\pi/6$

63. Diverge **65.** Diverge **67.** Converge

69. $\frac{2x^{3/2}}{3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + C$

71. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x - x^2} + C$

73. $-2\cot x - \ln|\csc x + \cot x| + \csc x + C$

75. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3+v}{3-v}\right| + \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{v}{3} + C$

77. $\frac{\theta \operatorname{sen}(2\theta+1)}{2} + \frac{\cos(2\theta+1)}{4} + C$ **79.** $\frac{1}{4}\sec^2\theta + C$

81. $2\left(\frac{\left(\sqrt{2-x}\right)^3}{3} - 2\sqrt{2-x}\right) + C$

83. $\tan^{-1}(y-1) + C$

85. $\frac{1}{4}\ln|z| - \frac{1}{4z} - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\ln(z^2+4) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)\right] + C$

87. $-\frac{1}{4}\sqrt{9 - 4t^2} + C$ **89.** $\ln\left(\frac{e^t+1}{e^t+2}\right) + C$ **91.** $1/4$

93. $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$ **95.** $-\frac{1}{5}\tan^{-1}(\cos 5t) + C$

97. $2\sqrt{r} - 2\ln\left(1+\sqrt{r}\right) + C$

99. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

101. $\frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

103. $\frac{4}{7}\left(1+\sqrt{x}\right)^{7/2} - \frac{8}{5}\left(1+\sqrt{x}\right)^{5/2} + \frac{4}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{3/2} + C$

105. $2\ln\left|\sqrt{x} + \sqrt{1+x}\right| + C$

107. $\ln x - \ln|1 + \ln x| + C$

109. $\frac{1}{2}x^{\ln x} + C$ **111.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 - \sqrt{1-x^4}}{x^2}\right| + C$

113. ***b)*** $\frac{\pi}{4}$ **115.** $x - \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\tan x\right) + C$

Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 519 a 523

1. $x(\operatorname{sen}^{-1}x)^2 + 2(\operatorname{sen}^{-1}x)\sqrt{1-x^2} - 2x + C$

3. $\frac{x^2\operatorname{sen}^{-1}x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2} - \operatorname{sen}^{-1}x}{4} + C$

5. $\frac{1}{2}\left(\ln\left(t - \sqrt{1-t^2}\right) - \operatorname{sen}^{-1}t\right) + C$ **7.** 0

9. $\ln(4) - 1$ **11.** 1 **13.** $32\pi/35$ **15.** 2π

17. ***a)*** π *b)* $\pi(2e-5)$

19. ***b)*** $\pi\left(\frac{8(\ln 2)^2}{3} - \frac{16(\ln 2)}{9} + \frac{16}{27}\right)$

21. $\left(\frac{e^2+1}{4}, \frac{e-2}{2}\right)$

23. $\sqrt{1+e^2} - \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^2}}{e} + \frac{1}{e}\right) - \sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

25. $\frac{12\pi}{5}$ **27.** $a = \frac{1}{2}, -\frac{\ln 2}{4}$ **29.** $\frac{1}{2} < p \leq 1$

33. $\frac{e^{2x}}{13}(3 \operatorname{sen} 3x + 2\cos 3x) + C$

35. $\frac{\cos x \operatorname{sen} 3x - 3 \operatorname{sen} x \cos 3x}{8} + C$

37. $\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \operatorname{sen} bx - b\cos bx) + C$

39. $x \ln(ax) - x + C$ **41.** $\frac{2}{1 - \tan(x/2)} + C$ **43.** 1

45. $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$ **47.** $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\tan(t/2) + 1 - \sqrt{2}}{\tan(t/2) + 1 + \sqrt{2}} \right| + C$

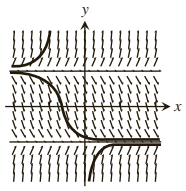
49. $\ln \left| \frac{1 + \tan(\theta/2)}{1 - \tan(\theta/2)} \right| + C$

Capítulo 9

Sección 9.1, páginas 530 a 532

1. *d*) **3.** *a*)

5.



7. $y' = x - y;\ y(1) = -1$ **9.** $y' = -(1 + y)\operatorname{sen} x;\ y(0) = 2$

11. $y(\text{exacta}) = \frac{x}{2} - \frac{4}{x},\ y_1 = -0.25,\ y_2 = 0.3,\ y_3 = 0.75$

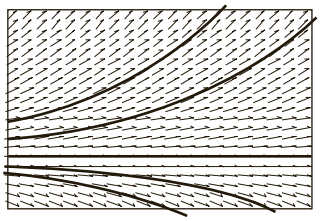
13. $y(\text{exacta}) = 3e^{x(x+2)},\ y_1 = 4.2,\ y_2 = 6.216,\ y_3 = 9.697$

15. $y(\text{exacta}) = e^{x^2} + 1,\ y_1 = 2.0,\ y_2 = 2.0202,\ y_3 = 2.0618$

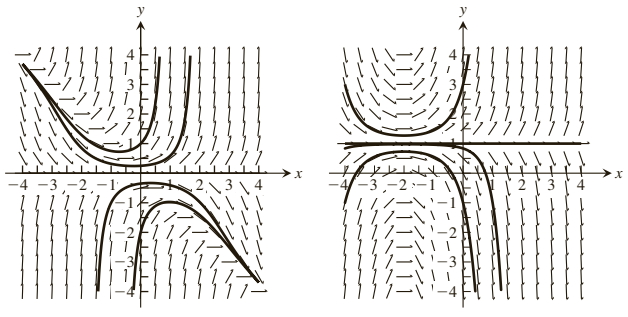
17. $y \approx 2.48832$, el valor exacto es e.

19. $y \approx -0.2272$, el valor exacto es $1/(1 - 2\sqrt{5}) \approx -0.2880$.

23.



25. **27.**



35. El método de Euler nos da $y \approx 3.45835$; la solución exacta es $y = 1 + e \approx 3.71828$.

37. $y \approx 1.5000$; el valor exacto es 1.5275.

Sección 9.2, páginas 536 a 538

1. $y = \frac{e^x + C}{x},\ x > 0$ **3.** $y = \frac{C - \cos x}{x^3},\ x > 0$

5. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2},\ x > 0$ **7.** $y = \frac{1}{2}xe^{x/2} + Ce^{x/2}$

9. $y = x(\ln x)^2 + Cx$

11. $s = \frac{t^3}{3(t-1)^4} - \frac{t}{(t-1)^4} + \frac{C}{(t-1)^4}$

13. $r = (\csc\theta)(\ln|\sec\theta| + C),\ 0 < \theta < \pi/2$

15. $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$ **17.** $y = -\frac{1}{\theta}\cos\theta + \frac{\pi}{2\theta}$

19. $y = 6e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x+1}$ **21.** $y = y_0 e^{kt}$

23. ***b***) es correcta, pero ***a***) no lo es. **25.** $t = \frac{L}{R}\ln 2$ s

27. ***a***) $i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-3} = \frac{V}{R}(1 - e^{-3}) \approx 0.95\frac{V}{R}$ amp ***b***) 86%

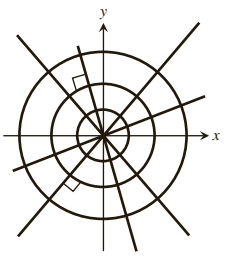
29. $y = \frac{1}{1 + Ce^{-x}}$ **31.** $y^3 = 1 + Cx^{-3}$

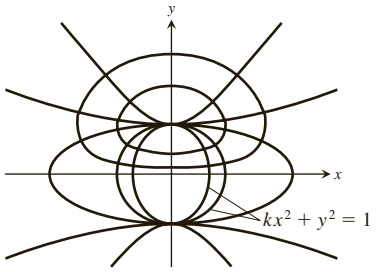
Sección 9.3, páginas 543 a 544

1. ***a***) 168.5 m ***b***) 41.13 s

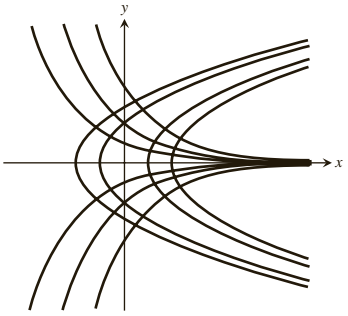
3. $s(t) = 4.91\left(1 - e^{-(22.36/39.92)t}\right)$

5. $x^2 + y^2 = C$ **7.** $\ln|y| - \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$





9. $y = \pm\sqrt{2x + C}$



13. ***a***) 10 lb/min ***b***) $(100 + t)$ gal ***c***) $4\left(\frac{y}{100 + t}\right)$ lb/min

d) $\frac{dy}{dt} = 10 - \frac{4y}{100 + t},\ y(0) = 50,$

$$y = 2(100 + t) - \frac{150}{\left(1 + \frac{t}{100}\right)^4}$$

e) $\text{Concentración} = \frac{y(25)}{\text{Cantidad de salmuera en el depósito}} = \frac{188.6}{125} \approx 1.5 \text{ lb/gal}$

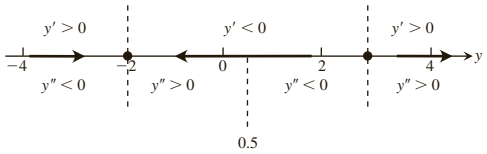
15. $y(27.8) \approx 14.8$ lb, $t \approx 27.8$ min

Sección 9.4, páginas 550 a 551

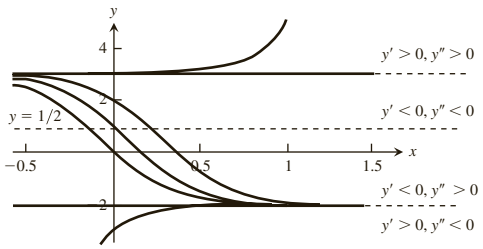
1. $y' = (y + 2)(y - 3)$

a) $y = -2$ es un valor de equilibrio estable y $y = 3$ es uno de equilibrio inestable.

b) $y'' = 2(y + 2)\left(y - \frac{1}{2}\right)(y - 3)$



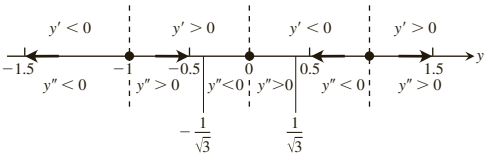
c)



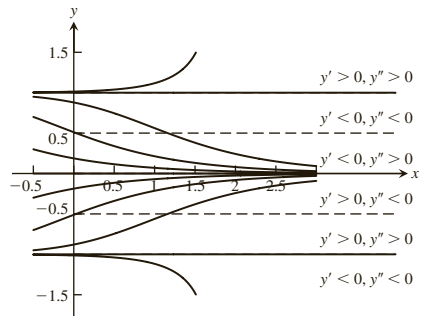
3. $y' = y^3 - y = (y + 1)y(y - 1)$

a) $y = -1$ y $y = 1$ son valores de equilibrio inestable y $y = 0$ es un valor de equilibrio estable.

b) $y'' = (3y^2 - 1)y'$
$= 3(y + 1)\left(y + 1/\sqrt{3}\right)y\left(y - 1/\sqrt{3}\right)(y - 1)$



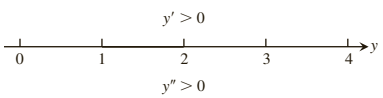
c)



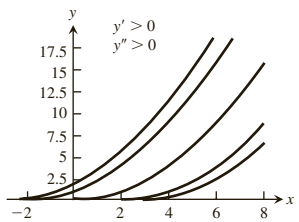
5. $y' = \sqrt{y}, y > 0$

a) No existen valores de equilibrio.

b) $y'' = \frac{1}{2}$



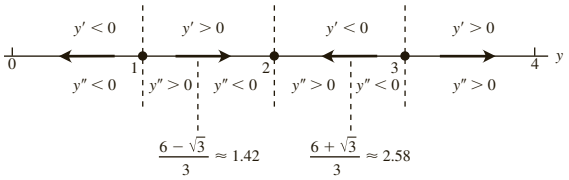
c)



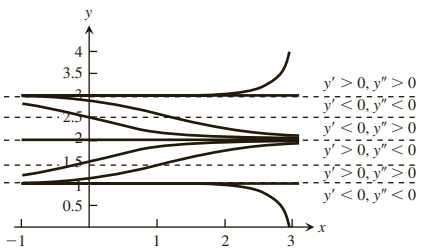
7. $y' = (y - 1)(y - 2)(y - 3)$

a) $y = 1$ y $y = 3$ son valores de equilibrio inestable y $y = 2$ es un valor de equilibrio estable.

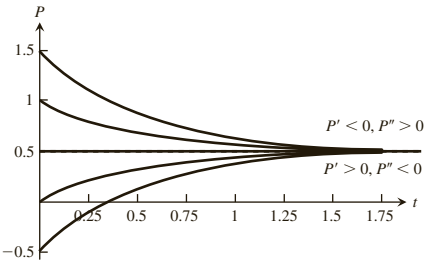
b) $y'' = (3y^2 - 12y + 11)(y - 1)(y - 2)(y - 3) =$
$3(y - 1)\left(y - \frac{6 - \sqrt{3}}{3}\right)(y - 2)\left(y - \frac{6 + \sqrt{3}}{3}\right)(y - 3)$



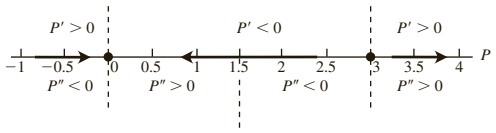
c)

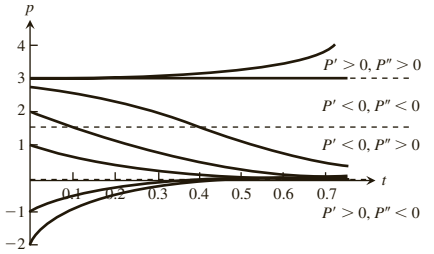


9. $\frac{dP}{dt} = 1 - 2P$ tiene un valor de equilibrio estable en $P = \frac{1}{2}$;
$\frac{d^2P}{dt^2} = -2\frac{dP}{dt} = -2(1 - 2P)$.

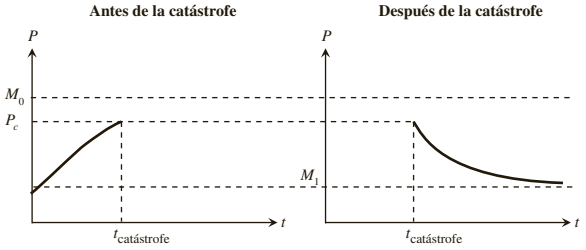


11. $\frac{dP}{dt} = 2P(P - 3)$ tiene un valor de equilibrio estable en $P = 0$;
y un valor de equilibrio inestable en $P = 3$; $\frac{d^2P}{dt^2} =$
$2(2P - 3)\frac{dP}{dt} = 4P(2P - 3)(P - 3)$.





13. Antes de la catástrofe, la población exhibía un crecimiento logístico y $P(t)$ aumentaba hacia M_0, el equilibrio estable. Después de la catástrofe, la población disminuye logísticamente y $P(t)$ disminuye hacia M_1, el nuevo equilibrio estable.

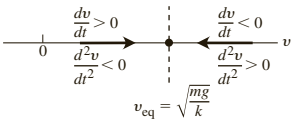


15. $\dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{k}{m}v^2, \quad g, k, m > 0$ y $v(t) \geq 0$

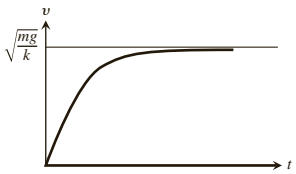
Equilibrio: $\dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{k}{m}v^2 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$

Concavidad: $\dfrac{d^2v}{dt^2} = -2\left(\dfrac{k}{m}v\right)\dfrac{dv}{dt} = -2\left(\dfrac{k}{m}v\right)\left(g - \dfrac{k}{m}v^2\right)$

a)



b)



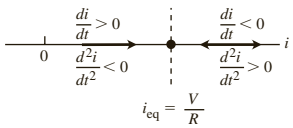
c) $v_{\text{terminal}} = \sqrt{\dfrac{160}{0.005}} = 178.9 \text{ pies/s} = 122 \text{ mph}$

17. $F = F_p - F_r; ma = 50 - 5|v|; \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{m}(50 - 5|v|)$.

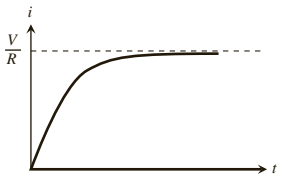
la velocidad máxima se presenta cuando $\dfrac{dv}{dt} = 0$

o $v = 10$ ft/s

19. Linea de fase:



Si el interruptor se cierra en $t = 0$, entonces, $i(0) = 0$ y la gráfica de la solución se parece a ésta:



Cuando $t \to \infty$, $i(t) \to i_{\text{estado estable}} = \dfrac{V}{R}$.

Sección 9.5, páginas 555 a 557

1. Las variaciones de temporada, incompatibilidad con los ambientes, efectos de otras interacciones, desastres inesperados, etcétera.

3. Este modelo supone que el número de las interacciones es proporcional al producto de x y y:

$\dfrac{dx}{dt} = (a - by)x, \quad a < 0,$

$\dfrac{dy}{dt} = m\left(1 - \dfrac{y}{M}\right)y - nxy = y\left(m - \dfrac{m}{M}y - nx\right).$

Los puntos restantes son (0, 0), inestable, y (0, M), estable.

5. ***a)*** El crecimiento logístico se presenta en ausencia de competidores, e involucra una interacción sencilla entre las especies: el crecimiento domina la competencia cuando alguna de las poblaciones es pequeña, de modo que es difícil llevar a alguna de las especies a la extinción.

b) a: razón de crecimiento per cápita de las truchas
m: razón de crecimiento per cápita de los robalos
b: intensidad de competencia de las truchas
n: intensidad de competencia de los robalos
k_1: capacidad de sustentación ambiental de las truchas
k_2: capacidad de sustentación ambiental de los robalos
$\dfrac{a}{b}$: crecimiento contra competencia o crecimiento neto de las truchas
$\dfrac{m}{n}$: supervivencia relativa de los robalos

c) $\dfrac{dx}{dt} = 0$ cuando $x = 0$ o $y = \dfrac{a}{b} - \dfrac{a}{bk_1}x,$

$\dfrac{dy}{dt} = 0$ cuando $y = 0$ o $y = k_2 - \dfrac{k_2 n}{m}x.$

Eligiendo $a/b > k_2$ y $m/n > k_1$, se garantiza que el punto de equilibrio se encuentre dentro del primer cuadrante.

Ejercicios de práctica, páginas 557 a 558

1. $y = -\ln\left(C - \dfrac{2}{5}(x - 2)^{5/2} - \dfrac{4}{3}(x - 2)^{3/2}\right)$

3. $\tan y = -x \operatorname{sen} x - \cos x + C$ **5.** $(y + 1)e^{-y} = -\ln|x| + C$

7. $y = C\dfrac{x - 1}{x}$ **9.** $y = \dfrac{x^2}{4}e^{x/2} + Ce^{x/2}$

11. $y = \dfrac{x^2 - 2x + C}{2x^2}$ **13.** $y = \dfrac{e^{-x} + C}{1 + e^x}$ **15.** $xy + y^3 = C$

17. $y = \dfrac{2x^3 + 3x^2 + 6}{6(x + 1)^2}$ **19.** $y = \dfrac{1}{3}(1 - 4e^{-x^3})$

21. $y = e^{-x}(3x^3 - 3x^2)$

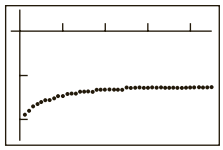
23.

x	y
0	0
0.1	0.1000
0.2	0.2095
0.3	0.3285
0.4	0.4568
0.5	0.5946
0.6	0.7418
0.7	0.8986
0.8	1.0649
0.9	1.2411
1.0	1.4273

x	y
1.1	1.6241
1.2	1.8319
1.3	2.0513
1.4	2.2832
1.5	2.5285
1.6	2.7884
1.7	3.0643
1.8	3.3579
1.9	3.6709
2.0	4.0057

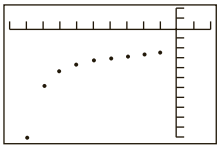
25. $y(3) \approx 0.9131$

27. *a)*



[−0.2, 4.5] por [−2.5, 0.5]

b) Observe que elegimos un intervalo pequeño de valores de x, ya que los valores de y disminuyen muy rápidamente y su calculadora no puede manejar los cálculos para $x \le -1$. (Esto se debe a que la solución analítica es $y = -2 + \ln(2 - e^{-x})$, que tiene una asíntota en $x = -\ln 2 \approx -0.69$. Como es evidente, las aproximaciones de Euler son engañosas para $x \le -0.7$).



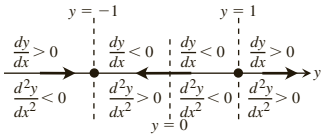
[−1, 0.2] por[−10, 2]

29. $y(\text{exacta}) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$; $y(2) \approx 0.4$; el valor exacto es $\frac{1}{2}$.

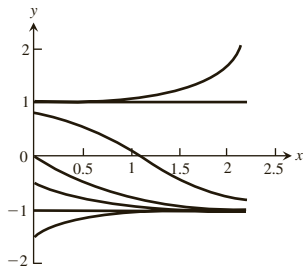
31. $y(\text{exacta}) = -e^{(x^2-1)/2}$; $y(2) \approx -3.4192$; el valor exacto es $-e^{3/2} \approx -4.4817$.

33. *a)* $y = -1$ es estable y $y = 1$ es inestable.

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2y\dfrac{dy}{dx} = 2y(y^2 - 1)$



c)



Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 558 a 559

1. *a)* $y = c + (y_0 - c)e^{-k(A/V)t}$

b) Solución de estado estable: $y_\infty = c$

5. $x^2(x^2 + 2y^2) = C$

7. $\ln|x| + e^{-y/x} = C$

9. $\ln|x| - \ln|\sec(y/x - 1) + \tan(y/x - 1)| = C$

Capítulo 10

Sección 10.1, páginas 569 a 572

1. $a_1 = 0, a_2 = -1/4, a_3 = -2/9, a_4 = -3/16$

3. $a_1 = 1, a_2 = -1/3, a_3 = 1/5, a_4 = -1/7$

5. $a_1 = 1/2, a_2 = 1/2, a_3 = 1/2, a_4 = 1/2$

7. $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \frac{63}{32}, \frac{127}{64}, \frac{255}{128}, \frac{511}{256}, \frac{1023}{512}$

9. $2, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, -\frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$

11. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 **13.** $a_n = (-1)^{n+1}, n \ge 1$

15. $a_n = (-1)^{n+1}(n)^2, n \ge 1$ **17.** $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{3(n+2)}, n \ge 1$

19. $a_n = n^2 - 1, n \ge 1$ **21.** $a_n = 4n - 3, n \ge 1$

23. $a_n = \dfrac{3n+2}{n!}, n \ge 1$ **25.** $a_n = \dfrac{1 + (-1)^{n+1}}{2}, n \ge 1$

27. Converge, 2 **29.** Converge, −1 **31.** Converge, −5

33. Diverge **35.** Diverge **37.** Converge, 1/2

39. Converge, 0 **41.** Converge, $\sqrt{2}$ **43.** Converge, 1

45. Converge, 0 **47.** Converge, 0 **49.** Converge, 0

51. Converge, 1 **53.** Converge, e^7 **55.** Converge, 1

57. Converge, 1 **59.** Diverge **61.** Converge, 4

63. Converge, 0 **65.** Diverge **67.** Converge, e^{-1}

69. Converge, $e^{2/3}$ **71.** Converge, x $(x > 0)$

73. Converge, 0 **75.** Converge, 1 **77.** Converge, 1/2

79. Converge, 1 **81.** Converge, $\pi/2$ **83.** Converge, 0

85. Converge, 0 **87.** Converge, 1/2 **89.** Converge, 0

91. 8 **93.** 4 **95.** 5 **97.** $1 + \sqrt{2}$ **99.** $x_n = 2^{n-2}$

101. *a)* $f(x) = x^2 - 2$, $1.414213562 \approx \sqrt{2}$

b) $f(x) = \tan(x) - 1$, $0.7853981635 \approx \pi/4$

c) $f(x) = e^x$, diverge

103. *b)* 1 **111.** No decreciente, acotada

113. Decreciente, acotada

115. Converge, teorema de la sucesión no decreciente

117. Converge, teorema de la sucesión no decreciente

119. Diverge, definición de divergencia **121.** Converge

123. Converge **135.** *b)* $\sqrt{3}$

Sección 10.2, páginas 579 a 581

1. $s_n = \dfrac{2(1 - (1/3)^n)}{1 - (1/3)}$, 3 **3.** $s_n = \dfrac{1 - (-1/2)^n}{1 - (-1/2)}$, 2/3

5. $s_n = \frac{1}{2} - \dfrac{1}{n+2}, \frac{1}{2}$ **7.** $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \cdots, \frac{4}{5}$

9. $-\frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{57}{64} + \frac{249}{256} + \cdots$, diverge.

11. $(5 + 1) + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{27}\right) + \cdots, \frac{23}{2}$

13. $(1 + 1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{25}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{125}\right) + \cdots, \frac{17}{6}$

15. Converge, 5/3 **17.** Converge, 1/7 **19.** 23/99

21. 7/9 **23.** 1/15 **25.** 41,333/33,300 **27.** Diverge

29. No es concluyente **31.** Diverge **33.** Diverge

35. $s_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$; converge, 1 **37.** $s_n = \ln\sqrt{n+1}$; diverge

39. $s_n = \dfrac{\pi}{3} - \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$; converge, $-\dfrac{\pi}{6}$

41. 1 **43.** 5 **45.** 1 **47.** $-\dfrac{1}{\ln 2}$ **49.** Converge, $2 + \sqrt{2}$

51. Converge, 1 **53.** Diverge **55.** Converge, $\dfrac{e^2}{e^2 - 1}$

57. Converge, 2/9 **59.** Converge, 3/2 **61.** Diverge

63. Converge, 4 **65.** Diverge **67.** Converge, $\dfrac{\pi}{\pi - e}$

69. $a = 1, r = -x$; converge a $1/(1 + x)$ para $|x| < 1$

71. $a = 3, r = (x - 1)/2$; converge a $6/(3 - x)$ para x en $(-1, 3)$

73. $|x| < \frac{1}{2}, \dfrac{1}{1 - 2x}$ **75.** $-2 < x < 0, \dfrac{1}{2 + x}$

77. $x \ne (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$, k es un entero; $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} x}$

79. *a)* $\displaystyle\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-3)(n-2)}$

89. *a*) $r = 3/5$ *b*) $r = -3/10$ **91.** $|r| < 1, \dfrac{1+2r}{1-r^2}$

93. *a*) 16.84 mg, 17.79 mg *b*) 17.84 mg

95. *a*) $0, \dfrac{1}{27}, \dfrac{2}{27}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{7}{27}, \dfrac{8}{27}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{7}{9}, \dfrac{8}{9}, 1$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1$

Sección 10.3, páginas 586 a 587

1. Converge **3.** Converge **5.** Converge **7.** Diverge

9. Converge **11.** Converge, serie geométrica, $r = \dfrac{1}{10} < 1$

13. Diverge; $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

15. Diverge; *p* serie, $p < 1$

17. Converge, serie geométrica, $r = \dfrac{1}{8} < 1$

19. Diverge; criterio de la integral

21. Converge; serie geométrica, $r = 2/3 < 1$

23. Diverge; criterio de la integral

25. Diverge; $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n+1} \neq 0$

27. Diverge; $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n}/\ln n\right) \neq 0$

29. Diverge; serie geométrica, $r = \dfrac{1}{\ln 2} > 1$

31. Converge; criterio de la integral

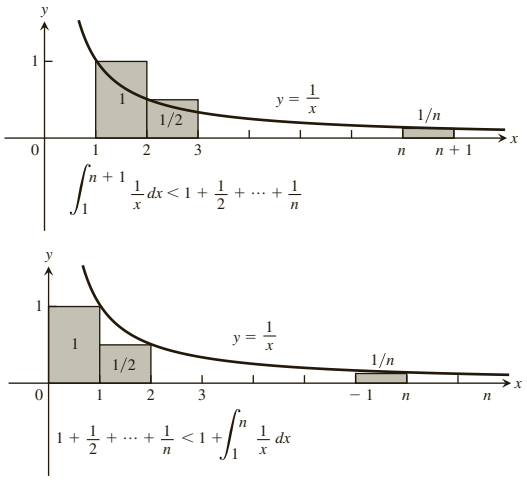
33. Diverge; criterio del *n*-ésimo término

35. Converge; criterio de la integral

37. Converge; criterio de la integral

39. Converge; criterio de la integral **41.** $a = 1$

43. ***a)***



b) ≈41.55

45. Verdadero **47.** ***b)*** $n \geq 251{,}415$

49. $s_8 = \displaystyle\sum_{n=1}^{8} \frac{1}{n^3} \approx 1.195$ **51.** 10^{60}

59. ***a)*** $1.20166 \leq S \leq 1.20253$ ***b)*** $S \approx 1.2021$, error < 0.0005

61. $\left(\dfrac{\pi^2}{6} - 1\right) \approx 0.64493$

Sección 10.4, páginas 591 a 592

1. Converge; compare con $\sum(1/n^2)$

3. Diverge; compare con $\sum\left(1/\sqrt{n}\right)$

5. Converge; compare con $\sum(1/n^{3/2})$

7. Converge; compare con $\displaystyle\sum \sqrt{\frac{n+4n}{n^4+0}} = \sqrt{5}\sum \frac{1}{n^{3/2}}$

9. Converge **11.** Diverge; comparación del límite con $\sum(1/n)$

13. Diverge; comparación del límite con $\sum\left(1/\sqrt{n}\right)$

15. Diverge **17.** Diverge; comparación del límite con $\sum\left(1/\sqrt{n}\right)$

19. Converge; compare con $\sum(1/2^n)$

21. Diverge; criterio del *n*-ésimo término

23. Converge; compare con $\sum(1/n^2)$

25. Converge; $\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n < \left(\dfrac{n}{3n}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

27. Diverge; comparación directa con $\sum(1/n)$

29. Diverge; comparación del límite con $\sum(1/n)$

31. Diverge; comparación del límite con $\sum(1/n)$

33. Converge; compare con $\sum(1/n^{3/2})$

35. Converge; $\dfrac{1}{n2^n} \leq \dfrac{1}{2^n}$

37. Converge; $\dfrac{1}{3^{n-1}+1} < \dfrac{1}{3^{n-1}}$

39. Converge; comparación con $\sum(1/5n^2)$

41. Diverge; comparación con $\sum(1/n)$

43. Converge; comparación con $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n-1)}$ o comparación del límite con $\sum(1/n^2)$

45. Diverge; comparación del límite con $\sum(1/n)$

47. Converge; $\dfrac{\tan^{-1} n}{n^{1.1}} < \dfrac{\pi/2}{n^{1.1}}$

49. Converge; compare con $\sum(1/n^2)$

51. Diverge; comparación del límite con $\sum(1/n)$

53. Converge; comparación del límite con $\sum(1/n^2)$

65. Converge **67.** Converge **69.** Converge

Sección 10.5, páginas 597 a 598

1. Converge **3.** Diverge **5.** Converge **7.** Converge

9. Converge **11.** Diverge **13.** Converge **15.** Converge

17. Converge; criterio de la razón **19.** Diverge; criterio de la razón

21. Converge; criterio de la razón

23. Converge; compare con $\sum(3/(1.25)^n)$

25. Diverge; $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{3}{n}\right)^n = e^{-3} \neq 0$

27. Converge; compare con $\sum(1/n^2)$

29. Diverge; compare con $\sum(1/(2n))$

31. Diverge; $a_n \not\to 0$ **33.** Converge; criterio de la razón

35. Converge; criterio de la razón **37.** Converge; criterio de la razón

39. Converge; criterio de la razón **41.** Converge; compare con $\sum(1/n^2)$

43. Converge; criterio de la raíz **45.** Converge; criterio de la razón

47. Diverge; criterio de la razón **49.** Converge; criterio de la razón

51. Converge; criterio de la razón **53.** Diverge; $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{(1/n!)} \to 1$

55. Converge; criterio de la razón **57.** Diverge; criterio de la raíz

59. Converge; criterio de la raíz **61.** Converge; criterio de la razón

65. Sí

Sección 10.6, páginas 603 a 604

1. Converge por el criterio de la serie alternante

3. Converge; criterio de la serie alternante

5. Converge; criterio de la serie alternante

7. Diverge; $a_n \not\to 0$

9. Diverge; $a_n \not\to 0$

11. Converge; criterio de la serie alternante

13. Converge por el criterio de la serie alternante

15. Converge absolutamente. La serie de valores absolutos es una serie geométrica convergente.

17. Converge condicionalmente; $1/\sqrt{n} \to 0$, pero $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

19. Converge absolutamente; compare con $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$.

21. Converge condicionalmente; $1/(n+3) \to 0$, pero $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+3}$ diverge (compare con $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$).

23. Diverge; $\dfrac{3+n}{5+n} \to 1$

25. Converge condicionalmente; $\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n}\right) \to 0$, pero $(1+n)/n^2 > 1/n$

27. Converge absolutamente; criterio de la razón

29. Converge absolutamente por el criterio de la integral

31. Diverge; $a_n \not\to 0$

33. Converge absolutamente por el criterio de la razón

35. Converge absolutamente, ya que $\left|\dfrac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}\right| = \left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}\right| = \dfrac{1}{n^{3/2}}$ (p serie convergente)

37. Converge absolutamente por el criterio de la raíz

39. Diverge; $a_n \to \infty$

41. Converge condicionalmente; $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = 1/\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right) \to 0$, pero la serie de valores absolutos es divergente $\left(\text{compare con } \sum\left(1/\sqrt{n}\right)\right)$.

43. Diverge, $a_n \to 1/2 \neq 0$

45. Converge absolutamente; $n = \dfrac{2}{e^n+e^{-n}} = \dfrac{2e^n}{e^{2n}+1} < \dfrac{2e^n}{e^{2n}} = \dfrac{2}{e^n}$, un término de una serie geométrica convergente.

47. Converge condicionalmente; $\sum(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2(n+1)}$ converge por el criterio de la serie alternante; $\sum\dfrac{1}{2(n+1)}$ diverge por comparación del límite con $\sum(1/n)$.

49. $|\text{Error}| < 0.2$ **51.** $|\text{Error}| < 2 \times 10^{-11}$

53. $n \geq 31$ **55.** $n \geq 4$ **57.** 0.54030

59. *a*) $a_n \geq a_{n+1}$ *b*) $-1/2$

Sección 10.7, páginas 612 a 614

1. *a*) $1, -1 < x < 1$ *b*) $-1 < x < 1$ *c*) ninguno

3. *a*) $1/4, -1/2 < x < 0$ *b*) $-1/2 < x < 0$ *c*) ninguno

5. *a*) $10, -8 < x < 12$ *b*) $-8 < x < 12$ *c*) ninguno

7. *a*) $1, -1 < x < 1$ *b*) $-1 < x < 1$ *c*) ninguno

9. *a*) $3, -3 \leq x \leq 3$ *b*) $-3 \leq x \leq 3$ *c*) ninguno

11. *a*) ∞, para toda x *b*) para toda x *c*) ninguno

13. *a*) $1/2, -1/2 < x < 1/2$ *b*) $-1/2 < x < 1/2$ *c*) ninguno

15. *a*) $1, -1 \leq x < 1$ *b*) $-1 < x < 1$ *c*) $x = -1$

17. *a*) $5, -8 < x < 2$ *b*) $-8 < x < 2$ *c*) ninguno

19. *a*) $3, -3 < x < 3$ *b*) $-3 < x < 3$ *c*) ninguno

21. *a*) $1, -2 < x < 0$ *b*) $-2 < x < 0$ *c*) ninguno

23. *a*) $1, -1 < x < 1$ *b*) $-1 < x < 1$ *c*) ninguno

25. *a*) $0, x = 0$ *b*) $x = 0$ *c*) ninguno

27. *a*) $2, -4 < x \leq 0$ *b*) $-4 < x < 0$ *c*) $x = 0$

29. *a*) $1, -1 \leq x \leq 1$ *b*) $-1 \leq x \leq 1$ *c*) ninguno

31. *a*) $1/4, 1 \leq x \leq 3/2$ *b*) $1 \leq x \leq 3/2$ *c*) ninguno

33. *a*) ∞, para toda x *b*) para toda x *c*) ninguno

35. *a*) $1, -1 \leq x < 1$ *b*) $-1 < x < 1$ *c*) -1

37. 3 **39.** 8 **41.** $-1/3 < x < 1/3, 1/(1-3x)$

43. $-1 < x < 3, 4/(3+2x-x^2)$

45. $0 < x < 16, 2/\left(4-\sqrt{x}\right)$

47. $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, 3/(2-x^2)$

49. $\dfrac{2}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n(x-1)^n, 0 < x < 2$

51. $\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n(x-5)^n, 2 < x < 8$

53. $1 < x < 5, 2/(x-1), \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n n(x-3)^{n-1}$, $1 < x < 5, -2/(x-1)^2$

55. *a*) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} - \dfrac{x^{10}}{10!} + \cdots$; converge para toda x

b) La misma respuesta que el inciso *c*)

c) $2x - \dfrac{2^3x^3}{3!} + \dfrac{2^5x^5}{5!} - \dfrac{2^7x^7}{7!} + \dfrac{2^9x^9}{9!} - \dfrac{2^{11}x^{11}}{11!} + \cdots$

57. *a*) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^6}{45} + \dfrac{17x^8}{2520} + \dfrac{31x^{10}}{14175}, -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

b) $1 + x^2 + \dfrac{2x^4}{3} + \dfrac{17x^6}{45} + \dfrac{62x^8}{315} + \cdots, -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

Sección 10.8, páginas 618 a 619

1. $P_0(x) = 1, P_1(x) = 1+2x, P_2(x) = 1+2x+2x^2$, $P_3(x) = 1+2x+2x^2+\dfrac{4}{3}x^3$

3. $P_0(x) = 0, P_1(x) = x-1, P_2(x) = (x-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2$, $P_3(x) = (x-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{1}{3}(x-1)^3$

5. $P_0(x) = \dfrac{1}{2}, P_1(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}(x-2)$, $P_2(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}(x-2) + \dfrac{1}{8}(x-2)^2$, $P_3(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}(x-2) + \dfrac{1}{8}(x-2)^2 - \dfrac{1}{16}(x-2)^3$

7. $P_0(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, P_1(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $P_2(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2$, $P_3(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^3$

9. $P_0(x) = 2, P_1(x) = 2 + \dfrac{1}{4}(x-4)$, $P_2(x) = 2 + \dfrac{1}{4}(x-4) - \dfrac{1}{64}(x-4)^2$, $P_3(x) = 2 + \dfrac{1}{4}(x-4) - \dfrac{1}{64}(x-4)^2 + \dfrac{1}{512}(x-4)^3$

11. $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots$

13. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$

15. $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 3^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ **17.** $7\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ **19.** $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$

21. $x^4 - 2x^3 - 5x + 4$

23. $8 + 10(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3$

25. $21 - 36(x+2) + 25(x+2)^2 - 8(x+2)^3 + (x+2)^4$

27. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n$ **29.** $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{e^2}{n!}(x-2)^n$

31. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n}}{(2n)!}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^{2n}$

33. $-1 - 2x - \dfrac{5}{2}x^2 - \cdots, -1 < x < 1$

35. $x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{6}x^4 + \cdots, -1 < x < 1$

41. $L(x) = 0, Q(x) = -x^2/2$ **43.** $L(x) = 1, Q(x) = 1 + x^2/2$
45. $L(x) = x, Q(x) = x$

Sección 10.9, páginas 625 a 626

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5x)^n}{n!} = 1 - 5x + \frac{5^2x^2}{2!} - \frac{5^3x^3}{3!} + \cdots$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5(-1)^n(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$= -5x + \frac{5x^3}{3!} - \frac{5x^5}{5!} + \frac{5x^7}{7!} + \cdots$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(5x^2)^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{25x^4}{2!} + \frac{625x^8}{4!} - \cdots$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n} = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \cdots$

9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{4}\right)^n x^{3n} = 1 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{3^2}{4^2}x^6 - \frac{3^3}{4^3}x^9 + \cdots$

11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!} = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \cdots$

13. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$

15. $x - \frac{\pi^2x^3}{2!} + \frac{\pi^4x^5}{4!} - \frac{\pi^6x^7}{6!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}x^{2n+1}}{(2n)!}$

17. $\displaystyle 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!} =$
$1 - \frac{(2x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(2x)^4}{2\cdot 4!} - \frac{(2x)^6}{2\cdot 6!} + \frac{(2x)^8}{2\cdot 8!} - \cdots$

19. $\displaystyle x^2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n = x^2 + 2x^3 + 4x^4 + \cdots$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n-1}}{2n-1} = x^3 - \frac{x^7}{3} + \frac{x^{11}}{5} - \frac{x^{15}}{7} + \cdots$

25. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!} + (-1)^n\right)x^n = 2 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{25}{24}x^4 - \cdots$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{3n} = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{9} - \cdots$

29. $x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \cdots$

31. $x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{23}{45}x^6 - \frac{44}{105}x^8 + \cdots$

33. $1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \cdots$

35. $|\text{Error}| \le \frac{1}{10^4\cdot 4!} < 4.2 \times 10^{-6}$

37. $|x| < (0.06)^{1/5} < 0.56968$

39. $|\text{Error}| < (10^{-3})^3/6 < 1.67 \times 10^{-10}, \quad -10^{-3} < x < 0$

41. $|\text{Error}| < (3^{0.1})(0.1)^3/6 < 1.87 \times 10^{-4}$

49. **(a)** $Q(x) = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2$ **(b)** $0 \le x < 100^{-1/3}$

Sección 10.10, páginas 633 a 635

1. $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$ **3.** $1 + 3x + 6x^2 + 10x^3$

5. $1 - x + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{2}$ **7.** $1 - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^6}{8} - \frac{5x^9}{16}$

9. $1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3}$

11. $(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$
13. $(1-2x)^3 = 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3$
15. 0.0713362 **17.** 0.4969536 **19.** 0.0999445 **21.** 0.10000

23. $\frac{1}{13\cdot 6!} \approx 0.00011$ **25.** $\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!}$

27. ***a)*** $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$

b) $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^6}{5\cdot 6} - \frac{x^8}{7\cdot 8} + \cdots + (-1)^{15}\frac{x^{32}}{31\cdot 32}$

29. $1/2$ **31.** $-1/24$ **33.** $1/3$ **35.** -1 **37.** 2

39. $3/2$ **41.** e **43.** $\cos\frac{3}{4}$ **45.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **47.** $\frac{x^3}{1-x}$

49. $\frac{x^3}{1+x^2}$ **51.** $\frac{-1}{(1+x)^2}$ **55.** 500 términos **57.** 4 términos

59. ***a)*** $x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112}$, radio de convergencia $= 1$

b) $\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112}$

61. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$
67. ***a)*** -1 ***b)*** $(1/\sqrt{2})(1+i)$ ***c)*** $-i$

71. $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots$, para toda x

Ejercicios de práctica, páginas 636 a 637

1. Converge a 1 **3.** Converge a -1 **5.** Diverge
7. Converge a 0 **9.** Converge a 1 **11.** Converge a e^{-5}
13. Converge a 3 **15.** Converge a ln 2 **17.** Diverge
19. $1/6$ **21.** $3/2$ **23.** $e/(e-1)$ **25.** Diverge
27. Converge condicionalmente **29.** Converge condicionalmente
31. Converge absolutamente **33.** Converge absolutamente
35. Converge absolutamente **37.** Converge absolutamente
39. Converge absolutamente
41. ***a)*** $3, -7 \le x < -1$ ***b)*** $-7 < x < -1$ ***c)*** $x = -7$
43. ***a)*** $1/3, 0 \le x \le 2/3$ ***b)*** $0 \le x \le 2/3$ ***c)*** Ninguno
45. ***a)*** ∞, para toda x ***b)*** Para toda x ***c)*** Ninguno
47. ***a)*** $\sqrt{3}, -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ ***b)*** $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ ***c)*** Ninguno
49. ***a)*** $e, -e < x < e$ ***b)*** $-e < x < e$ ***c)*** Conjunto vacío

51. $\frac{1}{1+x}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}$ **53.** $\operatorname{sen} x, \pi, 0$ **55.** e^x, ln 2, 2 **57.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$

59. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ **61.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{10n/3}}{(2n)!}$ **63.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((\pi x)/2)^n}{n!}$

65. $2 - \frac{(x+1)}{2\cdot 1!} + \frac{3(x+1)^2}{2^3\cdot 2!} + \frac{9(x+1)^3}{2^5\cdot 3!} + \cdots$

67. $\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2}(x-3) + \frac{1}{4^3}(x-3)^2 - \frac{1}{4^4}(x-3)^3$

69. 0.4849171431 **71.** 0.4872223583 **73.** $7/2$ **75.** $1/12$
77. -2 **79.** $r = -3, s = 9/2$ **81.** $2/3$
83. $\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$; la serie converge a $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$.
85. *a)* ∞ *b)* $a = 1, b = 0$ **87.** Converge.

Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 638 a 640

1. Converge; criterio de comparación
3. Diverge; criterio del n-ésimo término
5. Converge; criterio de comparación
7. Diverge; criterio del n-ésimo término

9. Con $a = \pi/3$, $\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \pi/3) - \frac{1}{4}(x - \pi/3)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}(x - \pi/3)^3 + \cdots$

11. Con $a = 0$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

13. Con $a = 22\pi$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2}(x - 22\pi)^2 + \frac{1}{4!}(x - 22\pi)^4 - \frac{1}{6!}(x - 22\pi)^6 + \cdots$

15. Converge, límite $= b$ **17.** $\pi/2$ **21.** $b = \pm\frac{1}{5}$

23. $a = 2$, $L = -7/6$ **27.** ***b)*** Sí

31. ***a)*** $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ ***b)*** 6 ***c)*** $\frac{1}{q}$

33. ***a)*** $R_n = C_0e^{-kt_0}(1 - e^{-nkt_0})/(1 - e^{-kt_0})$, $R = C_0(e^{-kt_0})/(1 - e^{-kt_0}) = C_0/(e^{kt_0} - 1)$

b) $R_1 = 1/e \approx 0.368$, $R_{10} = R(1 - e^{-10}) \approx R(0.9999546) \approx 0.58195$; $R \approx 0.58198$; $0 < (R - R_{10})/R < 0.0001$

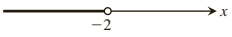
c) 7

Apéndices

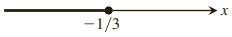
Apéndice 1, página AP-6

1. $0.\overline{1}$, $0.\overline{2}$, $0.\overline{3}$, $0.\overline{8}$, $0.\overline{9}$ o 1

3. $x < -2$



5. $x \le -\frac{1}{3}$



7. $3, -3$ **9.** $7/6, 25/6$

11. $-2 \le t \le 4$

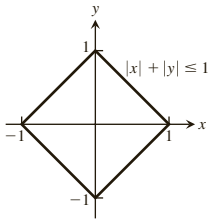
13. $0 \le z \le 10$

15. $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

17. $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$

19. $(-3, -2) \cup (2, 3)$ **21.** $(0, 1)$ **23.** $(-\infty, 1]$

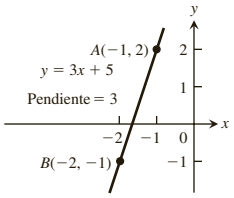
27. La gráfica de $|x| + |y| \le 1$ es el interior y la cota de la región en "forma de diamante".



Apéndice 3, páginas AP-17 y AP-18

1. $2, -4; 2\sqrt{5}$ **3.** Circunferencia unitaria

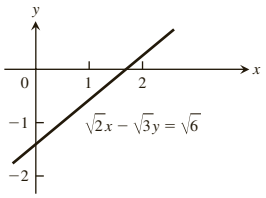
5. $m_\perp = -\frac{1}{3}$



7. ***a)*** $x = -1$ ***b)*** $y = 4/3$ **9.** $y = -x$

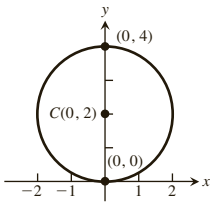
11. $y = -\frac{5}{4}x + 6$ **13.** $y = 4x + 4$ **15.** $y = -\frac{x}{2} + 12$

17. Intersección con $x = \sqrt{3}$, intersección con $y = -\sqrt{2}$

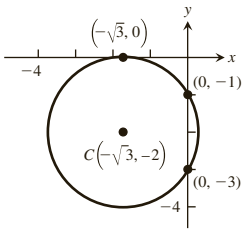


19. $(3, -3)$

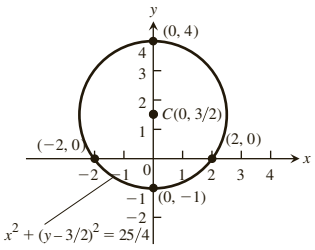
21. $x^2 + (y - 2)^2 = 4$



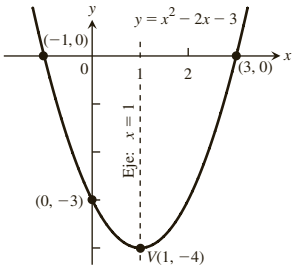
23. $\left(x + \sqrt{3}\right)^2 + (y + 2)^2 = 4$



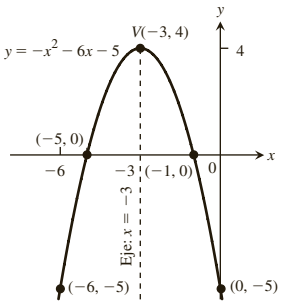
25. $x^2 + (y - 3/2)^2 = 25/4$



27.



29.



31. Los puntos exteriores de una circunferencia de radio $\sqrt{7}$, con centro en el origen.

33. La arandela entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$ (distancia de puntos con respecto al origen entre 1 y 2)

35. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 < 6$

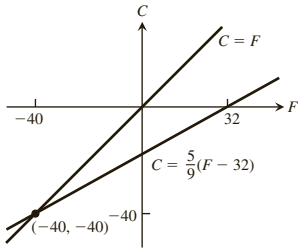
37. $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

39. $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}\right)$

41. ***a)*** ≈ -2.5 grados/in ***b)*** ≈ -16.1 grados/in ***c)*** ≈ -8.3 grados/in

43. 5.97 atm

45. Sí: $C = F = -40°$



51. $k = -8, \quad k = 1/2$

Apéndice 7, páginas AP-34 y AP-35

1. ***a***) $(14, 8)$ ***b***) $(-1, 8)$ ***c***) $(0, -5)$

3. ***a***) Reflejando z con respecto al eje real
b) Reflejando z con respecto al eje imaginario
c) Reflejando z en el eje real y luego multiplicando la longitud del vector por $1/|z|^2$

5. ***a***) Puntos sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$
b) Puntos dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$
c) Puntos fuera de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$

7. Puntos sobre la circunferencia de radio 1, con centro en $(-1, 0)$

9. Puntos sobre la recta $y = -x$ **11.** $4e^{2\pi i/3}$ **13.** $1e^{2\pi i/3}$

15. $\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta + \text{sen}^4\theta$

17. $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **19.** $2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$

21. $\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$ **23.** $1 \pm \sqrt{3}i, -1 \pm \sqrt{3}i$

Índice

A

a, logaritmo de base, 389
Abscisa, AP-10
Aceleración
  caída libre y, 130
  como derivada de la velocidad, 129, 130-131
  componente
    normal de, 766-771
    tangencial de la, 766-771
  definición de, 129
  derivada de (sacudida), 129, 130
  en caída libre, 131
  en coordenadas polares, 772-775
  en el espacio, 743
  velocidad y posición a partir de, 197
Aditividad
  integrales,
    de línea y, 940-941
    dobles y, 880
Alargamiento de una gráfica, 17
Albert de Saxony, 588
Álgebra, teorema fundamental del, AP-34
Altura máxima en movimiento de proyectiles, 751
Análisis
  de regresión, 33
    mínimos cuadrados, 33, 844
  del error
    en aproximaciones lineales, 171-172, 831
    en integración numérica, 486-489
Ángulo(s)
  convención de, 22
  de disparo, 750
  de elevación, 750
  de inclinación, AP-11
  de lanzamiento, 750
  dirección del, 712
  en funciones trigonométricas, 21-22
  en posición estándar, 22
  entre planos, 726
  entre vectores, 706-708
Antiderivadas
  de una función vectorial, 747
  definición de, 232
  e integrales indefinidas, 237-238
  movimiento y, 235-237
  obtención de, 232-235
  regla de la diferencia, 234
Antidiferenciación, 232
Aproximación(es)
  a un plano tangente, 830
  análisis del error en, 486-489
  cuadráticas, 619
  de raíces y potencias, 168
  diferencial, error en, 171-172
  factorial, 523
  lineal(es)
    estándar, 166, 830
    fórmula de error para, 831, 856
  mediante parábolas, 484-486
  método de Newton de raíces para, 227-230
  por diferenciales, 166
  por la recta tangente, 166, 830
  por la regla
    de Simpson, 486-489
    del trapecio, 486-489
  por polinomios de Taylor, 616
  trapezoidal, 483-484
Arco(s)
  secante, 414
  tangente, 412, 416, 419
Área(s)
  acotada por un astroide, 650-651
  aproximaciones finitas para el, 251
  bajo
    la gráfica de una función no negativa, 256
    una curva o gráfica, 272
  como integral definida, 249
  de regiones acotadas en el plano, 884-886
  de superficies de revolución, 337-340, 656-657
  de un paralelogramo, 715, 983
  de una sección transversal, 313, 314
  de una superficie suave, 983
  definición de, 273
  en coordenadas polares, 890
  en un plano de coordenadas polares, 667-669
  entre curvas, 299-302
  infinita, 493
  por doble integración, 884-887
  por el teorema de Green, 979
  superficial
    de revolución alrededor del eje *y*, 339-340
    de superficies explícitas, 992
    de una esfera, 984-985
    de una gráfica, 988
    de una superficie implícita, 987-988, 992
    definición de, 337-339, 982-986
    diferencial de superficies parametrizadas, 984
    parametrización de, 982-986
  superficies y, 338, 656-657, 980-988
  total, 250, 284-286
  y estimación con sumas finitas, 249-257
Argumento, AP-30
Asíntotas
  de gráficas, 86-96
  de hipérbolas, 676
  en gráficas de funciones racionales, 9
  horizontales, 86, 88-90, 94-95
  inclinada (oblicua), 91
  integrandos con, 495-497
  oblicua (inclinada), 91
  verticales, 86, 94-95
    definición de, 94-95
    límites y, 86
Astroide
  área acotada por un, 650-651
  centroide y, 655
  longitud de un, 653
a^x
  definición de, 386
  derivada de, 388
  ecuaciones inversas de, 389

integral de, 388
leyes de exponentes, 386

B

Banda(s)
de Möbius, 995
horizontales, 324
verticales, 324, 354
Base(s) *a*
de un cilindro, 313
funciones logarítmicas en, 389-390
Bernoulli
Daniel, 186
Johann, 146, 403
Birkhoff, George David, 292
Bolzano, Bernard, 129
Bombeo de líquidos desde contenedores, 344-345
Braquistocronas, 645-646

C

Cable colgante, 11, 432
Caída libre, ley de Galileo para, 41, 130
Calculadoras
para estimar límites, 53-54
trazado de gráficas con, 29-34
Cambio(s)
absoluto, 173
de base en un logaritmo, 389
estimación del, en una dirección especial, 829-830
exponencial (crecimiento o decaimiento), 393-394
porcentual, 173
razones del, 41-46, 106-107, 127-133
relativo, 173
sensibilidad al, 133, 173-174
Campo(s)
conservativos, 958, 959-962, 1012-1013
como campo gradiente, 960
criterio de las componentes para, 962, 964
integrales de línea en, 964
obtención de potenciales de, 962-965
propiedad de los lazos en, 961
teorema de Stokes y, 1012-1013
de velocidad
circulación para, 952-953
integrales de flujo, 952-953
eléctrico, 957
gradiente, 960
gravitacional, 957
definición de, 957
vectores en, 946
ordenado, AP-24
vectorial(es), 947-948
conservativos, 958, 959-962
continuo, 945
definición de, 945-946
densidad de flujo de, 973
diferenciables, 945
divergencia de, 970-971
eléctricos, 957
función potencial para, 958
gradiente, 946-947, 959-960
gravitacionales, 957
integración en, 926-1032
integrales, 945-954
rotacionales, 1002-1003
Carcasas delgadas, masas y momentos de, 998-1000
Cardoide
definición de, 665
en coordenadas polares, área acotada por, 668
graficación de, 668
longitud de, 669-670
Carga eléctrica, 1022
Casquillos cilíndricos, uso en volúmenes, 324-329
Catenaria, 11, 432
Cauchy, Augustin-Louis, 408
Cavalieri, Bonaventura, 315
Centro(s)
de aproximación lineal, 166
de curvatura, para curvas planas, 763
de masa
centroide y, 357-358
coordenadas de, 353, 942, 998
de un alambre o resorte, 942
de un sólido, 904
de una carcasa delgada, 999-1000
de una placa delgada y plana, 353-356
definición de, 352
momentos y, 351-360, 903-908
Centroide(s), 357-358, 904-905
Cicloides, 645
Cilindro(s)
base de, 313
división con, 324-326
parabólico, flujo a través de, 996
parametrización de, 982
superficies cuadráticas y, 728-731
volumen de, 313
Circulación
de campos de velocidad, 952-953
flujo contra, 953
Círculo
de curvatura, para curvas planas, 763-174
osculador, 763
Circunferencia(s)
ecuación
cartesiana estándar de, AP-14
polar de, 685
en el plano, AP-13-AP-15
longitud de, 652
osculadoras (círculos osculadores), 763
unitaria, AP-14
Cisoide de Diocles, 155
Clairaut, Alexis, 804
Cociente(s)
de números complejos, AP-31-AP-32
diferencial
definición de, 106
formas de, 110
límite de, 106
productos y, derivadas de, 122-124
Coeficiente(s)
binomiales, 627
de polinomios, 8-9
de series de potencias, 577-578
determinación para fracciones parciales, 474-475
indeterminados, 475
Comando "integrate" (software matemático), 579
Combinación
de funciones, 14-21
de series, 577-578
Completar el cuadrado, AP-14-AP-15
Componente
(escalar) de **u** en dirección de **v**, 710
i de un vector, 701
j de un vector, 701
k de un vector, 701
del rotacional, 968-971
normal de aceleración, 766-771
tangencial de la aceleración, 766-771
Compresión
de una gráfica, 16
uniforme de un gas, 970-971
Computadoras, para estimar límites, 53-54
Concavidad
diagramación de una curva y, 204-212
prueba de la segunda derivada para, 205
Conectividad, 81
Cónicas
definidas, 671, 672, 673, 675
ecuaciones polares de, 682-684
en coordenadas
cartesianas, 671-677
polares, 680-685
excentricidad de, 680-682
Conjugado complejo, AP-29
Conjunto(s), AP-2
de Cantor, 581
vacío, AP-2
Cono(s)
área superficial de, 984
elípticos, 729, 731
parametrización de, 981
Conservación
de la masa, 1027
del momento angular, 779
Constante(s)
arbitraria, 233
de crecimiento, 394
cambio exponencial de, 394
de decaimiento, 394
de gravitación universal, 773
de un resorte, 343, 344

diferente de cero, 234
gravitacional, 773
Construcción de los números reales, AP-25-AP-26
Continuidad. *Vea también* Discontinuidad
de funciones
compuestas, 795
vectoriales, 740-741
de una función en un punto, 75-78
derivadas parciales y, 803
diferenciabilidad y, 114, 806
en el extremo izquierdo, 76
en funciones con múltiples variables, 793-795
en un intervalo, 78
en un punto interior, 76
límites y, 41-104
uniforme, 277
Contracción
de la tráquea, 226-227
de Lorentz, 102
Convención de ángulos, 22
Convergencia
absoluta, 592-593
condicional, 601
de integrales impropias, 493, 495
de las sumas de Riemann, 267
de series
de potencias, 605-608
de Taylor, 619-625
geométricas, 574
prueba de la integral, 581-586
de sucesiones, 561-563
definición de, 267
intervalo de, 609
pruebas de, 498-500, 602
radio de, 608-609
Coordenada(s)
cartesianas
conversión a/de coordenadas polares, 890-892
en el plano, AP-10
en relación con las coordenadas cilíndricas y esféricas, 915
en relación con las coordenadas cilíndricas, 911
en relación con las coordenadas polares, 659-662
integrales triples en, 894-400
tridimensionales. *Vea* Sistemas de coordenadas tridimensionales
cilíndricas
a coordenadas rectangulares, 911, 918
de coordenadas esféricas a, 918
definición de, 910
diferencial de volumen en, 911
integración con, 912-914
integrales triples en, 910-918
movimiento en, 772-773
parametrización por, 982
del centro de masa, 353, 942, 998
esféricas
definición de, 914
integrales triples en, 914-918
polares
área de una región polar, 668
área en, 890
cónicas en, 671, 680-685
coordenadas cartesianas relacionadas con, 659-662
definición de, 659
graficación en, 660, 663-666
integrales en, 888-889
longitud de una curva polar, 669-670
movimiento en, 772-773
pendiente de una curva polar, 664-665
polo en, 659
rayo inicial de, 659
velocidad y aceleración en, 772-775
x, AP-10
xyz, e integrales de línea, 949
Corrección de masa de Einstein, 173
Cosecante, 22
Coseno(s)
definición ampliada de, 22
integrales de productos de, 461-462
potencias de, 458-459
ley de, 25-26, 707
valores del, 23
Costo(s)
fijos, 132
marginales, 131-132, 219
variables, 132
Cot *x*
derivadas de, 140
inversa de, 414, 419
Cota
inferior, 262
superior, AP-24, 262
mínima, 567, AP-24
Courant, Richard, 119
Crecimiento
de población, ilimitado, 396-397
exponencial, 394
Criterio
de la convergencia absoluta, 593
de la integral
estimación del error, 584-586
para convergencia de series, 581-586
residuo en, 585-586
de la raíz, 595-597, 609
de la razón, 594-595, 606-607, 609, 627
de la serie alternante, 599
de las componentes
para campos conservativos, 962, 964
en forma diferencial exacta, 965
del *n*-ésimo término para divergencia, 576-577
pruebas de comparación
para convergencia de integrales impropias, 498-500
para convergencia de series, 588-591
Csc *x*
derivada de, 140
inversa de, 414, 418
Cuadrantes del sistema de coordenadas, AP-10
Cubo, integral superficial de, 993-994
Curva(s)
área
debajo de, 272, 493
entre, 299-302
cerradas, 953
de contorno, 784
de nivel, 823-824
de funciones de dos variables, 784
definidas paramétricamente, longitud de, 651-654
diagramación de, 204-212
en el espacio, 739-745
binormales para, 767
ecuaciones paramétricas de, 739
ecuaciones vectoriales de. *Vea* Funciones vectoriales
fórmulas para, 771
longitud de arco a lo largo de, 756-758
normales con respecto a, 762
generadoras de superficies cilíndricas, 728
orientadas
negativamente, 974
positivamente, 974
paramétrica(s), 641-642
cálculo con, 649-657
definición de, 641
diferenciable, 649
graficación, 642-643, 666
longitud de arco, 651-654, 756-758
parametrizadas, 642, 656-657
pendiente de la
definición de, 43-45, 105
obtención de, 44, 105, 664
placas acotadas por dos, 356-357
planas
circunferencia de curvatura de, 763-764
curvatura de, 760-763
flujo a través de, 953-954
longitudes de, 331-333, 651-654
parametrización de, 641-646, 739
polares
graficación de, 656-657
longitud de, 669-670
punto(s)
de inflexión de, 205-207, 210
inicial de, 641
terminal de, 641
recta tangente a, 105
secante para, 43
suaves, 3-4, 331-333, 651-652, 742
curvatura de, 760-763
longitud de, 756

por tramos, 742, 958
rapidez en, 758
torsión de, 769
supuestos del cálculo integral vectorial, 958-959
tangentes a, 41-46, 758, 823-824
trabajo realizado por una fuerza en, 950-952
traza, 805
trazado de, 299-302
$y = f(x)$, longitud de, 331-333
Curvatura
cálculo de, 761, 771
centro de, 763
de curvas planas, 760-763
en el espacio, 764
radio de, 763
Cúspide, 113

D

Datos
del diapasón, 4
genéticos, y sensibilidad al cambio, 133
Decaimiento
del carbono 14, 398
exponencial, 394
radiactivo, 397
Dedekind, Richard, 263, AP-25
Definiciones recursivas, 567
Denominadores igual a cero, eliminación algebraica de, 52-53
Densidad
circulación, 968-971
como una función continua, 354
de circulación, 968-971
de flujo, 973
(divergencia), de un campo vectorial, 968, 973, 1015-1016
Derivada(s)
aplicaciones de, 185-248
cálculo de, a partir de la definición, 110
como
razón de cambio, 127-133
una función, 105, 110-114
velocidad, 128, 743
de función(es)
coseno, 138-139
exponenciales, 384, 388
hiperbólicas, 425-429
inversas, 370-371
raíz cuadrada, 111
seno, 137-141
trigonométricas, 137-141, 415-418
valor absoluto, 147
de logaritmos, 376, 390
de orden superior, 124, 153, 805
de segundo orden, 124
de series de potencias, 610
de una función
compuesta, 144-146, 744
constante, 118
recíproca, 110
vectorial, 741-743
de una integral, 284
definición de, 110
del vector tangente, 761
direccionales
cálculo de, 820-822
como producto punto, 821
definición de, 819
en el plano, 818-820
estimación del cambio con, 829-830
gradiente vectorial y, 818-825
interpretación de, 820
propiedades de, 822
y gradientes, 821
en economía, 131-133
en un punto, 105-107, 113-114
fórmula alternativa para, 110
funciones de, comportamiento de las gráficas de, 211-212
funciones inversas y, 366-380
graficación de, 112
lateral, 112-113
n-ésima, 124
notaciones para, 111-112
parciales
cálculo de, 800-802
con variables restringidas, 858
continuas, identidad para una función con, 1012
continuidad y, 789-795
de orden superior, 805
de segundo orden, 803-804
de una función de dos variables, 798-800
de una función de varias variables, 781-786
definiciones de, 799
funciones de varias variables, 781-786
multiplicadores de Lagrange, 845-852
notaciones equivalentes para, 799
planos tangentes y, 827-833
regla de la cadena para, 809-816
valores extremos y puntos silla, 836-842
vectores gradiente y, 818-825
por la derecha, 112-113
por la izquierda, 112-113
que involucran $\log_a x$, 390
regla
de la diferencia para, 120-121
de Leibniz, 312
del múltiplo constante para, 119-120
del producto cruz, 744
del producto punto, 744
general de la potencia para, 119, 386-387
segunda, 124
símbolos de, 124
tercera, 124
Descartes, René, AP-10
Desigualdad(es)
de Schwartz (de Cauchy-Schwartz), 713
del triángulo, AP-5
reglas de, AP-1
resolución de, AP-3-AP-4
Desplazamiento
contra distancia recorrida, 254-255, 283
de la gráfica de una función, 16
definición de, 128, 254
horizontal, AP-11
de una función, 16
vertical de una función, 16
Desviación estándar, 510
Determinante(s)
cálculo del producto cruz, 718
jacobiano, 923, 925, 926, 928
Diagrama(s)
de árbol, regla de la cadena multivariable, 811, 812, 813, 814
de Argand, AP-30
de dispersión, 4
de flechas de una función, 2
de máquina de una función, 2
Diferenciabilidad, 112-114, 798, 803, 805-807
Diferenciación
de funciones vectoriales, reglas de, 743-745
derivada(s)
como una función, 110-114
como una razón de cambio, 127-133
de funciones trigonométricas, 137-141
e integración, como proceso inverso, 284
funciones trigonométricas inversas y, 415-418
implícita, 151-154, 814-816
fórmula de, 814
regla de la cadena y, 814-816
técnica de, 151-154
linealización y, 165-168
logarítmica, 378-379
razones relacionadas, 156-161
regla de la cadena y, 144-148
tangentes y derivada en un punto, 105-107
término a término, 610
para series de potencias, 610
Diferencial(es)
área superficial, de superficies parametrizadas, 984
de área, 668
definición de, 168
estimación con, 169-171
linealización y, 165-168
planos tangentes y, 831-833
total(es), 832

Dirección
a lo largo de una trayectoria, 641-642, 938-939
de cosenos, 712
de vectores, 701
estimación del cambio en, 829-830
Directriz (directrices)
de la elipse, 681
de la hipérbola, 681
de la parábola, 681, 683
Dirichlet, Lejeune, 494
Discontinuidad(es)
de salto, 77
en *dy*/*dx*, 333-334
infinita, 77
oscilante, 77
punto de, 77
removible, 77
Discriminante (hessiano) de una función, 838
Distancia
en coordenadas cartesianas tridimensionales
de un punto a otro, 694
de un punto a un plano, 723-724, 725-726
de un punto a una recta, 722-723
en el plano, AP-13-AP-15
recorrida
cálculo de la, 251-253
contra desplazamiento, 254-255, 283
total, 254, 283
y esferas en el espacio, 694-695
Distribución
normal, 511
forma estándar de, 513
uniforme, 511
Divergencia
de integrales impropias, 493
límites y, 493
prueba del *n*-ésimo término para, 576-577
de series, 573
de sucesiones, 561-563
en el infinito, 563
de un campo vectorial, 971-973, 1015-1016
pruebas de, 498-500, 602
División
con cilindros, 324-326
obtención de rebanadas por planos paralelos, 314-315
obtención de volumen por, 314-315
Dominación, integrales dobles y, 880
Dominio(s)
conexo, 959
de un campo vectorial, 945, 959
de una función, 1-3, 781, 782
natural, 2
de una función, 2
simplemente conexo, 959

E

e
como límite, 387-388
como serie, 620-621
definición del número, 375
exponencial natural y, 383
Economía
derivadas en, 131-133
ejemplos de optimización aplicada en, 219-221
Ecuación(es)
de calor, 809
de circunferencias, AP-16
de componentes, para el plano, 723
de continuidad en hidrodinámica, 1023-1024
de hipérbolas, 675-677
de Laplace, 808-809
de las elipses, 675, 684, AP-16-AP-17
de onda, 809
de presión-profundidad, 345
de razones relacionadas, 157-161
de un plano en el espacio, 723-724
diferenciales
problemas con valor inicial y, 235
separables, 394-395
solución particular, 235
foco-directriz, 681
general lineal, AP-13
identidad de Euler, 631-632
inversas, 389
lineales, AP-13
generales, AP-13
movimiento ideal de proyectiles y, 750
paramétricas
de cicloide, 645
de curvas en el espacio, 739
de hipérbola, 644, 649-650
de rectas, 720-722
de una circunferencia, 642, 652-653
definición de, 641-642
graficación de, 642-644
para movimiento de proyectiles, 749-751
polares
de circunferencias, 683, 685
de rectas, 684
de secciones cónicas, 682-684
graficación de, 660
punto-pendiente, AP-12
que relacionan coordenadas
esféricas con cartesianas y cilíndricas, 915
polares y cartesianas, 661
rectangulares y cilíndricas, 911
vectoriales
de curvas en el espacio, 739
de un plano, 723
para movimiento de proyectiles, 749-751
para rectas, 720, 721-722
Efecto remolino, 970
Eje(s)
de coordenadas, AP-10
definición de, AP-10
momentos de inercia con respecto a, 942, 988
de una elipse, 673
de una parábola, 672, AP-15
giro alrededor de un, 968-971
momentos de inercia respecto a, 942, 998
volúmenes por obtención de rebanadas y rotación alrededor de, 313-320
y, rotación alrededor del, 339-340
Elemento(s)
de área curva, 983
de un conjunto, AP-2
radiactivos, vida media de, 398
Elevación, AP-11
Elipse(s)
centro de, 673, AP-17
distancia del centro al foco, 674
ecuaciones
estándar de, 675
polares de, 682-684
eje
focal de la, 673
mayor de la, 674, AP-17
menor de la, 674, AP-17
excentricidad de, 681
perímetro de, 653-654
vértices de, 673
Elipsoide(s)
de revolución, 730
definición de, 729
gráficas de, 731
Energía cinética y trabajo, 349
Enteros
descripción de, AP-26
iniciales, AP-18
positivos
definición de, AP-26
regla de la potencia para, 118-119
Escala(s)
de la gráfica de una función, 16-18
horizontal y fórmulas de reflexión, 17
vertical y fórmulas de reflexión, 17
Escalares, definición de, 698
Esferas
área de la superficie de, 984-985
concéntricas, en un campo vectorial, 1021-1022
ecuación estándar de, 694
en el espacio, distancia y, 694-695
parametrización de, 981
Esquinas, 113

Estimación del error, en criterio de la integral, 584-586
Euler, Leonhard, AP-36
e^x
derivada de, 384
ecuación inversa de, 383
integral de, 384-385
leyes de los exponentes para, 385
Excentricidad
de la elipse, 681
de la hipérbola, 681
de la parábola, 681
ecuación polar de las cónicas con, 682
en coordenadas polares, 680-682
Expansión uniforme de un gas, 970-971
Exponentes
irracionales, 386
leyes de, 385
Extensión continua, 82-83
Extremo(s)
absolutos, obtención de, 189-190
globales (absolutos), 185-190,
locales (relativos), 187-188, 200-202, 207-211, 836
prueba de la primera derivada para, 200-202
prueba de la segunda derivada para, 207-211
teorema de la primera derivada para, 188-189
obtención de, 188-189
relativos (locales), 187-188, 200-202, 207-211, 836

F

Fermat, Pierre de, 44
Física, ejemplos de optimización aplicada en, 217-219
Flujo
a través de
una curva plana, 953-954
una frontera rectangular, 972-973
cálculo del, 974, 995-998
contra circulación, 953
de corte, 970
definición de, 953, 996
integral de superficie de, 995-998
Focos, 671-677
Forma(s)
diferenciales, 965-966
exactas, 965-966
indeterminada
0/0, 403-405
de límites, 403-406, 630-631
integral, regla del producto en, 449-453
Fórmula(s)
de cálculo de torsión, 768
de conversión de coordenadas, 918
de desplazamiento para funciones, 16
de error, de aproximaciones lineales, 171-172, 831, 856
de Euler, AP-30-AP-31
de Green, 1027
de la distancia, 694, AP-14
de la longitud de arco, 334, 652, 757
de la suma, trigonométricas, 25
de Leibniz, 630
de medio ángulo, trigonométricas, 25
de Poiseuille para flujo sanguíneo, 176
de recursión, 567
de reducción, 453, 478
de Stirling, 522
de sustitución para integrales definidas, 296-299
de Taylor
definición de, 619, 620
para funciones de dos variables, 854, 858
del área de Arquímedes, 287
del casquillo para rotación, 327
diferencial corta, de longitud de arco, 334-335
paramétricas, para derivadas, 649
sinusoidal, 27
trigonométricas para el doble de un ángulo, 25
Fracciones parciales
definición de, 475
integración de funciones racionales con, 468-475
método de, 469-472
Franjas horizontales, 354-355
Frenet, Jean-Frédéric, 767
Fubini, Guido, 873
Fuerza(s)
campo de, 950
constantes, 342
trabajo realizado por, 342, 711
de un fluido
contra un plano vertical, 347
trabajo y, 952
y centroides, 358
suma de, 699-700
variable a lo largo de una recta, 342-343
trabajo realizado por
en una curva en el espacio, 950-952
en un desplazamiento, 711
variable
a lo largo de una curva, 950-952
a lo largo de una recta, 342-343
Función(es)
a partir de derivadas, comportamiento gráfico de, 211-212
acotadas, 103-104
algebraicas, 10
arco seno
definición de, 412
derivada de, 415
identidades que involucran, 414
y arco coseno, 412, 414
área total debajo de la gráfica de, 285
armónicas, 1026
combinación de, 14-21
componentes, 739
compuestas, 15-16, 79-80, 144-145
comunes, 7-11
con valores reales, 2, 739, 781
constantes, 7, 49-50, 118, 255-256
definición de, 7, 49
derivada de, 118
continua(s)
composición de, 79-80
definición de, 78-79, 741
diferenciabilidad y, 114
en un extremo, 76
en un intervalo, 78
en un punto, 82-83, 741, 793
extremos absolutos de, 189-190, 795
integrabilidad de, 268
límites de, 75-78, 80
no negativas, valor promedio de, 255-256
por la derecha, 76
por la izquierda, 76
por partes, 268, 310
propiedades de, 78
teorema del valor intermedio para, 81-82, 219
valor promedio de, 273-274, 886-887, 899
valores extremos de, en conjuntos acotados cerrados, 186, 795
continuamente diferenciables, 331, 339, 651-652
continuidad de, 76, 741, 793
cosecante
definición ampliada, 22
inversa de, 414
coseno, 22, 138-139
derivada de, 138-139
gráfica de, 10
integral de, 458
inversa de, 414, 418
costo
marginal, 131-132
total, 132
cotangente
definición ampliada de, 22
inversa de, 414
creciente, 6, 199-200
cuadráticas, 9
cúbicas, 9
curvas suaves por tramos, 958
de componentes, 739, 945
de dos variables, 782-783, 786, 806
derivadas parciales de, 781-786, 798-800
límites de, 789-793
linealización de, 830-831
regla(s) de la cadena de, 809-811
teorema del incremento de, 806

de más de dos variables, 795, 802-803, 833
de posición, aceleración y, 197
de producción Cobb-Douglas, 853
de tres variables, 784-786, 811-812, 824-825
de valor real, 2, 739, 781
de varias variables, 781-786, 816
de Weierstrass, 118
decreciente(s), 6, 199-200
definición de, 1
definidas
en superficies, 812-814
implícitamente, 151-153, 814
por fórmulas, 14
por partes, 5
derivada de, 106, 110, 113-114, 742
derivadas como, 105, 110-114
diagrama
de dispersión de, 4
de flechas de, 2, 782
de máquina de, 2
diferenciables
continuas, 114, 651
continuidad y, 806
curvas paramétricas y, 649
definición de, 110
derivadas parciales, 798-800
en un intervalo, 112-113
fórmula de Taylor para, 616
gráfica de, 169
regla del múltiplo constante, 119
reglas para, 118-124, 144-148, 744
discontinuidad de, 77-78, 793
dominio de, 1-3, 14, 781, 782
en el espacio, valor promedio de, 899-900
escala de, 16-18
escalares, 739
escalón unitario, 50
exponenciales
crecimiento y decaimiento, 394
derivadas de, 388
en base *a*, 386
integrales de, 384-385
naturales, 382-384, 620
extensión continua de, 82-83
fórmulas de desplazamiento de, 16
gamma, 522, 936
general seno, 27
gradiente de, 821
graficación con calculadoras y computadoras, 29-34
gráficas de, 1-11, 14-21, 784
hessiano de una función de dos variables, 838
hiperbólicas
definiciones de, 424
derivadas de, 425-426, 428-429
gráficas de, 424
identidades de, 424
integrales de, 425-426
inversas, 426-427
las seis, básicas, 424
identidad, 7, 24-25, 49-50, 1012
impares, 4, 6-7
integrables, 268-271, 748, 871, 895
integral seno, 502
inversa(s)
de funciones exponenciales, 11, 366
definición de, 367
e integración, 457
hiperbólicas, 426-427
logaritmos y, 382-383, 389
obtención de, 368-369
regla de la derivada de, 370
y derivadas, 366-380, 370-371
inyectivas, 366-367
límite de, 48-55, 790
lineales, 7
linealización de, 165-168, 830-831
logarítmicas
comunes, 389
descripción de, 11
en base *a*, 389
fórmula para cambio de base y, 389
naturales, 375
logaritmo natural, 375-379, 389
definición de, 375
derivada de, 376
gráfica de, 382
propiedades algebraicas de, 375-378
series de potencias para, 612
mayor entero, 5
definición de, 5
como una función definida por partes, 5
menor entero, 5
mínimo entero, 5
monótonas, 199-200
multiplicación de, 14
no diferenciable, 113-114
no integrable, 268-271
no negativas
área bajo la gráfica de, 272-273
continuas, 255-256
pares, 6-7
piso entero (función mayor entero), 5
polinomiales, 8
definición de, 8
posición, 5
positivas, área debajo de la gráfica de, 256
potencia, 119, 386-387
potencial, 958
prueba de la recta vertical para, 4-5
punto crítico de, 189, 837
racionales
definición de, 9
dominio de, 9
integración de, por fracciones parciales, 468-475
límites de, 52
raíz
cuadrada, 8, 111
cúbica, 8
rango de, 1-3, 781, 782
recíproca, derivada de, 110
regla de Dirichlet de, 103
representación
como una serie de potencias, 614-618
numérica de, 4
secante
definición ampliada de, 22
inversa de, 414
seno, 22, 137-138
derivada de la, 137-138
gráfica de la, 10
integral de la, 458
inversa de la, 414, 415-416
simétricas, 6-7, 298-299, 663
integrales definidas de, 298-299
gráficas de, 6-7
propiedades de, 6
suma de, 14-15
tangente
definición ampliada de, 22
inversa de, 414
techo entero (función menor entero), 5
trascendentes, 385
trigonométricas
ángulos, 21-22
derivadas de, 137-141
gráficas de, 10, 24, 31-32
integrales de, 457-462
inversas, 411-420
las seis, básicas, 22-23
periodicidad de, 24
unitarias escalonadas, límites y, 50
valor de, 2
valor(es)
absoluto, 5, 147
extremos de, 185-190, 836-842, 848, 851
máximo y mínimo de, 185-190, 187-188, 200-202, 840-842
variable
de entrada de, 1, 781
de salida de, 1, 781
dependiente de, 1, 781
independiente de, 1, 781
vectoriales
antiderivadas de, 747
continuidad de, 740-741
curvas en el espacio y, 739-745
de longitud constante, 745
diferenciables, 742
integral(es) de, 747-752
límites de, 740-741
reglas de diferenciación para, 743-745

velocidad, 254, 743
aceleración y, 197, 743
rapidez y, 254

G

Galileo Galilei
fórmula de caída libre, 41, 130
ley de, 41
Ganancia marginal, 219
Gauss, Carl Friedrich, 261, 698
Geometría en el espacio, 692-738
Gibbs, Josiah Willard, 758
Giro alrededor de un eje, 968-971
Grado, de un polinomio, 9
Gráfica(s)
área superficial de la, 988
asíntotas de, 86-96
conexidad y, 81
cóncava
hacia abajo, 204
hacia arriba, 204-205
de curvas polares, 666
de derivadas, 112
de ecuaciones paramétricas, 666
de funciones, 3-4, 14-21, 784
comunes, 7-11
con dos variables, 783-784
con tres variables, 784-786
con varias variables, 781-786
trigonométricas, 24, 31-32
de sucesiones, 562
de una ecuación, AP-10
de $y = f(x)$, estrategia para, 209-211
en coordenadas polares, 660, 663-666
pruebas de simetría de, 663
simétricas
respecto al eje x, 6, 663
respecto al eje y, 6, 663
respecto al origen, 6, 663
técnicas de, 666
trigonométricas, transformaciones de, 26-27
Graficación, con calculadoras y computadoras, 29-34
Grassmann, Hermann, 701
Gravitación, ley de Newton de, 773

H

Halley, Edmund, 200
Hélice, 740
Hessiano de una función, 838
Hidrodinámica, ecuación de continuidad de, 1023-1024
Hipérbola(s)
centro de, 675
definición de, 675
directrices, 681
ecuación de, en coordenadas cartesianas, 681-682
ecuación polar de, 682
eje focal de, 675
excentricidad de, 681
focos de, 675
forma estándar de las ecuaciones de, 675-677
ramas de, 675
vértices de, 675
Hiperboloides, 729, 731
Huygens, Christian, 644, 645

I

Identidad(es)
de Euler, 631-632
de función inversa-cofunción inversa, 418
trigonométricas, 24-25
Imagen, 922
Incrementos, AP-10-AP-13
Independencia de la trayectoria, 958
Índice(s)
cardiaco, 866
de sucesiones, 561
de sumatorias, 259
Inducción matemática, AP-6-AP-9
Inercia, momentos de, 905-908
Infinitésimos, AP-25
Infinito
divergencia de sucesiones para, 563
funciones racionales e, 88
límites en, 86-96
Inflexión, punto de, 189, 205-207, 210
Ingreso marginal, 219
Integración
con respecto a y, área entre curvas, 301-302
con software matemático, 479-480
con sustitución, 290, 296-299
de funciones
inversas, 457
racionales por fracciones parciales, 468-475
vectoriales, 748-749
definida
por partes, 453
por sustitución, 296-299
doble, área por, 884-887
en campos vectoriales, 938-1032
en coordenadas
cilíndricas, 910-918
esféricas, 916-918
fórmula(s)
básicas, 445
por partes, 450
límites de. *Vea* Límites de integración
numérica, 482-489
por partes, 449-455
por sustitución trigonométrica, 463-466
tabular por partes, 454, 521
técnicas de, 444-523
término a término, 611-612
para series de potencias, 611-612
variable de, 237, 267
y diferenciación, relación entre, 284
Integral(es)
aproximación de
por la regla de Simpson, 484-486
por la regla del punto medio, 251
por la regla del trapecio, 483-484
por la suma de Riemann, 263-265
por sumas inferiores, 251
por sumas superiores, 250
cambio exponencial y, 393-394
cartesianas, cambio a integrales polares, 890-892
de campos vectoriales, 947-948
de flujo, 952-953
de funciones
hiperbólicas, 424-425
vectoriales, 747-749
de línea
aditividad y, 940-941
cálculos de masa y momento ϵ, 941-942
campos vectoriales y, 945-954
coordenadas xyz e, 949
definición de, 939
en el plano, 942-943
evaluación de, 939, 948
integración en campos vectoriales, 938-943
interpretación de, 942-943
teorema fundamental de, 959
de potencias de tan x y sec x, 460-461
de razones, 283-284
de superficie(s), 991-1000, 1005
cálculo de, 992-995
de campos vectoriales, 996
de funciones escalares, 992
en el teorema de Stokes, 1005
fórmulas para, 992
integración en campos vectoriales, 991-100
para flujo, 995-998
de trabajo, 342-343, 950-952
definidas
aplicaciones de, 313-373
de funciones simétricas, 298-299
de funciones vectoriales, 748
definición de, 249, 266-268, 289
evaluación de, por partes, 453
existencia de, 266-268
funciones no negativas y, 272-273
notación de, 267
propiedad del desplazamiento de, 305
propiedades de, 269-271
sustitución en, 296-299
teorema del valor medio para, 278-281
valor promedio de funciones continuas, 273-274
y antiderivadas, 237

dobles
como volúmenes, 871-872
en forma polar, 888-892
en rectángulos, 870-874
en regiones no rectangulares acotadas, 875-876
propiedades de las, 880-881
sustituciones en, 922-927
teorema de Fubini para el cálculo de, 872-874
elíptica
de primera clase, 634
de segunda clase, 654
en coordenadas polares, 888-889
impropias, 492-500
aproximaciones para, 500
calculadas como límites, 492-500
con un software matemático, 497-498
convergencia de, 493, 495
del tipo I, 493
del tipo II, 495
indefinidas, 237-238, 289-294
definición de, 237, 289
evaluación con la regla de la sustitución, 289-294
iterada(s), 872
logaritmos definidos como, 374-375
múltiples, 870-937
no elementales, 480-481, 628-629
polares, cambio de integrales cartesianas a, 890-892
que involucran log, 390
repetidas, 872
sustitución en, 289-294, 296-299, 922-930
tabla de, 477-478
breve de, 445
trigonométricas, 457-462
triples
en coordenadas cilíndricas, 910-918
en coordenadas esféricas, 914-918
en coordenadas rectangulares, 894-900
propiedades de, 894-895, 900
sustituciones en, 927-930
Integrandos
con asíntotas verticales, 495-497
definición de, 237
Interpretación afuera-adentro de la regla de la cadena, 146
Intersección
con x, AP-13
de conjuntos, AP-2
rectas de, 724-725
Intervalo(s)
acotados, 6
de convergencia, 609
definición de, AP-3
diferenciables en, 112-113
finitos (acotados), 6, AP-3
infinitos (no acotados), 6, AP-3
no acotados, 6
parámetro, 641-642
tipos de, AP-3
Inversa(s)
de funciones inyectivas, 367-368
de ln x y del número e, 382-383
obtención de la, 368-369
operaciones de integración y diferenciación, 284

J

Jacobi, Carl Gustav Jacob, 922
Joule, James Prescott, 342
Joules, 342

K

Kepler, Johannes, 775
k-ésimo subintervalo de partición, 263, 267
Kovalevsky, Sonya, 429

L

L'Hôpital, Guillaume de, 403
Lagrange, Joseph-Louis, 194, 845
Laplace, Pierre-Simon, 804
Leibniz, Gottfried, 290, AP-25
Lentes, entrada de luz, 154
Ley(es)
asociativas, AP-24
conmutativas, AP-24
de enfriamiento, de Newton, 399-400
de exponentes, 385
de Gauss, 1022
de la elipse (primera ley de Kepler), 774
de las áreas iguales (segunda ley de Kepler), 774-775
de límites
límite de una función y, 48-55
para funciones con dos variables, 791
teorema, 51, 87
de logaritmos
demostraciones de, 377-378
resumen de propiedades, 377
de los cosenos, 25-26, 707
de Newton
de la gravitación, 773
del enfriamiento, 399-400
de refracción, 219
de resortes de Hook, 343-344
de Snell, 219
de transitividad para números reales, AP-24
distributiva
definición de, AP-24
del producto cruz de vectores, 715
demostración de, AP-35-AP-36
tiempo-distancia (tercera ley de Kepler), 775
Límites
bilaterales, 68
definición de, 68
demostración de, AP-21
continuidad y, 41-104
de (sen θ)/θ, 71-73
de funciones
con valores vectoriales, 740-741
continuas, 75-78, 80
de dos variables, 789-793
racionales, 52, 88
de integración
de integrales definidas, 296-299
en x, 897, 899
en y, 896-898
en z, 896, 897, 898, 913
infinita, 492-495
obtención de, para integrales múltiples, 879-880, 889-890, 895-899, 912-914, 917
para coordenadas cilíndricas, 912-914
para coordenadas esféricas, 917
para coordenadas polares, 889-890
para coordenadas rectangulares, 895-900
de polinomios, 52
de sucesiones, 562, 564-565
de sumas
de Riemann, 266-268
finitas, 262-263
de valores de una función, 48-55
definición de
demostración de teoremas con, 64-65
exacta, 59-65
informal, 48-50
prueba de, 60-62
del cociente diferencial, 106
deltas, obtención algebraica, 62-64
e (el número) como, 387-388
en el infinito, 86-96
estimación de, calculadoras y computadoras para, 53-54
finitos, 86-96
formas indeterminadas de, 403-409
inexistencia de, prueba de dos trayectorias para funciones de dos variables, 794
infinitos, 91-93
de integración, 492-495
definición de, exactos, 93-94
descripción y ejemplos, 91-93
laterales
definición(es) de, 68-70
derivadas en los extremos, 112-113
que involucran (sen θ)/θ, 71-73
para coordenadas cilíndricas, 912-914
por la derecha
definición de, 69-70
demostración de, AP-21
por la izquierda
definición de, 69-70
exactos, 59-65, 70
informales, 68-70

que se presentan comúnmente, 566-567, AP-22-AP-23
r de integración, 889, 913
regla
de la raíz para, 51
de potencia para, 51
teorema del sándwich, 54-55
Linealización
de funciones de dos variables, 830-831, 832
definición de, 166, 830
diferenciales y, 165-168
Líquidos
bombeo desde contenedores, 344-345
incompresibles, 973
ln *bx*, 376-377
ln *x*
cambio de base y, 389
derivada de, 376
ecuación inversa de, 383
gráfica y rango de, 378
integral de, 451
inversa de, 382-383
número *e* y, 375
propiedades de, 377
ln x^r, 377, 386
$\log_a u$, derivada de, 390
$\log_a x$
derivadas e integrales que involucran, 390
ecuaciones inversas de, 389
Logaritmos
definidos como una integral, 374-375
integral de, 451
propiedades de, 377-378
algebraicas, 377-378, 389
Longitud
a lo largo de una curva en el espacio, 756-758
constante, funciones vectoriales de, 745
de arco
a lo largo de una curva en el espacio, 756-758
de una función, 334, 758
discontinuidades en *dy*/*dx*, 333-334
e integrales de línea, 938-939
fórmula diferencial de, 334-335
longitud de una curva, $y = f(x)$, 331-333
de curvas, 331-333, 651-654
de un vector (magnitud), 698, 699-700
de una curva
definida paramétricamente, 651-654
en coordenadas polares, 669-670
del paso, 483

M

Maclaurin, Colin, 615
Magnitud de un vector (longitud), 698, 699-700
Marco(s)
coordenado por la izquierda, 692
de Frenet
definición del, 767
fórmulas de cálculo, 769
torsión en, 768-769
TNB, 767
Marginales, 131-133
Masa. *Vea también* Centro de masa
a lo largo de una recta, 351-352
de alambres o varillas delgadas, 941-942
de carcasas delgadas, 998-1000
de la ecuación de energía, 174
distribuida en una región plana, 352-353
fórmulas de, 353, 355-356, 904, 942
momentos de, 353
por la integral de línea, 942
y cálculos de momento
integrales de línea y, 941-942
integrales múltiples y, 904, 907
Máximo
absoluto (global), 185-190, 840-842
global (absoluto), 185-190, 840-842
local (relativo), 187-188, 836, 842
restringido, 845-848
Media
aritmética, 199, 392, 854
geométrica, 199, 392, 854
Mendel, Gregor Johann, 133
Método(s)
de discos, 316-318
de integración de Heaviside, 473
de las arandelas, 319-320, 329
de los casquillos, 326-329
de Newton
aplicación del, 228-230
convergencia de aproximaciones, 230
procedimiento del, 228
-Raphson, 227-230
Mínimo
absoluto (global), 185-190, 840-842
global (absoluto), 185-190, 840-842
local (relativo), 187-188, 836, 842
restringido, 845-848
Momento(s)
centros de masa y, 351-360, 903-908, 942, 998
de alambres o varillas delgadas, 941-942
de carcasas delgadas, 998-1000
de inercia, 905-908, 998
de sólidos y placas, 907
de un sistema respecto al origen, 352
primer, 903-905, 998
segundo, 905-908
y cálculo de masa, integrales de línea y, 941-942
Movimiento
a lo largo
de una curva en el espacio, 741-743, 767
de una recta, 128-131
antiderivadas y, 235-237
armónico simple, 139-140
de proyectiles, ecuaciones vectoriales y paramétricas de, 749-751
dirección del, 743
en coordenadas polares y cilíndricas, 772-773
funciones vectoriales y, 739, 741-743
planetario
en un plano, 773-774
primera ley de Kepler (ley de la elipse) del, 774
segunda ley de Kepler (ley de las áreas iguales) del, 774-775
tercera ley de Kepler (ley del tiempo-distancia) de, 775
Multiplicación
de funciones, 14
de números complejos, AP-31
de series de potencias, 609-610
escalar de vectores, 699-700
Multiplicador (de Lagrange), 841, 845-852
con dos restricciones, 851-852
derivadas parciales y, 845-852
método de, 848-851
resolución de problemas con valor extremo, 841

N

Nabla de *f*, 821
Napier, John, 377
n-ésima suma parcial, 572-573
Newton, Sir Isaac, 278, AP-25
Norma de partición, 264, 871, 911
Notación(es)
de Leibniz, 112, 146, 165, 168, 267, 652
factorial, 567
para derivadas, 111-112, 799-800
sigma, 259-265
Número(s)
complejos
definición de, AP-26
desarrollo de, AP-26-AP-30
división de, AP-31-32
fórmula de Euler y, AP-30-AP-31
multiplicación de, AP-31
operaciones con, AP-31-AP-33
parte imaginaria de, AP-26
parte real de, AP-26
potencias de, AP-32
raíces de, AP-32-AP-33
teorema fundamental del álgebra y, AP-34
de Fibonacci, 567
irracionales
como exponentes, 386
definición de, AP-2
naturales, AP-2
racionales, AP-2, AP-26
reales
construcción de los, AP-25-AP-26
desarrollo de, AP-26-AP-27

propiedades de los, AP-1-AP-23
recta de los, AP-1
teoría de los, AP-23-AP-26
trascendentes, 385

O

Obtención de la raíz, 81-82
Octantes, 692
Operaciones algebraicas, con vectores, 699-701
Óptica
ley de Snell de, 219
principio de Fermat en, 218
Optimización aplicada
del área del rectángulo, 217-218
ejemplos
de economía, 219-221
de matemáticas y física, 217-219
resolución de problemas, 215-217
uso del material mínimo, 216-217
volumen de una lata, 216-217
Oresme, Nicole, 562
Origen
del sistema de coordenadas, AP-10
en coordenadas polares, 659
momento de un sistema con respecto al, 352

P

Par de coordenadas, AP-10
polares, 659
Parábola(s)
aproximaciones mediante, 484-486
como gráficas de ecuaciones, AP-15-AP-16
definición de, 671
directriz de, 671, 673, 683
ejes de, 672, AP-15
excentricidad de, 681
foco de, 671, 673
longitud focal de, 672
parametrización de, 642-643
semicúbicas, 156
vértice de, 672, AP-15
Paraboloides
definición de, 729
elípticos, 731
hiperbólicos, 730, 731
volumen de regiones acotadas por, 897-898
Paralelogramo
área de, 715
ley de la suma, 699-700, 707
Parametrización
área superficial y, 982-986
de curvas, 641-646, 739
de superficies, 980-986
de un cilindro, 982
de un cono, 981
de una esfera, 981
de una recta, 720-721
Parámetro(s), 641, 981
de la longitud de arco, 757
dominio del, 641, 981
intervalo del, 641-642
Partes, integración por, 449-455
Particiones
definición de, 870-871
k-ésimo subintervalo de, 263
norma de, 264, 871
para sumas de Riemann, 264-265
Pascal, Blaise, 573
Pendiente(s)
de curvas, 43-45
con coordenadas polares, 664-665
parametrizadas, 643-644
de una recta no vertical, AP-11
de una secante, 44
recta tangente y, 105-106
Periodicidad, de funciones trigonométricas, 24
Periodo
de un péndulo, 150, 184
orbital, 774
Pi (π)
sucesión recursiva de, 571
suma de series y, 586, 611, 630
Pirámide, volumen de, 314-315
Placa(s)
acotadas por dos curvas, 356-357
bidimensional, 904-907
delgada y plana, centro de masa de, 353-356
Plano(s)
ángulos entre, 726
coordenadas cartesianas en, AP-10
de coordenadas
definición de, 692
primeros momentos respecto a, 942, 988
de rectificación, 769
derivadas direccionales en, 818-820
distancia y circunferencias en, AP-13-AP-15
ecuación de, 723
en el espacio, 720-726
integrales de línea en, 942-943
movimiento de planetas en, 773-774
normal(es), 769
osculador(es), 769
paralelos, 724
partición por, 314-315
rectas de intersección, 724
rectas de intersección en, 724-725
tangente(s)
a una superficie, 827, 828, 982
horizontal(es), 836-837
y rectas normales, 827-829
teorema de Green en, 968-978
xy, definición de, 692
xz, definición de, 692
yz, 692
Poisson, Siméon-Denis, 836
Polinomio(s)
coeficientes de, 8-9
cuadrático irreducible, 469
de Taylor, 616-618, 623, 624
derivada de, 121
grado de, 9
límites de, 52
Posición en el tiempo, de una partícula en el espacio, 739
Potenciales, de campos conservativos, 962-965
Potencias
de números complejos, AP-32
de senos y cosenos, productos de, 458-459
indeterminadas, 406-407
series binomiales de, 627-628
Preimagen, 922
Presión en un fluido, 345-347
Primera ley de Kepler (ley de la elipse), 774
Primeros momentos
masas y, 903-905
respecto a los ejes de coordenadas, 904
respecto a los planos coordenados, 904, 998
Principio
de Cavalieri, 315
de Fermat en óptica, 218
Probabilidad
de una variable aleatoria continua, 505
desviación estándar, 510
media, 508
mediana, 509
varianza, 515
distribución(es)
decrecientes exponencialmente, 506, 509
normales, 511
uniformes, 511
función densidad, 505
Problemas con valor inicial
definición de, 235
ecuaciones diferenciales y, 235
separables, 395
Productos
caja, 717-718
cruz
con determinantes, 715-717
de dos vectores en el espacio, 714-715
demostración de la ley distributiva para, AP-35-AP-36
propiedades de, 714-715
regla de la mano derecha para, 714
de números complejos, AP-31
de potencias de senos y cosenos, 458-459
de senos y cosenos, 461-462

escalares triples (producto caja), 717-718
punto
ángulo entre vectores, 706-708
definición de, 707
derivadas direccionales como, 821
propiedades del, 709-711
vectores ortogonales y, 708-709
y cocientes, derivadas de, 122-124
Propiedad
de completitud de los números reales, AP-24
del valor intermedio, 81
Proyección, de vectores, 709-711
Pruebas (criterios)
de comparación de límites (o asintótica), 498, 499, 589-591
de comparación directa, 498
de continuidad, 77
de la derivada, para valores extremos locales, 187-188, 836-840
de la primera derivada, 200-202, 837, 846
de la recta vertical, 4-5
de la segunda derivada
deducción de, función de dos variables, 854-856
para concavidad, 205
para extremos locales, 207-211
resumen de, 842
de las dos trayectorias para inexistencia de límites, 794
de simetría, para gráficas en coordenadas polares, 663
límites de integración, obtención de 889, 890, 917
para máx-mín, 200-202, 207, 837, 838, 842
p-serie, 583-584
Punto(s)
crítico, 189, 209, 837, 842
de discontinuidad, definición de, 76
de inflexión, 189, 205-207
en un sistema cartesiano tridimensional, distancia a un plano, 725-726
final
de una curva, 641
de un vector, 697
frontera, 785
de regiones en el espacio, 785
de regiones en el plano, 783
obtención de valores máximo y mínimo absolutos, 840
inicial
de un vector, 697
de una curva, 641
interior(es), 785
continuidad en, 76
de regiones en el espacio, 785
de regiones en el plano, 783
obtención de los valores del máximo y mínimo absoluto, 840
medio de un segmento recto en el espacio, obtención con vectores, 702
silla, 730, 837-838, 842

R

Radiactividad, 397-399
Radián(es), 21-22, 23
como medida y las derivadas, 148
Radio
de circunferencia, AP-14
de convergencia, 609
de series con potencias, 608-609
de curvatura, de curvas planas, 763-764
unidades de, 21
Raíces
cuadradas, eliminación de, en integrales, 460
de números complejos, AP-32-AP-33
obtención por el método de Newton, 228-230
serie binomial de, 627-628
teorema del valor intermedio y, 81-82
Ramificación de los vasos sanguíneos, 442
Rango
de una función, 1-3, 781, 782
en movimiento de proyectiles, 751
Rapidez
a lo largo de una curva suave, 758
de una partícula en el espacio, 743
definición de, 128
ecuaciones de razones relacionadas, 159-161
en intervalos cortos de tiempo, 42
instantánea, 41-43
promedio, 41-43
cuerpos en movimiento y, 41-43
definición de, 41
en pequeños intervalos de tiempo, 42
Rayo inicial en coordenadas polares, 659
Razón(es)
de cambio, 41-46
de crecimiento, de funciones, 394, 433-435
de decaimiento radiactivo, 397
de flujo de fluidos, 972
en series geométricas, 574
instantáneas de cambio
derivadas como, 127-133
rectas tangentes y, 45-46
instantáneas, la derivada como, 45-46
integral de, 283-284
promedio, 43
cambio, 43, 45
relacionadas, 156-161
Rectángulos
área
aproximada de, 249-251
optimizada de, inscritos en una circunferencia, 217-218
definición de sumas de Riemann, 264-265
integrales dobles en, 870-874
Rectas
de intersección, en planos, 724-725
ecuación(es)
directa de, 720
paramétricas de, 720-721
polar de, 684
vectoriales de, 720-722
masas a lo largo de, 351-352
movimiento a lo largo de, 128-131
normales, 154, 827
oblicuas, 735
paralelas, 724, AP-13
perpendiculares, AP-13
secantes, 43
tangentes, 45-46, 105
a una curva, 105
de aproximación, 166-830
razones instantáneas de cambio y, 45-46
trabajo realizado por una fuerza variable a lo largo de, 342-343
verticales, fórmula del casquillo para revolución con respecto a, 327
y planos, en el espacio, 720-726
Reflexión de una gráfica, 16-18
Refracción, ley de, 219
Región(es)
abiertas, 783, 785, 1012-1013
acotadas, 783
áreas de, en el plano, 884-886
definición de, 783
máximos y mínimos absolutos en, 840-842
cerradas, 783, 785
conexas, 959
simples, 959
en el espacio
punto interior, 785
volumen de, 895
en forma de ventilador en coordenadas polares, área de, 668
especiales
teorema de divergencia de, 1019-1020
teorema de Green para, 977-978
generales, integrales dobles en, 875-881
no acotadas, 783
planas
masas distribuidas en, 351-353
punto interior, 783
sólidas, volumen de, 876-879
Regla(s)
algebraicas
para gradientes, 824
para logaritmos naturales, 377
para sumas finitas, 261
de aditividad, para integrales definidas, 270

de cociente de límites, demostración de, AP-20-AP-21
de diferenciación, 118-124
de dominación para integrales definidas, 270
de L'Hôpital
  demostración de, 408-409
  formas indeterminadas y, 403-409
  obtención de límites de sucesiones mediante la, 405-406
de la cadena
  de curvas parametrizadas diferenciables, 649
  deducción del criterio de la segunda derivada y, 855
  demostración de, 145-146, 172
  derivadas de funciones compuestas, 144-146
  derivadas de funciones exponenciales, 384
  derivadas de funciones trigonométricas inversas, 416
  derivadas de funciones inversas, 370
  derivadas direccionales y, 821
  ecuaciones de razones relacionadas, 157
  función curvatura y, 762
  movimiento en coordenadas polares y, 773
  para derivadas parciales, 809-816
  para diferenciación implícita, 814, 986
  para dos variables independientes y tres variables intermedias, 812-813
  para funciones de dos variables, 809-811
  para funciones de tres variables, 812-813
  para funciones hiperbólicas inversas, 429
  para funciones vectoriales, 744-745
  para potencias, 147, 152
  para potencias en una función, 146-148
  para trayectorias, 825
  regla de "afuera hacia dentro" y, 146
  regla de sustitución y, 289-294
  uso repetido de, 146
de la derivada para inversas, 370
de la desigualdad máx-mín para integrales definidas, 270, 278-279
de la diferencia
  de series geométricas, 577
  para antiderivadas, 234, 238
  para combinación de series, 577
  para derivadas, 120-121
  para derivadas de funciones constantes, 118
  para derivadas de orden superior, 124
  para enteros positivos, 118-119
  para funciones vectoriales, 744
  para gradientes, 824
  para integrales, 270
  para límites, 51
  para límites de funciones con dos variables, 791
  para límites de sucesiones, 564
  para productos y cocientes, 121
  para sumas finitas, 261
de la raíz
  para límites, 51
  para límites de funciones de dos variables, 791
de la suma
  de funciones de dos variables, 791
  de series geométricas, 577
  de sucesiones, 564
  para antiderivadas, 234, 238
  para combinación de series, 577
  para derivadas, 120-121, AP-8-AP-9
  para funciones vectoriales, 744
  para gradientes, 824
  para integrales definidas, 270
  para límites, 51, 64
  para sumas finitas, 261
de Leibniz, 312
  para la derivada de una integral, 312
  para productos, 184
de linealidad para antiderivadas, 234
de orden de integración, 270
de potencia
  de logaritmos naturales, 377, 389
  demostración de, 386-387
  para derivadas, versión general de, 119
  para enteros positivos, 118-119
  para límites, 51, 791
de producto de límites, demostración de, AP-19-AP-20
de Simpson
  aproximaciones mediante la, 484-486, 486-489
  análisis de error y, 486-489
de sustitución
  definición de, 291
  en integrales definidas, 296-299
  evaluación de integrales indefinidas con, 289-294
del cociente
  para derivadas, 123-124, 141, 600
  para el gradiente, 824
  para límites, 51, 791, AP-20-AP-21
  para logaritmos naturales, 377, 389
  para sucesiones, 564
del intervalo de ancho cero, 270, 375
del múltiplo constante
  para antiderivadas, 235, 238
  para combinación de series, 577
  para derivadas, 119-120
  para gradientes, 824
  para integrales, 270, 880
  para límites, 51, 564, 791
  para sumas finitas, 261
  del negativo, para antiderivadas, 234
  del producto
    cruz para derivadas de funciones vectoriales, 744-745
    en forma integral, integración por partes, 449-453
    para derivadas, 122
    para el gradiente, 824
    para límites, 51, 91, 122-123
    para logaritmos naturales, 377, 389
    para series de potencias, 609-610
    para sucesiones, 564
    punto para funciones vectoriales, 744
  del punto medio, 251-252
  del recíproco para logaritmos naturales, 377, 389
  del trapecio
    análisis de error y, 486-489
    aproximaciones mediante, 483-484, 486-489
  del valor constante para sumas finitas, 261
  función constante, 744
  general de potencia para derivadas, 119, 386-387
Relación de proporcionalidad, 7
Reloj de péndulo, 645
Renumeración de series infinitas, 578-579
Representación
  de una función, serie de potencias, 604-612
  numérica de funciones, 4
Residuo
  de orden *n*, definición para la fórmula de Taylor, 620
  en la prueba de integrales, 585-586
  estimación del, en el teorema de Taylor, 620, 621-622
Resorte(s)
  ley de Hook para, 343-344
  masa de un, 941-942
  trabajo de estiramiento en, 344
Resta, de vectores, 700
Revolución(es)
  áreas de superficies de, 337-340, 656-657
  con respecto al eje *y*, 339-340
  elipsoide de, 730
  fórmula del casquillo para, 327
  sólidos de
    método de discos, 316-318
    método de arandelas, 319-320
  superficie de, 337
Riemann, Georg Friedrich Bernhard, 263
Rolle, Michel, 193

Rotación
método de discos, 316-318
uniforme, 973
Rotacional, componente **k** del, 968-971
Rueda de paletas, 1008-1011

S

Sacudida, 129, 130
Sec *x*
derivadas de, 140
integrales de, 460-461
inversa de, 414-415, 417
Secante, función trigonométrica, 22
Secciones transversales
horizontales, límites de integración y, 879-880
verticales, límites de integración y, 879
volúmenes que utilizan, 313-312
Segmentos de recta
dirigidos, 697
en el espacio, 720-726
punto medio de, obtención con vectores del, 702
Segunda ley de Kepler (ley de las áreas iguales), 774-775
Segundo momento, 905-908
Seno(s)
definición ampliada de, 22
integrales de productos, 461-462
de potencias de, 458-459
valores de, 23
Serie(s)
absolutamente convergentes, 592-593
agregar o eliminar términos de, 578
alternantes, 598-602
armónicas, 598-600
definición de, 598-599
armónicas, 582, 598-600
alternantes, 598-600
definición de, 582
binomiales, 626-628
combinación de, 577-578
convergencia de, pruebas de comparación para, 588-591
convergentes, 573
convergentes condicionadas, 601
criterios (pruebas)
de convergencia absoluta, 593
de alternancia, 598-601
de condensación de Cauchy, 587
de comparación, 588
de convergencia, 588-591
de la integral, 581-586
de comparación de límites, 589-591
de Raabe, 638
de la raíz, 595-597
de la razón, 594-595
resumen de, 602
de Maclaurin, 615-616, 617
de potencias, 604-612
convergencia de, 605-609
diferenciación término a término de, 610
integración término a término de, 611-612
multiplicación de, 609-610
operaciones en, 609-612
recíprocas, 605
de Taylor, 615-616, 619-625
aplicación de, 622-623, 628-632
convergencia de, 619-625
definición de, 615-616
usadas con frecuencia, 632
divergentes, 573, 576-577
estimación de error, 584-586
geométricas, 574-576
convergencia de, 574
definición de, 574-576
infinitas, 572-579
p, 583-584
renumeración de términos, 578-579
reordenamiento de términos de, 601-602
representaciones, de funciones de potencias, 604-612
suma (de), 572-573
parcial de, 572-573
Signo de integrales, 237
Simpson, Thomas, 485
Sistema(s)
algebraicos por computadora
comando "integrate", 579
integración con, 479-480
para evaluación de integrales impropias, 497-498
tablas de integrales y, 477-478
de coordenadas
cartesianas, 692-695
regla de la mano derecha, 692
regla de la mano izquierda, 692
tridimensionales, 692-695, 912-918
de torque, sistemas de masas, 351-352
Snell van Royen, Willebrord, 218
Software
graficación con, 29-34
matemático. *Vea* Sistemas algebraicos por computadora
Sólido(s)
cilíndrico, volumen de, 313-315
de revolución
por el método de arandelas, 319-320
por el método de discos, 316-318
principio de Cavalieri para, 315
sección transversal de, 313
tridimensional(es), masas y momentos, 904-907
volumen de
cálculo de, 314
por el método de arandelas, 319-320
por el método de discos, 316-318
por el método de rebanadas, 313-320
por integrales dobles, 871-872, 876-879
por integrales triples, 894, 895
Solución(es)
de ecuaciones diferenciales, 394
general de una ecuación diferencial, 235, 394
particular, 235
de una ecuación diferencial, 235
St. Vincent, Gregory, 654
Sucesiones
acotadas, 567-569
cálculo de, 564-565
convergencia de, 561-563
de sumas parciales, 573
no decrecientes, 568
definidas recursivamente, 567
divergencia de, 561-563
en el infinito, 563
negativo, 563
índice de, 561
infinitas, 560-569
límites de, 562, 564-565
por el teorema de la función continua, 565
por el teorema del sándwich, 564
por la regla de L'Hôpital, 565-566
monótonas, 567-569
no acotadas, 567
no decrecientes, 568
teorema del *zipper* en, 571
Suma(s)
de funciones, 14-15
de Riemann
área total de un rectángulo, 284
convergencia de, 267
división por cilindros, 325
formación de, 267
integrales de línea y, 938
límites de, 266-268
para integrales, 353, 911, 916, 991
repaso del concepto, 263-265
trabajo y, 343
volumen usando casquillos cilíndricos, 327
volumen usando secciones transversales, 314
de vectores, 699-700
finitas, 601
estimación con, 249-257
integrales
límites de, 262-263
notación sigma y, 259-262
reglas algebraicas de, 261
inferiores, 251
límites de, 262-263
parciales
de series *n*-ésimas, 572-573
no decrecientes, 573, 581-582
sucesión(es) de, 573

superiores, 250
y restas de integrales dobles, 880
Superficie(s)
área y, 656-657, 980-988
bilateral, 995
con orificios, 1012
cuadráticas, 729-731
de funciones de dos variables, 784
de nivel, 784
de funciones de tres variables, 784
de revolución, 337
de un cilindro, 337
definidas implícitamente, 986
funciones definidas en, 812-814
implícitas, 986-988
orientables, 995
parametrización de, 980-986
plano tangente a, 827-829
poliédricas, 1011
suaves, 982-983, 986
por tramos, 992, 1003
Sustitución
área entre curvas y, 299-302
en integrales
dobles, 889, 922-927
indefinidas y, 289-294
múltiples, 922-930
triples, 911, 915, 927-930
trigonométrica, 463-466

T

Tablas de integrales, 445, 477-478
Tamaño de la red, 483
Tan x
derivada de, 140
integral de, 460-461
inversa de, 414-416
Tangente(s)
a curvas de nivel, 823-824
a la gráfica de una función, 105-106
a una curva, 41-46, 758, 823-824
de curvas en el espacio, 739-745
definición ampliada de, 22
en un punto, 105-107
pendiente de, 43
valores de, 23
vertical, 114
y normales, 154
Tautocronas, 645-646
Taylor, Brook, 615
Temas de ecuaciones diferenciales de primer orden
aplicaciones de, 538-543
caída de un cuerpo, con resistencia del aire, 548
campos de dirección (campos de pendientes), 526
capacidad de sustentación, 549
ciclo límite, 554
circuitos *RL*, 536
crecimiento logístico de población, 549
curva(s)
de forma sigmoidea, 550
solución, 526
ecuación(es)
diferencial de Bernoulli, 538
diferenciales autónomas, 545, 552
lineales de primer orden, 532
equilibrios, 545, 552
factor de integración, 533
forma estándar de las ecuaciones lineales, 532
ley
de Newton sobre el enfriamiento, 547
del cambio exponencial, 539, 549
líneas y planos de fase, 545, 552
método
de Euler, 527
numérico y solución, 527
modelo
competencia-depredador, 552-554
de crecimiento exponencial de una población, 539
movimiento con resistencia proporcional a la velocidad, 538
población límite, 549
problemas
con valor inicial, 525
de mezclas, 541
puntos de reposo, 552
resistencia proporcional a la velocidad, 538
segunda ley de Newton del movimiento, 548
sistemas de ecuaciones diferenciales, 551
solución(es)
de ecuaciones de primer orden, 534
gráficas de ecuaciones diferenciales autónomas, 544-547
trayectorias ortogonales, 540
valor(es)
de equilibrio, 545, 547, 552
de estado estable, 536
velocidad límite, 549
Teorema(s)
de Clairaut, 804
de convergencia para series de potencias, 607
de De Moivre, AP-32
de divergencia
enunciado del, 1016-1018
para otras regiones, 1021-1022
para regiones especiales, 1019-1020
de estimación del residuo, 621, 623
de evaluación, 281-283
teorema fundamental, parte 2, 281-283
de Fubini, 873, 877-879
para integrales dobles, 872-874, 877-879, 889, 895
de Green, 974
área por, 979
comparación con el teorema de la divergencia, 1015, 1024
comparación con el teorema de Stokes, 1003, 1024
demostración de, para regiones especiales, 977-978
divergencia o forma normal de, 974, 1015, 1024
en el plano, 968-978
formas del, 973-975
generalización en tres dimensiones, 1024
para evaluar integrales de línea, 854-976
rotacional de circulación, o forma tangencial, 974, 976-854, 1004, 1024
y el teorema del cambio neto, 974
de integrales, para campos vectoriales, 1024-1025
de la convergencia para series de potencias, 607
de la derivada mixta, 804, AP-36
de la diferenciabilidad que implica continuidad, 114, 806
de la diferenciación término a término, 610
de la divergencia, 1016-1018
de la estimación
de series alternantes, 600, 623
del residuo, 621, 623
para series alternantes, 600, 623
de la exactitud de formas diferenciables, 965
de la fórmula de diferenciación implícita, 814
de la función
continua para sucesiones, 565
implícita, 815, 986
de la integrabilidad de funciones continuas, 268
de la integración término a término, 611-612
de la multiplicación de series de potencias, 609
de la primera derivada para valores de extremos locales, 188-189, 200-202
de la propiedad de los lazos en campos conservativos, 961
de la prueba
de la primera derivada para valores extremos locales, 188-189, 837
de la segunda derivada para extremos locales, 207, 838
de la regla
de L'Hôpital, 403, 565-566
de la cadena, 145, 809-812
de la derivada para inversas, 370
de sustitución, 29

de la sucesión no decreciente, 568
de la sustitución en integrales definidas, 296
de las derivadas mixtas, AP-36, 804
de las leyes
de exponentes para e^x, 385
de los límites, 51, 87
de las propiedades
algebraicas de logaritmo natural, 377
de funciones continuas, 78
de límites de funciones con dos variables, 791
de las sucesiones monótonas, 568-569, 581
de límites, demostraciones de, AP-19-AP-21
de los campos conservativos y campos gradiente, 960
de Pappus, 358-360
de Pitágoras, 24, 26, AP-13, AP-27
de reordenamiento para series absolutamente convergentes, 601
de Rolle, 193-194
de Stokes, 1004
campos conservativos y, 962, 1012-1013
comparación con el teorema de Green, 1002, 1003, 1004, 1024, 1025
integración en campos vectoriales, 1002-1013
para superficies con orificios, 1012
para superficies poliédricas, 1011
integral de superficie en, 1005
de Taylor, 619, 624-625
definición de, 619
demostración de, 624-625
del ángulo entre dos vectores, 706
del cambio neto, 283
enunciado del, 283
teorema de Green y, 974
del criterio
de comparación, 588-591
de convergencia absoluta, 593
de la integral, 582
de la raíz, 596
de la razón, 594
del eje paralelo, 910
del gradiente ortogonal, 848
para extremos restringidos, 848
del incremento para funciones de dos variables, 806, AP-38-AP-40
del límite, demostración del, AP-19-AP-21
del número *e* como límite, 387
del reordenamiento de series convergentes absolutas, 601
del rotacional de $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ relacionado con la propiedad del lazo cerrado, 1012, 1013
del sándwich, AP-21, 54-55, 71, 90, 564
demostración de, AP-21
enunciado del, 54-55
límites en el infinito, 90
límites que involucran $(\text{sen } \theta)/\theta$, 71
para sucesiones, 564
del valor
extremo, 186-187, 795, AP-24
intermedio, 81-82, 199, 219, 375, AP-24
medio, 194-195, 196-197, 199-200, 202, 377
fundamental, 278-286
de las integrales de línea, 959
del álgebra, AP-34
del cálculo, 278-286, 376, 444, 655, 939, 958, 1024-1025
Teoría
electromagnética (ley de Gauss), 1022
unificada, 1024-1025
Tercera ley de Kepler (ley de tiempo-distancia), 775
Término(s)
de error, en la fórmula de Taylor, 620
de una serie, 573
de una sucesión, 561
dominantes, 95-96
Tiempo de vuelo, 751
Toro, 989-990
área superficial de, 360
volumen de, 359
Torque, 351-352, 717
Torsión, 768-769, 771
TOSE TACO, regla, 23
Trabajo
bombeo de líquidos desde contenedores, 344-345
de una fuerza
a través de un recorrido, 711
constante, 342
en una curva en el espacio, 950-952
variable a lo largo de una curva, 950
variable a lo largo de una recta, 342-343
energía cinética y, 349
ley de Hooke para resortes, 343-344
realizado por el corazón, 175-176
Transferencia de calor, 399-400
Transformaciones
de gráficas trigonométricas, 26-27
jacobiano de, 925, 926
lineales, 923-924
Trapecio, área de, 273
Trayectoria
circular, 953
de una partícula, 739
Trazado de gráficas por computadora
de funciones, 29-34
de dos variables, 786
Tríadas de Pitágoras, 571
Trompeta de Gabriel, 502

U

Unidades del SI, 342
Unión de conjuntos, AP-2

V

Valor(es)
absoluto, AP-4-AP-6, AP-30
definición de, AP-4-AP-6, AP-30
propiedades del, AP-5
de una función, 2-3, 899-900
de una integral impropia, 492-493, 496
en los extremos de una función, 76, 189
esperado, media, 508
extremos, 185-190, 836-842
de funciones, 185-190, 836-840
en los extremos, 187-188
locales (relativos), 187-189, 836, 838
restringidos, y multiplicadores de Lagrange, 848
máximo local, 187-188, 836
mínimo local, 187-188, 836
promedio, 273-274
de funciones continuas, 255-256, 273-274
de funciones multivariables, 886-887, 899-900
Variable(s)
aleatoria, 504
de entrada, 781
de una función, 1, 781
de espesor, 327
de integración, 237, 268
de salida, 781
de una función, 781
del espesor, 327-328
dependiente, 1
de una función, 1, 781
funciones de dos, 782-783, 786, 806
derivadas parciales de, 798-800
fórmula de Taylor para, 854-858
independientes y tres intermedias, 812-813
límites para, 789-793
linealización de, 830-831, 832
regla de la cadena para, 809-811
funciones de tres, 784-786, 811-812, 824-825
funciones de varias, 781-786, 795, 802-803, 816
independiente, 1, 810, 811-812
de una función, 1, 781
intermedia, 811
muda, 268
en las integrales, 268
proporcional, 7
Varianza, 510
Vector(es)
ángulos entre, 706-708
aplicaciones de, 703-704

bidimensionales, 698, 708
forma de componentes de, 698
binormal(es), 771
de una curva, 767
unitario, 767
cero, 698
componente
i de, 701
j de, 701
k de, 701
coplanares, 701
de aceleración, 743, 767
de posición, 697
estándar, para un punto, 697-698
de velocidad, 697, 743
definición de, 697
dirección de, 701
en física e ingeniería, 703-704
en forma de componentes, 697-699
en la navegación, 703
en un campo gravitacional, 946
forma de componentes de, 697-699
geometría en el espacio y, 692-738
gradiente, 821
definición de, 821
derivadas direccionales y, 818-825
para curvas de nivel, 823-824
reglas algebraicas de, 824
rotacional de, 1012
igualdad de, 697
longitud (magnitud) de, 698, 699-700
multiplicación escalar de, 699-700
normal(es), 764-765
de una curva, 764-765
unitario(s), 762, 764, 771
notación de, 697
operaciones algebraicas con, 699-701
ortogonales, 708-709
paralelos, 714
perpendiculares (ortogonales), 708-709,
producto
escalar triple de, 717-718
punto, definición de, 706
producto cruz
como área de un paralelogramo, 715
como determinante, 715-717
de dos vectores en el espacio, 714-715
definición de, 714
en forma de componentes, 715-717
regla de la mano derecha para, 714
proyección de, 709-711
punto
final de, 697
inicial de, 697
medio de segmentos de recta, 702
resta (diferencia) de, 700
resultante, 699-700
rotacional, 1002-1003
suma de, 699-700, 707
tangente(s), 742
a una curva, 742
unitarios, 758-759
torque, 717
tridimensionales, 698
forma de componentes de, 698
unitarios
definición de, 701-702
derivada en dirección del, 819
escritura de vectores en términos de, 701-702
estándar, 701
tangente, 758-759, 771
Velocidad
a lo largo de una curva en el espacio, 743
angular, de rotación, 1009
caída libre y, 130
definición de, 128
en coordenadas polares, 772-775
inicial en movimiento de proyectiles, 750
instantánea, 128
promedio, 128
y posición, a partir de la aceleración, 197
Ventana(s)
de visualización, 29-32
de graficación, 29-32
Vida media, 397-398
Volumen(es)
de un cilindro, 313
de un sólido con sección transversal conocida, 314
de una pirámide, 314-315
de una región
en el espacio, 895
sólida, 876-879
integrales
dobles como, 871-872
triples como, 895
por medio de
arandelas con rotación alrededor de un eje, 319
discos de rotación alrededor del eje x, 316
integrales iteradas, 876-879
rebanadas, 314-315
usando
casquillos cilíndricos, 324-329
secciones transversales, 313-320
Von Koch, Helga, 581

W

Weierstrass, Karl, 499

Y

y
coordenada, AP-10
integración con respecto a, 301-302
intersección con, AP-13
$y = f(x)$
graficación de, 209-211
longitud de, 331-333, 654-655

Créditos

Página ix, Art on File/Corbis; **página 1**, **foto de apertura del capítulo 1**, Hal Morey/Getty Images; **página 41**, **foto de apertura del capítulo 2**, Gui Jun Peng/Shutterstock; **página 105**, **foto de apertura del capítulo 3**, Yellowj/Shutterstock; **página 185**, **foto de apertura del capítulo 4**, Carlos Castilla/Shutterstock; **página 249**, **foto de apertura del capítulo 5**, Patrick Pleul/AFP/Getty Images; **página 313**, **foto de apertura del capítulo 6**, Pling/Shutterstock; **página 366**, **foto de apertura del capítulo 7**, Markus Gann/Shutterstock; **página 444**, **foto de apertura del capítulo 8**, Petr Petrovich/Shutterstock; **página 524**, **foto de apertura del capítulo 9**, Gustavo Ferrari/AP Images; **página 560**, **foto de apertura del capítulo 10**, Fotomak/Shutterstock; **página 641, foto de apertura del capítulo 11**, Kjpargeter/Shutterstock; **página 692**, **foto de apertura del capítulo 12**, Dudarev Mikhail/Shutterstock; **página 739**, **foto de apertura del capítulo 13**, Brian Cassey/EPA/Newscom; **página 781**, **foto de apertura del capítulo 14**, Alberto Loyo/Shutterstock; **página 870**, **foto de apertura del capítulo 15**, Viappy/Shutterstock; **página 938**, **foto de apertura del capítulo 16**, Szefei/Shutterstock; **página 945**, **figuras 16.6 y 16.7**, National Commitee for Fluid Mechanics, ILLUSTRATED EXPERIMENTS IN FLUID MECHANICS: THE NCFMF BOOK OF FILM NOTES, editado por Shapiro, reimpreso con permiso de Educational Development Center, Inc.; **página 947**, **figura 16.15**, Inter Network Media, Inc., cortesía de NASA/JPL; **página AP-1**, **foto de apertura del apéndice**, Hal Morey/Getty Images.

Breve tabla de integrales

Formas básicas

1. $\int k\,dx = kx + C$ (cualquier número k)

2. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int e^x\,dx = e^x + C$

5. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$

6. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$

8. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

9. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

10. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$

11. $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

12. $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$

13. $\int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$

14. $\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$

15. $\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$

16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{a} + C$

17. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} + C$

18. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\left|\dfrac{x}{a}\right| + C$

19. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\dfrac{x}{a} + C \quad (a > 0)$

20. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\dfrac{x}{a} + C \quad (x > a > 0)$

Formas que involucran $ax + b$

21. $\int (ax+b)^n\,dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad n \neq -1$

22. $\int x(ax+b)^n\,dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a^2}\left[\dfrac{ax+b}{n+2} - \dfrac{b}{n+1}\right] + C, \quad n \neq -1, -2$

23. $\int (ax+b)^{-1}\,dx = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

24. $\int x(ax+b)^{-1}\,dx = \dfrac{x}{a} - \dfrac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$

25. $\int x(ax+b)^{-2}\,dx = \dfrac{1}{a^2}\left[\ln|ax+b| + \dfrac{b}{ax+b}\right] + C$

26. $\int \dfrac{dx}{x(ax+b)} = \dfrac{1}{b}\ln\left|\dfrac{x}{ax+b}\right| + C$

27. $\int \left(\sqrt{ax+b}\right)^n dx = \dfrac{2}{a}\dfrac{\left(\sqrt{ax+b}\right)^{n+2}}{n+2} + C, \quad n \neq -2$

28. $\int \dfrac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

29. ***a)*** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}} \right| + C$ ***b)*** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{ax-b}} = \frac{2}{\sqrt{b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax-b}{b}} + C$

30. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$

Formas que involucran $a^2 + x^2$

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a} + C = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

35. $\displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

36. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{8}(a^2+2x^2)\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

37. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2+x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C$

38. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) - \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + C$

39. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = -\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + C$

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C$

41. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x} + C$

Formas que involucran $a^2 - x^2$

42. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

43. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

44. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C$

45. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C$

46. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{8}x\sqrt{a^2-x^2}\,(a^2-2x^2) + C$

47. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$

48. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C$

49. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C$

50. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$

51. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C$

Formas que involucran $x^2 - a^2$

52. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

53. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

54. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^n dx = \frac{x\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^n}{n + 1} - \frac{na^2}{n + 1}\int \left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^{n-2} dx, \quad n \neq -1$

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^n} = \frac{x\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^{2-n}}{(2 - n)a^2} - \frac{n - 3}{(n - 2)a^2}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^{n-2}}, \quad n \neq 2$

56. $\displaystyle\int x\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^n dx = \frac{\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^{n+2}}{n + 2} + C, \quad n \neq -2$

57. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{8}(2x^2 - a^2)\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$

58. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$

59. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + C$

60. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} + C$

61. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right| + C$

62. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2x} + C$

Formas trigonométricas

63. $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

64. $\displaystyle\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax + C$

65. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + C$

66. $\displaystyle\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + C$

67. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n ax\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} ax\cos ax}{na} + \frac{n - 1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} ax\, dx$

68. $\displaystyle\int \cos^n ax\, dx = \frac{\cos^{n-1} ax\operatorname{sen} ax}{na} + \frac{n - 1}{n}\int \cos^{n-2} ax\, dx$

69. ***a)*** $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax\cos bx\, dx = -\frac{\cos(a + b)x}{2(a + b)} - \frac{\cos(a - b)x}{2(a - b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax\operatorname{sen} bx\, dx = \frac{\operatorname{sen}(a - b)x}{2(a - b)} - \frac{\operatorname{sen}(a + b)x}{2(a + b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$

c) $\displaystyle\int \cos ax\cos bx\, dx = \frac{\operatorname{sen}(a - b)x}{2(a - b)} + \frac{\operatorname{sen}(a + b)x}{2(a + b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$

70. $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax\cos ax\, dx = -\frac{\cos 2ax}{4a} + C$

71. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n ax\cos ax\, dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} ax}{(n + 1)a} + C, \quad n \neq -1$

72. $\displaystyle\int \frac{\cos ax}{\operatorname{sen} ax} dx = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{sen} ax\right| + C$

73. $\displaystyle\int \cos^n ax\operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n + 1)a} + C, \quad n \neq -1$

74. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} ax}{\cos ax} dx = -\frac{1}{a}\ln\left|\cos ax\right| + C$

75. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n ax\cos^m ax\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} ax\cos^{m+1} ax}{a(m + n)} + \frac{n - 1}{m + n}\int \operatorname{sen}^{n-2} ax\cos^m ax\, dx, \quad n \neq -m$ (reduce $\operatorname{sen}^n ax$)

76. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n ax\cos^m ax\, dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} ax\cos^{m-1} ax}{a(m + n)} + \frac{m - 1}{m + n}\int \operatorname{sen}^n ax\cos^{m-2} ax\, dx, \quad m \neq -n$ (reduce $\cos^m ax$)

77. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c \operatorname{sen} ax} = \frac{-2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b - c}{b + c}} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)\right] + C, \quad b^2 > c^2$

78. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c \operatorname{sen} ax} = \frac{-1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln\left|\frac{c + b \operatorname{sen} ax + \sqrt{c^2 - b^2}\cos ax}{b + c \operatorname{sen} ax}\right| + C, \quad b^2 < c^2$

79. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} ax} = -\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + C$

80. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} ax} = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + C$

81. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c \cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b - c}{b + c}} \tan\frac{ax}{2}\right] + C, \quad b^2 > c^2$

82. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln\left|\frac{c + b \cos ax + \sqrt{c^2 - b^2}\operatorname{sen} ax}{b + c \cos ax}\right| + C, \quad b^2 < c^2$

83. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a}\tan\frac{ax}{2} + C$

84. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a}\cot\frac{ax}{2} + C$

85. $\displaystyle\int x \operatorname{sen} ax\, dx = \frac{1}{a^2}\operatorname{sen} ax - \frac{x}{a}\cos ax + C$

86. $\displaystyle\int x \cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\operatorname{sen} ax + C$

87. $\displaystyle\int x^n \operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\, dx$

88. $\displaystyle\int x^n \cos ax\, dx = \frac{x^n}{a}\operatorname{sen} ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\operatorname{sen} ax\, dx$

89. $\displaystyle\int \tan ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax| + C$

90. $\displaystyle\int \cot ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{sen} ax| + C$

91. $\displaystyle\int \tan^2 ax\, dx = \frac{1}{a}\tan ax - x + C$

92. $\displaystyle\int \cot^2 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cot ax - x + C$

93. $\displaystyle\int \tan^n ax\, dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

94. $\displaystyle\int \cot^n ax\, dx = -\frac{\cot^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \cot^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

95. $\displaystyle\int \sec ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax + \tan ax| + C$

96. $\displaystyle\int \csc ax\, dx = -\frac{1}{a}\ln|\csc ax + \cot ax| + C$

97. $\displaystyle\int \sec^2 ax\, dx = \frac{1}{a}\tan ax + C$

98. $\displaystyle\int \csc^2 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cot ax + C$

99. $\displaystyle\int \sec^n ax\, dx = \frac{\sec^{n-2} ax \tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

100. $\displaystyle\int \csc^n ax\, dx = -\frac{\csc^{n-2} ax \cot ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

101. $\displaystyle\int \sec^n ax \tan ax\, dx = \frac{\sec^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

102. $\displaystyle\int \csc^n ax \cot ax\, dx = -\frac{\csc^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

Formas trigonométricas inversas

103. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1} ax\, dx = x \operatorname{sen}^{-1} ax + \frac{1}{a}\sqrt{1 - a^2x^2} + C$

104. $\displaystyle\int \cos^{-1} ax\, dx = x \cos^{-1} ax - \frac{1}{a}\sqrt{1 - a^2x^2} + C$

105. $\displaystyle\int \tan^{-1} ax\, dx = x \tan^{-1} ax - \frac{1}{2a}\ln(1 + a^2x^2) + C$

106. $\displaystyle\int x^n \operatorname{sen}^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{sen}^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1 - a^2x^2}}, \quad n \neq -1$

107. $\displaystyle\int x^n \cos^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos^{-1} ax + \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1 - a^2x^2}}, \quad n \neq -1$

108. $\displaystyle\int x^n \tan^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\tan^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\, dx}{1 + a^2x^2}, \quad n \neq -1$

Formas exponenciales y logarítmicas

109. $\displaystyle\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax} + C$

110. $\displaystyle\int b^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,\frac{b^{ax}}{\ln b} + C, \quad b > 0, b \neq 1$

111. $\displaystyle\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}\,(ax - 1) + C$

112. $\displaystyle\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$

113. $\displaystyle\int x^n b^{ax}\,dx = \frac{x^n b^{ax}}{a \ln b} - \frac{n}{a \ln b}\int x^{n-1}b^{ax}\,dx, \quad b > 0, b \neq 1$

114. $\displaystyle\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\,(a \operatorname{sen} bx - b \cos bx) + C$

115. $\displaystyle\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\,(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx) + C$

116. $\displaystyle\int \ln ax\,dx = x \ln ax - x + C$

117. $\displaystyle\int x^n (\ln ax)^m\,dx = \frac{x^{n+1}(\ln ax)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int x^n (\ln ax)^{m-1}\,dx, \quad n \neq -1$

118. $\displaystyle\int x^{-1}(\ln ax)^m\,dx = \frac{(\ln ax)^{m+1}}{m+1} + C, \quad m \neq -1$

119. $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln ax} = \ln\left|\ln ax\right| + C$

Formas que involucran $\sqrt{2ax - x^2}$, $a > 0$

120. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - a}{a}\right) + C$

121. $\displaystyle\int \sqrt{2ax - x^2}\,dx = \frac{x - a}{2}\sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - a}{a}\right) + C$

122. $\displaystyle\int \left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^n dx = \frac{(x - a)\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^n}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int \left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^{n-2} dx$

123. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^n} = \frac{(x - a)\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^{2-n}}{(n-2)a^2} + \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^{n-2}}$

124. $\displaystyle\int x\sqrt{2ax - x^2}\,dx = \frac{(x + a)(2x - 3a)\sqrt{2ax - x^2}}{6} + \frac{a^3}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - a}{a}\right) + C$

125. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x}\,dx = \sqrt{2ax - x^2} + a \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - a}{a}\right) + C$

126. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^2}\,dx = -2\sqrt{\frac{2a - x}{x}} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - a}{a}\right) + C$

127. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = a \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - a}{a}\right) - \sqrt{2ax - x^2} + C$

128. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a - x}{x}} + C$

Formas hiperbólicas

129. $\displaystyle\int \operatorname{senh} ax\,dx = \frac{1}{a}\cosh ax + C$

130. $\displaystyle\int \cosh ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{senh} ax + C$

131. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{senh} 2ax}{4a} - \frac{x}{2} + C$

132. $\displaystyle\int \cosh^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{senh} 2ax}{4a} + \frac{x}{2} + C$

133. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{senh}^{n-1} ax \cosh ax}{na} - \frac{n-1}{n}\int \operatorname{senh}^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 0$

134. $\displaystyle\int \cosh^n ax\,dx = \frac{\cosh^{n-1} ax \operatorname{senh} ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 0$

135. $\displaystyle\int x \operatorname{senh} ax\,dx = \frac{x}{a}\cosh ax - \frac{1}{a^2}\operatorname{senh} ax + C$

136. $\displaystyle\int x \cosh ax\,dx = \frac{x}{a}\operatorname{senh} ax - \frac{1}{a^2}\cosh ax + C$

137. $\displaystyle\int x^n \operatorname{senh} ax\,dx = \frac{x^n}{a}\cosh ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cosh ax\,dx$

138. $\displaystyle\int x^n \cosh ax\,dx = \frac{x^n}{a}\operatorname{senh} ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\operatorname{senh} ax\,dx$

139. $\displaystyle\int \tanh ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\cosh ax) + C$

140. $\displaystyle\int \coth ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{senh} ax\right| + C$

141. $\displaystyle\int \tanh^2 ax\,dx = x - \frac{1}{a}\tanh ax + C$

142. $\displaystyle\int \coth^2 ax\,dx = x - \frac{1}{a}\coth ax + C$

143. $\displaystyle\int \tanh^n ax\,dx = -\frac{\tanh^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \tanh^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 1$

144. $\displaystyle\int \coth^n ax\,dx = -\frac{\coth^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \coth^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 1$

145. $\displaystyle\int \operatorname{sech} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen}^{-1}(\tanh ax) + C$

146. $\displaystyle\int \operatorname{csch} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\tanh\frac{ax}{2}\right| + C$

147. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\tanh ax + C$

148. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}\coth ax + C$

149. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} ax \tanh ax}{(n-1)a} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{sech}^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 1$

150. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{csch}^{n-2} ax \coth ax}{(n-1)a} - \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{csch}^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 1$

151. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^n ax \tanh ax\,dx = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

152. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^n ax \coth ax\,dx = -\frac{\operatorname{csch}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

153. $\displaystyle\int e^{ax} \operatorname{senh} bx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} - \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C, \quad a^2 \neq b^2$

154. $\displaystyle\int e^{ax} \cosh bx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} + \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C, \quad a^2 \neq b^2$

Algunas integrales definidas

155. $\displaystyle\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx = \Gamma(n) = (n-1)!, \quad n > 0$

156. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0$

157. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot n}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{si } n \text{ es un entero par} \geq 2 \\ \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \cdots \cdot n}, & \text{si } n \text{ es un entero impar} \geq 3 \end{cases}$

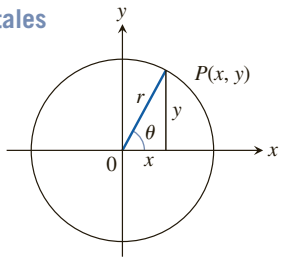
Fórmulas trigonométricas

Definiciones e identidades fundamentales

Seno: $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\csc\theta}$

Coseno: $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sec\theta}$

Tangente: $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{\cot\theta}$



Identidades

$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta,$

$\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$

$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen}A\cos B + \cos A\operatorname{sen}B$

$\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen}A\cos B - \cos A\operatorname{sen}B$

$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B$

$\cos(A - B) = \cos A\cos B + \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B$

$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$

$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$

$\operatorname{sen}\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos A, \qquad \cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}A$

$\operatorname{sen}\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \cos A, \qquad \cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}A$

$\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B = \frac{1}{2}\cos(A - B) - \frac{1}{2}\cos(A + B)$

$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\cos(A - B) + \frac{1}{2}\cos(A + B)$

$\operatorname{sen}A\cos B = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(A - B) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(A + B)$

$\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$

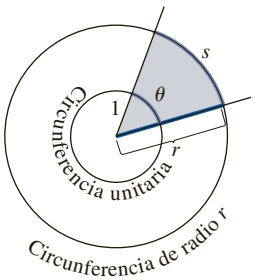
$\operatorname{sen}A - \operatorname{sen}B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A - B)$

$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$

$\cos A - \cos B = -2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A + B)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A - B)$

Funciones trigonométricas

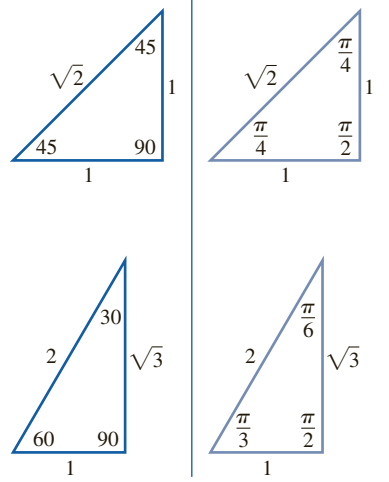
Radián como medida



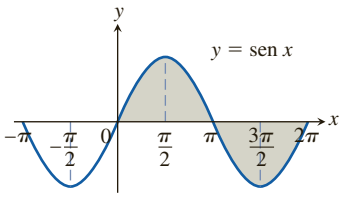
$\frac{s}{r} = \frac{\theta}{1} = \theta \quad \text{o} \quad \theta = \frac{s}{r},$

$180^\circ = \pi$ radianes.

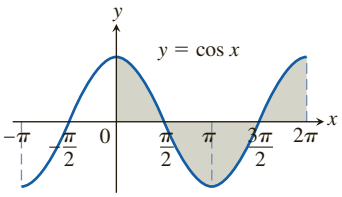
Grados	Radianes



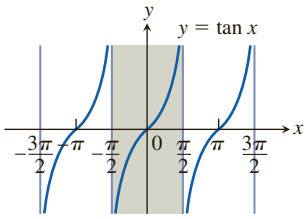
Ángulos de dos triángulos comunes, en grados y en radianes.



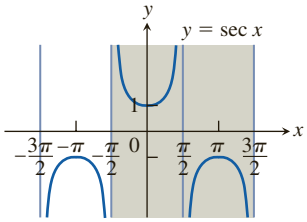
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $[-1, 1]$



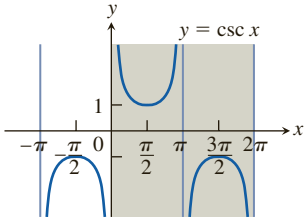
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $[-1, 1]$



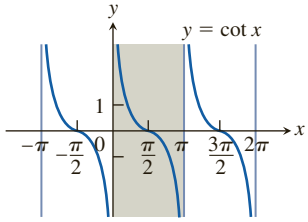
Dominio: Todos los números reales, excepto los múltiplos enteros impares $\pi/2$
Rango: $(-\infty, \infty)$



Dominio: Todos los números reales, excepto los múltiplos enteros impares $\pi/2$
Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Dominio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Dominio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Rango: $(-\infty, \infty)$

SERIES

Pruebas de convergencia para series infinitas

1. **La prueba del *n*-ésimo término:** A menos que $a_n \to 0$, la serie diverge.
2. **Serie geométrica:** $\sum ar^n$ converge si $|r| < 1$; de otra forma, diverge.
3. **Serie *p*:** $\sum 1/n^p$ converge si $p > 1$; de otra forma, diverge.
4. **Serie con términos no negativos:** Intente con el criterio de la integral, el criterio de la razón o el criterio de la raíz. Intente la comparación con una serie conocida mediante la prueba de la comparación o la prueba de comparación del límite.
5. **Serie con algunos términos negativos:** ¿La serie $\sum |a_n|$ converge? Si es así, entonces, también converge $\sum a_n$ ya que la convergencia absoluta implica convergencia.
6. **Serie alternante:** La serie $\sum a_n$ converge si la serie satisface las condiciones del criterio de la serie alternante.

Serie de Taylor

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \qquad -1 < x \le 1$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \tanh^{-1} x = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| < 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| \le 1$$

Serie binomial

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^k}{k!} + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, \qquad |x| < 1,$$

donde

$$\binom{m}{1} = m, \qquad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!}, \qquad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} \quad \text{para } k \ge 3.$$

FÓRMULAS DE OPERADORES VECTORIALES (FORMA CARTESIANA)

Fórmulas para gradiente, divergencia, rotacional y ecuación de Laplace

	Cartesianas (x, y, z) $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son vectores unitarios en las direcciones en que aumentan x, y y z. M, N y P son las componentes escalares de $\mathbf{F}(x, y, z)$ en estas direcciones.
Gradiente	$\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$
Divergencia	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \dfrac{\partial M}{\partial x} + \dfrac{\partial N}{\partial y} + \dfrac{\partial P}{\partial z}$
Rotacional	$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$
Ecuación de Laplace	$\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Productos escalares triples

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$$

Teorema fundamental de las integrales de línea

Parte 1 Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ un campo vectorial cuyas componentes son continuas en toda una región abierta y conexa D en el espacio. Entonces, existe una función diferenciable f tal que

$$\mathbf{F} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

si y sólo si, para todos los puntos A y B en D, el valor de $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria que une A y B en D.

Parte 2 Si la integral es independiente de la trayectoria que une A y B, su valor es

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A).$$

Teorema de Green y su generalización en tres dimensiones

Forma tangencial del teorema de Green:
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA$$

Teorema de Stokes:
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

Forma normal del teorema de Green:
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F}\, dA$$

Teorema de la divergencia:
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

Identidades vectoriales

En las siguientes identidades, f y g son funciones escalares diferenciables, $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son campos vectoriales diferenciables, y a y b son constantes reales.

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$$
$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla \cdot (g\mathbf{F}) = g\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla g \cdot \mathbf{F}$$
$$\nabla \times (g\mathbf{F}) = g\nabla \times \mathbf{F} + \nabla g \times \mathbf{F}$$

$$\nabla \cdot (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \cdot \mathbf{F}_1 + b\nabla \cdot \mathbf{F}_2$$
$$\nabla \times (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \times \mathbf{F}_1 + b\nabla \times \mathbf{F}_2$$

$$\nabla(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1 \times (\nabla \times \mathbf{F}_2) + \mathbf{F}_2 \times (\nabla \times \mathbf{F}_1)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_2$$

$$\nabla \times (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 - (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\nabla \cdot \mathbf{F}_2)\mathbf{F}_1 - (\nabla \cdot \mathbf{F}_1)\mathbf{F}_2$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$$

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \times \mathbf{F} = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{F} - \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F})$$

LÍMITES

Leyes generales

Si L, M, c y k son números reales y

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c} g(x) = M, \text{ entonces,}$$

Regla de la suma: $\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = L + M$

Regla de la resta: $\lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = L - M$

Regla del producto: $\lim_{x\to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

Regla del múltiplo constante: $\lim_{x\to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

Regla del cociente: $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$

Teorema del sándwich

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ en un intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en $x = c$, y si

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L,$$

entonces, $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

Desigualdades

Si $f(x) \leq g(x)$ en un intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en $x = c$, y ambos límites existen, entonces,

$$\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x).$$

Continuidad

Si g es continua en L y $\lim_{x\to c} f(x) = L$, entonces,

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(L).$$

Fórmulas específicas

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, entonces,

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(c) \neq 0$, entonces,

$$\lim_{x\to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Si $f(x)$ es continua en $x = c$, entonces,

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Regla de L'Hôpital

Si $f(a) = g(a) = 0$, tanto f' como g' existen en un intervalo abierto I que contiene a, y $g'(x) \neq 0$ en I si $x \neq a$, entonces,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

suponiendo que existe el límite en el lado derecho.

REGLAS DE DIFERENCIACIÓN

Fórmulas generales

Suponga que u y v son funciones diferenciables de x.

Constante: $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$

Suma: $\dfrac{d}{dx}(u + v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

Resta: $\dfrac{d}{dx}(u - v) = \dfrac{du}{dx} - \dfrac{dv}{dx}$

Múltiplo constante: $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$

Producto: $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

Cociente: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

Potencia: $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

Regla de la cadena: $\dfrac{d}{dx}(f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

Funciones exponenciales y logarítmicas

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \qquad \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

Funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1 + x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

Funciones hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

Funciones hiperbólicas inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{1 + x^2}}$$

Ecuaciones paramétricas

Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$ son diferenciables, entonces,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}.$$

REGLAS DE INTEGRACIÓN

Fórmulas generales

Cero: $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Orden de integración: $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Múltiplos constantes: $$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{(Cualquier número } k\text{)}$$

$$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad (k = -1)$$

Sumas y restas: $$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

Aditividad: $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Desigualdad máx-mín: Si máx f y mín f son los valores máximo y mínimo de f en $[a, b]$, entonces,

$$\text{mín } f \cdot (b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \text{ máx } f \cdot (b - a).$$

Dominación: $f(x) \ge g(x)$ en $[a, b]$ implica $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

$f(x) \ge 0$ en $[a, b]$ implica $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

Teorema fundamental del cálculo

Parte 1 Si f es continua en $[a, b]$, entonces, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) y su derivada es $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Parte 2 Si f es continua en todos los puntos de $[a, b]$, y F es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Sustitución en integrales definidas

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Integración por partes

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Esta nueva edición del prestigiado libro de Thomas ofrece una introducción moderna al cálculo enfocada en la comprensión integral de los elementos fundamentales de un curso tradicional, que puede ser adaptado a cualquier plan de estudios.

Los temas se desarrollan mediante explicaciones precisas y aplicaciones adaptadas al mundo dinámico y en constante evolución. Esto estimula al alumno a pensar e ir más allá de la simple memorización de fórmulas y procedimientos.

Entre lo nuevo de esta edición, que combina el pensamiento conceptual con la lógica y la estructura general del cálculo de una y varias variables, se encuentra lo siguiente.

- Gran cantidad de ejemplos y ejercicios que ayudan a una comprensión plena del cálculo en todos los niveles.
- Suficiente material de repaso con soluciones detalladas.
- Ejemplos adicionales al final de los capítulos, con énfasis en los problemas de nivel medio.
- Una sección nueva sobre probabilidad, con aplicaciones en el ámbito de las ciencias biológicas.
- Recursos adicionales al aprendizaje del cálculo que incluyen aplicaciones con el uso de tecnología.

Como complemento a este libro se recomienda el uso de MyMathLab en Español®, una plataforma que contiene ejercicios de práctica asociados al texto, así como la versión etext del libro y un sinúmero de herramientas muy útiles tanto para el profesor como para el estudiante.

Para más información sobre este libro y los recursos adicionales visite:

www.pearsonenespañol.com/thomas

ISBN 978-607-32-3331-6
90000
9 786073 233316

Visítenos en:
www.pearsonenespañol.com